Méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégral

Martin Bacques

16 avril 2021

Contents

Introduction

On peut se demander comment peut-on calculer une intégral de manière numérique en connaissant seulement la fonction à intégrer et ses bornes. Une première approche serait de calculer l'intégral par la technique des "rectangles", ou aussi appelé *somme de Riemann*. Cette dernière consiste à subdiviser l'intervalle [a,b] et à calculer sur beaucoup de points les différentes valeurs de la fonction.

Nous n'utiliserons pas cette dernière technique ici mais plutôt une technique dite "probabiliste" nommée *Méthode de Monte-Carlo*. Avant de décrire la méthode, nous allons présentés de quelle manière a été inventé la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis. Le nom de cette méthode fait allusion aux jeux de hasard pratiqués au casino de Monte-Carlo. Cette méthode désigne plus généralement une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée par des procédés aléatoires. Nous décrirons ici qu'une technique pour calculer des intégrales de dimension 1, mais il est évident que cette méthode puis être généralisé dans des dimensions supérieures. De plus les applications de cette méthode sont nombreux en physique, notamment en physique des particules, où les processus sont aléatoires.

La description de la technique utilise des procédés simples, tels que la méthode de Newton-Raphson qui permet de trouver les points où la fonction s'annule, mais indispensables à la mise en place de l'algorithme. La technique décrite ici a été traduite dans un fichier python qui permet d'appliquer la méthode.

Une connaissance des propriétés de base des intégrales est nécessaire ainsi que la technique de changement de variables est requise pour comprendre les résultats. Les probabilités sont peu utilisés mis à part un résultat qui est au centre de la méthode de Monte-Carlo présenté ici.

Ce texte n'est pas encore fini car quelques problèmes persistent et des changements peuvent encore être faits afin de compléter la méthode présentée. Je ne sais pas si les méthodes qui vont être présentées l'ont déjà été mais pas à ma connaissance même si ils ne sont pas biens compliqués. J'espère que ce texte pourra être complété dans le futur et que les problèmes posés trouveront une réponse.

1 Principe de la méthode de Monte-Carlo

On peut d'abord se demander comment calculer une intégrale de manière numérique. La définition de l'intégrale nous dit qu'elle correspond à la surface entre la courbe d'une fonction f(x) et l'axe des abscisses, et entre les droites d'équation x=a et x=b où a,b $\in \mathbb{R}$.

On peut donc maintenant définir la probabilité que un point soit entre sous la courbe de f(x) comme étant l'aire sous la courbe diviser par l'aire totale (qu'on définira plus précisément après). On peut donc noter: p=$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}}$ où on a $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ est l'aire sous la courbe ou bien l'intégrale de f(x) et $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ est l'aire totale. On peut voir que la définition de l'aire totale est déjà ambigu, en fait elle a pour dimension en largeur $|b-a|$ et en longueur le maximum de f(x) sur [a,b], ce qui pose problème car comment connaître le maximum de f(x) sur cet intervalle? On verra plus tard comment on peut approcher cette valeur ou du moins essayer de trouver un majorant. De plus, cette méthode définit seulement la probabilité pour une fonction qui est strictement positive car on doit soustraire l'aire sous la courbe lorsque la fonction est négative, nous verrons aussi plus tard comment traiter ce problème.

Une fois qu'une valeur plus ou moins précise de p est trouvée on peut facilement calculer la valeur de l'intégrale de la fonction f(x). En effet, en multipliant p par la l'aire totale déjà définit on retrouve la valeur de l'intégrale cherché, on a bien:

$$\int_a^b f(x)\,dx = p \times \mathcal{A}_\mathcal{T} \iff \int_a^b f(x)\,dx = p \times |b-a| \times \max(f(x))$$

On peut donc calculer comme ça des intégrales simples qui ont un maximum sur [a,b] qui est connu et qui sont toujours, on peut prendre comme exemples:

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = 1$$

Dans le premier cas le maximum de x^2 sur $[0,1]$ est 1 on peut donc en déduire que la probabilité p vaut $\frac{1}{3}$. Dans le deuxième cas, le maximum de $\sin(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vaut 1 on peut donc en déduire que p vaut $\frac{2}{\pi}$. En sachant que cette méthode est appliquée numériquement et donc qu'on calcule la valeur de p à partir de points pris au hasard qui ont pour coordonnées (x, y) avec $x \in [a, b]$ et $y \in [0, \max(f(x))]$ et en les comparant avec la valeur de $f(x)$ où x est la valeur prise au hasard. Comme on l'a déjà mentionné cette technique marche seulement pour certaines contraintes et des simples fonctions comme:

$$\int_{-1}^{1} x \mathrm{d}x$$

ou

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x) \mathrm{d}x$$

ne peuvent pas être résolu par la technique que nous venons de décrire alors que leurs valeurs valent toutes les deux 0.

On peut donc se demander comment ce problème, qui est majeur, peut être résolu par des techniques numériques, c'est l'objet de la section suivante.

2 Nouvelle approche de la méthode de Monte-Carlo

Nous allons nous intéresser dans cette section au calcul des intégrales qui ne l'étaient pas dans la section précédente en y décrivant certains procédés qui peuvent être fais de manière numérique.

2.1 Relevage d'une fonction

Afin de pouvoir calculer n'importe quelle intégrale comme on a pu le définir dans la section précédente, on doit pouvoir calculer les intégrales qui ne sont pas toujours positives sur l'intervalle $[a, b]$. On peut donc utiliser une propriété des intégrales pour pallier ce problème, en effet on a la relation:

$$\int_a^b f(x) + \lambda \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \lambda \mathrm{d}x$$

et cette relation peut aussi s'écrire:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \mathrm{d}x - \int_a^b \lambda \mathrm{d}x$$

Si on pose $\lambda = |\min(f(x))|$ on a bien $f(x) + \lambda$ qui est toujours positive sur $[a, b]$. On vient ici de "relever" la fonction afin de pouvoir toujours la calculer, de plus $\int_a^b \lambda \mathrm{d}x$ est facilement calculable car c'est une fonction constante, on a donc:

$$\int_a^b \lambda \mathrm{d}x = [\lambda x]_a^b = \lambda a - \lambda b = \lambda[b - a],$$

cette valeur correspond bien à un rectangle de largeur $b - a$ et de longueur λ. On peut donc maintenant calculer l'intégrale voulut grâce aux deux autres valeurs qu'on peut calculer. Ainsi on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \mathrm{d}x - \lambda[b - a],$$

où λ est le minimum de la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$. Par exemple on peut résoudre les problèmes non-résolus de la première section:

$$\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x + 1\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 1\mathrm{d}x,$$

car on sait que la valeur absolue du minimum de $f(x) = x$ sur $[-1,1]$ vaut 1, en sachant que le maximum de $f(x) = x + 1$ vaut 2 sur $[-1,1]$ on trouve:

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - 1 \times [1 - (-1)] = 2 - 2 = 0,$$

car on peut déduire facilement que p vaut ici $\frac{1}{2}$.

Pour l'exemple suivant on a:

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} \sin(x) + 1\mathrm{d}x - \int_{0}^{2\pi} 1\mathrm{d}x,$$

car on sait que la valeur absolue du minimum de $\sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$ est 1 et en sachant que la valeur maximum de $f(x) = \sin(x) + 1$ vaut 2 aussi, on a:

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\pi - 1 \times 2\pi = 2\pi - 2\pi = 0,$$

on peut aussi déduire que la probabilité p vaut $\frac{1}{2}$ ici.

Maintenant que nous avons résolu ce problème, on peut se demander comment calculer le minimum ainsi que le maximum (comme on l'a dit dans la section précédente) de manière numérique tout en étant sûr du résultat, ces valeurs vont pouvoir être déterminés grâce à l'algorithme de Newton-Raphson.

2.2 Méthode de Newton-Raphson pour les extremums d'une fonction

On va ici s'intéresser à l'algorithme de Newton-Raphson qui permet de trouver les points d'annulation d'une fonction. Cette méthode utilise notamment la dérivée et le calcule de tangente en un point d'une fonction. Dans notre cas, on veut savoir quels sont les extremums de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, ce qui peut paraître très différent. On va en fait d'abord utiliser une approximation de la recherche de ces extremums puis en utilisant cette méthode on pourra vérifier si les valeurs trouvées sont les bonnes.

Dans un premier temps nous allons diviser l'intervalle $[a, b]$ en un nombre n d'intervalles tous égaux de taille $h = \frac{b-a}{n}$, le nombre n étant arbitraire. En prenant comme minimum et comme maximum la valeur $f(a)$ on va regarder si la valeur $f(a + h \times i)$,où i $\in [0, n]$, est plus grande (resp. plus petite) que le maximum (resp. minimum) déjà enregistré. On va ensuite noté α le minimum approximatif obtenu et β le maximum approximatif obtenu, ainsi que M un majorant sur $[a, b]$ et m un minorant sur $[a, b]$. On aura $M = \lceil \beta \rceil + 1$ et $m = \lfloor \alpha \rfloor - 1$. On aura pour tous $x \in [a, b]$, $M > f(x)$ et $m < f(x)$. On a donc trouver en théorie un majorant et un minorant de la fonction $f(x)$ et grâce à l'algorithme de Newton-Raphson nous allons pouvoir vérifier ce résultat.

On définit pour cette méthode une suite (x_n) telle que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{array} \right.$$

Le problème reste que cette méthode permet de trouver les fonctions où la fonction s'annule et non pas ses extremums. On va en fait dans un premier temps poser une fonction $g(x)$ telle que $g(x) = f(x) + m$ où m est un minorant de la fonction sur $[a, b]$, si la méthode trouve une valeur x pour laquelle la fonction s'annule alors cette valeur est sensée ne pas appartenir à l'intervalle $[a, b]$, nous décrirons le cas où cette valeur appartient à $[a, b]$. Dans un deuxième temps, on posera $h(x) = f(x) - M$ où M est un majorant de la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$, de la même manière que la première fonction, la méthode est sensée nous dire si la fonction s'annule sur $[a, b]$. Cette méthode suppose que la méthode de Newton-Raphson converge ou pas assez rapidement vers une solution. En effet si la dérivée de la fonction calculée se trouve sur un minimum ou un maximum qui peut être local ou global alors la fonction admet une division par 0. Pour éviter les erreurs la méthode doit être appliquer pour $a = a$, $a = b$ pour la valeur de départ x_0.

Maintenant décrivons le cas où la méthode de Newton-Raphson trouverait une solution dans $[a, b]$. Dans ce cas là on pose à nouveau $M = M + 1$ et $m = m - 1$, puis on réitère l'opération jusqu'à ce que la méthode ne trouve pas de solution sur $[a, b]$, la seule difficulté serait que la fonction introduite possède une asymptote verticale sur $[a, b]$, ce qui empêcherait de trouver un majorant ou bien un minorant selon les cas.

On verra en effet plus tard que l'important n'est pas de trouver les extremums mais plutôt un minorant et un majorant de la fonction.

2.3 Convergence de la méthode de Monte-Carlo

Nous allons dans cette partie réfléchir à pourquoi cette méthode fonctionne et en quoi elle nous assure de trouver un résultat exact qui converge vers la valeur de l'intégrale de la fonction cherchée. Cette partie est donc plus centrée sur les probabilités par rapport au reste de cet exposé.

En effet on peut reconnaître ici un schéma de Bernoulli avec une variable aléatoire qui vaut soit 0, soit 1 avec une probabilité p. Plus globalement on a ici une loi de binomiale de paramètres p qui est à déterminer et n qui est indiqué par l'utilisateur. On a donc la variable aléatoire X_i, où $i \in [0, n]$ qui prend la valeur 1 si le point est en dessous de la courbe et 0 sinon. On pose maintenant S_n qui est égal à:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

on définit maintenant la moyenne empirique M_n qui est égal à $\frac{S_n}{n}$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à notre cas on a:

$$P(|M_n - p| \geq t) \leq \frac{p(p-1)}{nt^2},$$

or en prenant un valeur très grande pour n on trouve que la probabilité tend vers 0, on a en fait ici la loi des nombres qui peut s'appliquer à notre cas:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - p| \geq t) = 0,$$

cela s'explique par le fait que $p(p-1)$ soit un terme constant et que pour valeur de t qui soit suffisamment petite on puisse avoir une probabilité que le résultat M_n s'écarte de t de la valeur réelle de p. En rappelant que la valeur p est le rapport entre la surface sous la courbe de $f(x)$ et la surface totale. Or on peut dire par approximation que la valeur de M_n va tendre vers celle de p donc:

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} = M_n \Longleftrightarrow \mathcal{A}_\mathcal{C} = M_n \times \mathcal{A}_\mathcal{T},$$

or on sait que la $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ est la valeur de l'intégrale recherché et que les valeurs de M_n ainsi que de $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ peuvent être facilement connus grâce aux techniques que nous avons déjà présentés. On a donc pour finir:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = M_n \times \mathcal{A}_\mathcal{T},$$

en y ajoutant le résultat déjà trouvé avant pour le "relevage" de la fonction qui et cherché, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = M_n \times \mathcal{A}_{\mathcal{T}} - \lambda[b-a],$$

où on le rappelle $\lambda = |\min f(x)|$ pour $x \in [a,b]$, c'est cette formule que nous utiliserons pour le reste de l'exposé et qui permet une implémentation numérique facile.

2.4 Première formule pour le calcul d'intégral par la méthode de Monte Carlo

On va maintenant donner une formule utilisant la limite pour pouvoir approcher la valeur de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a,b]$. On a vu dans la section 1 que le calcul nécessitait de connaître un minimum ou un maximum de $f(x)$ sur $[a,b]$, grâce à la technique décrite dans la section 2.2 on a pu approcher ces valeurs. En fait on peut voir que la valeur absolu du minorant trouver sera plus grande que celle du minimum. Si on note $m = |\min f(x)|$ la valeur absolue du minimum et $\lambda = |\min f(x) - 1|$ on a bien $\lambda > m$, on aura donc $\forall x \in [a,b]$, $f(x) + \lambda > 0$. On aura aussi besoin de calculer le maximum de la fonction pour pouvoir calculer ensuite la valeur de $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, on peut aussi voir que le fait de majorer la fonction n'est pas un soucis ici. Si on pose $M = |\max f(x)| + \lambda$ et $\beta = |\beta' + \lambda|$, avec β' qui est un majorant de $f(x)$, on a en fait β qui est un majorant de $f(x) + \lambda$. Et ici aussi on aura: $\forall x \in [a,b]$, $\beta > M$, on peut voir que on peut utiliser β pour le calcul de l'aire total tant que les valeurs aléatoires qu'on notera (x_0, y_0) appartiennent bien pour x_0 à $[a,b]$ et pour y_0 à $[0,\beta]$.

On a donc pour valeur de $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = [b-a] \times \beta,$$

on utilisera plus tard plutôt la formule suivante: $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = [b-a] \times (\beta' + \lambda).$$

En appliquant cette formule dans la formule que l'on a trouvé dans la section précédente, on a bien la formule:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = M_n \times [b-a] \times (\beta' + \lambda) - \lambda[b-a],$$

pour être plus exact la valeur de M_n se trouve seulement lorsqu'on prend n comme étant une valeur très grande ou plutôt lorsqu'on prend la limite de n en $+\infty$. La formule exacte est donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} M_n \times [b-a] \times (\beta' + \lambda) - \lambda[b-a],$$

ce qui est équivalent à:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} [b-a] \times [M_n \times (\beta' + \lambda) - \lambda]$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} [b-a] \times [M_n \times \beta' + \lambda \times (M_n - 1)],$$

où M_n est la moyenne empirique, a et b sont les bornes de l'intégrale, β' et λ un majorant et un minorant de $f(x)$ sur $[a, b]$. Cette formule finale peut donc être calculé numériquement grâce aux procédés et méthodes que nous avons décris avant, cependant le fait que cette formule nécessite la limite en $+\infty$ nous oblige à avoir seulement une valeur approchée de l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$.

Cependant on peut voir aussi que si la valeur de $b - a$ est très grande alors les valeurs aléatoires prises pas x_0 ne représenteront pas bien la réalité de l'expérience. Par exemple si on prend $a = -10$ et $b = 10$ et qu'on prend $n = 10^4$ ce qui reste un nombre important d'itération, en supposant que les valeurs prises par x_0 sont toutes équivalentes peu importe l'intervalle on aura sur $[0, 1]$, 500 points ce qui est peu pour déterminer une valeur de p. Nous allons voir dans la section suivante comment essayer de pallier ce problème en changeant les bornes de l'intégrale recherché.

3 Changement des bornes d'une intégrale

Comme on l'a dit à la fin de la section précédente, nous allons essayé de changer les bornes de l'intégrale afin que le calcul puisse être plus facile, malheureusement cette méthode entraîne d'autres problèmes que nous verrons à la fin de cette section. Cette partie utilisera notamment la technique de changement de variables pour les intégrales, chose qui n'est pas forcément facile à maîtriser mais nous en ferons une courte présentation.

3.1 Transformation de l'intégrale

Nous allons d'abord nous intéresser à réduire les valeurs prises par $f(x)$ sur $[a, b]$, en fait on va essayer de la réduire à l'intervalle $[0, 1]$ pour permettre des plus facilement la valeur de l'intégrale cherché. À partir nous noterons $g(x)$ la fonction dont on cherche l'intégrale sur $[a, b]$.

On a vu que on peut "relever" la fonction en y ajoutant un terme constant noté λ et qui est un minorant de la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$. On va en fait changer sa définition car si la valeur de λ est négative, on a juste à soustraire λ à $f(x)$ et on "relève" bien la fonction. Si λ est positive par contre, lorsqu'on le soustrait, la fonction reste positive mais les valeurs vont se rapprocher de 0, on peut donc écrire $g(x) - \lambda$.

Pour autant les valeurs de $f(x)$ ne sont toujours pas dans $[0, \beta' - \lambda]$, où β' est un majorant de $f(x)$ sur $[a, b]$, on peut supposer que $\beta' - \lambda > 1$. Mais si on divise par $\beta' - \lambda$ dans la dernière inégalité, on a bien $1 > \frac{1}{\beta' - \lambda}$. On aura toujours $\beta' > lambda$ puisque on a $\beta' = \lceil M \rceil + 1$, M étant le maximum approximatif, et aussi $\lambda = \lfloor m \rfloor - 1$, m étant un minimum approximatif. Si $M = m$ on aura quand même $\beta' > \lambda$, ce qui nous permet de diviser par $\beta' - \lambda$ sans changer le signe de l'expression.

Sachant que $\beta' > g(x)$ d'après la définition de β', on a donc:

$$1 > \frac{g(x) - \lambda}{\beta' - \lambda},$$

on pose maintenant $f(x) = \frac{g(x) - \lambda}{\beta' - \lambda}$, qui est défini sur $[a, b]$ et dont les valeurs sont dans $[0, 1]$ comment on vient de le démontrer.

Notre recherche de l'intégrale de $g(x)$ va maintenant se concentrer sur celle de $f(x)$ puisque ses valeurs sont dans $[0, 1]$. Cependant pour trouver la valeur de l'intégrale de $g(x)$ on a les équivalences suivante:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{g(x)-\lambda}{\beta'-\lambda}\mathrm{d}x$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta'-\lambda}\int_a^b g(x)-\lambda\mathrm{d}x$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta'-\lambda}(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \lambda\mathrm{d}x)$$

$$\iff \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta'-\lambda}(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda[b-a])$$

$$\iff (\beta'-\lambda)\times\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda[b-a]$$

$$\iff \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (\beta'-\lambda)\times\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda[b-a].$$

Cette dernière égalité nous permet d'avoir une équivalence entre l'intégrale de la fonction $f(x)$ et celle de $g(x)$ que l'on cherche, or on l'a déjà vu et l'on va le voir encore, la fonction $f(x)$ sera plus facile à calculer numériquement.

3.2 Réduction des bornes de l'intégrale par changement de variable

Cette partie va s'intéresser à la technique de changement de variable afin de pouvoir changer les bornes de l'intégrale. Une généralisation du raisonnement que nous allons étudié doit sûrement être faisable et à sûrement déjà été démontré, il pourrait être l'objet d'un autre exposé.

La définition de la technique de changement de variable pour une intégrale d'une fonction $f(x)$ aux bornes respectives a et b est la suivante :

Soit φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle I, à variable dans un intervalle J. Si a et b sont deux points de I et f une fonction continue sur J, alors:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f\circ\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

la démonstration de cette formule peut facilement être trouvé en ligne ou dans un manuel et sera omise ici. La formule qu'on utilisera est une variante de la formule qui vient d'être présenté, elle s'écrit comme cela:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} f(\theta^{-1}(t))(\theta^{-1})'(t)\mathrm{d}t,$$

en effet cette formule nous permet de conserver l'intégrale que nous voulons calculer en gardant les bornes α, β et la fonction $f(x)$. Cependant cette formule nécessite quelques conditions notamment $\forall x \in J$, $\theta'(x)$ doit être différent de 0. Or cela veut dire que la fonction $\theta(x)$ doit être strictement monotone sur $[a, b]$ dans notre cas. Or pour nous simplifier la tâche nous choisirons une fonction $\theta(x)$ qui est affine, donc de la forme $\theta(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Notre objectif va être de réduire les bornes de l'intégrale tel que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, or il existe une unique fonction affine $\theta(x)$ telle que $\theta(\alpha) = 0$ et $\theta(\beta) = 1$. Nous noterons à partir de maintenant les bornes α qui est égal à a et β qui est égal à b. En fait cela revient à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} a\alpha + b &= 0 \\ a\beta + b &= 1 \end{cases}$$

en fait cela revient à résoudre l'équation:

$$-a\alpha - b + a\beta + b = 1$$

$$\iff a(\beta - \alpha) = 1$$

$$\iff a = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Maintenant qu'on a trouvé une valeur pour a, il faut trouver la valeur de b, on résout donc le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta-\alpha} + b &= 0 \\ \frac{\beta}{\beta-\alpha} + b &= 1 \end{cases}$$

on peut mettre ce système sous une seule et même équation qui est:

$$\frac{\alpha}{\beta - \alpha} + b + \frac{\beta}{\beta - \alpha} + b = 1$$

$$\iff \alpha + 2b(\beta - \alpha) + \beta = \beta - \alpha$$
$$\iff 2b(\beta - \alpha) = -2\alpha$$
$$\iff b = \frac{-\alpha}{\beta - \alpha},$$

on a maintenant nos valeurs pour a et b, la fonction $\theta(x)$ peut s'écrire comme ça:

$$\theta(x) = \frac{x}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha},$$

ce qui est équivalent à:

$$\theta(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Maintenant que nous avons trouvé la fonction $\theta(x)$ qui convient nous devons trouver sa fonction réciproque $\theta^{-1}(x)$. Pour cela on a juste à résoudre l'équation:

$$\theta^{-1}(\theta(x)) = \theta(\theta^{-1}(x)) = x,$$

pour ça on pose l'inconnue $y(x) = \theta^{-1}(x)$ et on a:

$$\theta(y(x)) = x$$
$$\iff \frac{a}{\beta - \alpha} y(x) - \frac{\alpha}{\beta - \alpha} = x$$
$$\iff \frac{1}{\beta - \alpha} y(x) = x + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}$$
$$\iff y(x) = (x + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}) \times (\beta - \alpha)$$
$$\iff y(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha,$$

on a donc $\theta^{-1} = (\beta - \alpha)x + \alpha$ et le lecteur peut vérifier par lui même que cette fonction vérifie les propriétés de la fonction réciproque. On va aussi calculer sa dérivée qui nous sera utile plus tard, la fonction θ^{-1} étant une fonction affine on a:

$$(\theta^{-1})' = \beta - \alpha$$

.

Avant de passer à la suite on peut faire une petite remarque sur le comportement de la fonction $\theta^{-1}(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, on a $\theta^{-1}(0) = \alpha$ et $\theta^{-1}(1) = \beta$, plus généralement on pourra remarquer que

$\forall x \in [0,1]$, $g(\theta^{-1}(x)) = g(x_0)$ où $x_0 \in [\alpha, \beta]$ et $x_0 = (\beta - \alpha) \times x + \alpha$. Le changement de variable que nous avons appliqué à juste réduit la fonction à l'intervalle $[0,1]$ mais les valeurs que la fonction prend sont les mêmes, et cela a pour conséquence que la dérivé sera forcément plus grande qu'elle l'était à l'origine sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. On verra que cette conséquence a son importance plus tard.

On peut maintenant appliquer la formule du changement de variable avec les résultats que nous avons trouvé. On a donc:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a-a}{b-a}}^{\frac{b-a}{b-a}} f((b-a) \times x + a) \times (b-a)\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \times \int_0^1 f((b-a) \times x + a)\mathrm{d}x,$$

on a donc pu passer d'une intégrale avec des bornes a et b à une intégrale à des bornes 0 et 1, ce qui était l'objectif de cette partie.

3.3 Application des transformations de l'intégrale à la méthode de Monte Carlo

On a définit dans la partie 3.1 une nouvelle fonction $f(x)$ de $[a,b]$ dans $[0,1]$ et on vient de voir dans la partie 3.2 une transformation d'une intégrale avec les bornes a et b à une intégrale avec les bornes 0 et 1.

En faisant une simple combinaison de ces deux résultats on arrive à une intégrale avec les bornes 0 et 1 d'une fonction dont les valeurs sont dans $[0,1]$. On peut rappeler qu'on avait obtenu la formule:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (\beta' - \lambda) \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda[b-a],$$

en sachant que $f(x)$ vaut $\frac{g(x)-\lambda}{\beta'-\lambda}$. En remplaçant par la formule que l'on a obtenu dans la section précédente on a:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (\beta' - \lambda) \times [b-a] \times \int_0^1 \frac{f((b-a) \times x + a) - \lambda}{\beta' - \lambda}\mathrm{d}x + \lambda[b-a].$$

Il nous reste donc à calculer $\int_0^1 \frac{f((b-a)\times x+a)-\lambda}{\beta'-\lambda}\mathrm{d}x$ puisque les autres termes peuvent être trouvés numériquement. Or nous avons déjà trouvé une méthode numérique pour calculer cette intégrale dans la section 2.4. Pour une fonction $t(x)$ qui est la fonction transformée de $g(x)$ dont les bornes sont 0 et 1 et dont un majorant β' vaut 1 et un minorant λ vaut 0, on a:

$$\int_0^1 t(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}[1-0]\times[M_n]+0\times(M_n-1)]$$

$$\iff \int_0^1 t(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} 1\times[M_n]$$

$$\iff \int_0^1 t(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} M_n,$$

où M_n est la probabilité qu'un point de coordonnées (x_0, y_0), $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ soit sous la courbe de $t(x)$.

En utilisant la formule pour l'intégrale de $g(x)$ dans la section 3.1, on a pour formule finale:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}(\beta'-\lambda)\times[b-a]\times M_n+\lambda[b-a]$$

$$\iff \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}[b-a]\times[M_n\times(\beta'-\lambda)+\lambda].$$

Cette dernière formule peut être utilisé pour approcher la valeur d'une intégrale d'une fonction $g(x)$ avec des bornes a et b. Cependant cette formule a un défaut majeur c'est que la valeur de M_n peut vite varier étant donné le fait que la fonction étudié sur l'intervalle $[0,1]$ varie bien plus vite que sur sont intervalle d'origine $[a,b]$, cela peut nous mener à regarder le pourcentage de confiance que le résultat de M_n nous donne et ainsi estimé l'écartement de la valeur trouvé par rapport à celle qui devrait être trouvé.