Approximation d'une intégrale par une série

Martin Bacques

25 avril 2021

Contents

Introduction

Nous allons voir ici un résultat que j'ai moi-même découvert cependant je doute du fait qu'il n'est jamais été formulé ou bien il doit ne pas être valide étant donné son importance. Ce résultat a pour but d'approximer la valeur d'une intégrale d'une f avec des bornes a et b avec une série qui utilise ses dérivées successives. Même si dans la notation il ressemble fortement à la formule d'intégration d'Euler-Maclaurin elle n'est cependant pas pareils et à mon humble avis semble plus facile pour le calcul d'intégrale. Elle est aussi différente que la formule pour l'intégration par partie successives puisque qu'il suffit que nous intégrons une seule fonction. J'espère aussi pouvoir généraliser ce résultat à des intégrales de dimensions plus grandes mais mes connaissances dans ce sujet sont très faibles et une généralisation nécessiterai une connaissance approfondie de ce sujet.

La démonstration de ce résultat n'est pas bien compliqué mais elle nécessite la connaissance de différentes techniques d'intégration, de plus elle utilise un résultat déjà trouvé dans un exposé sur la méthode de Monte-Carlo pour intégrer une fonction mais nous verrons sa démonstration en détails. Différents résultats déjà connus pourront être démontrés grâce aux différentes formules, notamment par rapport aux développements limités. En espérant que ce résultat ne soit pas erroné nous allons tout de suite passer à son exposé.

1 Formule de passage d'une intégrale à une série

Dans cette seule et unique section nous allons montré comment faire pour approcher une intégrale à partir d'une série. La démonstration de la formule utilise deux points essentiels, tout d'abord un changement de variables utiles pour réduire les bornes de l'intégrale, ce changement de variables nous permettra ensuite d'appliquer des intégrations par parties successives qui pourront permettre d'approcher l'intégrale d'une fonction $f(x)$ aux bornes respectives a et b.

Nous allons donc essayé de démontrer la formule suivante pour une fonction $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^n$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (b-a)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

et pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (b-a)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!} + (-1)^n \times \frac{(b-a)^n}{(n+1)!} \times \int_0^1 f^{(n+1)}((b-a)\times x+a)\times x^{n+1}\mathrm{d}x,$$

pour $\forall n \in \mathbb{N}$

1.1 Réduction des bornes de l'intégrale par changement de variable

On a déjà pu voir un résultat intéressant qui peut-être déduit d'un changement de variables lors d'une intégration d'une fonction quelconques noté $f(x)$. En effet on a pu montré que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \times \int_0^1 f((b-a)\times x + a)\mathrm{d}x,$$

et voici la démonstration qui n'est rien de plus que l'application de la formule suivante:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} f(\theta^{-1}(t))(\theta^{-1})'(t)\mathrm{d}t,$$

où on peut montrer que avec $\theta(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. et donc $\theta^{-1}(x) = (\beta-\alpha)x+\alpha$ et $(\theta^{-1})' = \beta-\alpha$. En remplaçant ces valeurs dans la formule de changement de variables on a bien le résultat déjà écrit.

1.2 Intégrations par parties successives

On peut voir maintenant essayer de faire une première intégration par parties, où on on rappelle la formule qui est:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

dans notre formule si on a $v(x) = f((b-a)\times x+a)$ et $u'(x) = 1$, on obtient:

$$(b-a)\times\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times([f((b-a)\times x+a)\times x]_0^1 - \int_0^1 (b-a)\times f'((b-a)\times x+a)\times x\mathrm{d}x)$$

$$\Longleftrightarrow (b-a)\times\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times([(f(b-a+a)\times 1)-(f(a)\times 0)]-(b-a)\times\int_0^1 f'((b-a)\times x+a)\times x\mathrm{d}x)$$

$$\Longleftrightarrow (b-a)\times\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times((f(b))-(b-a)\times\int_0^1 f'((b-a)\times x+a)\times x\mathrm{d}x)$$

$$\Longleftrightarrow (b-a)\times\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times f(b)-(b-a)^2\times\int_0^1 f'((b-a)\times x+a)\times x\mathrm{d}x),$$

on a donc en fait:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times f(b)-(b-a)^2\times\int_0^1 f'((b-a)\times x+a)\times x\mathrm{d}x),$$

cette première formule est déjà assez intéressante car on peut d'un coté calculer une partie de l'intégrale et de l'autre côté calculer une nouvelle intégrale, qui on peut le voir est à nouvelle intégrable par partie tant que la fonction $f(x)$ pourra être dérivable bien sûr. On peut voir que le cas qu'on vient de voir est l'application de la deuxième formule donné au début pour $n = 1$ et que par récurrence on pourra démontrer tous les autres cas.

• Démonstration:

On pose la propriété $P(n)$:

$$"\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^k(b)}{k+1}+(-1)^n\times(b-a)^{n+1}\times\int_0^1 f^{(n)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x"$$

• Initialisation:

Pour $n=0$ on a bien la première formule qui est déjà démontré puisque la somme lorsque $n=0$ vaut 0 et droite de cette somme on a bien la première formule.

• Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang h (pour éviter les problèmes d'indexiation avec la variable muette k), montrons que la propriété est vraie au rang $h+1$:

D'après l'hypothèse de récurrence on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{h-1}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(b)}{k+1}+(-1)^h\times(b-a)^{h+1}\times\int_0^1 f^{(h)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^h}{h!}\mathrm{d}x,$$

on va s'intéresser d'abord à la partie de droite qui comporte l'intégrale, en fait nous allons juste faire une nouvelle intégration par partie, on a :

$$(-1)^h\times(b-a)^{h+1}\times\int_0^1 f^{(h)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^h}{h!}\mathrm{d}x,$$

$$=[(-1)^h\times(b-a)^{h+1}]\times([\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\times f^{(h)}((b-a)\times x+a]_0^1-\int_0^1 f^{(h+1)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\mathrm{d}x)$$

$$=[(-1)^h\times(b-a)^{h+1}]\times([\frac{1^{h+1}}{(h+1)!}\times f^{(h)}((b-a)\times 1+a-\frac{0^{h+1}}{(h+1)!}\times f^h((b-a)\times 0+a)]$$

$$-(b-a)\times\int_0^1 f^{(h+1)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\mathrm{d}x)$$

$$=[(-1)^h\times(b-a)^{h+1}]\times(\frac{f^{(h)}(b)}{(h+1)!}-(b-a)\times\int_0^1 f^{(h+1)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\mathrm{d}x)$$

$$=(-1)^h\times(b-a)^{h+1}\times\frac{f^{(h)}(b)}{(h+1)!}+(-1)^{h+1}\times(b-a)^{h+2}\times\int_0^1 f^{(h+1)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\mathrm{d}x,$$

en ajoutant la somme qu'on a précédemment enlevé, on a bien:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{h}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(b)}{k+1}$$

$$+(-1)^{h+1}\times(b-a)^{h+2}\times\int_0^1 f^{(h+1)}((b-a)\times x+a)\times\frac{x^{h+1}}{(h+1)!}\mathrm{d}x,$$

on a donc bien $P(h+1)$ qui est vraie.

• Conclusion:

On a $P(0)$ qui est vraie et on a aussi prouvé l'hérédité, donc la propriété est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

Plus particulièrement si $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on a bien:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!},$$

et si $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on a bien:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!}+(-1)^n\times\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}\times\int_0^1 f^{(n+1)}((b-a)\times x+a)\times x^{n+1}\mathrm{d}x,$$

ce sont bien les deux formules présentées au début.

Si on veut seulement approximer la valeur d'une intégrale on peut alors utiliser la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la première formule car on peut voir que grâce à la division par $n!$ la convergence se fait assez rapidement, à partir du 20^{eme} terme l'approximation commence à être bonne. On a donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(b)}{(k+1)!},$$

on verra plus tard que cette formule appartient à une famille plus large de formule pour approcher une intégrale et qu'elle n'est pas la plus simple à utiliser.

1.3 Applications à l'intégration de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

On peut facilement imaginer que l'application à des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ peut-être très utile, par exemple pour des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}$. On pourrait toujours les dériver un nombre fini de fois, ce nombre étant le degré du polynôme.

Un premier exemple:

On prend par exemple la fonction $f(x) = x^3+5x^2-4x+2$, c'est une fonction polynomiale de degré 3, elle est donc dérivable 3 fois. On a en fait:

$$f'(x) = 3x^2+10x-4, f^{(2)} = 6x+10, f^{(3)} = 6$$

, si par exemple on veut calculer l'intégrale de $f(x)$ avec les bornes $a=-1$ et $b=3$, on a:

$$\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\times(3-(-1))^{k+1}\times\frac{f^k(3)}{(k+1)!}$$

$$= 4^1\times f(3) - \frac{4^2\times f'(3)}{2!} + \frac{4^3\times f^2(3)}{3!} - \frac{4^4\times f^3(3)}{4!},$$

on a $f(3) = 62, f'(3) = 53, f^2(3) = 28, f^3(3) = 6$, donc le résultat est:

$$4\times 62 - \frac{16\times 53}{2} + \frac{64\times 28}{6} - \frac{256\times 6}{24} = \frac{176}{3},$$

ce qui donne le bon résultat, le lecteur peut le vérifier.

Dans un deuxième temps les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ nous pose un autre problème, puisque comme nous l'avons déjà signalé on ne peut qu'obtenir une approximation de leurs intégrales. On va voir que cette approximation peut devenir extrêmement précise lorsqu'on pose n assez grand.

On prend l'exemple de la fonction $f(x) = e^x$, ce qui nous facilitera la tâche puisque ses dérivées successives sont toutes égales. Si on va par exemple calculer l'intégrale de e^x aux bornes $a = 2$ et $b = 5$, on a:

$$\int_2^5 e^x \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (5-2)^{k+1} \times \frac{e^5}{(k+1)!}$$

$$= e^5 \times 3 - \frac{e^5}{2!} \times 3^2 + \frac{e^5}{3!} \times 3^3 - \frac{e^5}{4!} \times 3^4 + ... + (-1)^n \times \frac{e^5}{n!} \times 3^n,$$

si on s'arrête à par exemple à $n = 7$, on voit que notre somme est environ égal 134.8638... ce qui est en vérité assez loin du résultat cherché mais si on prend $n = 12$, ce qui ne rajoute pas un coût énorme de calcul, notre somme vaut 141.03087... ce qui est proche à environ 0.006 de la valeur cherchée qui est d'environ 141.024103... ou $e^5 - e^2$. On peut déjà voir que l'on peut presque avoir les formules de développement limités pour les fonctions usuels comme e^x. Nous verrons cette propriété à la fin de notre exposé.

2 Généralisation de la transformation des bornes d'une intégrale

Nous allons maintenant nous intéresser à la généralisation du cas particulier que nous avons vu dans la partie 1, il permettra de changer pour n'importe quel valeur les bornes de l'intégrale. Une application de cette transformation sera faite dans une troisième partie, elle nous permettra de généraliser la formule obtenue dans la première partie.

On cherche d'abord une fonction $\theta(x)$ de la forme $\theta(x) = ax + b$ où $a \neq 0$ et $\theta(x_1) = \alpha$ et $\theta(x_2) = \beta$. On a donc le système suivant:

$$\begin{cases} ax_1 + b &= \alpha \\ ax_2 + b &= \beta \end{cases} \Longleftrightarrow -ax_1 - b + ax_2 + b = \beta - \alpha$$

$$\Longleftrightarrow a(x_2) - x_1) = \beta - \alpha$$

$$\Longleftrightarrow a = \frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_1},$$

on a donc trouvé la valeur du coefficient a, on a donc $\theta(x_1) = (\frac{\beta-\alpha}{x_2-x_1})x_1 + b$ et $\theta(x_2) = (\frac{\beta-\alpha}{x_2-x_1})x_2 + b$. On peut maintenant rechercher la valeur de b. En partant de la valeur que $\theta(x_1)$ doit prendre soit θ. On a donc:

$$\theta(x_1) = \alpha \Longleftrightarrow (\frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_1})x_1 + b = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow (\frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_1})x_1 + \frac{b(x_{x2} - x_1)}{x_{x2} - x_1} = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(\beta - \alpha) \times x_1 + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow (\beta - \alpha) \times x_1 + b(x_2 - x_1) = \alpha \times (x_2 - x_1)$$

$$\iff b(x_2 - x_1) = \alpha \times (x_2 - x_1) - (\beta - \alpha) \times x_1$$
$$\iff b = \frac{\alpha \times (x_2 - x_1) - (\beta - \alpha) \times x_1}{(x_2 - x_1)},$$

on peut voir que maintenant la fonction peut s'écrire comme ça: $\theta(x) = (\frac{\beta-\alpha}{x_2-x_1})x + \frac{\alpha\times(x_2-x_1)-(\beta-\alpha)\times x_1}{(x_2-x_1)}$ et elle vérifie bien à la fois les propriétés de $\theta(x_1)$ et $\theta(x_2)$, le lecteur pourra le vérifier. Une autre écriture peut-être plus facile à retenir:

$$\theta(x) = (\frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_1})x + \frac{\alpha \times (x_2 - x_1) - (\beta - \alpha) \times x_1}{(x_2 - x_1)}$$
$$\iff \theta(x) = \frac{(\beta - \alpha) \times x + \alpha \times (x_2 - x_1) - (\beta - \alpha) \times x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\iff \theta(x) = \frac{(\beta - \alpha) \times (x - x_1)}{x_2 - x_1} + \alpha,$$

on peut clairement voir ici que la fonction $\theta(x)$ respecte bien les conditions données.

On cherche maintenant à trouver la fonction réciproque $\theta^{-1}(x)$, pour cela on résout l'équation:

$$\theta^{-1}(\theta(x)) = \theta(\theta^{-1}(x)) = x,$$

pour ça on pose l'inconnue y qui est la fonction cherchée. Et on a:

$$\theta(y(x)) = x \iff \frac{(\beta - \alpha) \times (y(x) - x_1)}{x_2 - x_1} + \alpha = x$$
$$\iff \frac{(\beta - \alpha) \times (y(x) - x_1)}{x_2 - x_1} + = x - \alpha$$
$$\iff (\beta - \alpha) \times (y(x) - x_1) = (x - \alpha)(x_2 - x_1)$$
$$\iff y(x) - x_1 = \frac{(x - \alpha)(x_2 - x_1)}{\beta - \alpha}$$
$$\iff y(x) = \frac{(x - \alpha)(x_2 - x_1)}{\beta - \alpha} + x_1,$$

on a donc $\theta^{-1}(x) = \frac{(x-\alpha)(x_2-x_1)}{\beta-\alpha} + x_1$, qui peut être écrit comme une fonction affine:

$$\theta^{-1}(x) = (\frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}) \times x - \alpha \times (\frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}) + x_1,$$

on peut maintenant chercher la dérivée de cette fonction réciproque, or on sait que c'est une fonction affine, la dérivée est le coefficient a soit ici:

$$(\theta^{-1}(x))' = \frac{(x_2 - x_1)}{(\beta - \alpha)},$$

on peut maintenant avoir une formule générale pour changer les bornes de l'intégrale que l'on veut, en effet on a bien d'après la formule de changement de variables:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} f(\theta^{-1}(t))(\theta^{-1})'(t)\mathrm{d}t,$$

or on vient de calculer les différentes nécessaires à l'application de cette formule, dans notre formule on a$\alpha = x_1$ et $\beta = x_2$, et donc on peut changer les bornes de l'intégrale pour qu'elles prennent les valeurs que l'on veut que l'on a noté respectivement α et β. Par la suite on notera a et b les bornes de l'intégrale. On a donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(\theta^{-1}(t))(\theta^{-1})'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f((\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times x - \alpha \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) + a) \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})\mathrm{d}x,$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times \int_\alpha^\beta f((\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times x - \alpha \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) + a)\mathrm{d}x,$$

la première égalité se déduit de la formule pour le changement de variable, la deuxième est l'application de la formule avec les formules que nous avons trouvé. Si on pose $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ alors on a bien:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \times \int_0^1 f((b-a) \times x + a)\mathrm{d}x,$$

et dans le cas où $\beta = b$ et $\alpha = a$, on retrouve la bien l'intégrale de $f(x)$ aux bornes a et b.

On peut imaginer que d'autres fonctions $\theta(x)$ peuvent être trouvés pour permettre ce changement de variables cependant cette étude serait trop longue et les résultats déjà trouvés seront suffisants pour la suite de l'exposé.

On peut déjà voir que l'on va en fait pouvoir appliquer des intégrations par partie successives à cette nouvelle formule qui vont nous permettre de généraliser la formule trouver dans la partie 1. C'est l'objet de la partie suivante.

3 Formule général de passage d'une intégrale à une série

Grâce à la formule que nous avons trouvé dans la partie précédente on peut s'intéresser à l'intégration par partie successives appliquer à cette formule. On a en effet:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times \int_\alpha^\beta f((\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times x - \alpha \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) + a)\mathrm{d}x,$$

et on peut déjà appliquer une première intégration par partie, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\frac{b-a}{\beta-\alpha} \times ([x \times f(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)} + a)]_\alpha^\beta - \frac{(b-a)}{(\beta-\alpha)} \times \int_\alpha^\beta f'(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)} + a) \times x\mathrm{d}x$$

$$= (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times ([\beta \times f(b-a+a) - \alpha \times f(a)] - \frac{(b-a)}{(\beta-\alpha)} \times \int_\alpha^\beta f'(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)} + a) \times x\mathrm{d}x)$$

$$= (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times (\beta \times f(b) - \alpha \times f(a)) - (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^2 \times \int_\alpha^\beta f'(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)} + a) \times x\mathrm{d}x,$$

on peut déjà voir qu'une formule peut se dégager, il nous reste à la montrer.

On peut d'abord conjecturer une formule puis on passera à la démonstration. On peut voir que si on répète l'opération un nouveau terme va s'ajouter mais il sera de signe inverse de celui d'avant. On émet une conjecture:

• Conjecture:

Si $f(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ou si $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on a pour un n donné:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1} \times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^n \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{n+1} \times \frac{1}{n!} \times \int_\alpha^\beta f^{(n)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)} + a) \times x^n\mathrm{d}x.$$

• Démonstration:

On va démontrer ce résultat par récurrence, en fait la démonstration va être similaire à celle de la partie 1 mis à part l'ajout de quelques termes cette démonstration reste simple.

On pose $P(n)$ la conjecture que l'on a émise au dessus.

• Initialisation:
Pour $n=0$ on a la formule qu'on a demontré dans la partie 2 c'est à dire:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times \int_\alpha^\beta f(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a)\mathrm{d}x,$$

$P(0)$ est donc vraie.

• Hérédité: On suppose que la propriété est vraie au rang h (pour éviter les confusions avec la variable muette k), montrons qu'elle est vraie au rang $h+1$. On a donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{h-1}(-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1}\times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1}\times f^{(k)}(a))}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{1}{h!} \times \int_\alpha^\beta f^{(h)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times x^h \mathrm{d}x.$$

On va s'intéresser d'abord à la deuxième partie de la somme en appliquant une intégration par partie, on a donc:

$$(-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{1}{h!} \times \int_\alpha^\beta f^{(h)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times x^h \mathrm{d}x$$

$$= ((-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{1}{h!}) \times ([\frac{x^{h+1}}{(h+1)} \times f^{(h)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a)]_\alpha^\beta$$

$$-\int_\alpha^\beta f^{(h+1)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times \frac{x^{h+1}}{(h+1)} \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})\mathrm{d}x)$$

$$= ((-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{1}{h!}) \times ([\frac{\beta^{h+1}}{(h+1)} \times f^{(h)}(b) - \frac{\alpha^{h+1}}{(h+1)} \times f^{(h)}(a)]$$

$$-\int_\alpha^\beta f^{(h+1)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times \frac{x^{h+1}}{(h+1)} \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})\mathrm{d}x)$$

$$= ((-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{1}{h!}) \times ([\frac{\beta^{h+1}\times f^{(h)}(b) - \alpha^{h+1}\times f^{(h)}(a)}{(h+1)}]$$

$$-(\frac{b-a}{\beta-\alpha}) \times \int_\alpha^\beta f^{(h+1)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times \frac{x^{h+1}}{(h+1)}\mathrm{d}x)$$

$$= (-1)^h \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+1} \times \frac{\beta^{h+1}\times f^{(h)}(b) - \alpha^{h+1}\times f^{(h)}(a)}{(h+1)!}$$

$$+(-1)^{h+1} \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+2} \times \int_\alpha^\beta f^{(h+1)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times \frac{x^{h+1}}{(h+1)}\mathrm{d}x),$$

en ajoutant la somme de gauche à ce qu'on vient d'obtenir on a bien:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{h}(-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1}\times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1}\times f^{(k)}(a))}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^{h+1} \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{h+2} \times \frac{1}{(h+1)!} \times \int_\alpha^\beta f^{(h+1)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times x^{h+1}\mathrm{d}x,$$

on vient donc bien de montrer que $P(h+1)$ est vraie.

• Conclusion:

On a la propriété qui est vraie au rang $P(0)$ et on a aussi prouvé l'hérédité, donc la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1} \times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!}$$

et si $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a aussi:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1} \times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^n \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{n+1} \times \frac{1}{n!} \times \int_\alpha^\beta f^{(n)}(\frac{(x-\alpha)(b-a)}{(\beta-\alpha)}+a) \times x^n\mathrm{d}x,$$

on peut voir que comme pour la deuxième formule dans la partie 1 lorsque n est de plus en plus grand on s'approche de plus en plus de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, cela est dû au fait que $(n+1)!$ croît extrêmement rapidement, on a donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (\frac{b-a}{\beta-\alpha})^{k+1} \times \frac{(\beta^{k+1} \times f^{(k)}(b) - \alpha^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!},$$

on peut en fait voir que la formule de la partie 1 est un cas particulier de cette nouvelle formule, en effet lorsqu'on pose $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ alors on a bien la formule obtenue dans la partie 1.

On peut aussi poser $\beta = b$ et $\alpha = a$, dans ce cas on obtient une formule qui peut s'obtenir juste en faisant des intégrations par partie successives, la formule est la suivante:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times \frac{(b^{k+1} \times f^{(k)}(b) - a^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!},$$

Un autre particulier intéressant et qui nous sera utile dans la section suivante est lorsque $\alpha = -1$ et $\beta = 0$. En effet on a alors dans ce cas:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (\frac{b-a}{(0-(-1))})^{k+1} \times \frac{(0^{k+1} \times f^{(k)}(b) - (-1)^{k+1} \times f^{(k)}(a))}{(k+1)!},$$

qui vaut donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (b-a)^{k+1} \times \frac{(-1)^{k+2} \times f^{(k)}(a)}{(k+1)!}$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k+2}\times(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!}$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(b-a)^{k+1}\times\frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!},$$

cette formule ressemble fortement à celle de la partie 1 mais ce n'est pas une série alternée, ce qui facilite le calcul en tout cas manuel. Je pense que de nombreux cas particuliers peuvent être déduits de ces formules, une esquisse sera faite dans la section suivante, notamment pour le développement limité de fonctions usuelles.

4 Cas particuliers de passage d'une intégrale à une série

Nous allons nous intéressé ici à quelques cas particuliers des formules déjà obtenus, ces calculs permettent une meilleure approximation de certaines intégrales ou de certaines fonctions usuelles.

4.1 Développements limités

Une première application des formules que l'on vient d'obtenir est le développement limité de certaines fonctions usuelles. On démontrera ici seulement certains exemples mais on peut imaginer qu'il y a d'autres exemples.

Premier exemple: la fonction exponentielle:

On pose d'abord:

$$\int_0^x e^x\mathrm{d}x,$$

ce qui vaut:

$$\int_0^x e^x\mathrm{d}x = e^x - 1,$$

et on a bien finalement:

$$e^x = 1 + \int_0^x e^x\mathrm{d}x,$$

or on connaît la formule pour l'intégration de la fonction exponentielle en série, on utilisera celle au point a qui est ici 0:

$$e^x = 1 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(x-0)^{k+1}\times\frac{e^0}{(k+1)!}$$

$$\iff e^x = 1 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(x)^{k+1}\times\frac{1}{(k+1)!}$$

$$\iff e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

on peut donc voir que ce résultat est bien le développement limité de la fonction exponentielle qui est déjà connu.

Deuxième exemple: la fonction logarithme:

On pose d'abord:

$$\int_1^x \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

ce qui vaut:

$$\int_1^x \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x),$$

or on peut connaître l'intégrale de la fonction inverse grâce à notre formule. On utilisera la formule au point $b = x$ et on a bien:

$$\ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (x-1)^{k+1} \times \frac{(\frac{1}{x})^{(k)}(x)}{(k+1)!},$$

or les dérivées successives de la fonction inverse sont égales à:

$$(\frac{1}{x})^{(k)} = (-1)^k \times (k!) \times x^{-k-1},$$

donc on a finalement:

$$\ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (x-1)^{k+1} \times \frac{((-1)^k \times (k!) \times x^{-k-1})}{(k+1)!}$$

$$\iff \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (x-1)^{k+1} \times \frac{x^{-k-1}}{(k+1)}$$

$$\iff \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (\frac{x-1}{x})^{k+1} \times \frac{1}{(k+1)}$$

$$\iff \ln(x) = \frac{x-1}{x} + (\frac{x-1}{x})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{x-1}{x})^3 \times \frac{1}{3} + (\frac{x-1}{x})^4 \times \frac{1}{4} + ... + (\frac{x-1}{x})^n \times \frac{1}{n},$$

on peut remarquer que cette formule marche seulement pour les valeurs de x supérieur à 1 et positif. En effet le facteur $\frac{x-1}{x}$ est inférieur à 0 pour $x \in [1, +\infty[$ mais pour $x \in]0, 1[$ il est négatif et inférieur à -1, or on sait que la somme va donc diverger et on ne pourra pas calculer la valeur de 0.3 par exemple. Pour avoir les valeurs entre $]0, 1[$ on doit donc utiliser la formule au point a. On obtient en fait la formule suivante:

$$\ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (x-1)^{k+1} \times (-1)^k \times \frac{1}{(k+1)}$$

$$\iff \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ... + (-1)^n \times \frac{(x-1)^n}{n},$$

on peut voir que pour les valeurs entre 0 et 1 la somme converge et que pour les valeurs appartenant à $[1, +\infty[$ la somme diverge. Je ne pourrais pas expliquer le fait qu'il existe deux formules pour calculer les différentes valeurs de la fonction logarithme mais cela vient peut-être que l'on pose l'intégrale de la fonction inverse aux bornes 1 et x, si on prenait pour borne inférieur une valeur inférieur à 1 peut-être que l'on aurait une seule formule.

De nombreuses autres développements limités peuvent être trouvés comme ça, nous verrons à la sous-section suivante ceux des fonctions trigonométriques.

Une dernière remarque sera sur l'intégrale de la fonction inverse aux bornes 0 et 1, on peut remarquer que si on utilise la formule au point $b = 1$ et en connaissant les dérivées de la fonction inverse, on a:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (1-0)^{k+1} \times \frac{(-1)^k \times (k!) \times (1)^{-k-1}}{(k+1)!}$$

$$\iff \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$\iff \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + +\frac{1}{4} + +\frac{1}{5} + ... + +\frac{1}{n},$$

c'est la série harmonique, or on sait que cette série diverge vers $+\infty$ ou bien on sait que l'intégrale de la fonction inverse aux bornes 0 et 1 diverge vers $+\infty$ et on sait que la série harmonique diverge vers $+\infty$.Le même résultat peut-être obtenu aux bornes -1 et 0 mais nous le verrons dans la 2^{eme} et 3^{eme} sous-section de cette section car la fonction inverse est une fonction impaire et possèdent des dérivées périodiques.

Si on veut connaître la valeur de $\ln(0)$ alors on applique la formule obtenue plus haut au point $a = 0$ et on a:

$$\ln(0) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(0-1)^{k+1} \times (-1)^k \times \frac{1}{(k+1)}$$

$$\iff \ln(0) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{2k+1}}{(k+1)}$$

$$\iff \ln(0) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{n},$$

on peut donc voir que la fonction logarithme en 0 diverge vers $-\infty$.

4.2 Applications aux fonctions à dérivées périodiques

Cette sous-section va traiter des fonctions aux dérivées successives périodiques même si leurs appellations n'est peut-être pas la bonne, nous dirons que ce sont des fonctions aux dérivées k-périodiques c'est à dire que:

$$f^{(n)}(x) = f^{(a)}(x), n \equiv a[k], \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction exponentielle est la fonction de base de ce type de fonction puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $(e^x)^{(n)} = e^x$. Le lecteur pourra démontrer que mis à part la fonction exponentielle on a pour $n = 4$, la fonction $sin(x)$ et $cos(x)$ qui vérifie cette propriété. En fait on a aussi la fonction $sinh(x)$ et $cosh(x)$ qui sont respectivement les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique et qui vérifient la propriété pour $n = 4$ puisqu'elles vérifient la propriété pour $n = 2$. On peut voir que en fait pour tout n multiple de k alors les fonctions qui vérifient la propriété pour k la vérifient aussi pour n. Une étude plus poussée de ce type d fonctions pourrait être intéressante notamment pour les équations différentielles mais ce n'est pas l'objet de cet exposé. Nous allons ici nous intéresser à leurs intégrales. En fait on peut voir que si leurs dérivées suivent un cycle de durée k alors on peut simplifier le calcul de leurs intégrales. En effet grâce à la formule:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (b-a)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!},$$

on peut simplifier les calculs puisque le calcul de la k^{ieme} dérivée est la même que celle de la $(n \times k)^{ieme}$ dérivée, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Une formule qui ne paraît pas plus simple mais qui nous les verrons est en réalité plus simple est donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{x=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} (b-a)^{(kx+i+1)} \times \frac{f^{(i)}(a)}{(kx+i+1)!},$$

d'autres formules similaires peuvent être obtenus à partir des autres formules, nous allons voir un exemple pour le développement limité de la fonction $cos(x)$, on pose:

$$\int_0^x sin(x)\mathrm{d}x = [-cos(x)]_0^x = -cos(x) + 1,$$

donc on a:

$$cos(x) = 1 - \int_0^x sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff cos(x) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \sum_{x=0}^{n} \sum_{i=0}^{4-1} (x-0)^{4x+i+1} \times \frac{sin^{(i)}(0)}{(4x+i+1)!}$$

$$\iff cos(x) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \sum_{x=0}^{n} x^{4x+1} \times \frac{sin(0)}{(4x+1)!} + x^{4x+2} \times \frac{cos(0)}{(4x+2)!} + x^{4x+3} \times \frac{-sin(0)}{(4x+3)!} + x^{4(x+1)} \times \frac{-cos(0)}{(4(x+1))!}$$

$$\iff cos(x) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \sum_{x=0}^{n} x^{4x+2} \times \frac{1}{(4x+2)!} - x^{4(x+1)} \times \frac{1}{(4(x+1))!}$$

$$\iff cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ... + (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

c'est une formule de développement limité bien connue mais on peut penser que l'application de ces formules peut être bien plus importantes notamment si on connaît d'autres fonctions qui ont des dérivées successives périodiques. Par le même raisonnement on peut connaître le développement limité de la fonction $sin(x)$ ainsi que de $cosh(x)$ et de $sinh(x)$, ces fonctions sont aussi des fonctions paire et impaires, nous allons nous y intéresser dans la sous-section suivante.

4.3 Applications aux fonctions paires et impaires

On peut s'intéresser aux fonctions paires et impaires car elles leurs dérivées possèdent des propriétés particulières. En effet on peut facilement démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire, nous ne ferons pas ces démonstrations ici elles peuvent facilement être trouvés sur internet. On peut en fait généraliser ce résultat de la manière suivante: la dérivée paire d'une fonction paire est une fonction paire et la dérivée impaire d'une fonction paire est une fonction impaire, ou écrit plus simplement: $f^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(-x)$ et $f^{(2n+1)}(x) = -f^{(2n+1)}(x)$, si $f(x)$ est une fonction paire. Pour une fonction impaire on peut dire: la dérivée paire d'une fonction impaire est une fonction impaire et la dérivée impaire d'une fonction impaire est une fonction paire, ou écrit plus simplement: $f^{(2n)}(x) = -f^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+1)}(-x)$. On peut donc voir ces propriétés peuvent être utiles pour les formules que l'on a déjà obtenu puisque ces formules utilisent les dérivées successives qui sont ici facilement calculables, on sait qu'on a la formule suivante:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times \frac{(b^{k+1}\times f^{(k)}(b) - a^{k+1}\times f^{(k)}(a))}{(k+1)!},$$

en posant $a = -b$, on va s'intéresser d'abord au cas où $f(x)$ est une fonction impaire puis on passera aux fonctions paires. En s'intéressant au numérateur et à sa dérivée paire, on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b) - a^{2k+1}\times f^{(2k)}(a)\\ &= b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b) - (-b)^{2k+1}\times f^{(2k)}(-b),\end{aligned}$$

or on a vu ci-dessus les propriétés des dérivées paires des fonctions impaires, on a donc:

$$\begin{aligned}&b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b) - (-1)^{2k+1}\times(b)^{2k+1}\times(-f^{(2k)}(b))\\ &= b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b) + b^{2k+1}\times(-f^{(2k)}(b))\\ &= b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b) - b^{2k+1}\times f^{(2k)}(b)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Passons aux dérivées impaires des fonctions impaires, on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&b^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(b) - a^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(a)\\ &= b^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(b) - (-b)^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(-b),\end{aligned}$$

or on a vu ci-dessus les propriétés des dérivées impaires des fonctions impaires, on a donc:

$$\begin{aligned}&b^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(b) - b^{2(k+1)}\times f^{(2k+1)}(b)\\ &= 0,\end{aligned}$$

on a donc au final la formule suivante où $f(x)$ est une fonction impaire:

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

c'est un résultat bien connu qu'on peut voir graphiquement car si la valeur de la fonction est positive en un point x alors elle est négative au point $-x$ donc la valeur de son intégrale est forcément nulle.

Passons maintenant aux fonctions paires, on utilisera pour ça le même raisonnement, on commence par la dérivée paire de la fonction, on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b) - a^{2k+1} \times f^{(2k)}(a)$$

$$= b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b) - (-b)^{2k+1} \times f^{(2k)}(-b),$$

or on a déjà vu avant les propriétés des dérivées paires d'une fonction paire:

$$b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b) - (-1)^{2k+1} \times b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b)$$

$$= b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b) + b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b)$$
$$= 2 \times \left(b^{2k+1} \times f^{(2k)}(b)\right).$$

Passons aux dérivées impaires des fonctions paires, on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b) - a^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(a)$$

$$= b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b) - (-b)^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(-b),$$

or on a déjà vu avant les propriétés des dérivées impaires d'une fonction paire:

$$b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b) - (-1)^{2(k+1)} \times b^{2(k+1)} \times (-f^{(2k+1)}(b))$$

$$= b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b) - b^{2k+1} \times (-f^{(2k+1)}(b))$$
$$= b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b) + b^{2k+1} \times f^{(2k+1)}(b)$$
$$= 2 \times \left(b^{2(k+1)} \times f^{(2k+1)}(b)\right),$$

on a donc comme formule finale:

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 2 \times \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \frac{b^{k+1} \times f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right),$$

ce qui est équivalent à:

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

où $f(x)$ est une fonction paire.

4.4 Applications aux fonctions polynomiales

On peut démontrer que la k^{eme} dérivée d'un polynôme vaut:

$$P^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k} + k! \times a_k$$

$$\iff P^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \binom{n-i}{k} \times k! \times a_{n-i} \times X^{n-i-k} + k! \times a_k,$$

où les $a_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

En effet on peut démontrer ce résultat par récurrence:

• Démonstration:

On pose la propriété $P(n)$:

$$P^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k} + k! \times a_k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

• Initialisation:

Pour $n = 0$ on a:

$$f^{(0)}(X) = \sum_{i=0}^{n-0-1} \frac{(n-i)!}{(n-i-0)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-0} + 0! \times a_0$$

$$\iff f(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \times X^{n-i} + a_0$$

$$\iff P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \times X^{n-i},$$

ce qui est bien la définition d'une fonction polynomiale de degré n. Donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang k , montrons que la propriété est vraie au rang $h+1$. On a donc:

$$f^{(k+1)}(X) = \left(f^{(k)}(X)\right)'$$

$$\iff f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k} + k! \times a_k\right)',$$

par hypothèse de récurrence, on a donc:

$$f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k}\right)' + (k! \times a_k)'$$

$$\Longleftrightarrow f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k-1} \times (n-i-k) \right)'$$

$$\Longleftrightarrow f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k-1)!} \times \frac{1}{(n-i-k)} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k-1} \times (n-i-k) \right)'$$

$$\Longleftrightarrow f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)-1} \frac{(n-i)!}{(n-i-k-1)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k-1} \right)' + \left(\frac{(n-(n-k-1))!}{(n-(n-k-1)-k)!} \right) \times a_{n-k} \times X^0$$

$$\Longleftrightarrow f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)-1} \frac{(n-i)!}{(n-i-k-1)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k-1} \right)' + (k+1)! \times a_{n-k}$$

$$\Longleftrightarrow f^{(k+1)}(X) = \left(\sum_{i=0}^{n-(k+1)-1} \frac{(n-i)!}{(n-i-(k+1))!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-(k+1)} \right)' + (k+1)! \times a_{n-k},$$

ce qui prouve $P(n+1)$.

• Conclusion:

On a démontré la propriété au rang $n=0$ ainsi que l'hérédité, donc la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} \times a_{n-i} \times X^{n-i-k} + k! \times a_k$$

Après avoir démontré cette propriété on peut donc essayer de trouver une formule pour le calcul de fonction polynomiale à partir de nos formules déjà trouvés. En effet on peut déjà utiliser la relation de Chasles pour les intégrales, soit:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

et en posant $b=0$, on peut déjà voir que l'on va pouvoir ajouter les deux formules puisque $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$, la première avec $b=0$ et la deuxième avec $a=0$. On a donc:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (0-a)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{n} (c-0)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!},$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times (-a)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{n} (c)^{k+1} \times \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!},$$

cette formule peut être intéressante si on a des valeurs particulières pour les dérivées successives en $x=0$ or c'est le cas des fonctions polynomiales. On peut voir que pour la formule des dérivées d'une fonction polynomiale pour $X = 0$ il nous reste juste le terme $k! \times a_k$, ce qui nous donne quand on l'applique dans la formule au-dessus:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (-a)^{k+1} \times \frac{k! \times a_k}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{n}(c)^{k+1} \times \frac{k! \times a_k}{(k+1)!}$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times (-1)^{k+1} \times a^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k+1} \times a^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c^{k+1} \times \frac{a_k}{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \times (c^{k+1} - a^{k+1}),$$

le lecteur pourra lui-même vérifier cette formule avec des exemples.

Un cas particulier intéressant de cette formule est celui des monômes de degré n, soit $f(x) = a_n \times x^n$ dont l'intégrale vaut:

$$\int_a^b a_n \times x^n \mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1} \times (b^{n+1} - a^{n+1}) = \frac{a_n \times b^{n+1}}{n+1} - \frac{a_n \times c^{n+1}}{n+1} = \left[\frac{a_n \times x^n}{n+1}\right]_a^b,$$

c'est bien la valeur de l'intégrale du monôme cherché, or étant donné qu'une fonction polynomiale est simplement la somme de différents monômes, la formule ci-dessus pour les fonctions polynomiales est bien la somme des différentes intégrales des monômes. On peut donc l'écrire:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} a_k \times x^{n-k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b a_k \times x^{n-k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \times (c^{k+1} - a^{k+1})$$