Unitat 4: Probabilitat

Direm que una **experiència** és **aleatòria** si es compleix que:

1. Existeix meś d'un resultat possible.
2. Es coneixen tots els resultats possibles.
3. No es pot conèixer el resultat abans de l'experiència.

Alguns exemples d'experiències aleatòries són: el llençament d'un dau, treure una carta a l'atzar d'una baralla de cartes, ... Les experiències aleatòries també s'anomenen experiments aleatoris.

L'**espai mostral** d'una experiència aleatòria és el conjunt de tots els possibles resultats. S'acostuma a denotar amb la lletra E o amb la lletra grega Ω.

Un **esdeveniment aleatori** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral d'una experiència aleatòria.

Direm que un esdeveniment és **elemental** quan contingui un únic resultat possible. Els esdeveniments elementals també s'anomenen casos.

Direm que un esdeveniment és **compost** quan contingui més d'un resultat possible.

Direm que un esdeveniment és **segur** quan sempre passa. L'esdeveniment segur és l'espai mostral.

Direm que un esdeveniment és **impossible** quan no pot passar.

Donat un esdeveniment aleatori A direm que l'**esdeveniment complementari** o contrari de A és la seva negació. Es nota $\overline{A}$ o A', tot i que en teoria de conjunts fem servir A^C.

Si considerem l'experiència aleatòria llençar un dau de sis cares:

Espai mostral $\quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Esdeveniment elemental $\quad A = \{\text{surt un } 2\} = \{2\}$

Esdeveniment compost $\quad B = \{\text{surt un nombre senar}\} = \{1, 3, 5\}$

Esdeveniment segur $\quad \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

Esdeveniment impossible $\quad \{\text{surt el } 0\} = \varnothing$

Esdeveniment complementari $\quad A = \{\text{surt un } 2\} = \{2\} \qquad \overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Operacions amb esdeveniments

Donats dos esdeveniments A i B d'una experiència aleatòria, podem definir:

Unió $A \cup B$ és l'esdeveniment que conté tots els casos de A i de B

Intersecció $A \cap B$ és l'esdeveniment que conté tots els casos comuns de A i de B

Diferència $A - B$ és l'esdeveniment que conté els casos de A que no estan en B

Complementari $\overline{A} = \Omega - A$

Direm que dos esdeveniments A i B són **Incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
Observeu que: $A \subset B \Longrightarrow A \cup B = B$ i $A \cap B = A$

Propietats

Donats dos esdeveniments A i B qualssevol d'una experiència aleatòria

1. Idempotència
$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
2. Associativa
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
3. Commutativa
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
4. Distributiva
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
5. Identitat
$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
6. Complementari
$$A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$
$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\Omega} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = \Omega$$
7. **Lleis de Morgan**
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

4.1 Llei dels grans nombres

El experiments aleatoris presenten regularitat estadística quan el nombre de proves que fem es prou elevat. No podrem predir el resultat dels proper experiment, però en una sèrie prou llarga es pot predir amb quina freqüència apareixen cadascun dels casos.

Si realitzem un experiment aleatori n vegades:

> La freqüència absoluta d'un esdeveniment A és el nombre total de vegades que ocorre i es denota com $F(A)$.
>
> La freqüència relativa d'un esdeveniment és la proporció entre el nombre de vegades que ocorre i el nombre total de proves. Es denota $f(A)$
>
> $$f(A) = \frac{F(A)}{n}$$

En una sèrie prou llarga de proves, la freqüència relativa d'un esdeveniment s'apropa a un nombre real que és la seva probabilitat.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$$

4.2 Definició axiomàtica de la probabilitat

Donat un experiment aleatori, tenim el seu espai mostral Ω que conté tots els esdeveniments possibles. La probabilitat es defineix com una funció P entre el conjunt de les parts de Ω, que definirem com $\wp(\Omega) = \{A | A \subseteq \Omega\}$, i el conjunt dels nombres reals, és a dir, associa un nombre a cadascun dels esdeveniments de l'experiment aleatori.

$$P : \wp(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto P(A)$$

on A un esdeveniment qualsevol de l'espai mostral. Aquesta aplicació ha de verificar tres axiomes:

1. $\forall A \subseteq \Omega \quad 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$ i $P(\varnothing) = 0$
3. Si A i B són esdeveniments incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), aleshores

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

D'aquests axiomes es poden deduir els següents teoremes:

1. Si A_1, A_2, ..., A_n són esdeveniments incompatibles, aleshores

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).}$$

2. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, per tant,

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

3. Si A i B són esdeveniments tals que $A \subseteq B$, aleshores

$$P(A) \leq P(B)$$

   a més, A i $B - A$ són incompatibles, per tant,

$$\boxed{P(B) = P(A) + P(B - A)}$$

4. Si A i B són esdeveniments, aleshores $A \cap B$ i $A \cap \overline{B}$ són incompatibles, per tant,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

   o equivalentment

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

   Com que $A \cap \overline{B}$ i B són esdeveniments incompatibles i

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$$

   també podem afirmar que

$$P(A \cup B) = P((A \cap \overline{B}) \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$$

   i fent sevir el resultat anterior tindrem que

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

4.3 Llei de Laplace

Direm que un experiment aleatori és de Laplace quan la probabilitat de tots els seus esdeveniments elementals (casos) sigui la mateixa. En aquest cas podem calcular la probabilitat d'un esdeveniment a partir del quocient dels casos favorables entre el total dels casos.

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos farovables a } A}{\text{nombre de casos possibles}}$$

4.4 Taules de contingència

Farem servir un exemple per a mostrar l'ús de les taules de contingència.

Considerem un curs de 100 alumnes en el qual fem una enquesta que té dues preguntes:

1. Has estat a França?
2. Has estat a Anglaterra?

30 alumnes responen afirmativament a la primera pregunta i 25 a la segona.

Si realitzem l'experiment aleatori "agafar tots els alumnes del curs i anotar el país o països que han visitat, quin és l'esdeveniment segur d'aquest experiment aleatori?" Fer aquest experiment significa agafar tots els alumnes del curs, però la cosa que volem "observar" no és la persona triada sinó el país o els països en què ha estat. Si ho mirem d'aquesta manera, podem definir:

F = conjunt d'alumnes que han estat a França

$\overline{F}$ = conjunt d'alumnes que no han estat a França

A = conjunt d'alumnes que han estat a Anglaterra

$\overline{A}$ = conjunt d'alumnes que no han estat a Anglaterra

Tots els resultats possibles d'aquest experiment són:

$F \cap A$ la persona triada ha estat a França i a Anglaterra

$\overline{F} \cap A$ la persona triada no ha estat a França, però sí a Anglaterra

$F \cap \overline{A}$ la persona triada ha estat a França, però no a Anglaterra

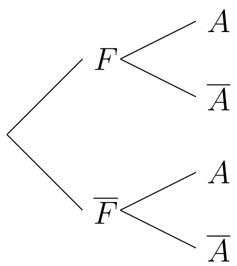
$\overline{F} \cap \overline{A}$ la persona triada no ha estat a França ni a Anglaterra

Per tant,

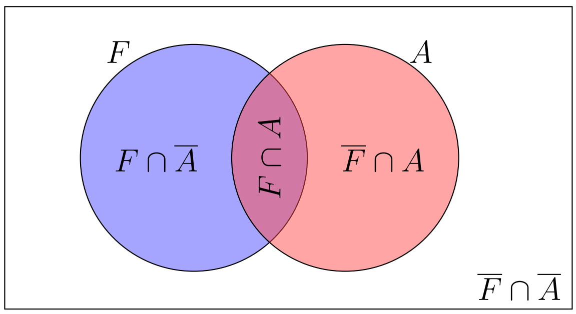
$$\Omega = \{F \cap A, \overline{F} \cap A, F \cap \overline{A}, \overline{F} \cap \overline{A}\}$$

Ho podem veure amb una taula de contingència, un diagrama d'arbre o un diagrama de Venn.

	F	$\overline{F}$
A	$F \cap A$	$\overline{F} \cap A$
$\overline{A}$	$F \cap \overline{A}$	$\overline{F} \cap \overline{A}$



Alumnes del curs



Sabem que en un experiment aleatori ens interessa conèixer les freqüències dels esdeveniments elementals, és a dir, les freqüències de $F \cap A$, $\overline{F} \cap A$, $F \cap \overline{A}$ i $\overline{F} \cap \overline{A}$ en comptes de les freqüències de F i de A. Per tant, el qüestionari correcte seria:

1. Has estat a França i a Anglaterra?
2. Has estat a França i no a Anglaterra?
3. Has estat a Anglaterra i no a França?
4. No has estat a França ni a Anglaterra?

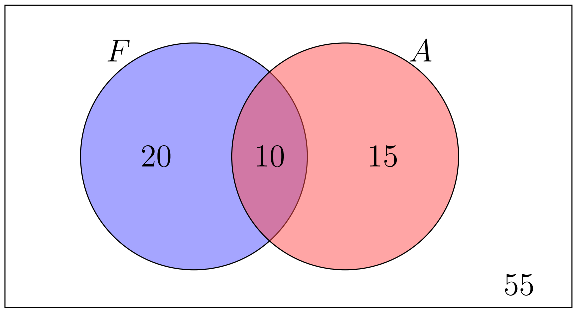
Suposem que les respostes del qüestionari són:

$$F(F \cap A) = 10 \qquad F(\overline{F} \cap A) = 15$$
$$F(F \cap \overline{A}) = 20 \qquad F(\overline{F} \cap \overline{A}) = 55$$

Si ara ho representem en una taula de freqüències o un diagrama de Venn, tindrem:

	F	$\overline{F}$	
A	10	15	25
$\overline{A}$	20	55	75
	30	70	100

Alumnes del curs



Amb aquestes representacions resulta molt fàcil trobar les freqüències de qualsevol altre esdeveniment, i per tant, la seva probabilitat. Els diagrames de Venn són especialment útils quan tenim classificacions més complexes com per exemple si han estat a França, Anglaterra o Alemanya.

Com que tots aquest esdeveniments són incompatibles, si ara volem respondre a les següents preguntes, ens resultarà més fàcil. Si triem un alumne a l'atzar:

1. Quina probabilitat hi ha que hagi anat França? $P(F) = \dfrac{10+20}{100} = \dfrac{30}{100} = 0.3$
2. Quina probabilitat hi ha que hagi anat França i a Anglaterra o no hagi anat ni a França ni a Anglaterra?
$$P[(F \cap A) \cup (\overline{F} \cap \overline{A})] = \frac{10+55}{100} = \frac{65}{100} = 0.65$$

Observa: I si sabem que la persona triada ha visitat França, quina és la probabilitat que també hagi visitat Anglaterra? Si $A|F$ denota haver visitat Anglaterra sabent que ha visitat França, tindrem que

$$P(A|F) = \frac{10}{30} = \frac{P(A \cap F)}{P(F)}$$

4.5 Probabilitat condicionada

Donats dos esdeveniments A i B amb $P(B) \neq 0$, aleshores la probabilitat que passi A sabent que ha passat B s'expressa com $P(A|B)$ i s'anomena la probabilitat de A condicionada a B. Per a calcular-la hem de fer el quocient

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple: Tenim una caixa amb 12 boles, 6 de blanques i 6 de negres. De les sis boles negres, tres estan numerades amb un 1 i les altres tres amb un 2. De les sis boles blanques, quatre tenen un 1 i les altres dues un 2. Escollim a l'atzar una bola d'aquesta caixa.

En principi, la probabilitat que la bola escollida sigui blanca és $P(B) = \dfrac{1}{2}$ i que la bola escollida sigui negra és $P(N) = \dfrac{1}{2}$.

Però ara imaginem que sabem que la bola escollida està marcada amb un 2. Com modifica aquesta informació la probabilitat que la bola escollida sigui blanca o negra?

$$P(B|2) = \frac{P(B \cap 2)}{P(2)} = \frac{2}{5} \qquad\qquad P(N|2) = \frac{P(N \cap 2)}{P(2)} = \frac{3}{5}$$

La probabilitat condicionada ha de complir els axiomes i les propietats de la probabilitat:

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(\Omega|A) = 1$ i $P(\varnothing|A) = 0$

I a més, es compleixen dues propietats trivials i les pròpies de la probabilitat condicionada:

1. $P(A|A) = 1$
2. $P(A|\overline{A}) = 0$
3. Si A_1 i A_2 són esdeveniments incompatibles, aleshores
$$P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$
4. $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$
5. Si $A_1 \subseteq A_2$, aleshores $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
6. $P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P((A_1 \cap A_2)|B)$

Observa: La definició de la probabilitat condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

requereix el valor de $P(A \cap B)$ per a calcular $P(A|B)$, però resulta que habitualment és més fàcil calcular $P(A|B)$ que $P(A \cap B)$. Per això, moltes vegades cal aïllar la intersecció i fer servir l'expressió

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

que s'anomena **la llei de les probabilitats compostes**. Si a més a més observem que $A \cap B = B \cap A$, alehores

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

que ens permet deduir

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$$

que és la fórmula d'inversió de condicions.

Per inducció podem obtenir la llei de les probabilitats compostes que resulta en el teorema de la multiplicació:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = {} & P\left(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)\right) = P\left(A_1|A_2 \cap A_3\right) \cdot P\left(A_2 \cap A_3\right) = \\ = {} & P\left(A_1|A_2 \cap A_3\right) \cdot P\left(A_2|A_3\right) \cdot P(A_3) = P(A_3) \cdot P\left(A_2|A_3\right) \cdot P\left(A_1|A_2 \cap A_3\right) \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_n) \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_{n-2}|(A_{n-1} \cap A_n)] \cdot ... \cdot P(A_1|(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)$$

4.6 Teorema de Bayes

Donat un experiment aleatori amb un espai mostral Ω i n esdeveniments A_1, A_2, ... A_n incompatibles dos a dos, i tals que $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, tindrem que per a qualsevol esdeveniment B es verifica que:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

i per tant,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

Substituint a la fórmula de la probabilitat condicionada $P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$ obtenim

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)}$$

i fent servir la llei de les probabilitats compostes $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$

I d'aquesta manera obtenim el **Teorema de Bayes**.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)}}$$

Per a entendre millor això ho aplicarem a un exemple concret. Tenim tres màquines A_1, A_2 i A_3 que produeixen el 50%, el 30% i el 20% respectivament del total dels objectes d'una fàbrica, i els percentatges de producció defectuosa d'aquestes màquines són el 3%, el 4% i el 5% respectivament. Seleccionem un objecte a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui defectuós?

Anomenem D a l'esdeveniment "l'objecte és defectuós". Aleshores

$$D = D \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup (D \cap A_3)$$

és a dir, l'objecte és defectuós i l'ha fabricat la màquina A_1, o bé la màquina A_2, o bé la màquina A_3. Com que aquests tres esdeveniments són incompatibles

$$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3)$$

i aplicant la llei de les probabilitat compostes

$$P(D) = P(D|A_1) \cdot P(A_1) + P(D|A_2) \cdot P(A_2) + P(D|A_3) \cdot P(A_3)$$

$$P(D) = \frac{3}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{37}{1000}$$

Podrem concloure que 37 de cada 1000 (o el 3,7%) objectes que es fabriquen són defectuosos.

Fem ara la prova des d'un altre punt de vista. Triem un objecte a l'atzar i observem que és defectuós. Quina és la probabilitat que hagi estat produït per la màquina A_1? Ens estan demanant $P(A_1|D)$

$$P(A_1|D) = \frac{P(D|A_1) \cdot P(A_1)}{P(D|A_1) \cdot P(A_1) + P(D|A_2) \cdot P(A_2) + P(D|A_3) \cdot P(A_3)}$$

$$P(A_1|D) = \frac{\frac{3}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\frac{3}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{20}{100}} = \frac{15}{37} = 0.\widehat{405} \approx 40.5\%$$

En aquesta segona part de l'exemple hem fet servir el Teorem de Bayes: cerquem la probabilitat que hagi actuat una causa A_1 (la màquina que produeix l'objecte) quan ja sabem un efecte D (l'objecte és defectuós). Per això s'anomena també **la fórmula de la informació invertida**, és a dir, es coneix una informació dels esdeveniments en un ordre diferent d'aquell com s'han produït.

4.7 Esdeveniments independents

Un esdeveniment B és independent d'una altre esdeveniment A si la probabilitat que es realitzi no depén del fet que A s'hagi realitzat o no. És a dir, B és independent d'A si es compleix

$$P(B) = P(B|A) \qquad \text{i} \qquad P(A) \neq 0$$

La llei de les probabilitats compostes diu que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

i si apliquem que B és independent d'A, aleshores P(B) = P(B|A), i obtenim una definió equivalent d'independència:

Si $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$ direm que A és independent de B o bé que B és independent d'A si i només si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Propietats:

1. Els esdeveniments (Ω) i $(\varnothing)$ són independents de qualsevol altre esdeveniment.
2. A és independent de $B \iff \overline{A}$ és independent de $B \iff$
   $\iff A$ és independent de $\overline{B} \iff \overline{A}$ és independent de $\overline{B}$

Direm que tres esdeveniments A, B i C són independents si ho són de dos en dos,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

i, a més a més,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Exemple: Tenim una caixa amb 12 boles, 6 de blanques i 6 de negres. De les sis boles negres, la meitat estan numerades amb un 1 i l'altra meitat amb un 2, igualment amb les boles blanques. Escollim a l'atzar una bola d'aquesta caixa.

En principi, la probabilitat que la bola escollida sigui blanca és $P(B) = \dfrac{1}{2}$ i que la bola escollida sigui negra és $P(N) = \dfrac{1}{2}$.

Però ara imaginem que sabem que la bola escollida està marcada amb un 2. Com modifica aquesta informació la probabilitat que la bola escollida sigui blanca o negra?

$$P(B|2) = \frac{P(B \cap 2)}{P(2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(B) \qquad\qquad P(N|2) = \frac{P(N \cap 2)}{P(2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(N)$$

La quantitat d'informació que el número de la bola ens transmet sobre el color de la bola és nul·la. Per tant, el número i el color són esdeveniments independents en aquest exemple.

4.8 Problemes

1. Considerem l'experiment aleatori consistent en llençar una moneda i un dau i observar els resultats respectius:

   (a) Quin és l'esdeveniment segur?

   (b) Escriu els següents esdeveniments:
   $A =$"sortir cara i un nombre parell".
   $B =$"sortir un nombre primer".
   $C =$"sortir cara i un nombre senar".

   (c) Quins són els esdeveniments $A \cup B$, $B \cap C$ i $B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$?

   (d) Quines parelles dels esdeveniments A, B i C són incompatibles?

2. En el mateix experiment aleatori de l'exercici anterior considerem els esdeveniments: $A =$"sortir cara" i $B =$"obtenir 3 o 6". Determina els esdeveniments següents:

   (a) $\overline{A} =$ (b) $\overline{B} =$ (c) $A \cap B =$ (d) $A \cap \overline{B} =$ (e) $\overline{A} \cup \overline{B} =$

3. D'una baralla de cartes en separem quatre: un as, una sota, un cavall i un rei. D'aquestes quatre n'escollim dues a l'atzar una darrera de l'altra sense retornar la primera. Quin és l'esdeveniment segur d'aquest esdeveniment aleatori? (Us pot ajudar fer un diagrama d'arbre).

4. Considera l'experiment consistent en observar el sexe dels tres primers fills d'una família nombrosa.

   (a) Quin és l'espai mostral? (Un diagrama d'arbre pot resultar útil)

   (b) Escriu els esdeveniments:
   $A =$"el primer fill és nen o el tercer nena".
   $B =$"el primer fill és nen i el tercer nena"

   (c) Quina és la probabilitat que tinguin tres nens?

   (d) Quina és la probabilitat que tinguin dos nens i una nena?

5. Llancem tres monedes a l'aire i observem el nombre de cares resultants. Quina és la probabilitat que aparegui com a mínim una cara i la probabilitat que les tres donin el mateix resultat?

6. Tres cavalls A, B i C disputen una cursa. El seu historial de competició indica que A té el doble de probabilitat de guanyar que B i aquest el doble que C. Quina probabilitat té de guanyar cadascun?

7. Una moneda està trucada de manera que quan la llancem la probabilitat d'obtenir cara és el doble de la d'obtenir creu. Troba la probabilitat d'obtenir cara $P(C)$ i la d'obtenir creu $P(+)$ quan llancem aquesta moneda.

8. Sigui $\Omega = \{A, B, C, D\}$ l'esdeveniment segur d'un experiment aleatori. Sabent que les probabilitats $P(C) = P(D) = \dfrac{1}{4}$ i $P(A) = 2P(B)$, calcula $P(A)$ i $P(B)$.

9. Un dau cúbic numerat de l'1 als 6 està trucat de manera que la probabilitat que surti cada cara és proporcional al número que en ella hi figura. Llancem el dau i observem la puntuació obtinguda. Determina l'esdeveniment segur, la probabilitat de cada esdeveniment elemental i la probabilitat de l'esdeveniment "obtenir nombre parell".

10. Siguin A, B i C tres esdeveniments d'un experiment aleatori. Considerem dos nous esdeveniments definits com:

$$E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \qquad\qquad E_2 = A \cap (B \cup C)$$

    (a) Demostra que E_1 i E_2 són incompatibles.
    (b) Calcula $E_1 \cup E_2$.

11. Seleccionarem a l'atzar una carta d'una baralla de pòquer que en té 52 repartides en 4 pals. Calcula la probabilitat que sigui:
    (a) del pal de "cors".
    (b) una figura.
    (c) una figura de "cors".

12. Escollim a l'atzar dos mòbils d'un grup de 12 mòbils dels quals n'hi ha 4 de defectuosos. Calcula la probabilitat que:
    (a) tots dos siguin defectuosos.
    (b) cap dels dos ho sigui.

13. Determina la probabilitat de cadascun dels esdeveniments següents:
    (a) surti un nombre parell en llençar un dau normal
    (b) surti un rei en treure a l'atzar d'un joc de 52.
    (c) surti com a mínim una creu en llençar tres monedes.
    (d) surti una bola blanca en treure'n una sola d'una caixa que en té 4 de blanques, 3 de vermelles i 5 de blaves.

14. Tria dues cartes a l'atzar d'una baralla de pòquer de 52 cartes. Troba la probabilitat que:
    (a) ambdues siguin de piques.
    (b) que una sigui pica i l'altra un cor.

15. Llancem un parell de daus, quina és la probabilitat d'obtenir el mateix nombre en cadascun d'ells? i la d'obtenir un 8 com a suma dels dos nombres obtinguts?

16. Llancem a l'aire tres monedes, quina és la probabilitat d'obtenir dues creus i una cara?

17. Triem a l'atzar 3 bombetes d'entre 15 de les quals 5 no funcionen. Troba la probabilitat:
    (a) que les tres funcionin.
    (b) que només una de les tres funcioni.
    (c) que almenys una de les tres funcioni.

18. Dels esdeveniments A i B se'n sap el següent:

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$$

Calcula $P(A \cup B)$ i $P(A \cap B)$.

19. En una caixa hi ha 5 boles numerades de l'1 al 5. Les boles 1, 2 i 3 són blanques i les 4 i 5 són negres. Troba la probabilitat que en treure dues boles de cop:
    (a) siguin del mateix color.
    (b) siguin de diferent color.
    (c) la suma dels números sigui parell.
    (d) siguin del mateix color i la suma dels números parell.
    (e) siguin de diferent color i la suma dels números parell.

20. Triem a l'atzar dues cartes d'entre 10 numerades de l'1 al 10. Troba la probabilitat que la suma dels punts de les cartes sigui un nombre imparell si:
    (a) les dues cartes es treuen juntes.
    (b) es treu una carta darrera l'altra retornant la primera.

21. D'un grup de 200 alumnes sabem que 100 estudien anglès, 80 francès i 60 les dues llengües alhora. Quin és el nombre d'alumnes que estudien francès o anglès, és a dir, una de les dues llengües com a mínim? Fes la taula de contingència i el diagrama de Venn.

22. Una enquesta feta a 119 persones que arriben en un tren de rodalies a l'estació de Sants dóna el resultat següent: 60 van a veure el partit del Barça, 55 van a una revetlla que es fa a Can Batlló, 90 van a sopar a un restaurant, 48 van a la revetlla i a sopar i 37 a sopar i al partit de fútbol. Finalment 10 persones van als tres llocs i 4 dels enquestats no van a fer cap de les opcions esmentades. Troba quantes persones només van al fútbol i quantes van a la revetlla i al partit però no al sopar. (Un diagrama de Venn pot ser de gran ajuda)

23. En un poble el 50% de la població tenen cotxe, el 35% tenen moto i el 22% tenen moto i cotxe. Si triem a l'atzar un veí del poble, troba la probabilitat que:
    (a) Tingui cotxe o moto.
    (b) No tingui ni cotxe ni moto.
    (c) Sabent que té cotxe, que tingui moto.
    (d) Sabent que té moto, que no tingui cotxe.
    (e) Que tingui només un dels dos.

24. Llancem un parell de daus. Si la suma dels punts és 6, troba la probabilitat que en un dels daus hagi sortit un 2. Calcula la mateixa probabilitat sense saber que la suma dels punts és 6.

25. Llancem 3 monedes. Troba la probabilitat que totes tres surtin “cara” si:
    (a) la primera moneda surt “cara”.
    (b) almenys una de les monedes és “cara”.

26. Donats els esdeveniments A i B tals que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula:
    (a) $P(A|B)$ (b) $P(B|A)$ (c) $P(A \cap \overline{B})$ (d) $P(A|\overline{B})$

27. En una avaluació, el 25% d’alumnes no supera les matemàtiques, el 15% suspèn química i el 10% amdues matèries. Triem a l’atzar un alumne:
    (a) si ha suspès química, quina probabilitat té d’haver suspès les matemàtiques?
    (b) si ha suspès matemàtiques, quina té de suspendre la química?
    (c) quina és la probabilitat que tingui suspeses les matemàtiques o la química?

28. Triem a l’atzar una carta d’una baralla de 52 cartes de pòquer. Considerem els esdeveniments següents: $A =$“la carta és la dama de trèvol”, $B =$“la carta és un trèvol” i $C =$“la carta és un trèvol o l’as de cor”, $D =$“la carta és un trèvol o un cor” i $E =$“la carta és un rei”. Calcula les probabilitats següents;
    (a) $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ i $P(E)$.
    (b) $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap D)$ i $P(A \cap E)$.
    (c) $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(A \cup D)$ i $P(A \cup E)$.
    (d) $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|D)$ i $P(B|E)$.

29. Un professor decideix rifar un apartament a la costa enre els seus tres millors alumnes. Agafa tres paperets, deixa dos en blanc i en l’altre escriu “premi”. Què és preferible, ser el primer en escollir, el segon o el tercer?

30. Dins un sac hi ha 18 serps d’una certa espècie, 32 d’una altra i 10 d’una tercera. Totes són verinoses, però perquè resultin mortals cal ser picat per dues serps de la mateixa espècie. Posem la mà dins el sac i ens piquen dues serps, quina és la probabilitat de morir?

31. Una caixa conté 3 monedes, una de normal, una altra té cara pels dos costats i la tercera està trucada de manera que la probabilitat d’obtenir cara és $\frac{1}{3}$. Seleccionem una moneda a l’atzar i la tirem. Quina és la probabilitat d’obtenir cara?

32. Tenim dues urnes amb 10 boles cadascuna. A l’urna A hi ha una bola negra, 3 boles vermelles i 6 boles grogues. A l’urna B hi ha dues boles negres, 6 boles vermelles i 2 boles grogues. L’experiment consisteix en tirar un dau. Si surt un 1 o un 2 extraiem una bola de l’urna A, si surt 3, 4, 5 o 6 extraïem una bola de l’urna B.
    (a) Troba la probabilitat que la bola extreta sigui vermella.
    (b) Troba la probabilitat que la bola extreta sigui negra.
    (c) Troba la probabilitat que la bola extreta sigui groga.
    (d) Comprova que la suma de les tres probabilitats anteriors és 1.

33. Un sistema de comunicacions admet només dos senyals que anomenarem 0 i 1. Un estudi tècnic estadístic ha donat els resultats següents: la probabilitat d'emetre el senyal 0 és 0.4; la probabilitat que, emès un 0, es produeixi error de transmissió i, per tant, es rebi 1 és 0.1 i la probabilitat que emès 1, es rebi 0 és 0.2. Amb aquestes dades, calcula:

    (a) la probabilitat de rebre 0.

    (b) la probabilitat de rebre un error de transmissió.

    (c) la probabilitat que s'hagi emès 0 sabent que s'ha rebut 1.

34. El jardiner del senyor Pol no és de confiança, de manera que quan marxa de viatge la probabilitat que no se'n recordi de regar el roser és $\frac{2}{3}$. De totes maneres el roser està en condicions dubtoses; si se'l rega la probabilitat que es mori és $\frac{1}{2}$, si no se'l rega la probabilitat que es mori és $\frac{3}{4}$. Quan el senyor Pol torna a casa troba el roser mort. Quina és la probabilitat que el jardiner no hagi regat el roser?

35. D'un cistell en el qual hi ha 20 figues, 4 de les quals estan podrides, en cau una dins un altre cistell on n'hi havia 6 de podrides i 18 de bones. Si ara traiem a l'atzar una figa del segon cistell i no està podrida, quina és la probabilitat que la figa que havia caigut del primer cistell fos bona?

36. A l'institut, el 4% dels nois i l'1% de les noies mesuren més de 180 cm. A més, el 60% dels estudiants són nois. Si triem a l'atzar un estudiant i resulta tenir una estatura superior a 180 cm, quina és la probabilitat que sigui una noia?

37. Una caixa A té 9 boles de l'1 al 9 i una caixa B cinc boles numerades de l'1 al 5. S'agafa una de les caixes a l'atzar i es treu una bola. Si el número de la bola és parell, quina és la probabilitat que hagi sortit de la caixa A?

38. Cadascun dels tres submarins A, B i C dispara un torpede contra un vaixell. La probabilitat que cada un d'ells l'enfonsi és, independent dels altres, 0.5, 0.4 i 0.3 respectivament.

    (a) Calcula la probabilitat que el vaixell no sigui enfonsat.

    (b) Calcula la probabilitat que el vaixell sigui enfonsat per un sol submarí.

    (c) Calcula la probabilitat que el vaixell sigui enfonsat per dos submarins.

    (d) Calcula la probabilitat que el vaixell sigui enfonsat pels tres submarins.

    (e) Suposant que hagi estat enfonsat per un sol submarí, quina és la probabilitat que ho hagi fet el submarí A?

39. Una caixa A conté 3 boles vermelles i 2 de blanques i una caixa B en té 2 de vermelles i 5 de blanques. Triem una caixa a l'atzar, s'agafa una bola i es fica a l'altra caixa. Després es treu una bola de la segona caixa. Quina és la probabilitat que les dues boles extretes siguin del mateix color?

40. Una caixa A té 8 objectes dels quals 3 són defectuosos i una caixa B en té 5 dels quals dos són defectuosos. S'agafa a l'atzar un objecte de cada caixa:

    (a) quina és la probabilitat que ambdós no siguin defectuosos?

    (b) quina és la probabilitat que un sigui defectuós i l'altre no?

    (c) si un objecte és defectuós i l'altre no, quina és la probabilitat que el defectuós hagi sortit de la caixa A?

41. Un 20% dels estudiants d'una universitat no utilitza el transport públic per anar a classe i un 65% dels que sí que l'utilitzen, també fan ús del menjador universitari. Troba la probabilitat que, si se selecciona a l'atzar un estudiant d'aquesta universitat, resulti ser usuari dels transports públics i del menjador universitari.

42. En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la perifèria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la perifèria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbà. Es tria a l'atzar un resident de la població.

    (a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat?

    (b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

    (c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat?

43. De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$P(B|A) = 0.9 \quad P(A|B) = 0.2 \quad P(A) = 0.1$$

    (a) Calcula $P(A \cup B)$ i $P(B)$.

    (b) Són els esdeveniments A i B independents? Raona la resposta.

    (c) Calcula $P(A \cup \overline{B})$.

44. En un supermercat s'ha estudiat el nombre de clients que compren tres productes A, B i C. S'ha obtingut que un 14% dels clients compra el producte A i un 12% compra el producte B. A més, un 4% compra A i B, un 2% compra A i C i cap client que compre C compra també B. Quants clients compren únicament el producte B? Sabent que un client ha comprat A, quina és la probabilitat que també hagi comprat C però no B?

45. En un procés de fabricació de mòbils es detecta que el 2% surten defectuosos. S'utilitza un dispositiu per a detectar-los que resulta que detecta el 90% dels mòbils defectuosos, però assenyala com defectuosos un 1% que no ho són.

    (a) Calcula la probabilitat que sigui correcte un mòbil que el dispositiu ha qualificat com defectuós.

    (b) Calcula la probabilitat que sigui defectuós un mòbil que el dispositiu ha qualificat com correcte.