Geometria analitica e coniche

Lavoro di gruppo

3BM 2023

IIS MARCONI PIERALISI
Istituto Istruzione Superiore Jesi

ANDREONI Luca
LONZI Martina
RINALDI Michele
ROMAGNOLI Lorenzo

Geometria analitica e coniche

Geometria analitica

Retta

Coniche

Parabola

Circonferenza

Ellisse e iperbole

FONTI

Geometria analitica

Geometria Analitica

La Geometria Analitica è il ramo della geometria in cui le varie figure vengono espresse mediante espressioni algebriche per mezzo di un sistema di assi e coordinate.

In pratica è la fusione tra algebra e geometria: si risolvono problemi geometrici utilizzando l'algebra, rendendone così più semplice e agevole la risoluzione.

Cartesio

Il padre della geometria analitica fu René Descartes, detto Cartesio
Per Cartesio la geometria del tempo era confusa e oscura… Necessitava di ordine sia nella sua struttura che nel simbolismo.
Nell'opera «Discorso sul Metodo» del 1637, Cartesio dà una struttura razionale e rigorosa alla geometria, mediante l'utilizzo di un astratto sistema di coordinate: IL PIANO CARTESIANO.

Buona parte dei ragionamenti che sviluppiamo e dei simboli che vengono utilizzati, derivano da Cartesio

I vantaggi

Alcuni tra i vantaggi della Geometria Analitica rispetto a quella classica sono i seguenti:

- Problemi visivi risolvibili mediante calcoli algebrici semplici.
- Studio più sistematico delle coniche.
- Simbologia più chiara e standardizzata.
- Possibilità di risolvere problemi geometrici senza bisogno di conoscere le misure delle figure.

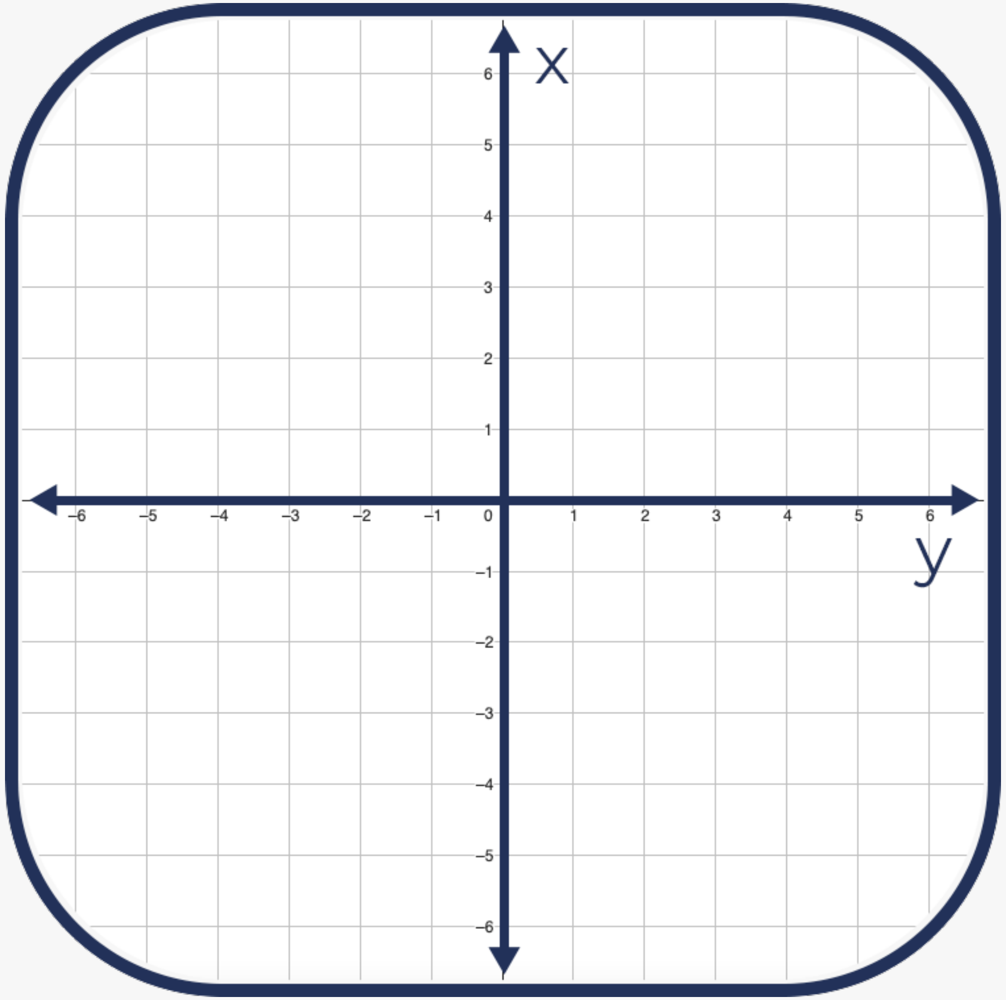
Il piano Cartesiano

Geometria
analitica

Tutto il discorso si basa sul piano cartesiano

Ogni punto sul piano è determinato da una coppia di coordinate:
l’ascissa (coordinata x) e l’ordinata (coordinata y).
Esse rappresentano rispettivamente la traslazione orizzontale e verticale del punto rispetto all’origine degli assi

Ogni figura geometrica può essere vista come l’insieme dei punti P(x,y) del piano, le cui coordinate sono soluzione dell’equazione (in due incognite) che rappresenta tale figura.



Distanza tra due punti

Trovare la distanza tra due punti P(Xp, Yp) e Q(Xq,Yq) corrisponde a calcolare la distanza del segmento che li congiunge.

Possono essere di 3 tipi:

- se il segmento PQ è orizzontale $d(P,Q) = |Xp - Xq|$
- se il segmento PQ è verticale $d(P,Q) = |Yp - Yq|$
- se il segmento PQ è obliquo
  si usa il teorema di pitagora $d(P,Q) = \sqrt{(Xp - Xq)^2 + (Yp - Yq)^2}$

Esercizio

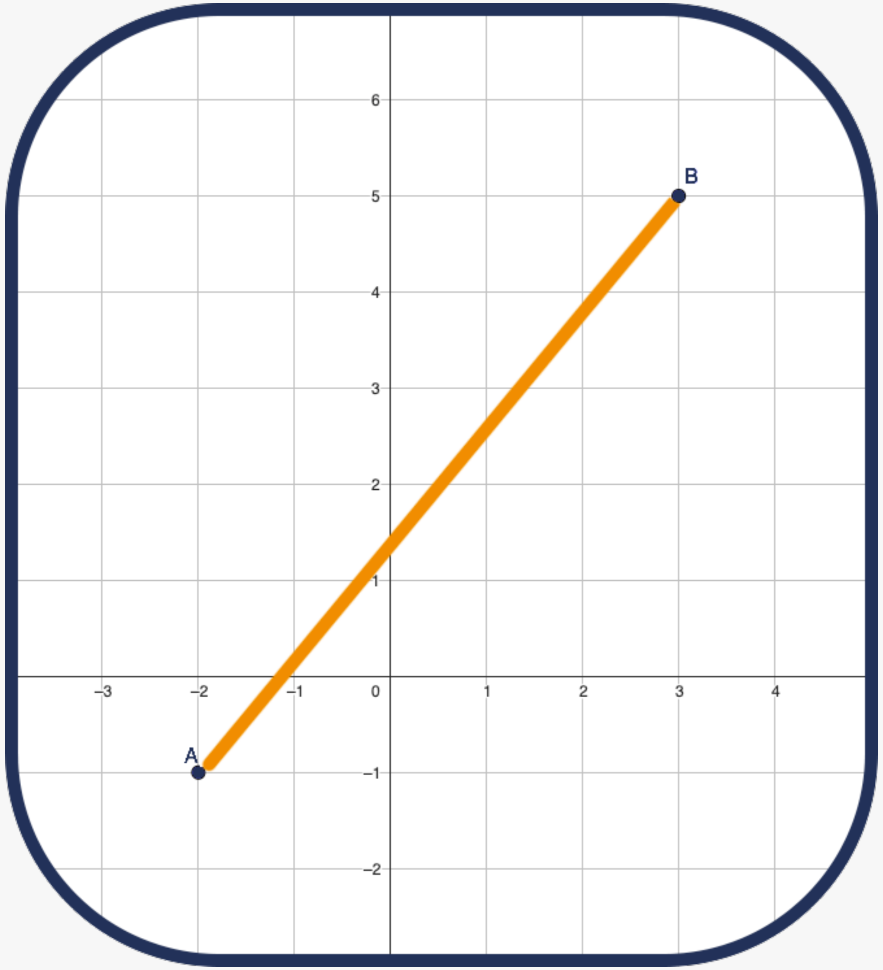
Trovare la distanza tra due punti A e B

A: (-2,-1)   B: (3,5)

$$d(A,B) = \overline{AB}$$

$$= \sqrt{\left(5-(-1)\right)^2 + (3-(-2)^2}$$

$$= \sqrt{36+25} = \sqrt{61} \approx 7{,}8$$



Retta

La retta

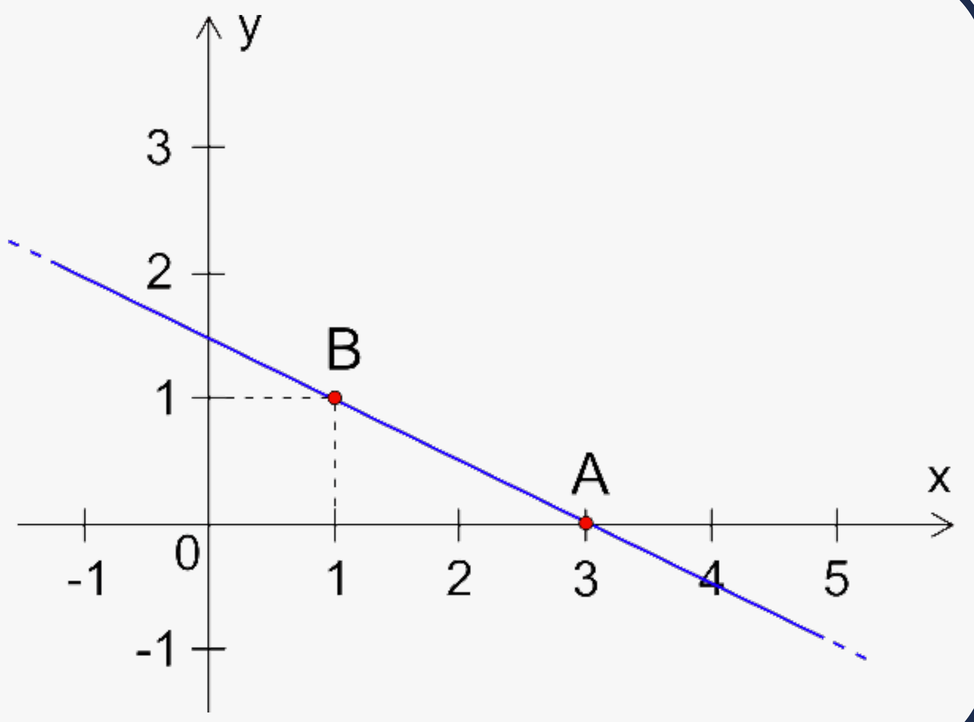
DEFINIZIONE

Una retta sul piano cartesiano è il luogo dei punti del piano che sono soluzione dell'equazione

$$ax + by + c = 0$$

con a, b, c € IR
a, b entrambi non nulli

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Equazione della retta in forma esplicita

$$y = mx + q$$

con
m,q ∈ R

m si chiama **coefficiente angolare** e stabilisce l’inclinazione della retta rispetto l’asse x.

se $m>0$	→	retta crescente
se $m=0$	→	retta orizzontale
se $m<0$	→	retta discendente

q si chiama **intercetta** e stabilisce il punto in cui la retta interseca l’asse y.

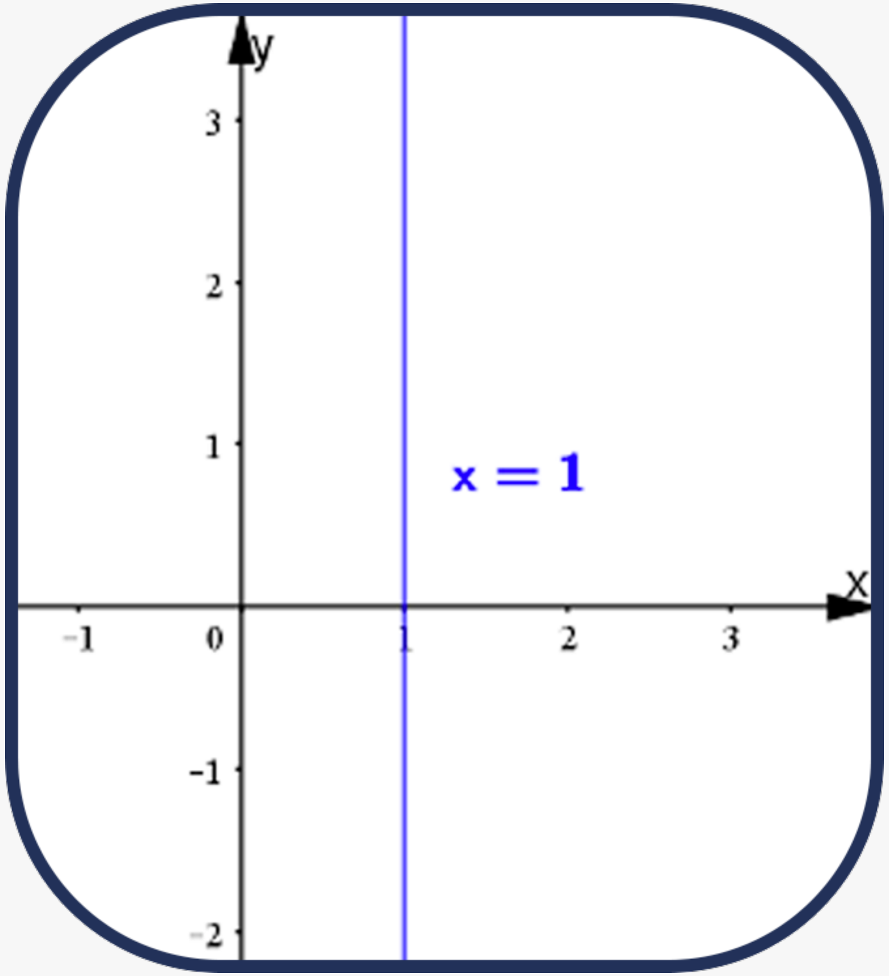
Rette particolari

Le rette **verticali** hanno equazione:

$$x = N$$

con
N ∈ R

N rappresenta il punto
in cui la retta interseca l'asse x.



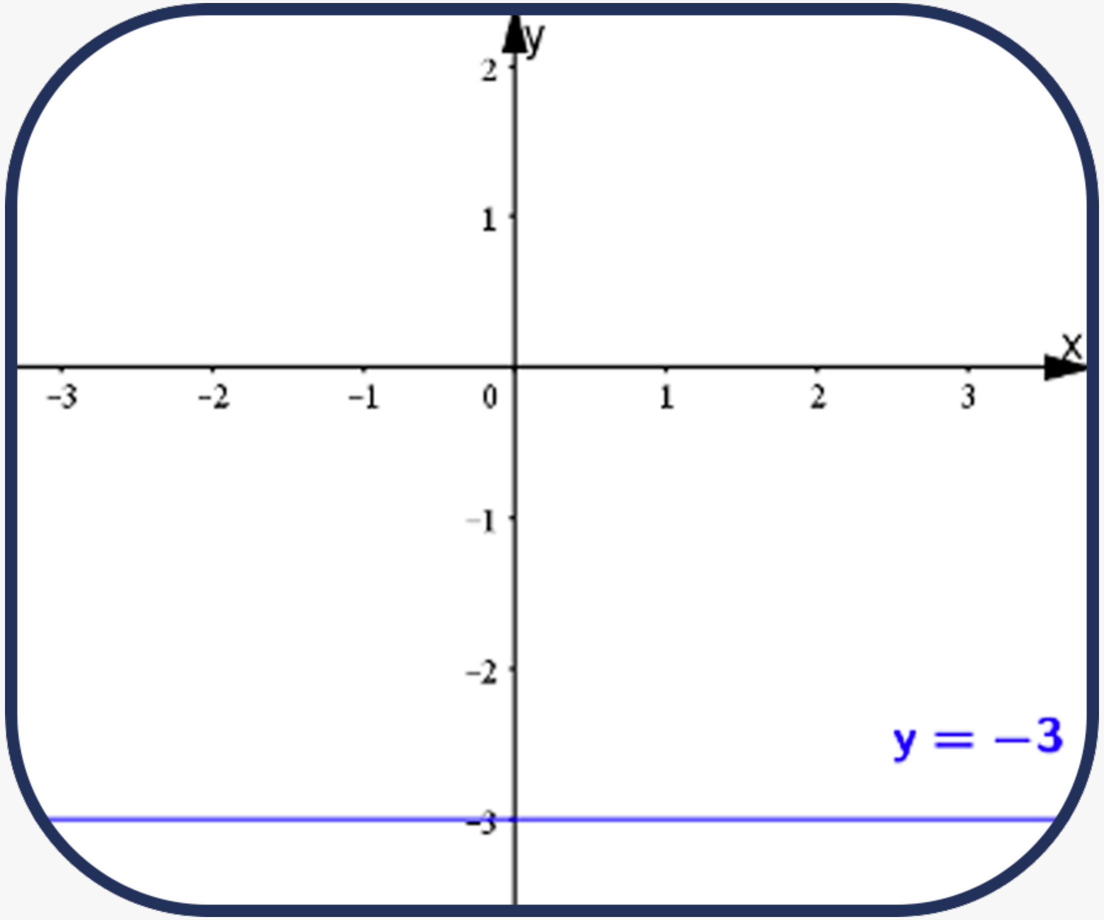
Rette particolari

Le rette **orizzontali** hanno equazione:

$$y = N$$

con
$N \in R$

N rappresenta il punto
in cui la retta interseca l'asse y.



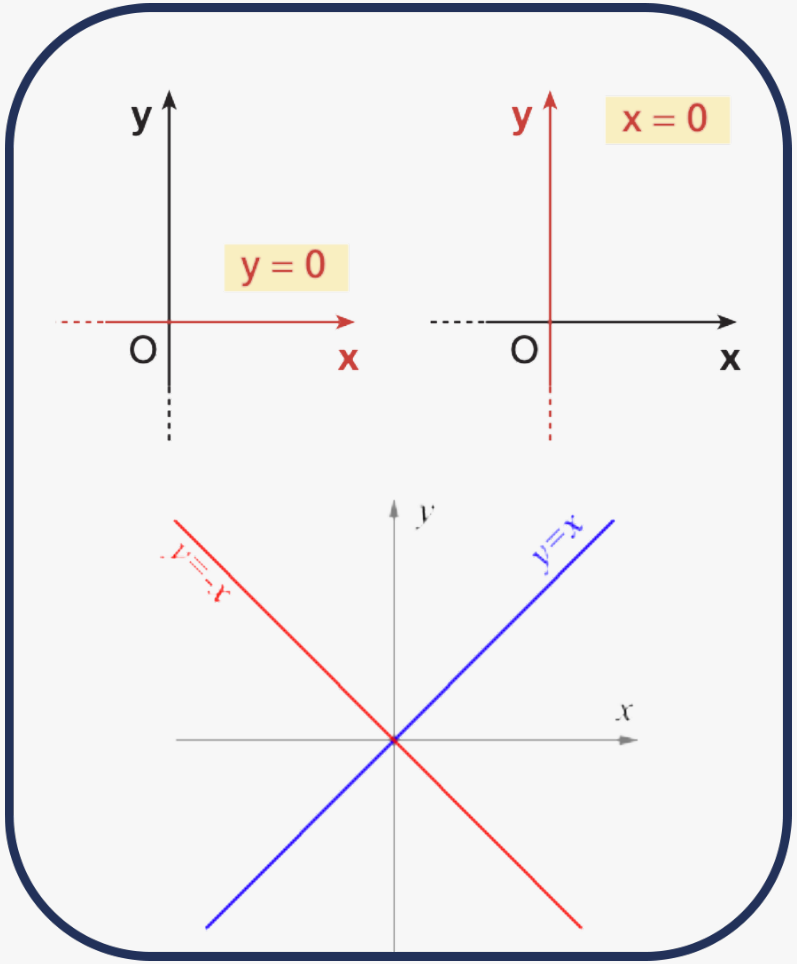
Rette speciali

Asse X: $y = 0$

Asse y: $x = 0$

Bisettrice I e III quadrante: $y = x$

Bisettrice II e IV quadrante: $y = -x$

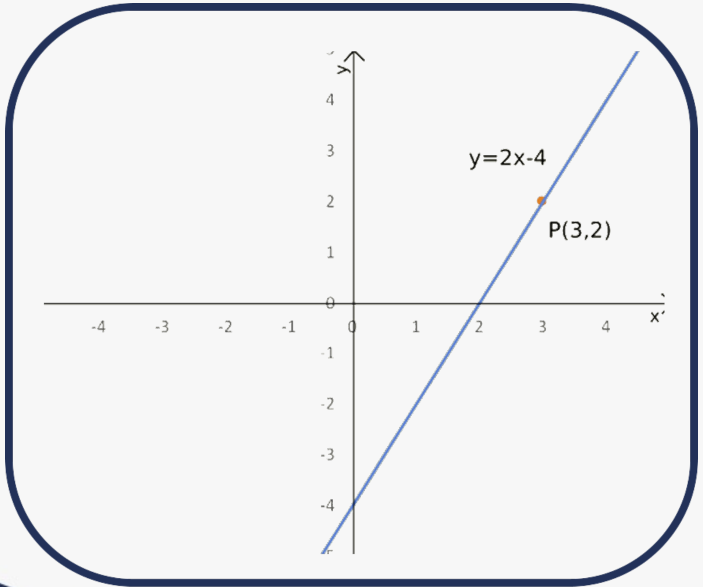


Capire se un punto appartiene ad una retta

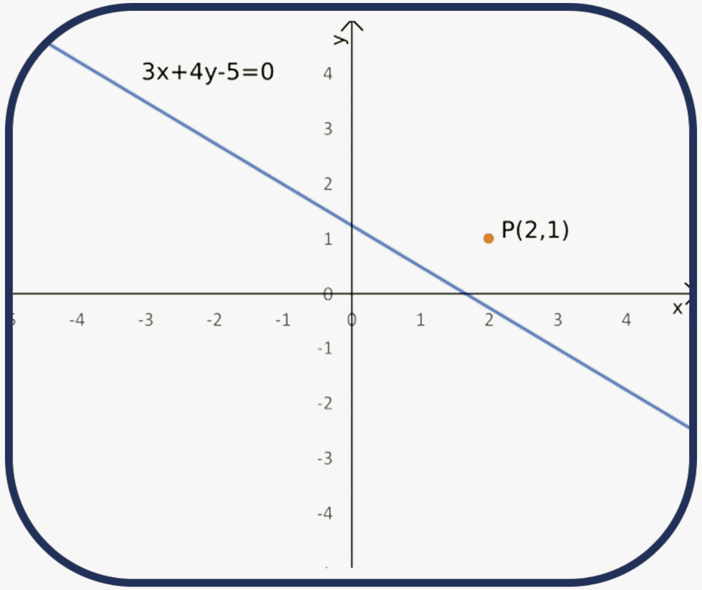
Un punto appartiene ad una retta, se le sue coordinate sono soluzioni dell'equazione della retta.

Se sta sulla retta si dice che appartiene ad essa, altrimenti si dice che non appartiene ad essa.

APPARTIENE



NON APPARTIENE



Capire se due rette sono parallele o perpendicolari

Abbiamo visto che il coefficiente angolare di una retta rappresenta la sua pendenza.
Quindi parallelismo e perpendicolarità dipendono da m.

Date due rette: $$r\colon\ y = m_r x + q_r$$

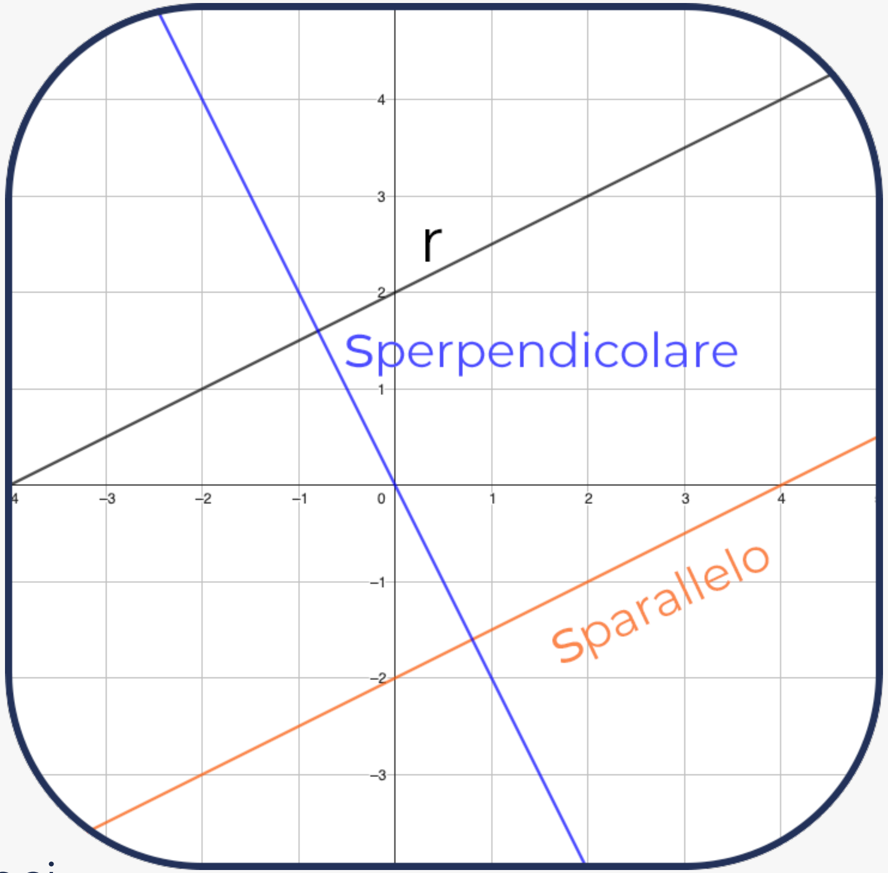
$$s\colon\ y = m_s x + q_s$$

r è parallela a s se hanno lo stesso coefficiente angolare

$$r || s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

$\| \, s \quad \Leftrightarrow \quad m_r = m_s$e a s se hanno coefficienti angolari antireciproci

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r = 1/m_s$$



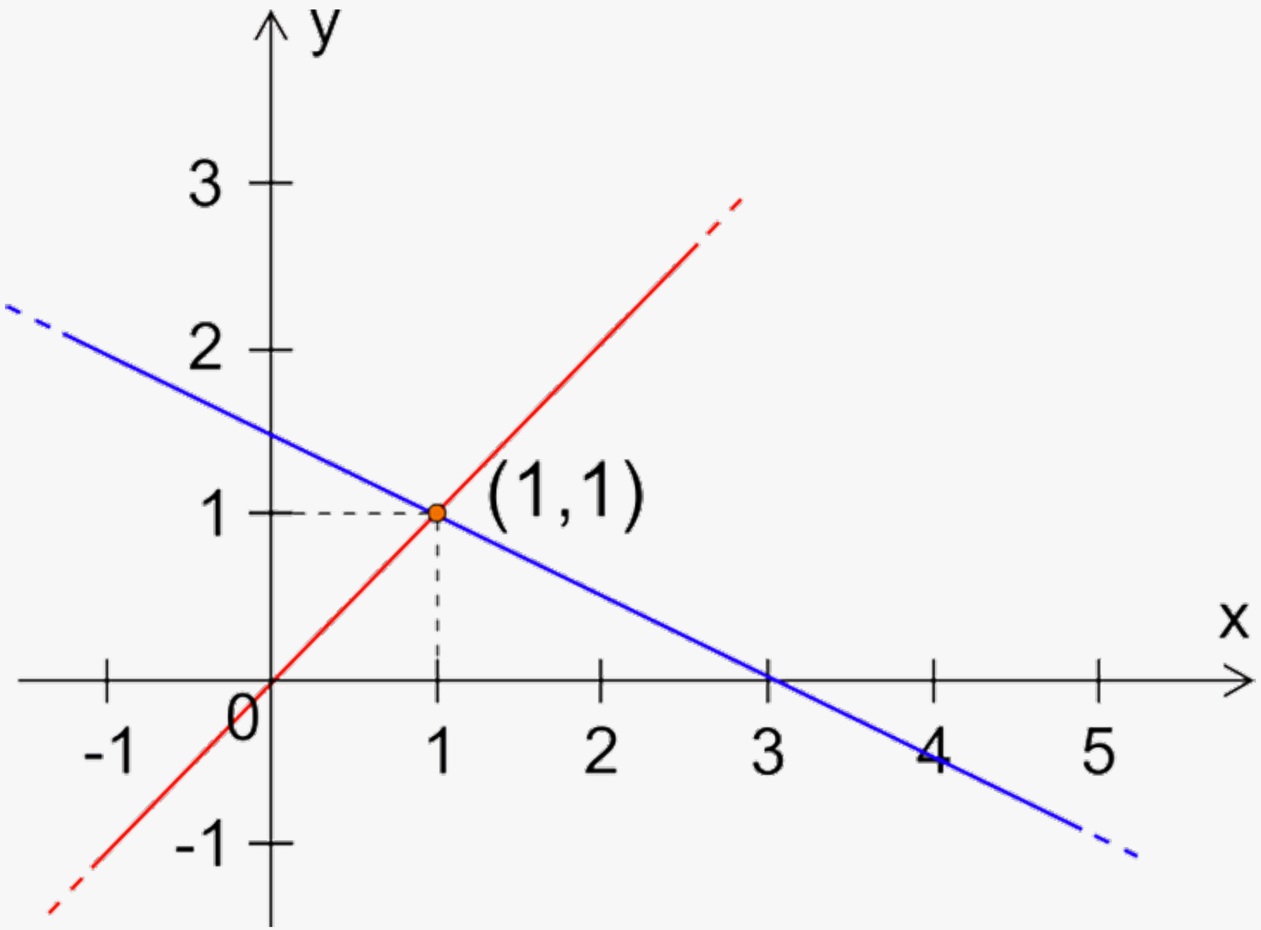
Punto d'intersezione tra due rette

Per trovare dove due rette si intersecano basta mettere a sistema le loro equazioni e risolverle:

Punto d’intersezione tra due rette

se il sistema è determinato
ed ho un’unica soluzione

le rette sono **incidenti**

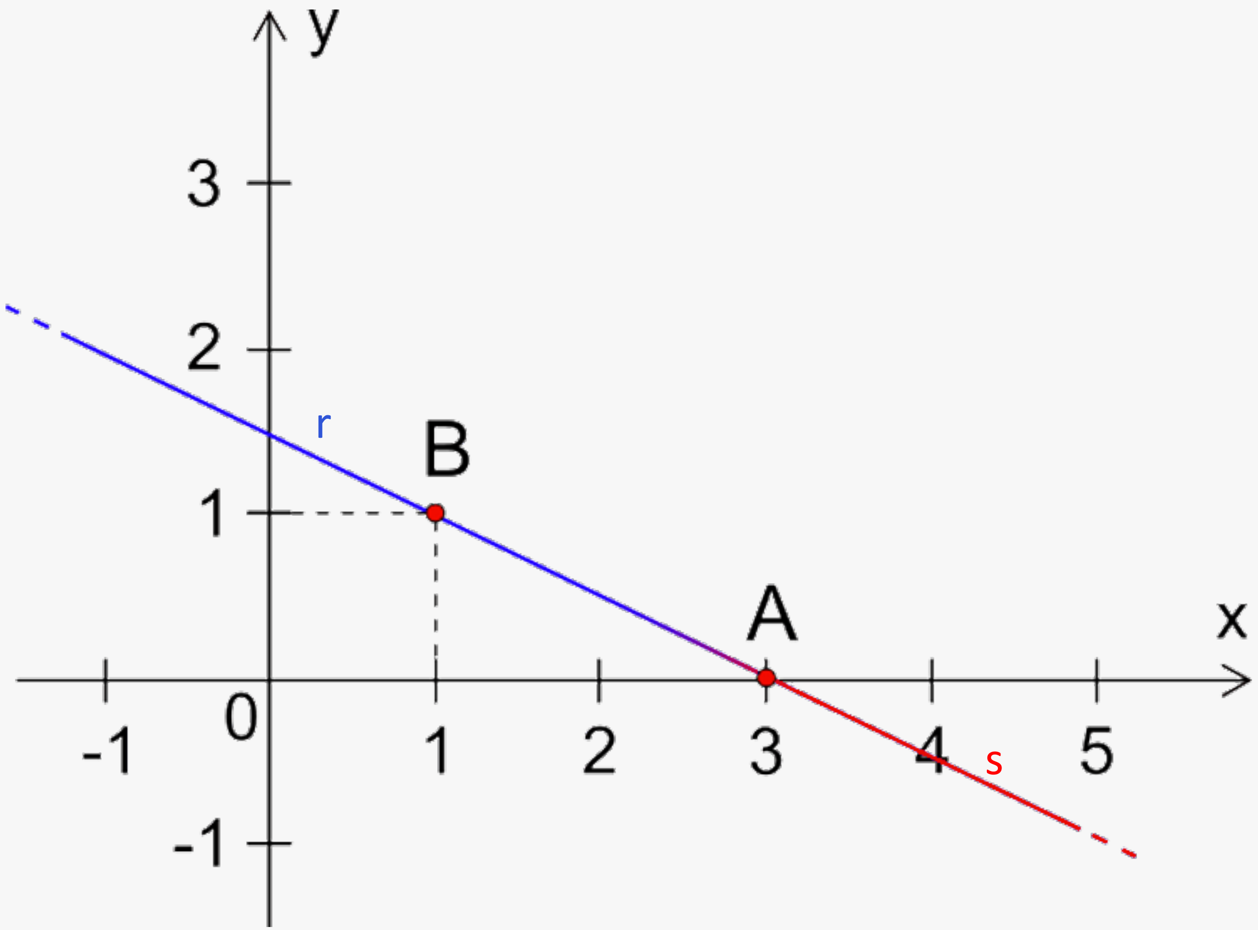


Punto d'intersezione tra due rette

Retta

se il sistema è indeterminato
ed ho infinite soluzioni

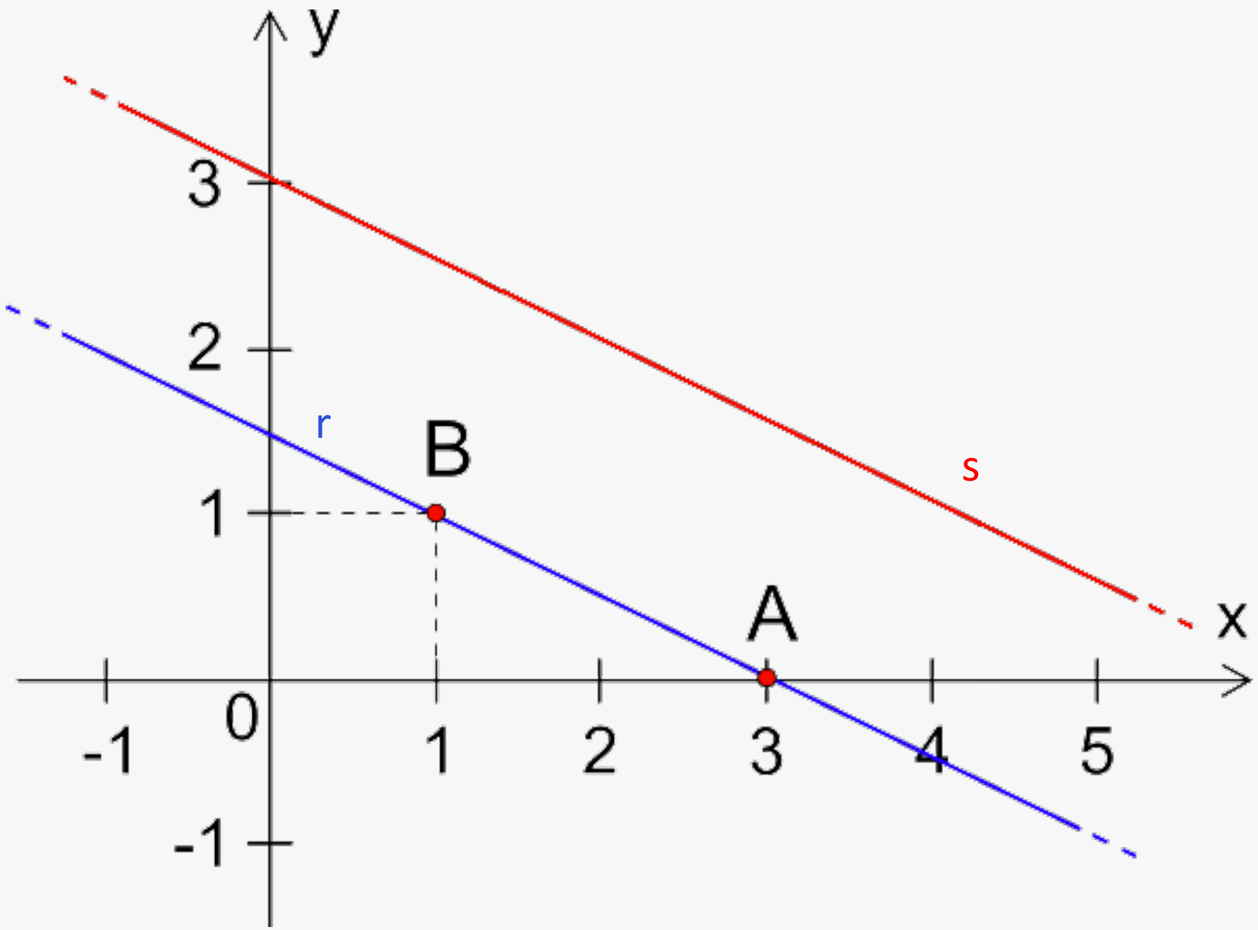
le rette sono **coincidenti**



Punto d’intersezione tra due rette

se il sistema è impossibile
e non ho soluzioni

le rette sono **parallele**



Esercizio

Trovare i punti di intersezione tra le rette

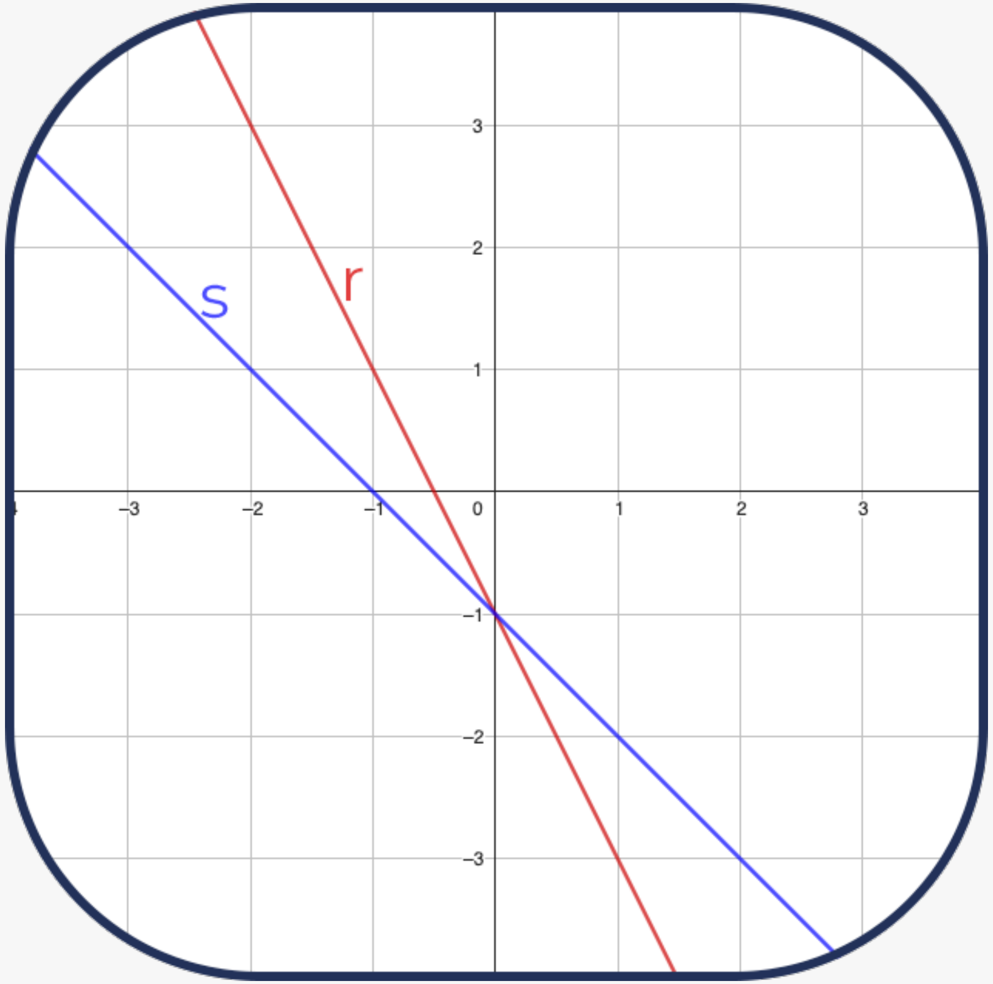
$$r\colon\ y = -2x - 1 \qquad s\colon\ y = -x - 1$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ -2x = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2(0) - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$



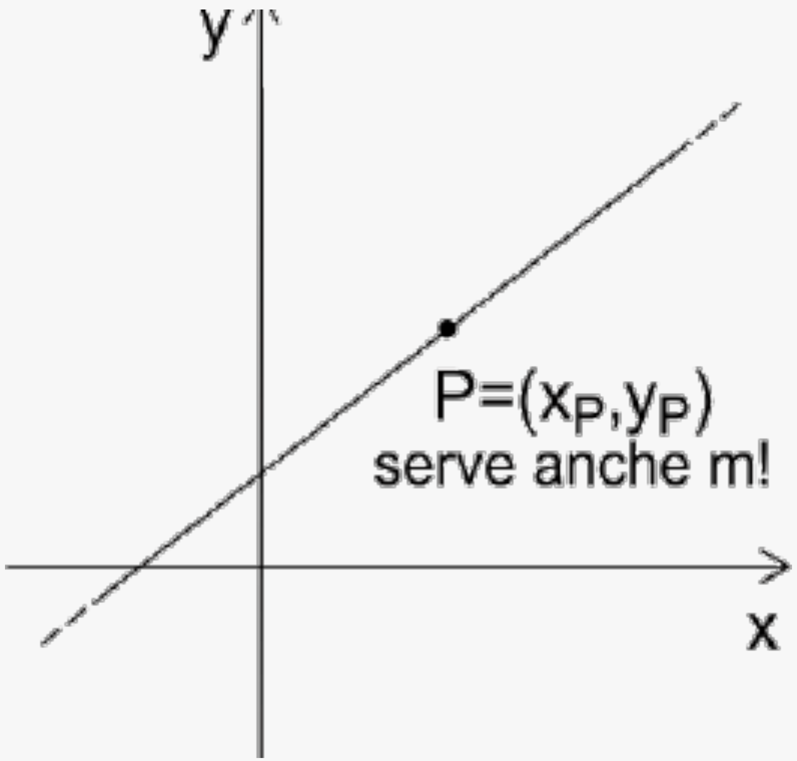
Le rette r e s sono incidenti e si intersecano nel punto P(0,-1)

Retta passante per un punto

Una retta passante per un punto ha equazione

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

dove $(x_p\,, y_p)$ sono le coordinate cartesiane del punto m, che è il coefficiente angolare della retta.



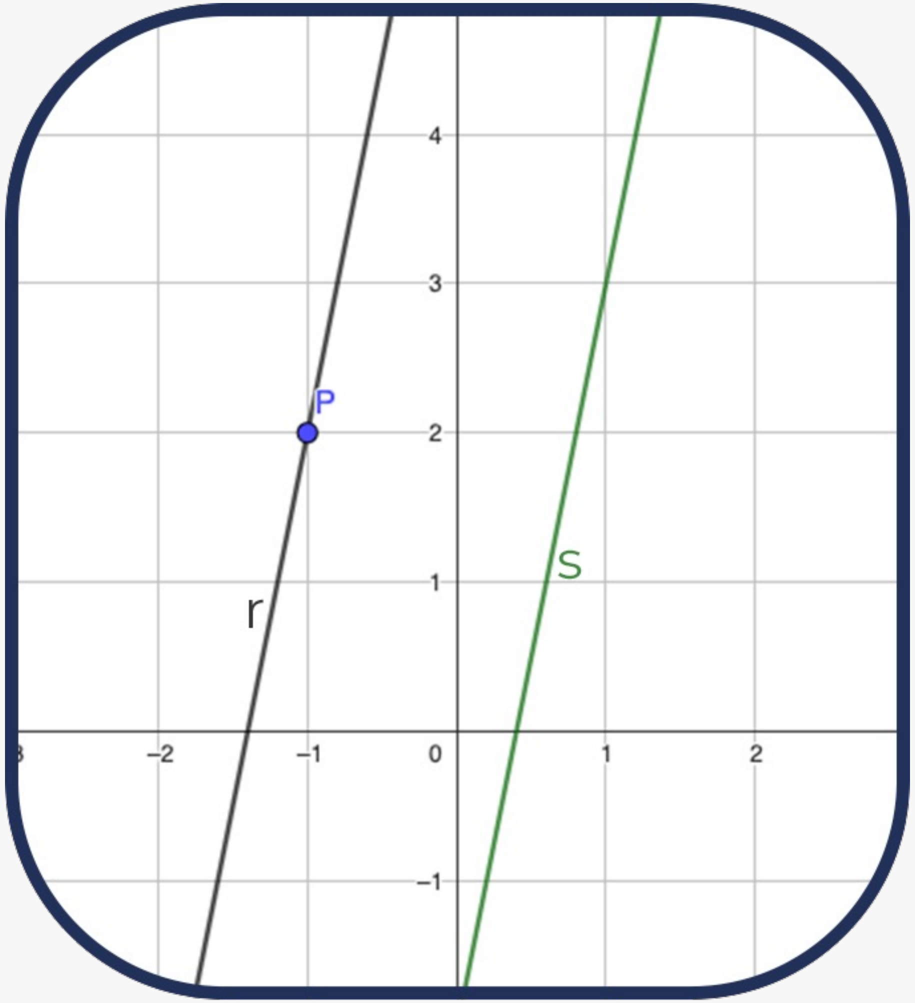
Esercizio

Retta

Trovare l'equazione della retta r passante per P e parallela a s.

P: (-1,2) $s: y = 5x - 2$

$$y - y_p = m(x - x_p)$$
$$y - 2 = 5(x - (-1))$$
$$y = 5x + 7$$



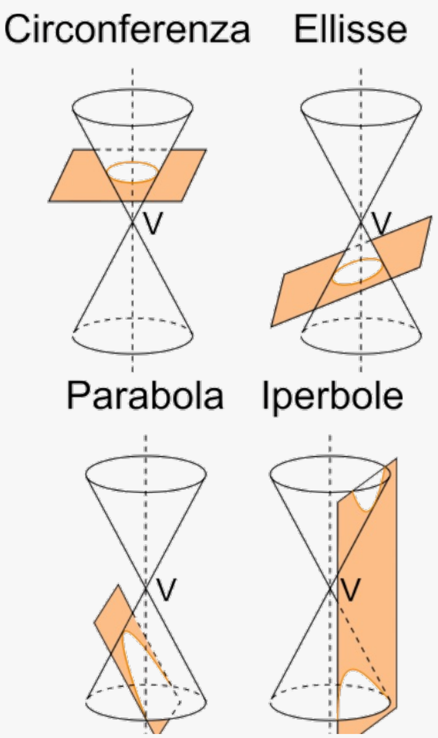
Coniche

Coniche

DEFINIZIONE

Le coniche sono delle particolari curve e si chiamano così perché si ottengono dall'intersezione di una superficie conica con un piano.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



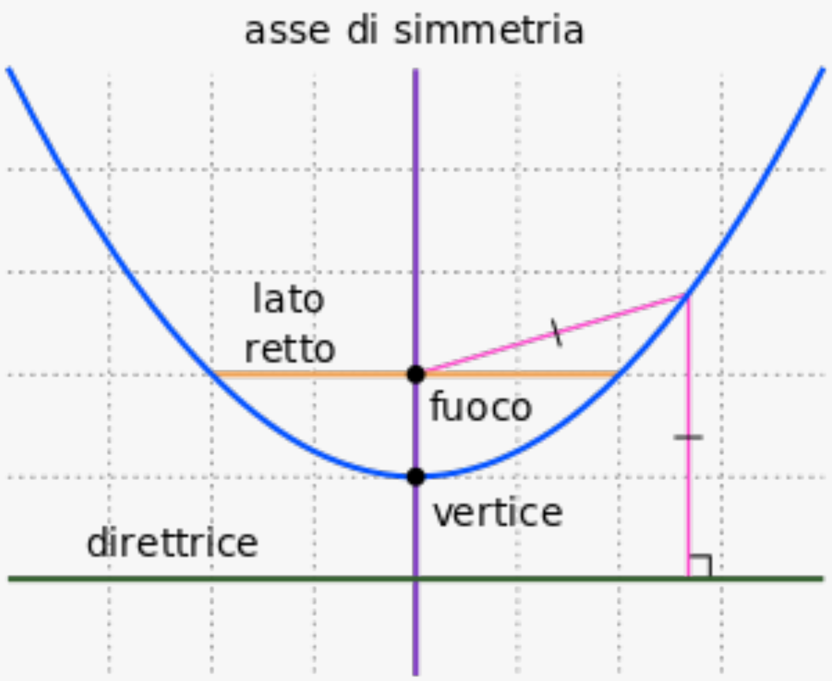
Parabola

Parabola

DEFINIZIONE

La parabola è una sezione conica che equivale al luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e ad una retta detta direttrice.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Equazione parabola in forma esplicita

$$y = ax^2 + bx + c$$

Il coefficiente **a** indica la concavità della parabola e la sua apertura.

Il coefficiente **b** indica la posizione dell'asse di simmetria rispetto all'asse y.
Se b ha lo stesso segno di a, l'asse di simmetria si trova a sinistra dell'asse y.

Il termine noto **c** indica il punto in cui la parabola interseca l'asse y.
Se il suo valore è 0, significa che la parabola passa per l’origine degli assi.

Formule

Coordinate del vertice:

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

Coordinate del fuoco:

$$\mathrm{F} = (-\frac{b}{2a}, -\frac{1-\Delta}{4a})$$

Equazione della direttrice:

$$\frac{\mathrm{d}}{y} = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

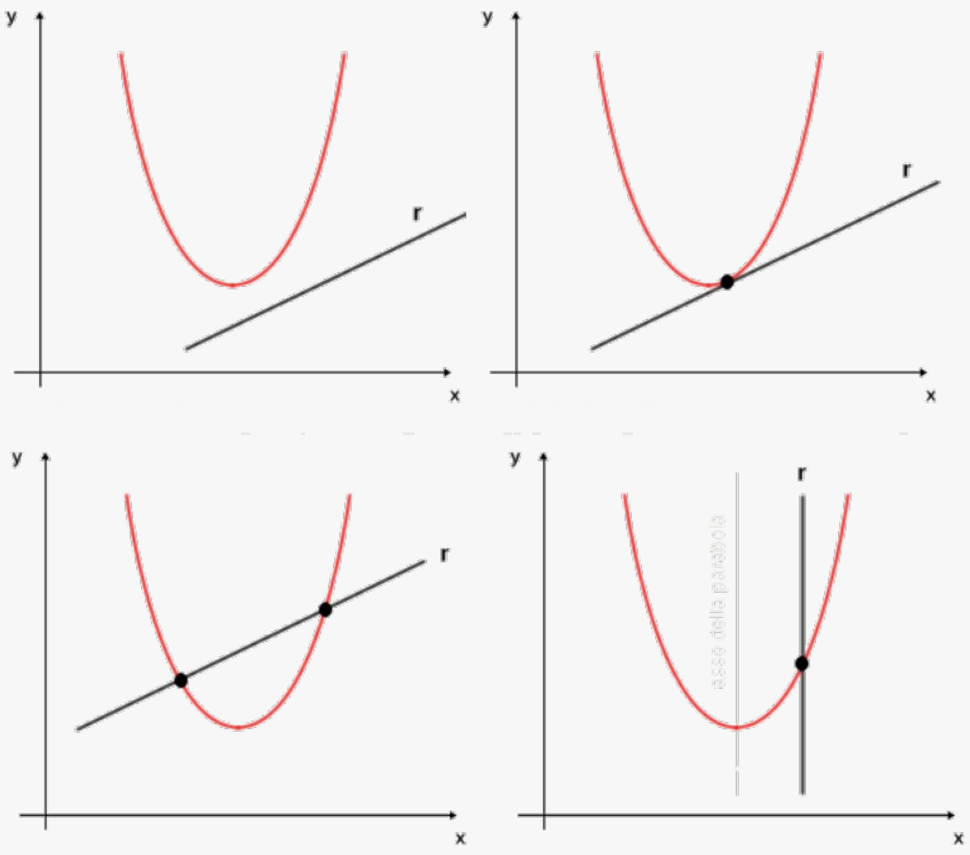
Equazione dell’asse di simmetria:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} = -\frac{b}{2a}$$

Posizione reciproca tra retta e parabola

Data una coppia retta-parabola nel piano cartesiano, abbiamo quattro possibili posizioni che la retta può assumere:

- **esterna**, se la retta non interseca la parabola
- **secante**, se interseca la parabola in due punti distinti A e B
- **tangente**, se c'è un unico punto di intersezione
- **secante parallela all'asse della parabola**, se la retta è parallela all'asse della parabola e la interseca in un solo punto P



Esercizio

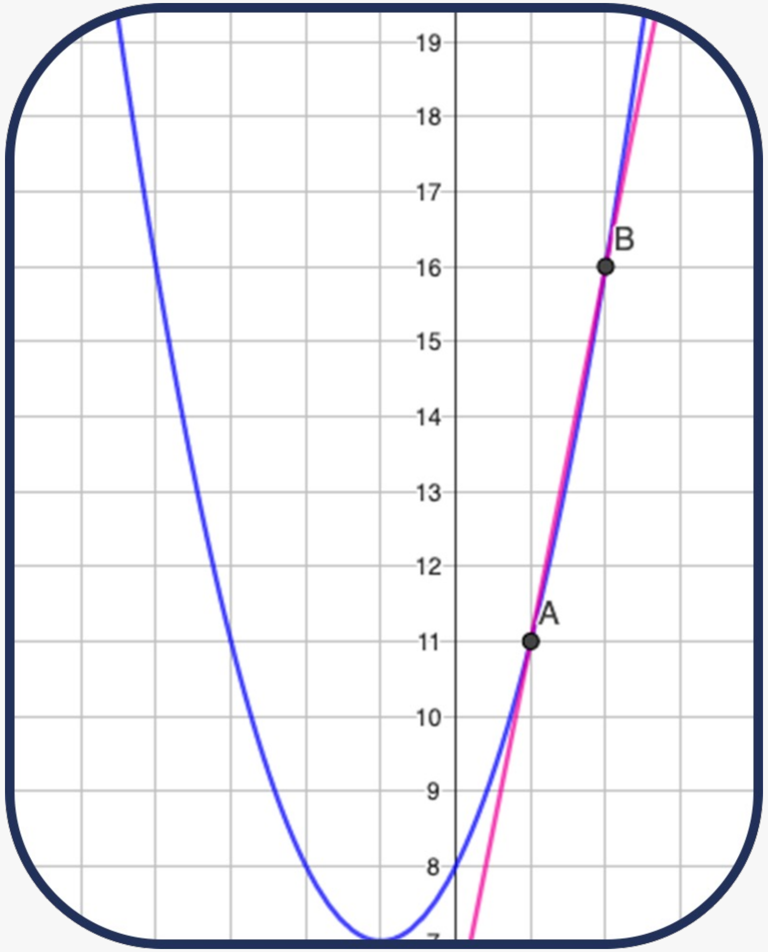
Trovare i punti di intersezione A e B tra una retta r ed una parabola e

$$r:\ \ y = 5x + 6 \qquad e:\ \ x^2 + 2x + 8$$

$$5x + 6 = \ x^2 + 2x + 8$$
$$x^2 + 2x + 8 - 5x - 6$$
$$x^2 - 3x + 2$$
$$\Delta = 9 \ - 8 = 1$$
$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P1 = 5(1) + 6 = 11$$
$$e \ \ 5(2) + 6 = 16$$

$$A = (1{,}11)$$
$$B = (2{,}16)$$



Esercizio

Trovare l'equazione di una parabola conoscendo un punto P e il vertice V

P: (1,3) V: (-2,1)

$$x - x_v = a(y - y_v)^2$$
$$x + 2 = a(y - 1)^2$$
$$1+2 = a(3 - 1)^2 \qquad a = \frac{3}{4}$$
$$x + 2 = \frac{3}{4}(y - 1)^2$$

$$\boxed{x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4}}$$

Esercizio

Trovare l'equazione di una parabola conoscendo un punto P e il vertice V

P: (1,3)   V: (-2,1)

$$x - x_v = a(y - y_v)^2$$
$$x + 2 = a(y - 1)^2$$
$$1+2 = a(3 - 1)^2 \qquad a = \frac{3}{4}$$
$$x + 2 = \frac{3}{4}(y - 1)^2$$

$$\boxed{x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4}}$$

Esercizio

Trovare l'equazione della parabola passante per tre punti A, B e C

A: (0,-2) B: (1,2) C: (-2,-4)

Imponiamo il passaggio per ognuno dei 3 punti sostituendo le coordinate dell'equazione della parabola:

-passaggio per A: $-2 = c$

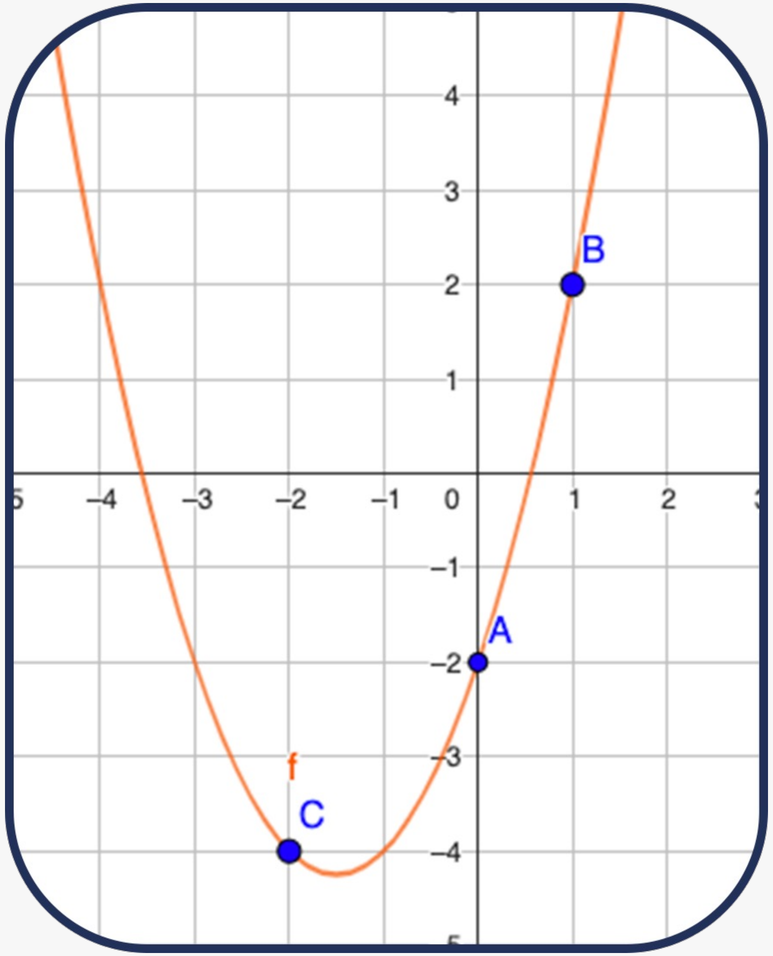
-passaggio per B: $2 = a + b + c$

-passaggio per C: $-4 = 4a - 2b + c$

$$\begin{cases} -2 = c \\ 2 = a + b + c \\ -4 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = 3$$

$$\boxed{y = x^2 + 3x - 2}$$



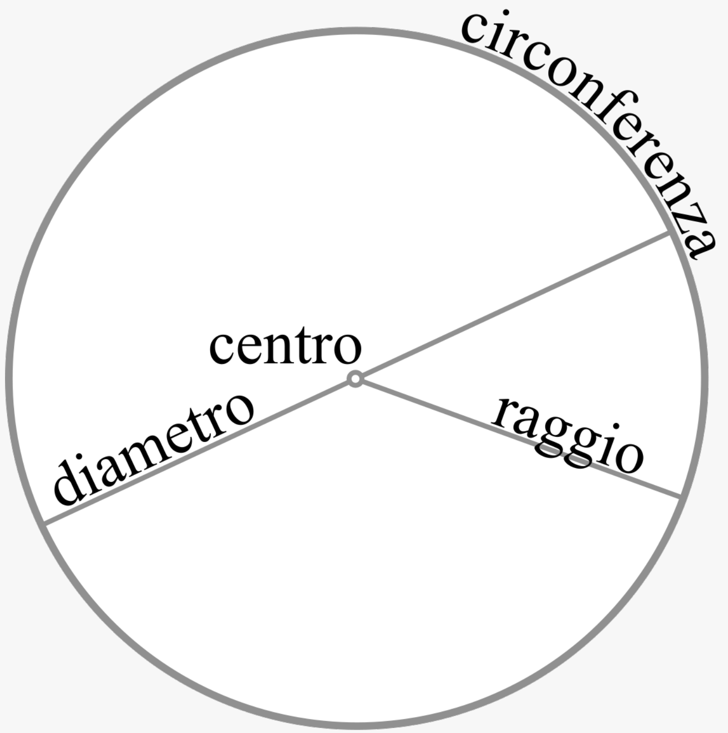
Circonferenza

Circonferenza

DEFINIZIONE

Si definisce circonferenza il luogo dei punti del piano equidistanti da un dato punto, detto centro della circonferenza; il valore della distanza dei punti dal centro viene detto raggio

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Equazione

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Equazione di una circonferenza dato centro e raggio, discendente dalla formula per la distanza tra due punti.

Equazione canonica

Partendo dalla precedente equazione e sviluppando i calcoli e riordinando i termini abbiamo:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

Se ora poniamo:

$$-2\alpha = a \quad ; \quad -2\beta = b \; ; \; \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

Otteniamo l'equazione canonica della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Centro e raggio

Data l’equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Otteniamo le formule per:

Centro

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\mathrm{b}}{2}\right)$$

Raggio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

Condizioni

Condizioni da soddisfare affinché un'equazione rappresenti una circonferenza:

- il termine misto xy deve essere assente
- devono essere presenti tutti e due i termini quadratici in x e y
- questi, portati dalla stessa parte dell'uguale, devono essere preceduti da coefficienti che siano numericamente uguali e che abbiano lo stesso segno.

Esempi:

$4x^2-8x+4y+1=0$	Manca y al quadrato
$4x^2-4y^2-8x+4y+1=0$	Coefficenti x^2 e y^2 opposti
$4x^2+2y^2-8x+4y+1=0$	Coefficenti x^2 e y^2 diversi

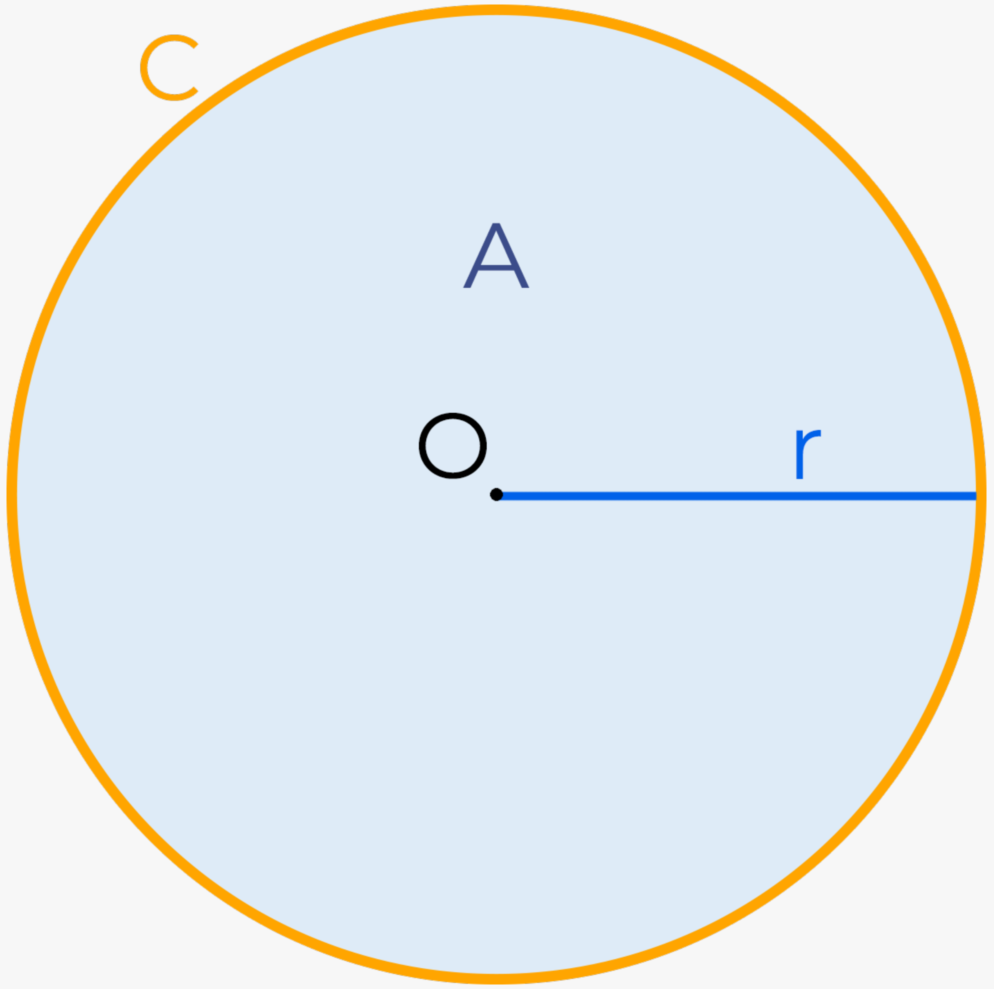
Circonferenza e Area

$$C = 2\pi r$$

Circonferenza

$$A = \pi r^2$$

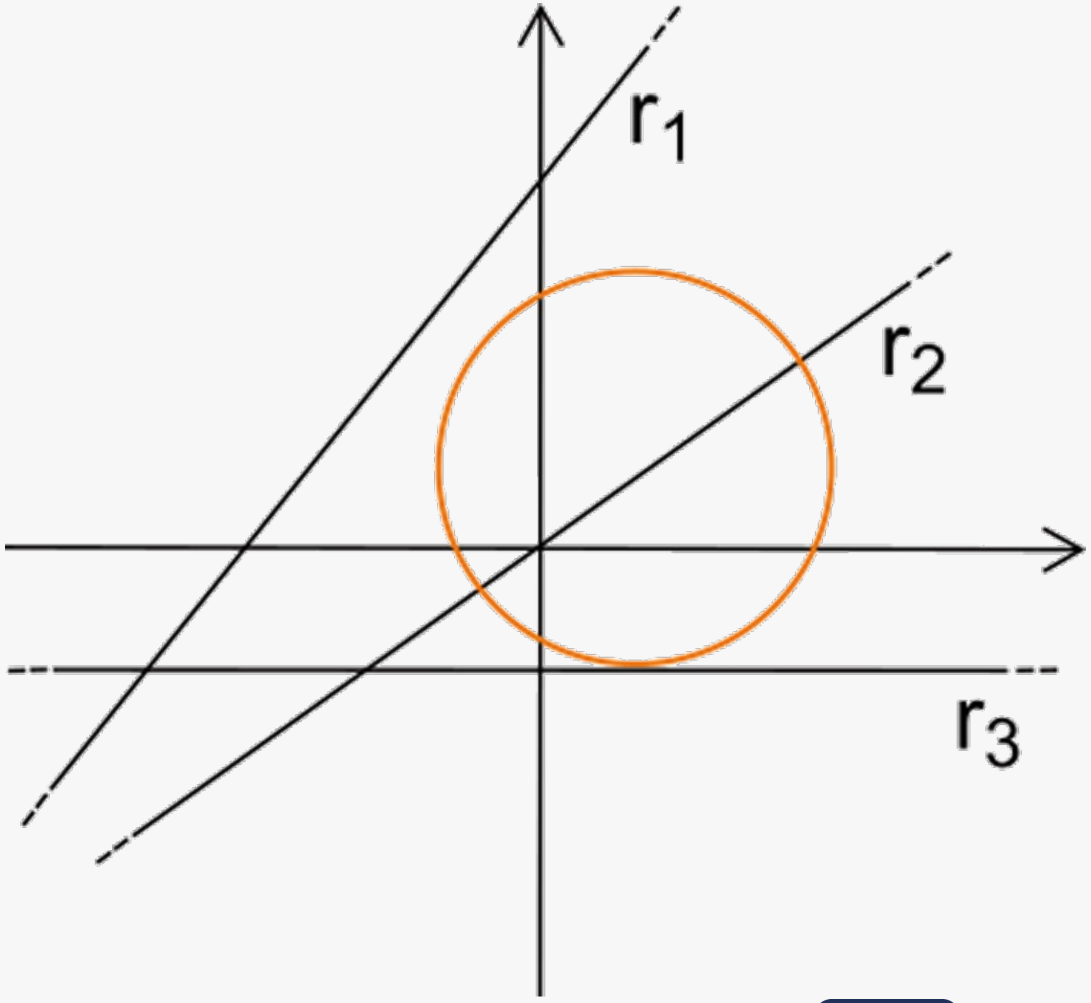
Area del cerchio



Posizione rette

La retta può assumere 3 posizioni rispetto alla circonferenza:

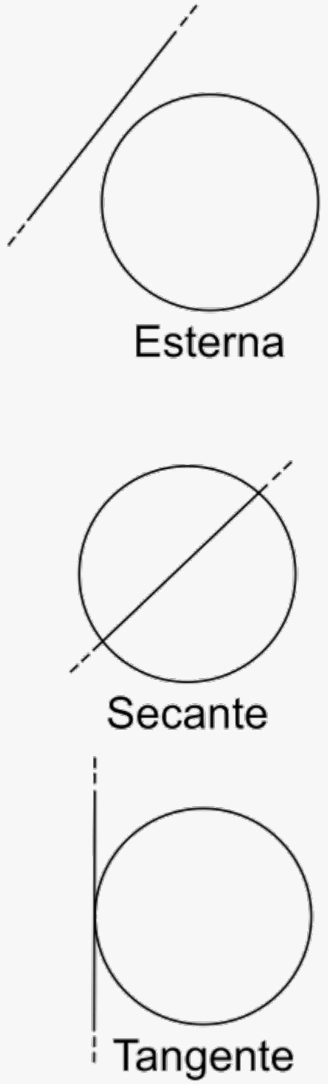
- **Esterna**: nessun punto di intersezione (r1)
- **Secante**: due punti di intersezione (r2)
- **Tangente**: un unico punto di intersezione (r3)



Punti di intersezione tra retta e circonferenza

Il numero di punti di intersezione tra retta e circonferenza equivale al numero di soluzioni dell'equazione di secondo grado risultante dal sistema con l'equazione della retta e della circonferenza.

- se $\Delta<0$ **esterna**, nessun punto di intersezione
- se $\Delta>0$ **secante**, due punti di intersezione
- se $\Delta=0$ **esterna,** un unico punto di intersezione



Esercizio

Dati una retta r e una circonferenza C trovare i punti di intersezione

$\mathrm{r}: y = 3x + 2 \qquad \mathrm{C}: x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$

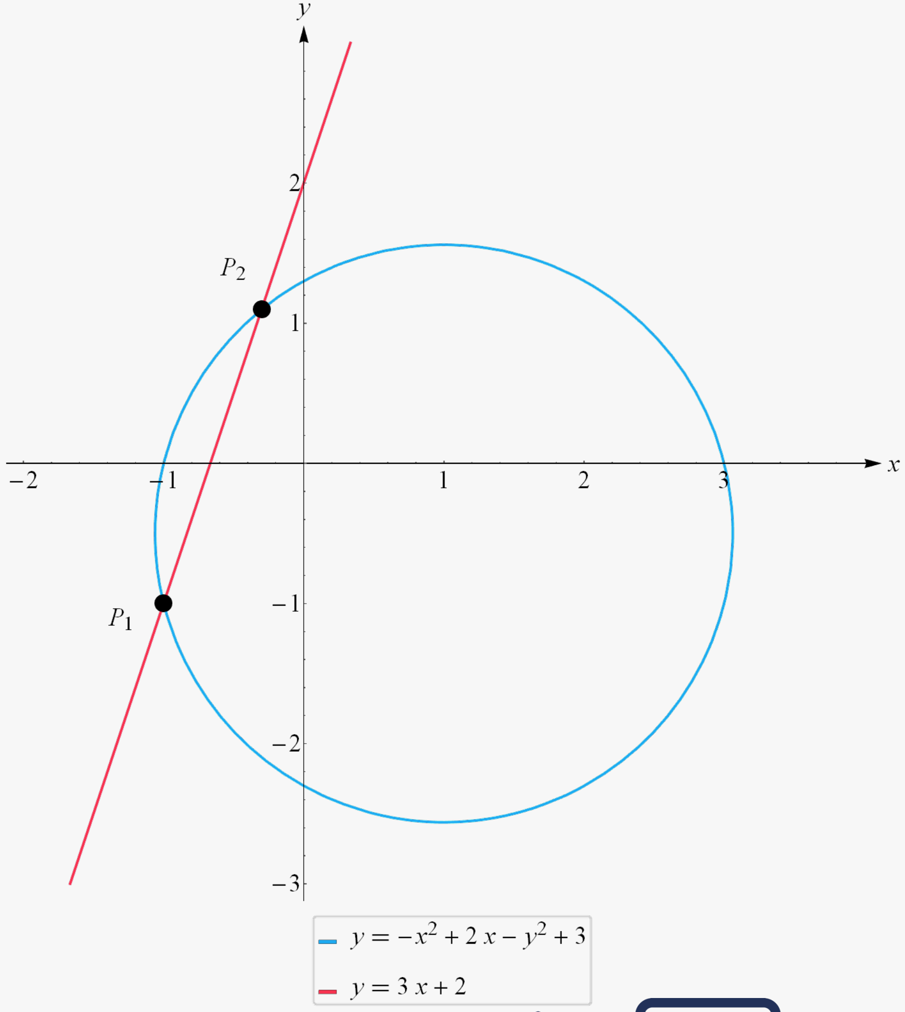
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

$10x^2 + 13x + 3 = 0$

$\Delta = 49$

$x = -1, \quad x = -\frac{3}{10}$

$P1(-1, -1) \quad P2\left(-\frac{3}{10}, \frac{11}{10}\right)$



Esercizio

Dati centro e raggio di una circonferenza trovare l'equazione

C: (2,3) $r = 5$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

$$x^2 + 4 - 4x + y2 + 9 - 6y = 25$$

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y - 25 = 0$$

Equazione trovata:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

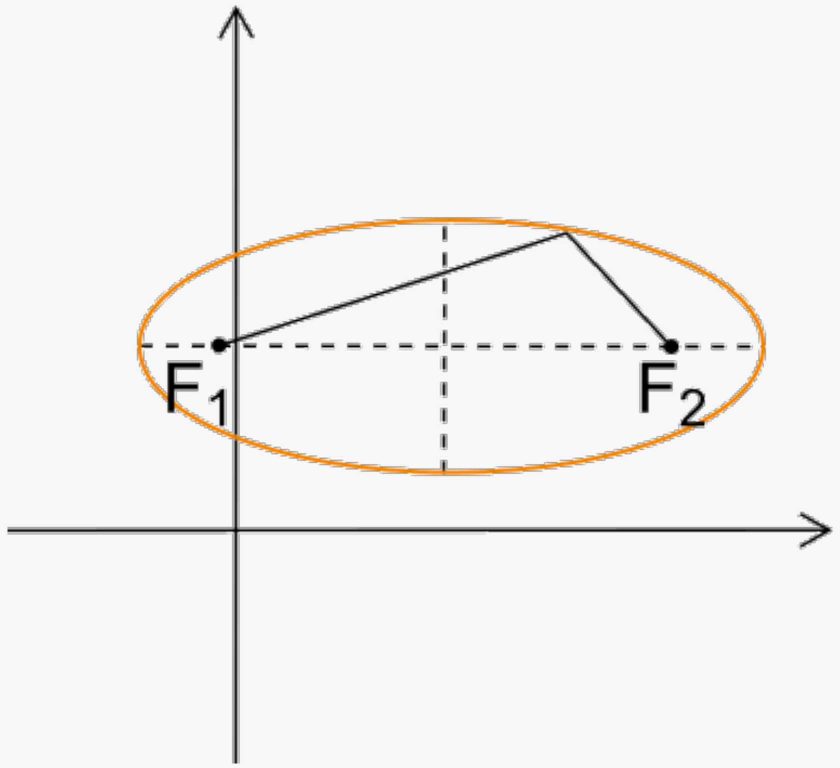
Ellisse e Iperbole

L'ellisse

DEFINIZIONE

Si definisce ellisse il luogo geometrico dei punti P del piano tali per cui è costante la somma delle distanze da due fuochi, ovvero due punti fissi F1 e F2.

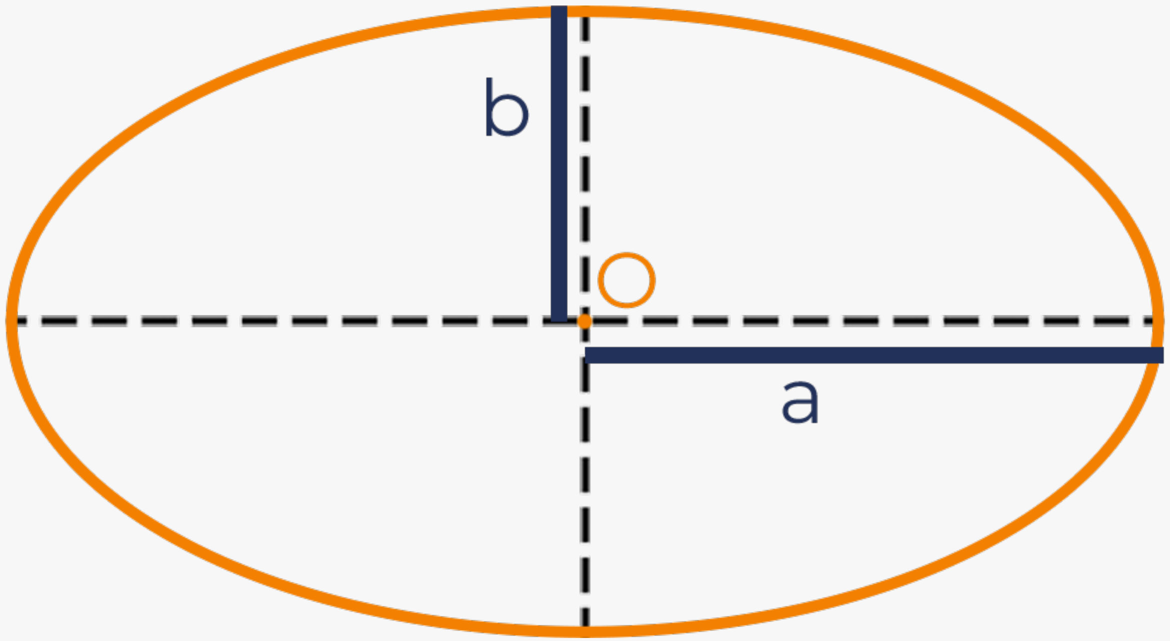
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Equazione di un ellisse dato il centro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con
a e b ≠ 0



Eccentricità dell’ellisse

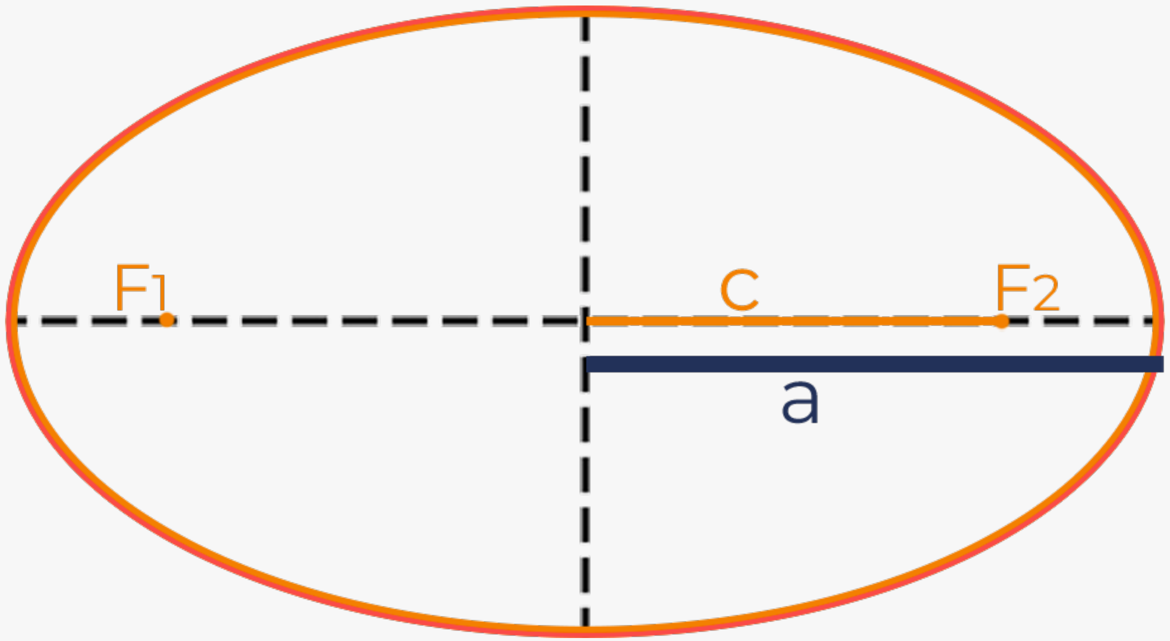
DEFINIZIONE

L’eccentricità di un’ellisse è il rapporto tra la semi distanza tra i due fuochi e la lunghezza dell'asse maggiore.
Può assumere valori tra 0 e 1, e misura quanto l’ellisse è schiacciata rispetto ai propri assi.

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

se
a > b



Posizione reciproca tra retta ed ellisse

Le intersezioni tra una retta e un ellisse si determinano risolvendo a sistema le loro equazioni, e indicando con Δ il discriminante dell'equazione risolvente il sistema.

Si possono presentare 3 casi differenti:
Retta secante, retta tangente o retta esterna.

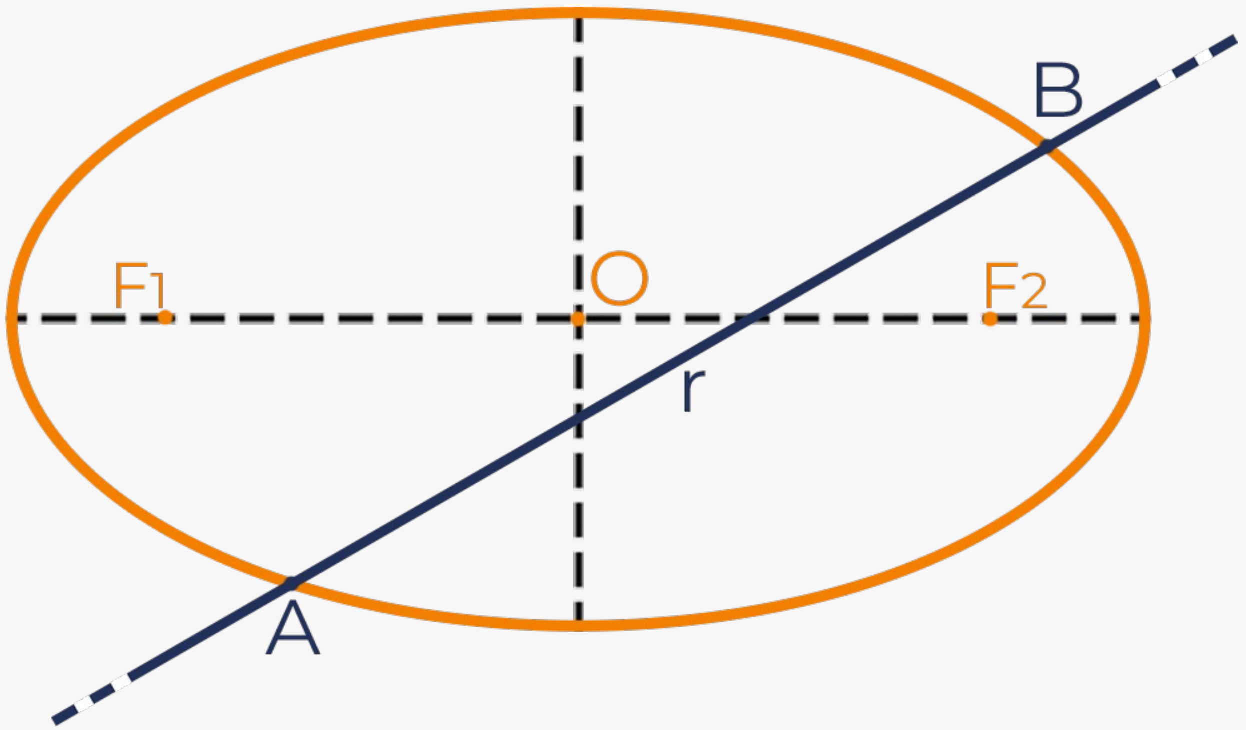
$$\begin{cases} y = mx + q \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Retta secante

se

$\Delta > 0$

Il sistema ha 2 soluzioni reali, la retta interseca l'ellisse in due punti A e B.

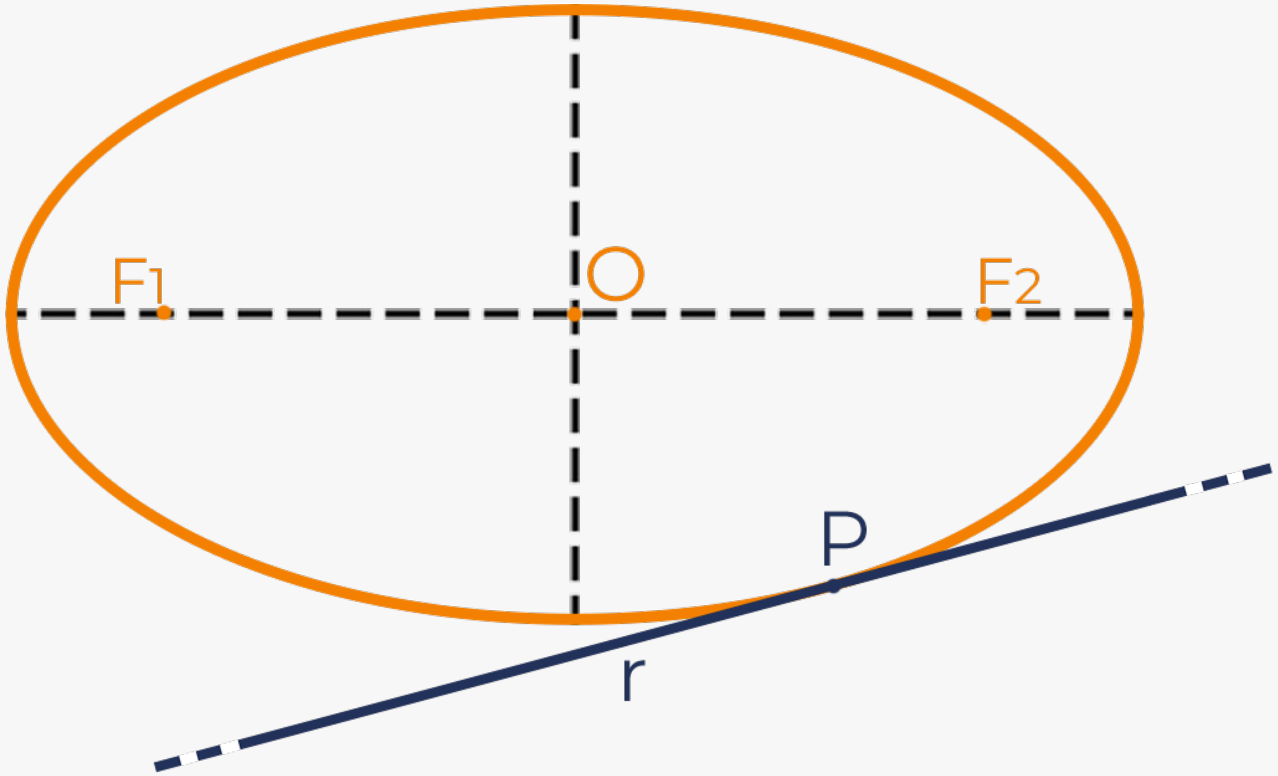


Retta tangente

se

$\Delta=0$

Il sistema ha 1 soluzione reale (2 coincidenti), la retta interseca l'ellisse solo in un punto P.

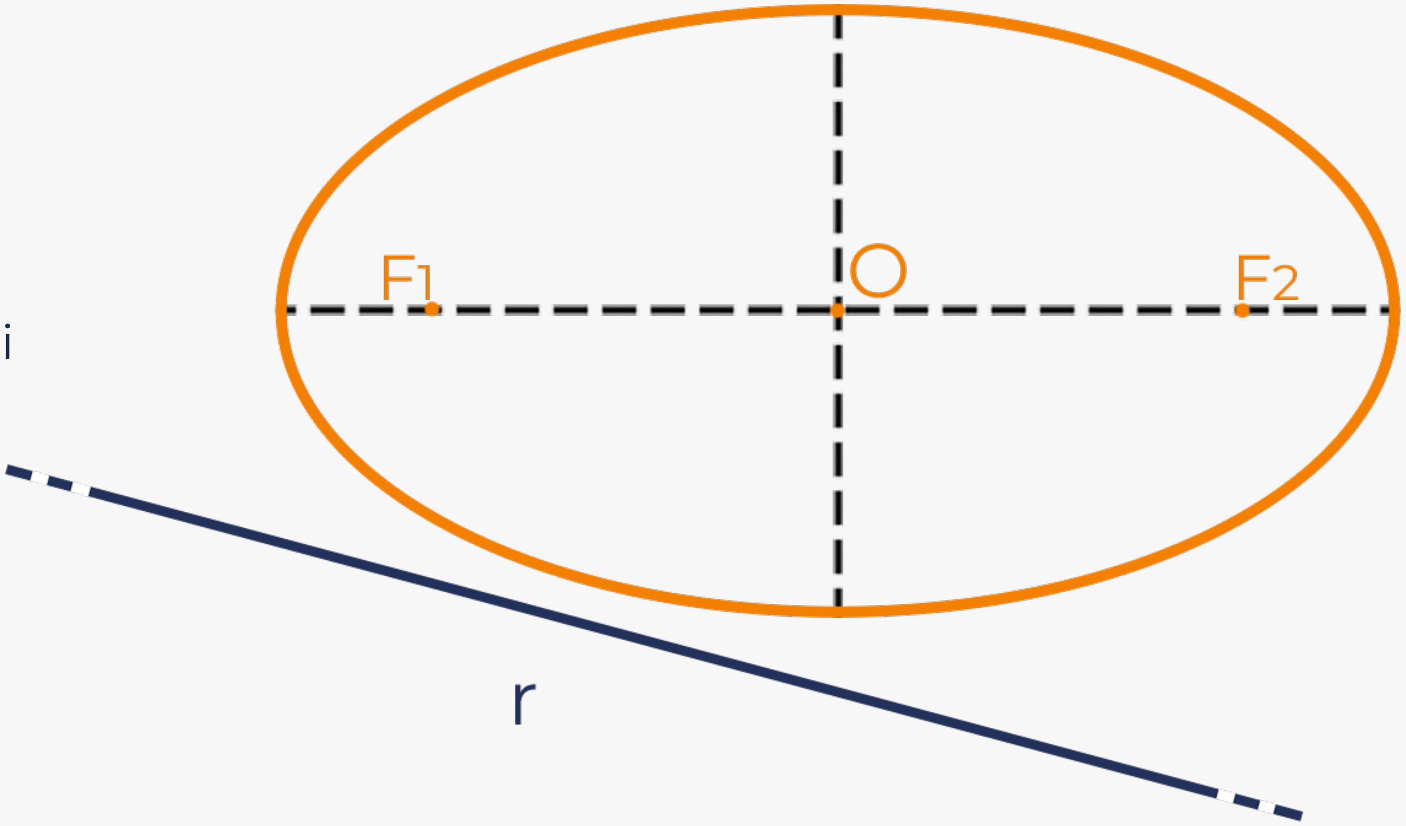


Retta esterna

se

$\Delta < 0$

Il sistema non ha soluzioni reali quindi non ci sono punti di intersezione.



Esercizio

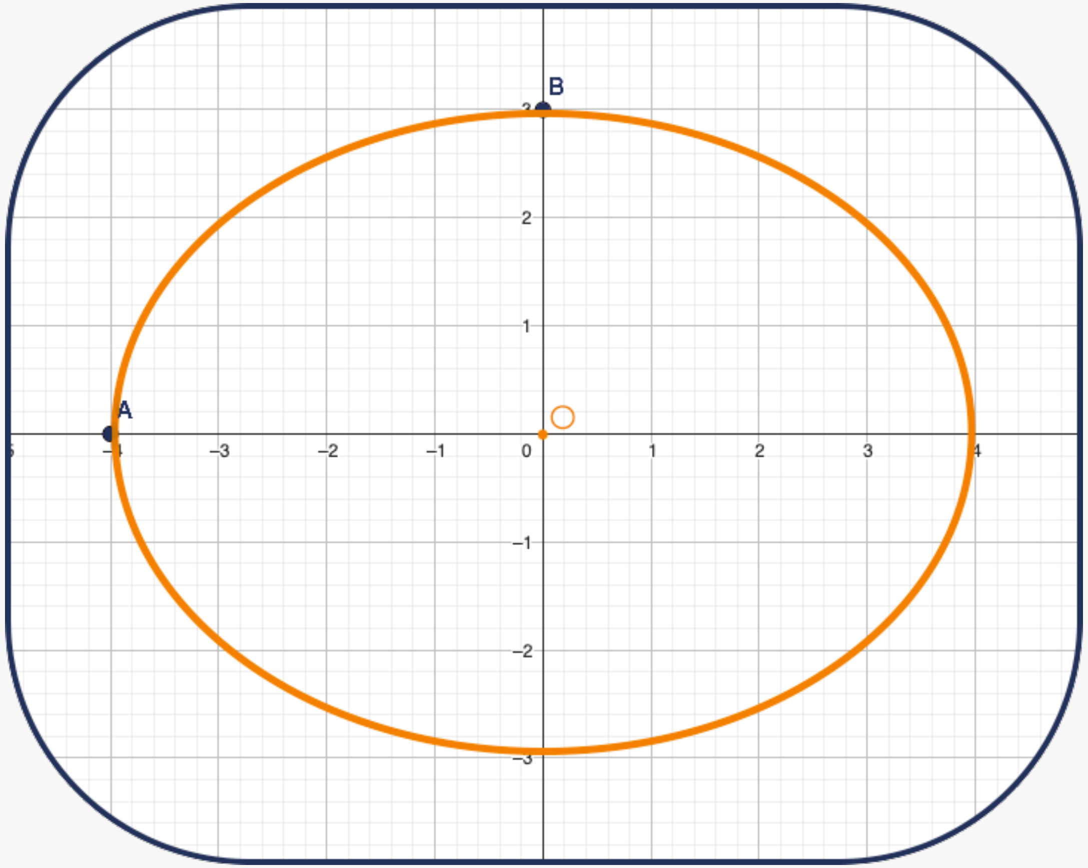
Trovare l'equazione di un ellisse conoscendo le coordinate dei vertici

A: (-4,0)   B: (0,3)

$$a = \overline{OA} = 4 \qquad b = \overline{OB} = 3$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$$



Esercizio

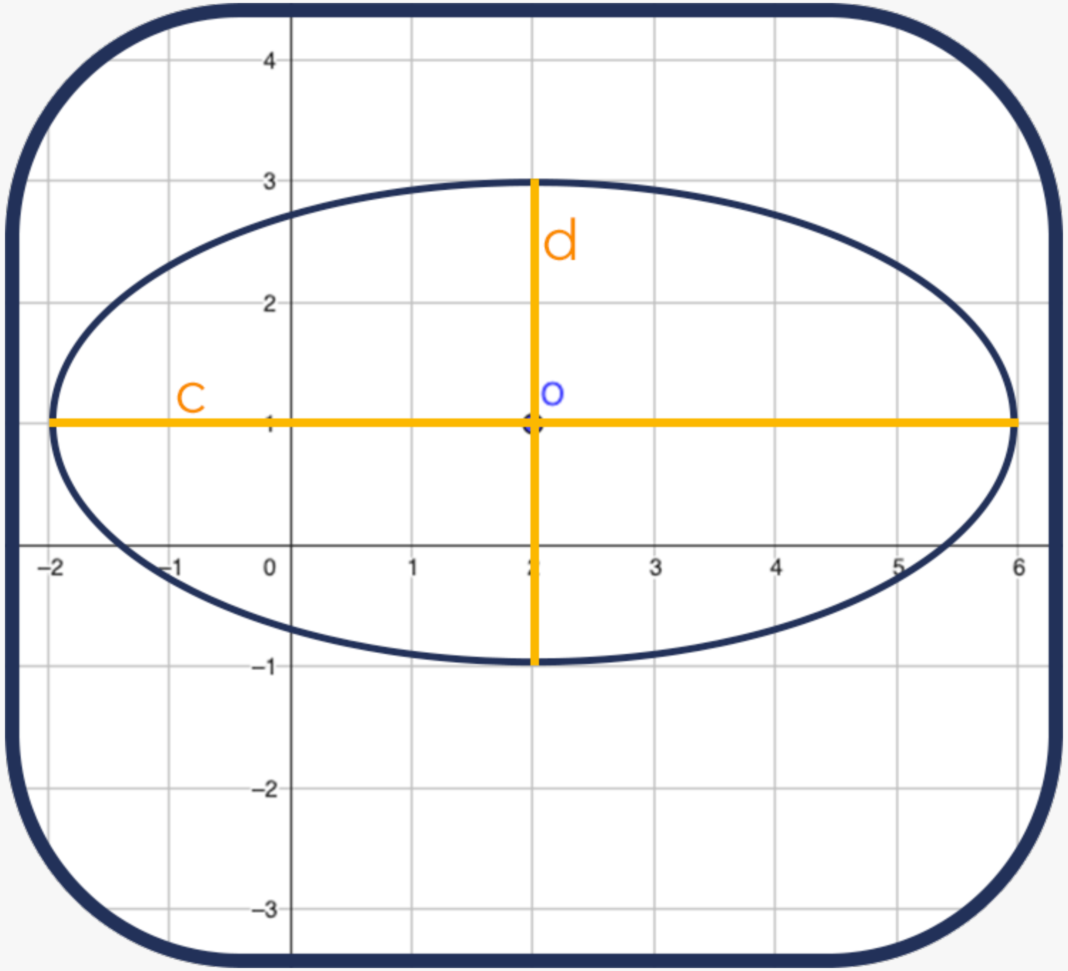
Trovare l'equazione di un ellisse conoscendo la misura degli assi e il centro

O: (2,1) $\quad d = 4, \quad c = 8$

$$a = \frac{8}{2} = 4, \qquad b = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

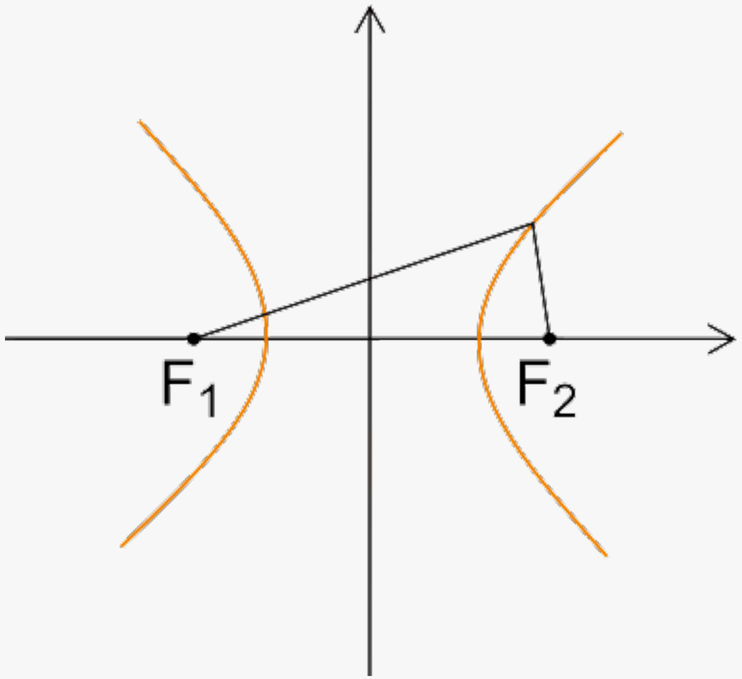


L’iperbole

DEFINIZIONE

Si definisce iperbole il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza di modulo delle distanze da due fuochi fissi F1 e F2.

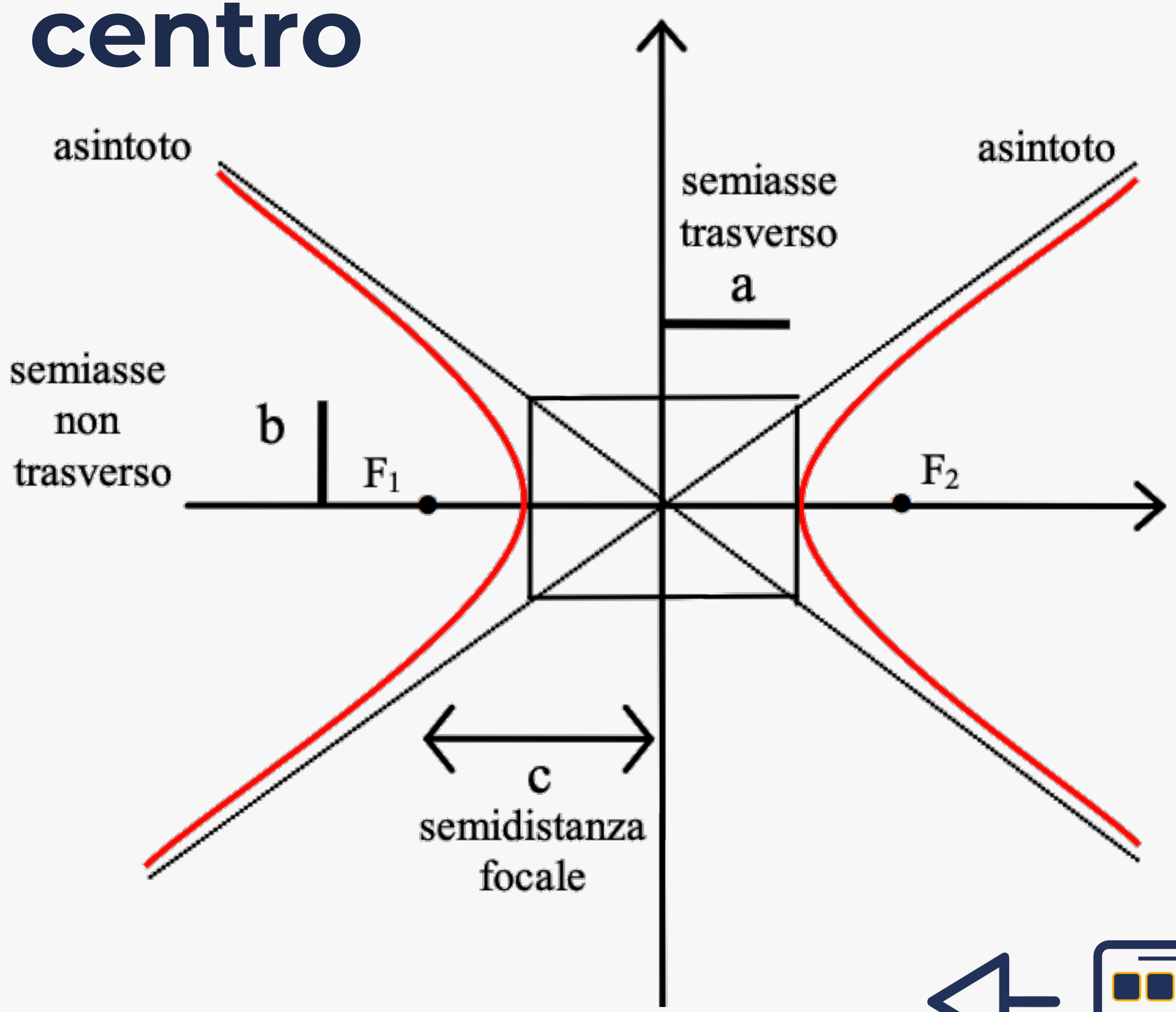
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Equazione di un iperbole dato il centro

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con
a e b ≠ 0



Iperbole riferita agli asintoti

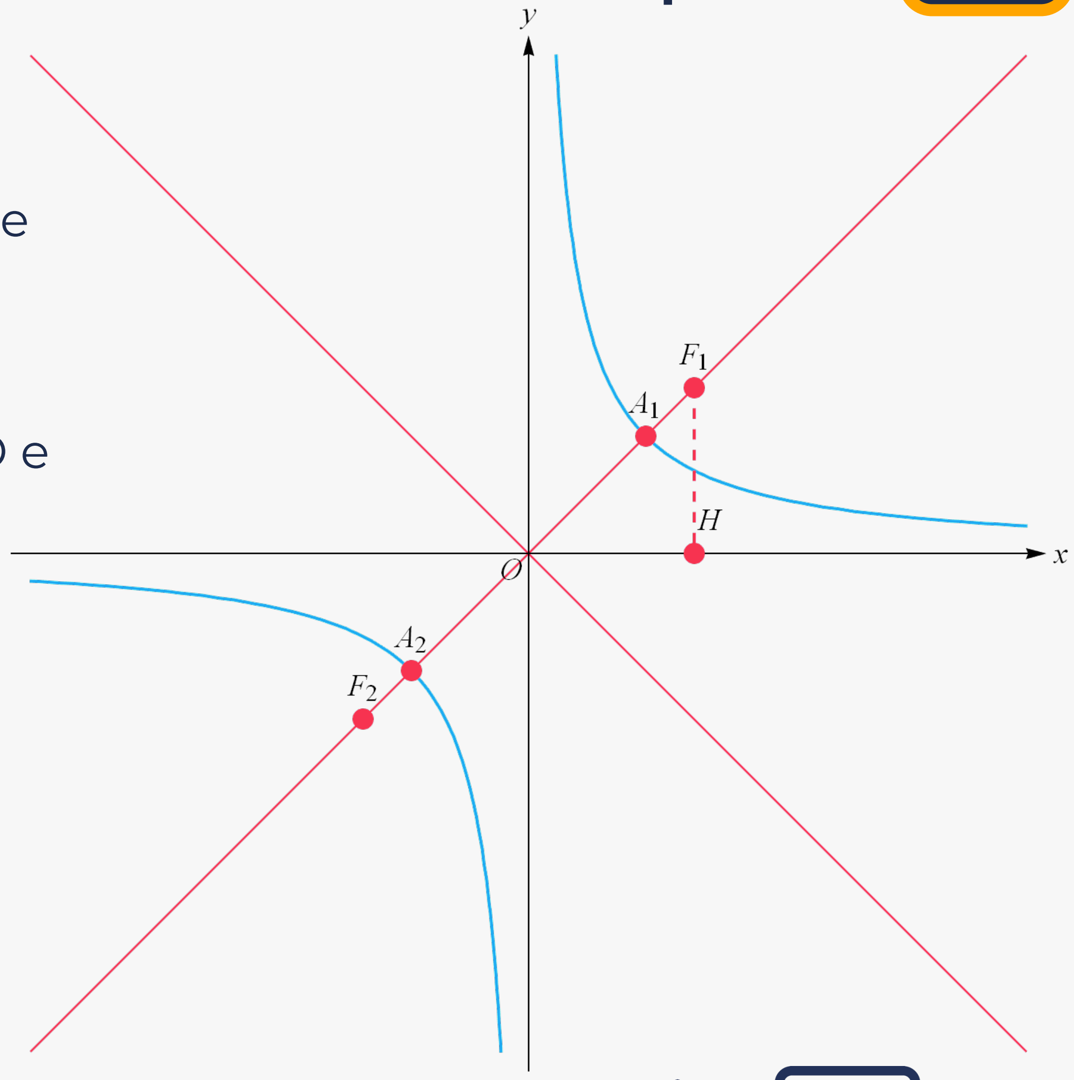
Questa particolare iperbole ha due caratteristiche principali:

- gli ASSI CARTESIANI come ASINTOTI;
- i FUOCHI situati o sulla BISETTRICE del PRIMO e del TERZO QUADRANTE

$$xy = k$$

- oppure sulla BISETTRICE del SECONDO e del QUARTO QUADRANTE

$$xy = -k$$



IIS MARCONI PIERALISI
Istituto Istruzione Superiore Jesi

Grazie per l’attenzione

Lavoro di gruppo

3BM 2023

ANDREONI Luca
LONZI Martina
RINALDI Michele
ROMAGNOLI Lorenzo

Le nostre fonti:

Appunti del Prof. Taliani

Tecniche Matematiche 3|A – Lorena Nobili & Sonia Trezzi

Youmath.it

lezionidimatematica.net