

Scheda di laboratorio n.11

Esperienza pre-avanzata

Costruendo sull'esperienza e le conoscenze accumulate durante il corso, l'ultimo esperimento proposto si focalizzerà su argomenti avanzati. Diversamente dalle scorse settimane, le informazioni contenute sulla scheda saranno più scarse e il piano di lavoro prenderà spunto da un vero articolo di ricerca pubblicato in tempi più o meno recenti, su argomenti al confine fra la fisica e l'elettronica. Gli elementi di base per comprendere gli articoli saranno forniti a lezione, assieme a un punto di partenza collaudato in termini di scelta della componentistica e di possibili strategie sperimentali. In maniera simile al passato, forniremo un traccia delle attività da svolgere per portare a termine in maniera proficua l'esperienza. Alcune attività, che sono sostanzialmente comuni a tutti gli esperimenti e connesse alla acquisizione e analisi dei dati, saranno obbligatorie. Tuttavia, siete incoraggiati ad esplorare l'esperimento in base alle vostre curiosità/dubbi/ipotesi.

Come già fatto in altre esperienze, ai vari tavoli verranno assegnate esperienze *diverse*, sebbene tutte di difficoltà comparabile. In maniera simile alle attività del corso avanzato e data la complessità superiore degli esperimenti proposti, l'esperienza si allungherà su due settimane e tre pomeriggi. Gli esperimenti assegnati saranno i seguenti:

- Implementazione elettronica del **sistema di Lorenz**. L'esperimento mirerà a costruire un circuito elettronico non-lineare che realizza un oscillatore caotico detto – nel contesto dei sistemi dinamici – *attrattore strano*. Sostanzialmente, il circuito evolverà secondo un sistema di tre ODE (*Ordinary Differential Equation*) non-lineari introdotto nel 1963 dal matematico e meteorologo Edward Lorenz, quali modello ultra-semplificato¹ della dinamica caotica della convezione atmosferica. Nonostante la limitata quantità di concetti che sarà possibile introdurre sulla teoria del caos, l'esperimento permetterà di verificare come un circuito elettronico possa effettivamente “simulare” un sistema di ODE e di fare confronto diretto fra calcoli numerici e implementazione pratica, lo studio delle condizioni di oscillazione, della mappa di Lorenz, eccetera.
- Implementazione elettronica dell'**oscillatore di Duffing**, un oscillatore smorzato con un termine di richiamo non armonico. Questo modello ha una rilevanza per svariati sistemi fisici reali², con quindi una importanza va oltre l'elettronica. Il circuito sarà smorzato e la sua traiettoria libera non sarà molto interessante: semplicemente rilascerà su un qualche punto di equilibrio. Tuttavia, se “pompato” con una sinusoide con ampiezza e frequenza opportune, darà luogo ad una evoluzione temporale molto complessa e profondamente diversa da quella tipica dei sistemi lineari, dove ci aspettiamo sempre una banale soluzione asintotica alla stessa frequenza della pompa, sommata a un qualche transiente smorzato nel tempo. In questo caso, l'esperienza mirerà a documentare come diverse eccitazioni diano luogo a fenomeni non-lineari quali l'emergere di super-periodi e di dinamiche caotiche.
- Misura della **quantizzazione della conduttanza** a temperatura ambiente. L'esperimento mirerà ad individuare un fenomeno noto solo da qualche decina di anni e chiamato “quantizzazione della conduttanza”, che può manifestarsi quando vengono a cadere le ipotesi alla base del tipico moto “diffusivo” degli elettroni nei conduttori. Queste sono infatti *necessarie* per derivare concetti che diamo per scontati quali la legge di Ohm o l'esistenza di una resistività locale. L'obiettivo sarà dimostrare l'effettiva esistenza di fenomeni di quantizzazione in un *relay* elettromeccanico che, quando eccitato e misurato nella maniera “giusta”, può portare alla formazioni di giunzioni metalliche non-diffusive di scala atomica. Dato che la quantizzazione avviene circa³ in multipli di

¹ Il punto di partenza sono le equazioni di Navier-Stokes, che sono un complesso sistema di PDE (*Partial Differential Equation*) non-lineari e sono il modello standard della fluidodinamica. La derivazione delle equazioni di Lorenz dalle Navier-Stokes è tutt'altro che banale e non verrà spiegato se non a livello molto qualitativo, ma verranno fornite referenze per eventuali approfondimenti.

² Come sapete, praticamente qualsiasi sistema all'equilibrio è descrivibile in termini di un oscillatore armonico. Tuttavia, andando all'ordine successivo, quasi tutti questi sistemi in realtà non sono davvero esattamente degli oscillatori armonici!

³ La quantizzazione è esatta solo in opportuni limiti che sono totalmente al di fuori del controllo raggiungibile in questo esperimento. Tuttavia, le deviazioni attese sono solo di pochi punti percentuali.

$2e^2/h$, sarà possibile avere un elemento indipendente di stima di quantità fisiche fondamentali quali la carica elettronica e e della costante di Planck h .

ESPERIMENTO #1

1 Il modello di Lorenz risolto con un circuito analogico

La scoperta delle dinamiche caotiche è dovuta al matematico francese Henri Poincaré, nell'ambito dei suoi studi sulla stabilità del sistema solare e in particolare del problema dei tre corpi celesti in interazione gravitazionale⁴. Poincaré dimostrò che le possibili orbite, ottenute a partire da un insieme di condizioni iniziali, potevano essere molto "complicate", scoprendo quella che oggi si definisce dinamica caotica. Tra il 1920 e il 1960, fondamentali lavori matematici sulle dinamiche caotiche furono realizzati da Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Smale, Kolmogorov, per citarne alcuni. Ma, nonostante questi lavori, per diversi anni si continuò a credere che il caos non si realizzasse nei sistemi fisici. Anche il modello del meteorologo Lorenz inizialmente passò quasi inosservato. Oggi la situazione è radicalmente cambiata e i risultati della teoria del caos trovano applicazioni in quasi tutte le branche della scienza.

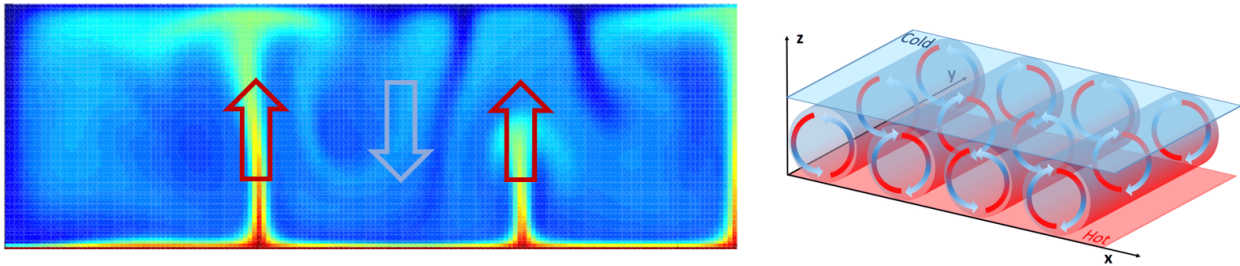


Figura 1.1: Il modello Lorenz cattura la dinamica caotica della convezione (sinistra), riducendo il problema all'evoluzione temporale di un sistema di celle di convezione standardizzate (destra).

Negli anni '50, il meteorologo Edward Lorenz studiava la dinamica dell'atmosfera, che può essere descritta da un complesso sistema di equazioni alle derivate parziali (equazioni di Navier-Stokes). Per risolverle, aveva a disposizione un computer con una memoria interna di soli 16kB ed in grado di fare 60 operazioni al secondo, non certo uno strumento adatto allo scopo. Con l'obiettivo di ottenere qualcosa di più trattabile, Lorenz semplificò il problema considerando la dinamica in un piano xz , assumendo l'assenza di una dipendenza da y e imponendo come condizioni al contorno una temperatura T_0 alla quota $z = 0$ e una inferiore $T(h) < T_0$ ad una altezza superiore a $z = h$. In questa configurazione l'aria in basso si riscalda, si espande e diventando più leggera tende a creare una configurazione *instabile*, in cui si possono formare regioni di fluido surriscaldato che possono migrare verso l'alto per il principio di Archimede. Questo instaura correnti circolatorie caratterizzate da una evoluzione temporale caotica (Fig.1.1). Nel suo modello molto semplificato, Lorenz impose che la dinamica fosse organizzata in una serie di celle di convezione ordinate, ricavandone delle equazioni che ne descrivono l'evoluzione temporale, che è oscillatoria e irregolare. In questo limite, il tutto si riduce a poche variabili che obbediscono ad un sistema di 3 equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \quad (1.2)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (1.3)$$

dove le variabili x , y e z non c'entrano nulla con le coordinate spaziali ma sono semmai connesse con la dinamica della convezione. In particolare, x è proporzionale alla velocità di rotazione del fluido, y è proporzionale alla differenza di temperatura tra gli elementi di fluido ascendenti e discendenti, z è proporzionale alla deviazione del profilo verticale della temperatura, rispetto all'equilibrio instabile dato dal gradiente costante. I tre parametri adimensionali del modello hanno un significato fisico:

- σ è il numero di *Prandtl*, contiene il rapporto fra il coefficiente di viscosità e quello di conducibilità termica, e quantifica la tendenza del fluido a dare luogo a convezione rispetto alla conduzione termica.
- ρ è il numero di *Rayleigh-Reynolds*, quantifica la tendenza del fluido riscaldato in basso a salire verso l'alto, che è il motore ultimo del processo convettivo. Per fissare le idee, è grande quando il gradiente termico è grande.
- β è un parametro legato alla geometria delle celle convettive.

⁴Dopo più di un secolo questo problema è sempre attuale e fecondo:

Richard Montgomery - *Il problema dei 3 corpi* - Le Scienze - Dicembre 2019.

Lorenz trovò che per valori dei parametri

$$\sigma = 10 \quad \beta = 8/3 \quad \rho > \rho_0 \approx 24.74$$

il sistema si comporta in maniera piuttosto erratica e non periodica. L'esperimento mirerà a documentare dal punto di vista *fenomenologico*⁵ due aspetti tipici della dinamica caotica, ossia:

1. La **dipendenza sensibile dell'evoluzione temporale dalle condizioni iniziali**. In un sistema caotico, traiettorie infinitesimamente vicine tendono a divergere esponenzialmente nel tempo fino a separarsi in maniera significativa. Quando questo è combinato ad una dinamica limitata nello spazio, porta ad una sostanziale imprevedibilità dell'evoluzione temporale sui tempi lunghi. Questa fenomenologia può essere quantificata da un *esponente di Lyapunov* λ che descrive tale divergenza

$$\delta \mathbf{r}(t) = e^{\lambda t} \delta \mathbf{r}(0). \quad (1.4)$$

Dato che le traiettorie possono divergere di più o di meno nelle varie direzioni nello spazio delle coordinate, si definisce uno *spettro degli esponenti di Lyapunov*. Ciò che potremo in realtà misurare sarà un valore medio dell'esponente più grande, che è quello che determina la natura caotica del sistema.

2. La possibilità di ridurre la complessa dinamica caotica a delle **relazioni di ricorrenza**, come per esempio le così dette *mappe di Poincaré* ottenute intersecando le orbite caotiche con dei piani predeterminati. In questo caso mireremo a ricostruire qualcosa di simile, ma anche tecnicamente diverso, ossia la così detta *mappa a tenda di Lorenz*. Questa mappa parte delle oscillazioni in $z(t)$ del sistema e descrive il valore del massimo numero $n+1$ in funzione del massimo numero n . Questa relazione è tutt'altro che casuale e riproduce un comportamento ben preciso e prevedibile, che sostanzialmente riassume l'amplificazione nel tempo delle oscillazioni convettive, fino alla loro inversione oltre una certa soglia di ampiezza.

Simulazioni

Prima del montaggio è bene provare a simulare il comportamento del circuito per capire che cosa aspettarsi, sia in termini quantitativi che qualitativi in funzione dei parametri del modello.

Homework 1 Calcolare la mappa a tenda di Lorenz del dato simulato, estraendo prima i valori dei massimi locali usando^a la funzione `findpeaks` delle oscillazioni di z usando la seguente sintassi

```
% zv contiene il vettore dei dati
zpeaks = findpeaks(zv);
```

e graficando il valore di ogni massimo in funzione del massimo precedente. Verificare la dipendenza della mappa dai parametri del modello. Generare un grafico `TendaNumerico.pdf` che riassume l'analisi e i risultati finali.

^aCome sempre, è fortemente suggerito non usare ciecamente gli algoritmi numerici e guardare criticamente il risultato: trova davvero tutti e soli i picchi della funzione?

Task 1 Prendere nota dei tempi scala, delle ampiezze scala e del comportamento qualitativo delle oscillazioni nella simulazione fornita: nelle prossime sezioni punteremo ad osservare segnali simili nel circuito ed è bene capire che tipo di oscillazioni di voltaggio possiamo aspettarci (con quale ampiezza? su che tempi?). Considerate che un circuito reale è influenzato da effetti parassiti e varie non-idealità, quindi non ci aspetteremo una corrispondenza esatta.

⁵Come anticipato, non pretenderemo approfondire davvero le basi teoriche della teoria del caos, dato che questo richiederebbe certamente più tempo di quello a disposizione ed esulerebbe in maniera irragionevole dagli scopi del corso.

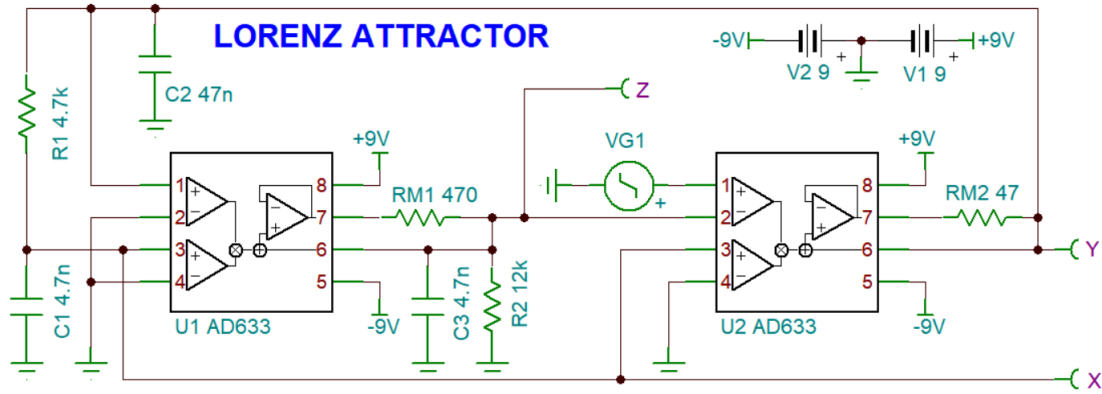


Figura 1.2: Schema del circuito che implementa l'oscillatore di Lorenz.

Circuito e misure

Il sistema di ODE dell'oscillatore di Lorenz si può realizzare con degli OpAmp, a patto di poter fare delle moltiplicazioni di segnale. Le operazioni di derivazione/integrazione e somma/differenza possono infatti essere realizzate sfruttando schemi di feedback ormai noti. Storicamente, come anche illustrato a lezione, l'approccio "standard" e più "didattico" per realizzare un tale circuito richiedeva *tre integratori-sommatori* e due moltiplicatori analogici in grado svolgere i prodotti presenti nella seconda e terza ODE.

Lo schema che studieremo è frutto di una rielaborazione più recente, che fa leva sulla struttura di moltiplicatori di segnali moderni quali AD633, in grado di generare un voltaggio

$$V_{\text{out}} = \frac{(V_{X1} - V_{X2})(V_{Y1} - V_{Y2})}{u} + V_Z \quad (1.5)$$

dove V_{out} è il voltaggio di uscita, u è un voltaggio scala e gli altri sono gli input dell'integrato. Come negli OpAmp, nessuno degli ingressi assorbe idealmente corrente. Lo schema in Fig.1.2 sfrutta il fatto che connettendo un feedback resistivo R_M che dall'uscita out va all'ingresso Z è possibile convertire il moltiplicatore di tensione in un generatore di corrente i pari a

$$i = \frac{(V_{X1} - V_{X2})(V_{Y1} - V_{Y2})}{uR_M} \quad (1.6)$$

In generale ci aspettiamo che i voltaggi in funzione del tempo siano connessi alle soluzioni adimensionali del sistema di Lorenz tramite alcuni voltaggi e tempi scala. Per esempio ci aspettiamo $V_X(t) = A_X \cdot x(t/\tau)$ dove A_X e τ sono un voltaggio e tempo scala. Rimandiamo agli articoli forniti⁶ per le derivazioni (da ripetere) e mostriamo come la rete che include C_1 , C_2 e R_1 riproduca la prima equazione (1.1). Il voltaggio del condensatore C_1 è V_X ed è connesso con la corrente che entra in C_1 da

$$C_1 \dot{V}_X = i_1 = \frac{V_Y - V_X}{R_1} \quad (1.7)$$

che a parte per fattori di scala chiaramente corrisponde a $\dot{x} = \sigma(y - x)$. Riassumiamo nel seguito le corrispondenze fra i valori dei componenti e i parametri del sistema di Lorenz

$$\begin{aligned} \tau &= R_1 C_2 & A_z &= u R_{M2} / R_1 & A_{x/y} &= A_z \sqrt{R_{M1} C_3 / R_{M2} C_2} \\ \sigma &= C_2 / C_1 & \rho &= V_{W1} / A_z + 1 & \beta &= R_1 C_2 / R_2 C_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Come ovvio dalle equazioni, un aspetto molto interessante di questo schema semplificato è che il valore di ρ , che è uno dei parametri fondamentali nel determinare la natura caotica o meno del circuito, si può regolare con l'uscita analogica di Analog Discovery 2.

⁶"Simplification of Chaotic Circuits With Quadratic Nonlinearity", IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs, 69(3), 1837-1841 (2022) <https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3125680>

"A Simple Lorenz Circuit and its Radio Frequency Implementation", Chaos 17, 023112 (2007) <https://doi.org/10.1063/1.2723641>

Homework 2 Verificare che il circuito riproduca effettivamente le equazioni differenziali del modello di Lorenz, derivando da zero, partendo dal circuito in Fig.1.2, tutte le relazioni citate nelle equazioni riportate in (1.8).

Task 2 Verificare il *datasheet* di AD633: quanto vale il voltaggio scala u ? Che alimentazione richiede? Che offset ha? Gli ingressi assorbono corrente? Anticipiamo che una alimentazione di $\pm 5V$ non sarà sufficiente a far funzionare il circuito, e vi invitiamo a **fare attenzione** a verificare (prima) e collegare (dopo) le alimentazioni in maniera corretta, pena la fusione del (relativamente costoso) circuito integrato.

Task 3 Costruire il circuito su Tina, usando la macro dell'integrato AD633 che vi è stata fornita in *share*. Verificare il corretto funzionamento del circuito e la presenza di oscillazioni non periodiche.

Una volta chiarito il funzionamento, montare il circuito in Fig.1.2, che è dimensionato per poter riprodurre $\rho \approx 28$, $\sigma \approx 10$ e $\beta \approx 8/3$. Considerate questi componenti come un primo suggerimento, è ammesso cambiare i valori. Per esempio, riscaldare tutti i condensatori dello stesso fattore non fa altro che cambiare il valore di τ ossia della velocità di oscillazione del circuito. Non appena montato il primo moltiplicatore, è utile verificare il suo funzionamento come indicato in seguito

Task 4 Alimentare un AD633 e verificarne il corretto funzionamento come segue:

- connettere a terra X2, Y2 e Z;
- connettere X1 e Y1 ai due output dell'Analog Discovery
- misurare l'uscita dell'integrato W.

Verificare il corretto funzionamento del circuito, in particolare in termini di scala e verificando la presenza di eventuali offset nel funzionamento.

Task 5 Dimostrare la corretta operazione del circuito, con l'emergere di oscillazioni non periodiche al variare del parametro di controllo ρ . Confezionare un grafico finale `LorenzSystem.pdf` con le varie sezioni xy , yz e zx dell'evoluzione temporale.

Task 6 Ricavare il diagramma a tenda del sistema di Lorenz. Facciamo notare che il diagramma a tenda ideale si ottiene solo per un circuito perfettamente simmetrico. Nel caso di sbilanciamenti dei due lobi ci aspetteremo una *doppia tenda*. Suggeriamo anche di fare molta attenzione nella selezione dei massimi della curva di V_Z : verificate che i vostri algoritmi individuino *tutti e soli* i massimi, senza saltarne nessuno e senza introdurne di spuri altrimenti ovviamente il grafico non può essere quello corretto. Riportare il risultato finale in un grafico `TendaSperimentale.pdf`

Task 7 Fare diverse acquisizioni tentando di valutare l'esponente di Lyapunov del circuito. Chiaramente – diversamente dal caso delle simulazioni – non potete scegliere delle condizioni iniziali a piacere, tuttavia potete confrontare diverse acquisizioni cercando due istanti in cui la configurazione del circuito è simile, e poi verificare come la distanza fra le due curve evolva nel tempo.

ESPERIMENTO #2

2 Oscillatore non-lineare di Duffing

L'oscillatore di Duffing deriva dagli studi dell'ingegnere Georg Duffing ad inizio 1900 sugli effetti non-lineari negli oscillatori. In particolare, l'equazione di Duffing consiste in un oscillatore non-armonico in cui alla classica forza di richiamo lineare viene aggiunto un termine non-lineare cubico. Aggiungendo anche una forzante di ampiezza A e frequenza ω l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = A\sin(\omega t), \quad (2.1)$$

dove m è la massa, k_i e γ i coefficienti della forza di richiamo e d'attrito. Questa forma "fisica" dell'equazione non è quella adimensionale in cui viene tipicamente presentata, ma è equivalente dopo banali sostituzioni del nome dei parametri e delle grandezze scala.

Il problema ha diversi regimi al variare dei parametri e della forzante. Una prima distinzione cruciale va fatta in base al segno di k_1 che ha un importante effetto sulla forza di richiamo come illustrato in Fig.2.1⁷

- Se k_1 è **positivo** si ottiene semplicemente un oscillatore armonico con una non-linearità e un punto di equilibrio a $x = 0$. A seconda del segno di k_3 l'oscillatore diventerà più "rigido" o più "morbido" al crescere dell'ampiezza di oscillazione, dando luogo per esempio a fenomeni di distorsione nella risonanza o anche a fenomeni di bistabilità nella risposta. Sebbene si tratti di una fenomenologia interessante, questo limite non potrà essere realizzato nell'esperimento proposto, quindi non approfondiremo.
- Se k_1 passa da un valore positivo ad uno **negativo** si ha un cambiamento qualitativo della natura del sistema e il punto di equilibrio a $x = 0$ diventa *instabile*, "gemmando" due nuovi punti stabili per x positivo e negativo. Questo si vede facilmente integrando la forza di richiamo per ottenere il potenziale

$$U(x) = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_3}{4}x^4. \quad (2.2)$$

Nella teoria dei sistemi dinamici, la transizione fra i due regimi viene detta una *biforcazione a forchetta*, una delle più semplici fra quelle possibili. L'origine del nome dovrebbe essere chiara guardando l'esempio per $k_3 = 2$ in Fig.2.1. L'emergere di un doppio minimo per $k_1 < 0$ porta a fenomeni di bistabilità e la presenza di una forzante può produrre evoluzioni complesse in cui il sistema "salta" in maniera erratica fra i due minimi.

Lo spazio delle fasi nel secondo caso è visibile in Fig.2.2, con evidenziate le curve isoenergetiche (a $mv^2/2 + U(x)$ costante), che sono le orbite nel limite senza attrito né forzante. L'aggiunta dell'attrito semplicemente fa collassare la dinamica su uno dei due minimi. L'obiettivo di questo esperimento sarà dimostrare che aggiunta di una forzante può avere effetti meno banali, a partire dalla transizione da un minimo all'altro, fino all'emergere di una dinamica caotica.

Come nel caso dell'oscillatore di Lorenz, ci limiteremo a sfruttare questa fenomenologia per mettere in pratica tecniche di acquisizione e analisi dei dati. In un sistema caotico come l'oscillatore di Duffing, l'applicazione di una forzante periodica porterà, entro certi limiti, ad una banale risposta con lo stesso periodo. Questo è particolarmente ovvio se il sistema si trova in prossimità di uno dei due minimi e se la forzante ha una ampiezza abbastanza piccola da non portare la dinamica del sistema lontano dal minimo.

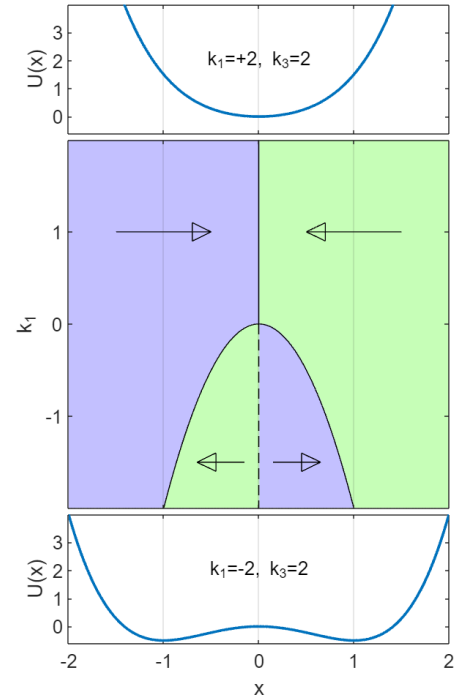


Figura 2.1: Potenziale di Duffing.

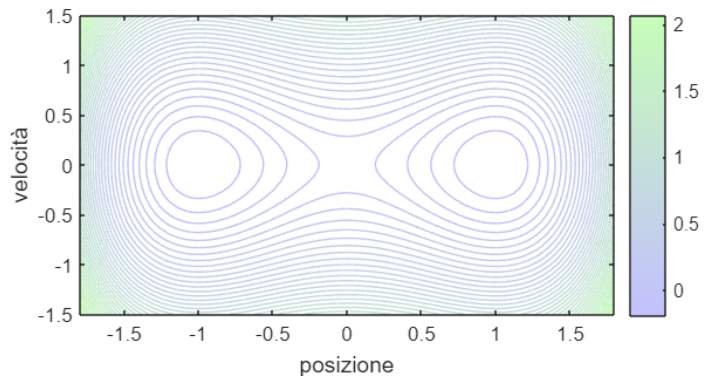


Figura 2.2: Spazio delle fasi (unità arbitrarie).

⁷Nel grafico è stato usato $k_3 = 2$.

Se tuttavia la forzante ha una ampiezza molto grande e/o la frequenza è molto vicina a quella di risonanza, allora la risposta del sistema può diventare sufficientemente grande da portare la dinamica abbastanza lontana dal minimo da dare luogo ad evoluzioni più “complesse”. Senza pretendere di illustrare nel dettaglio la teoria alla base di questa fenomenologia, il modo in cui l’evoluzione temporale si “complica” è tipicamente in termini di transizione fra i due minimi che porta all’emergere di **super-periodi** nell’evoluzione temporale.

Homework 1 Famigliarizzare con il comportamento dell’oscillatore risolvendo la ODE di Duffing a partire dallo script fornito. Si suggerisce di cercare di evidenziare: (1) la presenza di distorsioni^a nella risposta in funzione della frequenza per k_1 positivo; (2) l’emergere di super-periodi nel caso in cui un k_1 negativo porta all’emergere di due punti stabili della forza di richiamo.

^aQuesto può essere fatto misurando l’ampiezza della risposta ad una sinusoide e ignorando eventuali distorsioni. Notate che il sistema, essendo non-lineare, ha una risposta che cambia qualitativamente in base al valore di A .

Schema circuitale proposto e analisi

L’oscillatore sarà implementato con il circuito illustrato in Fig.2.3, che consiste di una serie RLC pilotata da un semplice OpAmp con un feedback sia positivo che negativo. Lo schema include due diodi contrapposti di tipo 1N4007 che sono fondamentali per introdurre un comportamento non-lineare. Il modello di OpAmp non è fissato ma suggeriamo di usare OP07. Nel seguito viene riassunta l’analisi proposta dall’articolo⁸ da cui è tratto questo schema.

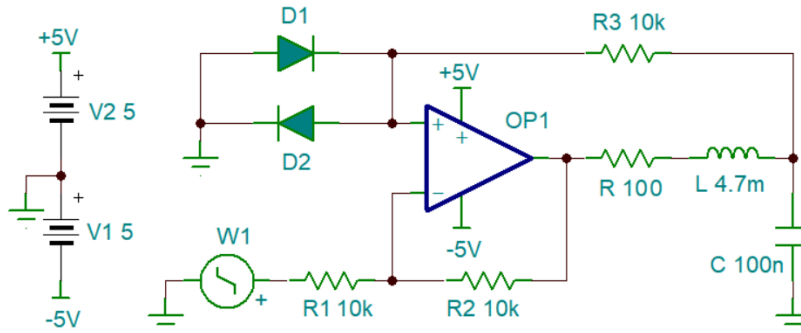


Figura 2.3: Schema del circuito dell’oscillatore di Duffing.

La variabile equivalente alla x in questo circuito è il voltaggio sul condensatore V_C , che è banalmente connesso alla corrente dell’induttore i_L tramite la legge di Kirchhoff sull’ultimo nodo a destra in figura

$$C \frac{dV_C}{dt} = i_L + i_3 \approx i_L \quad (2.3)$$

dove i_3 è la corrente che attraversa R_3 e che, secondo gli articoli forniti, è trascurabile nelle situazioni di nostro interesse. In questa approssimazione, i_L gioca quindi il ruolo della velocità nell’analogia con Duffing.

Focalizzando ora l’attenzione sull’OpAmp, questo è configurato come un amplificatore invertente rispetto a V_{w1} , e non-invertente rispetto a V_+ , quindi l’uscita sarà una sovrapposizione con i noti fattori di guadagno

$$V_{out} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot V_+ - \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{w1} = 2V_+ - V_{w1} \quad (2.4)$$

dove abbiamo anche assunto che $R_1 = R_2$. A questo punto la seconda equazione del circuito diventa

$$V_{out} = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + V_C. \quad (2.5)$$

Un ultimo passaggio chiave consiste nel chiarire se i_3 sia effettivamente trascurabile. Per farlo basta confrontare le impedenze che partizionano le correnti i_3 e i_L . Da un lato avremo R_3 in serie con i diodi D_1 e D_2 , dall’altro ci sarà la serie fra R ed L (l’uscita a bassa impedenza dell’OpAmp è la fine di questo confronto delle impedenze: le resistenze

⁸“Analogue Electrical Circuit for Simulation of the Duffing-Holmes Equation”, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 13, No. 2, 241–252 (2008), <https://doi.org/10.15388/NA.2008.13.2.14582>

R_1 e R_2 non sono rilevanti ai fini di questo confronto). Sebbene $R \ll R_3$, l'induttore potrebbe avere una impedenza significativamente più grossa di R al variare della frequenza. Tuttavia, saremo interessati a studiare frequenze prossime alla risonanza che vale $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. A questa frequenza scala il valore assoluto dell'impedenza dell'induttore vale $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$. In conclusione, si può trascurare i_3 nel limite in cui $R_3 \gg \rho = \sqrt{L/C}$. A questo punto è possibile riorganizzare i termini introducendo una forza richiamo pari a $F(V_C) = 2V_+ - V_C$ e scrivere l'equazione

$$L \frac{di_L}{dt} = F(V_C) - Ri_L - V_{W1} \quad (2.6)$$

che è chiaramente equivalente a quella di Duffing, con un termine di attrito pari a $-Ri_L$ e una forzante V_{W1} . Rimane da calcolare il valore di V_+ , che può essere calcolato considerando la risposta della rete R_3 -diodi che campiona il voltaggio V_C (senza perturbarlo dato che i_3 è trascurabile). Il comportamento atteso è facile da capire assumendo che i diodi siano molto resistivi sotto soglia e molto più conduttivi di R_3 sopra soglia. Detta V^* la soglia dei diodi, questo porta banalmente a $V_+ \approx V_C$ finché $|V_C| < V^*$ (diodi non conduttivi sotto soglia), e a una saturazione $V_+ \approx \pm V^*$ fuori da questo intervallo. Ri assemblando tutto questo, il termine di forza sarà

$$F(V_C) = \begin{cases} -2V^* - V_C & \text{se } V_C < -V^* \\ V_C & \text{se } -V^* \leq V_C \leq +V^* \\ +2V^* - V_C & \text{se } V_C > +V^* \end{cases} \quad (2.7)$$

che riproduce qualitativamente quello dell'equazione di Duffing con due punti di equilibrio per $V_C = \pm 2V^*$ positivo e negativo, che sono i punti dove $F(V_C) = 0$ e la derivata è negativa.

Homework 2 Verificare, anche sulla base degli articoli forniti, le considerazioni facendo attenzione alla notazione a volte non sempre esattamente coincidente. Verificare se i componenti in Fig.2.3 soddisfano le approssimazioni alla base del modello del circuito e calcolare il profilo di forza $F(V_C)$. Simulare inoltre la rete di R_3 più i diodi 1N4007 con Tina per ottenere una curva più realistica di $V_+(V_C)$ e quindi di $F(V_C)$. Usare questi risultati per trovare il valore di V_C atteso per i due punti di equilibrio del circuito.

Montaggio e Misure

Montare il circuito ed eseguire i seguenti passi di verifica sperimentale preliminare.

Task 1 A $V_{W1} = 0$ il circuito ha due punti di equilibrio. Variando V_{W1} è possibile indurre a piacere una transizione fra i due. Dimostrarlo controllando V_{W1} e monitorando V_C . Stimare i due V_C di equilibrio.

Task 2 Se il circuito resta vicino a un punto di equilibrio, si comporta come un banale oscillatore armonico smorzato. Effettuare, per ognuno dei due minimi, una misura della risposta in frequenza del circuito generando due plot di Bode, usando una eccitazione di **ampiezza adeguata**. Usare la classica funzione di risposta di un oscillatore armonico smorzato per fittare i parametri ω_0 e γ del sistema. Verificare la consistenza con i parametri circuitali utilizzati per il risuonatore RLC . Si consiglia di consultare anche il *datasheet* dell'induttanza, che ha una resistenza interna non trascurabile.

Passiamo a una misura *sperimentale* della funzione $F(V_C)$ del circuito montato. Per farlo, è possibile semplicemente variare la forzante V_{W1} , spostando i punti di equilibrio in base all'equazione

$$F(V_C) - V_{W1} = 0, \quad (2.8)$$

che impone banalmente una forza nulla nell'equazione del moto (2.6). Chiaramente, per poter fare questa misura in maniera corretta è necessario lasciare che il circuito raggiunga effettivamente il punto di equilibrio. Quindi è necessario che la misura si fatta cambiando V_{W1} *lentamente* rispetto al "tempo di assestamento" del circuito che, come noto, è dell'ordine di $\tau = 1/\gamma$.

Task 3 Mandare a V_{W1} un'onda triangolare con una frequenza angolare che soddisfi $\omega\tau \gg 1$, in modo che causi una variazione lenta del punto di equilibrio del circuito secondo l'equazione (2.8). Usare Ch1 e Ch2 per misurare sia V_{W1} che V_C : plottando un canale in funzione dell'altro ci si aspetta^a di ricostruire la curva $F(V_C)$. Riportare il risultato di questa analisi nel grafico *ForzaRichiamo.pdf*.

^aIn realtà, la curva risultante sarà un ciclo di isteresi: la misura riproduce tutta la curva $F(V_C)$ o solo una parte? perché?

Una volta presa confidenza con il circuito e verificato che siete in grado di controllarne le configurazioni di base, passiamo a qualcosa di più raffinato. Nel seguito, sarà richiesto di usare Ch1 per misurare V_C e Ch2 (in modalità differenziale) per misurare Ri_L . Nell'analogia con Duffing, il voltaggio $V_C(t)$ corrisponde alla coordinata spaziale e $Ri_L(t)$ è proporzionale all'impulso, quindi la misura corrisponde a determinare la traiettoria nello spazio delle fasi di questo oscillatore non-lineare. In tutte le misure a seguire, useremo diverse forzanti $-V_{W1}(t)$ e andremo a studiare che effetto hanno sulla dinamica nello spazio delle fasi.

Partiamo da una forzante facile: una **onda quadra "lenta"** (diciamo *off-resonance* a $\omega \approx \omega_0/10$), che non fa altro che traslare impulsivamente $F(V_C)$ – oppure, equivalentemente, inclinare il potenziale in Fig.2.1 – e quindi modificare il punto di equilibrio del nostro oscillatore smorzato. La modifica è impulsiva, ma dato che la frequenza con cui è fatta è lenta, ci aspettiamo semplicemente che il sistema rilassi sul nuovo punto di equilibrio che impostiamo ad ogni gradino dell'onda, con una evoluzione temporale che non è altro che la versione un minimo più "dinamica" di misure già fatte nei task precedenti. Il risultato, che speriamo sia ormai abbastanza ovvio⁹, è il ben noto fenomeno del *ringing* già emerso in altri contesti.

Task 4 Fare uno studio della la traiettoria nello "spazio delle fasi" (V_C, Ri_L) al crescere dell'ampiezza dell'onda quadra, partendo dal caso in cui la risposta è del tutto simile a quella di un oscillatore standard, fino ad arrivare ad una ampiezza sufficiente ad esplorare le non linearità e l'esistenza dell'altro punto di equilibrio del circuito.

Che succede, se invece di perturbare il circuito e poi lasciarlo rilassare, continuiamo a modificare $V_{W1}(t)$? Potenzialmente cose molto più complesse, quali l'emergere di onde periodiche con periodi *superiori* a quello della forzante o perfino dinamiche non periodiche di tipo caotico. Nel prossimo passo punteremo ad esplorare questi vari regimi perturbando il sistema con un'onda sinusoidale vicino alla risonanza, ossia con $\omega \approx \omega_0$.

Task 5 Usare $V_{W1}(t) = A \sin \omega t$ con $\omega \approx \omega_0$ e aumentare via via A evidenziando via via:

- il regime di risposta lineare, con una traiettoria circolare in (V_C, Ri_L) ;
- l'emergere di non-linearità, con forme d'onda non sinuoidali e traiettorie deformate in (V_C, Ri_L) ;
- Transizione a traiettorie (V_C, Ri_L) che esplorano l'altro minimo di potenziale;
- emerge di oscillazioni frequenze con periodi che sono *multipli* di quello della forzante;
- emergere di oscillazioni *non periodiche*.

L'ordine degli ultimi 3 punti non è necessariamente ovvio ed è plausibile che si osservino molte transizioni fra questi regimi. Tuttavia, nel limite in cui A diventa molto grande ci aspettiamo che la presenza dei due minimi di potenziale non sia molto rilevante e quindi di tornare verso un comportamento più "regolare". Documentare questa evoluzione in un grafico (o insieme di grafici) *EvoluzioneDuffing.pdf*.

Distorsioni, sovraperiodi e evoluzioni non-periodiche sono tutte fenomenologie con un riscontro immediato in trasformata di Fourier. Forniremo un nuovo .vi per fare delle scansioni e mappare i diversi regimi.

Task 6 Usare il VI per effettuare una scansione di uno dei parametri V_0 , A o ω e misurare l'evoluzione della FFT del sistema. ... Trovare una configurazione in cui il sistema raggiunge almeno due fra i seguenti sovra-periodi: x_2 , x_3 , x_4 , x_5 . Generare un grafico con il colorplot più significativo ottenuto in *DuffingScansione.pdf*.

⁹Questa più che elettronica è fisica degli oscillatori armonici smorzati! Non avete scuse...

ESPERIMENTO #3

3 Quantizzazione della conduttanza

Sul finire degli anni '80, il progresso della fisica dei semiconduttori ha segnato un importante punto di svolta nella comprensione della conduzione elettronica. Con l'evoluzione della nanotecnologia e l'impiego avanzato della criogenia, è stato infatti possibile per la prima volta creare dispositivi con dimensioni inferiori alle lunghezze in cui si instaura il limite di trasporto "diffusivo", ossia quel regime in cui il moto elettronico è randomizzato dalle interazioni e in ogni punto è caratterizzato da una distribuzione termica. Per inciso, questo è il regime su cui si basa il funzionamento della stragrande maggioranza dei dispositivi elettronici commerciali.

All'estremo opposto, nel così detto limite di **conduzione "ballistica"** e coerente, il processo di trasporto degli elettroni nel dispositivo assomiglia più alla trasmissione delle onde in ottica e vari concetti apparentemente scontati possono clamorosamente fallire, quali per esempio l'esistenza di una resistività locale ρ o il fatto che la serie di due resistori R_1 e R_2 abbia resistenza totale $R_1 + R_2$. Nel 1988, nel contesto di esperimenti che miravano a dimostrare dei concetti di "ottica elettronica" dentro i dispositivi, gli scienziati olandesi van Houten e van Wees dell'Università di Delft e dei laboratori di ricerca della Philips evidenziarono un fenomeno inatteso oggi noto come **"quantizzazione della conduttanza"**¹⁰ e coniarono il termine **"punta di contatto quantica"** per descrivere il dispositivo che lo manifesta. Le prime misure di questi esperimenti pionieristici furono effettuate ad una temperatura di 0.6 K.

Pochi anni dopo, nel 1993, lo stesso fenomeno fisico è stato osservato anche usando contatti metallici di dimensioni atomiche (Fig.3.1) ottenuti sfruttando un microscopio tunnel a scansione, in cui una punta metallica molto affilata può essere posizionata con precisione sub-nanometrica su un campione conduttivo, sfruttando degli attuatori piezoelettrici¹¹. Con questo approccio, diventa possibile realizzare punte di contatto quantiche metalliche e – sebbene il processo di formazione della punta sia abbastanza casuale – osservare una quantizzazione della conduttanza addirittura a temperatura ambiente. Nel corso degli anni questi effetti sono stati esplorati usando varie tecniche anche meno raffinate, quali creazione meccanica di *break junctions*, e hanno avuto una grande importanza anche nello sviluppo e nello studio dell'elettronica molecolare¹².

Lo scopo dell'esperienza sarà di realizzare delle giunzioni di scala atomica in un interruttore macroscopico contenuto in un banale *relay* elettromeccanico a basso costo (un paio di Euro, al dettaglio) e di dimostrare l'osservabilità di fenomeni di quantizzazione della conduttanza, ovviamente a temperatura ambiente. Il fenomeno, sebbene osservabile più o meno facilmente al variare del metallo del contatto (oro, argento, rame o altro), è realisticamente presente in moltissimi interruttori con cui interagiamo quotidianamente. Tuttavia, come si vedrà, l'esperimento non sarà particolarmente semplice e richiederà vari accorgimenti nell'azionamento e misura del dispositivo, nonché nell'analisi e trattamento dei dati.

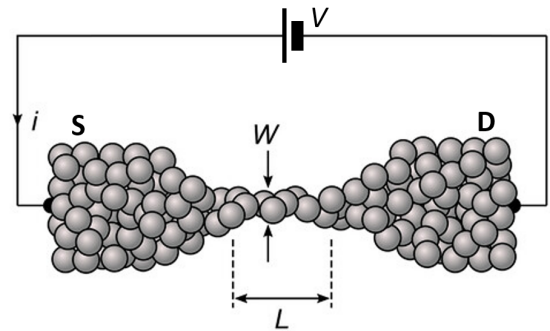


Figura 3.1: Giunzione di scala atomica.

Illustrazione e spiegazione dell'effetto

La quantizzazione della conduttanza di un dispositivo balistico si manifesta come una discretizzazione in multipli del quanto $G_0 = e^2/h$, dove e è la carica elettronica e h la costante di Planck. Il reciproco di questo valore $1/G_0$ è detto **costante di von Klitzing** ed corrisponde ad una resistenza dal valore piuttosto anonimo e dello stesso ordine di grandezza di quelle comunemente usate in elettronica: 25.812807 kΩ. In teoria, una quantizzazione esatta può essere ottenuta quando si realizzano alcune condizioni sperimentali chiave:

- il conduttore deve essere descrivibile come una "guida d'onda" fermionica in cui gli elettroni propagano in un numero limitato di modi di propagazione con delle dispersioni $E_n(k)$;

¹⁰B.J.van Wees et al. "Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas", Phys.Rev.Lett. **60**, 848 (1988) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.848>.

¹¹N. Agrait et al. "Conductance steps and quantization in atomic-size contacts", Phys.Rev.B **47**, 12435 (1993) <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.47.12345>.

¹²Per una review recente si veda "Molecular Electronics: Creating and Bridging Molecular Junctions and Promoting Its Commercialization", T.Li et al. Adv.Mater. **35**, 2209088 (2022) <https://doi.org/10.1002/adma.202209088>.

- i modi di propagazione devono avere una distanza energetica superiore all'allargamento termico delle distribuzioni elettroniche nei contatti, ossia $E_{n+1}(k) - E_n(k) \gg k_B T^{13}$;
- ogni elettrone che entra nella guida da un lato deve avere una probabilità del 100% di riemergere dal lato opposto, ossia nella guida non deve esserci *scattering*¹⁴;
- un elettrone che è in grado di attraversare la guida, deve avere una probabilità del 100% di essere assorbito dal contatto (per nulla ovvio, le discontinuità sono sempre sorgente di riflessione nei fenomeni ondulatori).

In queste condizioni, ci si attende che per ogni modo popolato della guida si realizzi la configurazione riportata in Fig.3.2, dove gli elettroni che si muovono verso destra ereditano il potenziale chimico e le probabilità di occupazione in funzione dell'energia proprie del contatto di sinistra μ_L da cui provengono, e viceversa. Data il circuito in Fig.3.1, abbiamo $\mu_L = \mu_R - eV$. Si noti come la configurazione di Fig.3.2 sia marcatamente fuori equilibrio e solo realizzabile nelle speciali ipotesi sopra elencate.

La corrente trasportata dagli elettroni in Fig.3.2 può essere calcolata in maniera relativamente semplice per ogni “modo”. Sia $E(k)$ la dispersione sotto analisi, la corrente sarà uguale alla carica elettronica ($-e$) per la frequenza di attraversamento degli elettroni, che per una guida lunga L sarà pari a L/v per un elettrone di velocità di propagazione v . Tradotto in una somma sugli stati elettronici nella dispersione $E(k)$ abbiamo

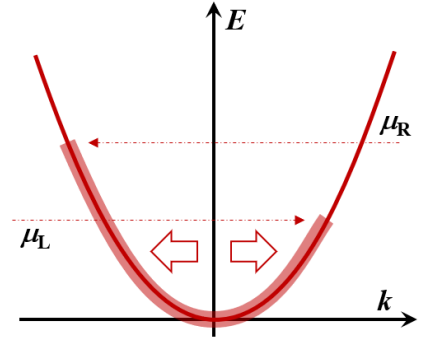


Figura 3.2: Dispersione.

$$I = \sum_{\text{elettroni}} (-e) \frac{v}{L} = \sum \frac{(-e)}{L} \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (3.1)$$

dove si è usata la nota regola per cui la velocità di gruppo per un qualsiasi fenomeno ondulatorio con dispersione $\omega(k) = E(k)/\hbar$ vale $v = d\omega/dk$. Passando al limite continuo, eseguiamo un integrale sugli stati occupati

$$I = \frac{2L}{2\pi} \int_{\text{occ}} \frac{(-e)}{L} \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} dk = -\frac{2e}{h} \int_{\text{occ}} dE. \quad (3.2)$$

dove il 2 tiene conto della degenerazione di spin. A questo punto – a prescindere dalla forma esatta della dispersione $E_n(k)$ – gli elettroni fino all'energia del potenziale chimico inferiore (qui μ_L) non portano alcuna corrente, mentre la parte non bilanciata sul ramo destro di Fig.3.2 porta una corrente

$$I = -\frac{2e}{h} \Delta\mu = \frac{2e^2}{h} V \quad (3.3)$$

e lo stesso succede per ogni modo di propagazione popolato. In conclusione, un conduttore balistico “ideale” con N modi di propagazione occupati ha una conduttanza pari a $G = 2Ne^2/h = 2NG_0$. Si noti che il risultato, è indipendente dalla lunghezza L del contatto atomico, fintanto che valgono le ipotesi. Questo è in contraddizione con il concetto di conducibilità locale, che infatti non ha senso in questo contesto.

Relay elettromagnetici

Un *relay* è un dispositivo che contiene uno o più interruttori “deviatori” azionati da un elettromagnete, ed è comunemente utilizzato per comandare l'accensione o spegnimento di apparecchiature in base ad un comando elettrico. Come tutti i deviatori, l'interruttore del *re-*

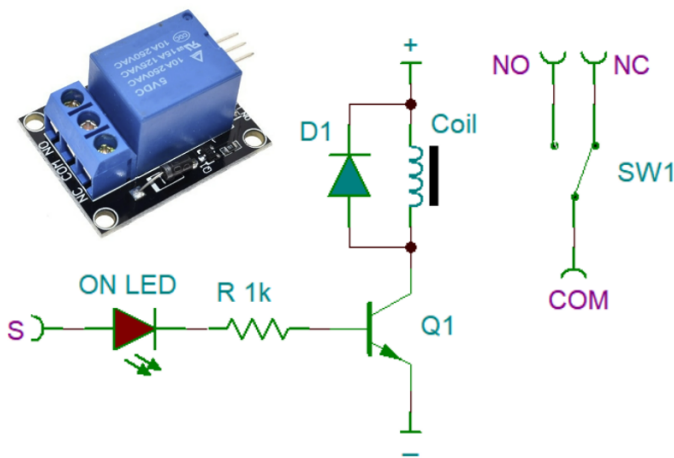


Figura 3.3: Scheda relay KY-019.

lay contiene un contatto comune – a volte marchiato con una serigrafia COM – che a riposo è connesso a un terminale

¹³Questo significa che il conduttore in questione deve essere piuttosto piccolo, in termini di sezione.

¹⁴Ossia il conduttore deve essere piuttosto corto: a seconda del dispositivo, *scattering* e regime diffusivo prendono il sopravvento su lunghezze scala che possono arrivare anche a qualche micron, ma in genere sono di pochi nanometri.

detto NC (*Normally Closed*). Quando l'elettromagnete viene energizzato questo fa scattare l'interruttore, scollegando il contatto NC e chiudendo la connessione fra il comune COM e il secondo terminale detto NO (*Normally Open*).

Nell'esperienza, il *relay* usato è parte di un modulo per progetti Arduino, come visibile in Fig.3.3. Questa piccola scheda è chiamata in genere KY-019¹⁵ e contiene: un LED per visualizzare lo stato di commutazione; un transistor bipolare Q1 che permette di attuare l'elettromagnete (che richiede una corrente non trascurabile) con un segnale digitale di bassa potenza, come quello di un microcontrollore. Diversamente, i contatti COM, NO e NC possono essere perfino collegati alla rete elettrica a 220V, permettendo così di accendere/spegnere un dispositivo ad alta potenza con un semplice segnale digitale. Si noti che il circuito contiene anche un diodo di protezione D1 che è fondamentale per proteggere i componenti dalle extracorrenti dell'induttore¹⁶.

Task 1 Consultare i *datasheet* forniti per capire come funziona il modulo fornito marchiato HW-482, anche indicato come KY-019. Verificare e annotare il significato dei piedini e i voltaggi di funzionamento.

Task 2 Caratterizzare il *relay* al fine di verificare il suo corretto funzionamento e soglia di commutazione. Montare lo schema in Fig.3.4a, attenendosi per ora ai componenti consigliati (connettere l'input dell'amplificatore al terminale NC). Il circuito è semplicemente un amplificatore invertente con l'ingresso collegato a W2 o meno in base allo stato della linea di controllo W1. Nello schema il condensatore C implementa un filtro passa-basso per limitare il rumore ad alta frequenza: impostare un valore di pochi picoFarad^a. Eseguire le seguenti verifiche sul montaggio:

- Impostare W1 a un voltaggio nullo e W2 una forma d'onda a piacere: ci aspettiamo che Ch2 misuri una versione amplificata di W2 secondo le note regole; verificare e prendere nota di eventuali offset o altri dettagli sperimentali del *setup*
- Impostare W1 a 5V e verificare che questo fa commutare il *relay*, scollegando l'ingresso dell'amplificatore e portando il valore di Ch2 a ...?
- Verificare e annotare anche a quale valore di W1 il *relay* cambia stato^b. C'è una isteresi nella commutazione? Annotare tutto quanto si ritiene utile riguardo il comportamento del *relay*.

^aPer esempio, sfruttando le capacità parassite fra due piste affiancate (ricordate quanto valgono?).

^bSiete liberi di farlo, ma non è particolarmente utile scendere sotto i 10 mV di risoluzione nella mappatura di W1. Considerate che su DAC .vi potete usare le frecce, che cambieranno la cifra su cui è posizionato il cursore.

Oltre alla statica, la dinamica meccanica dell'interruttore elettromeccanico è un aspetto non molto banale dell'esperimento, di cui è bene rendersi conto. Per esempio una cosa interessante (ma non necessariamente bella) che fanno gli interruttori meccanici è *rimbalzare* quando vengono chiusi.

Task 3 Usando lo stesso montaggio, verificheremo i ritardi nella risposta del *relay* e la presenza di rimbalzi meccanici. Impostare le sorgenti come segue:

- Impostare su W1 una onda quadra logica da 5V, con frequenza qualche Hertz o frazione di Hertz;
- Impostare su W2 un voltaggio costante non nullo, ma evitate di fare saturare l'OpAmp.

A questo punto, l'evoluzione del voltaggio su Ch2 verrà usata per monitorare lo stato dell'interruttore nel *relay*, in funzione de comando mandato con W1. Configurare il nuovo QC.vi opportunamente^a per misurare la dinamica di chiusura e apertura dell'interruttore, guardando il segnale Ch2. Come illustrato in Fig.3.4b, ci aspettiamo che il voltaggio di Ch2 cambi con un certo ritardo rispetto al comando W1: quanto vale il ritardo? Quando l'interruttore si chiude, il voltaggio misurato da Ch2 oscillerà più volte, in maniera anche complessa: con che tempi scala avvengono le oscillazioni? sono riproducibili? da che derivano? Caratterizzate l'effetto al vostro meglio. Generare un grafico riassuntivo *RitardoRimbalzo.pdf*.

^aQuesto include una scelta adeguata del campionamento e del *trigger* a salire o a scendere sul segnale logico W1.

¹⁵In realtà ne esistono innumerevoli cloni, sostanzialmente tutti equivalenti.

¹⁶Ricordiamo che il voltaggio di un induttore vale $L di/dt$: interrompere improvvisamente la corrente che attraversa con una L molto grande può generare voltaggi molto grossi e perfino a scariche distruttive.

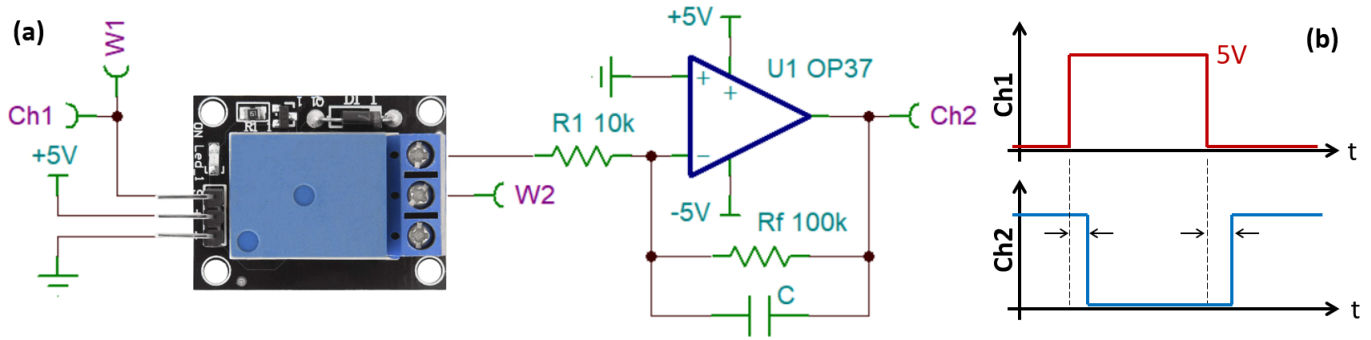


Figura 3.4: Setup per misurare la dinamica dell'interruttore e la quantizzazione della conduttanza.

Quantizzazione della conduttanza a temperatura ambiente

Presa confidenza con il comportamento del *relay* e con il nuovo programma QC.vi, puntiamo alla ricerca di evidenze di quantizzazione della conduttanza nel *relay*. L'esperimento **non è semplice** ed è dominato dalle fluttuazioni: ricordiamo che l'obiettivo abbastanza ambizioso è di usare un banale interruttore macroscopico per generare delle giunzioni di scala atomica. Non sorprendiamoci quindi se molte aperture dell'interruttore non presentano una quantizzazione precisa, o perfino anche solo vagamente riconoscibile. Tuttavia, l'attesa è che il gradino principale a $G = 2e^2/h$ emerga da uno studio statistico dei valori di conduttanza misurati, anche senza alcuna selezione delle prese dati.

Per essere efficienti, il consiglio è di partire attenendosi scrupolosamente alla configurazione di base indicata sotto, e che dovrebbe costituire un buon punto di partenza. In seguito, siete incoraggiati a trovare modi per ottimizzare la misura, incluso cambiare valori dei componenti, forme d'onda, modelli di OpAmp, eccetera.

Configurazione iniziale. Per quanto riguarda il **circuito** in Fig.3.4a, le indicazioni sono:

- Partire dai componenti indicati, che dovrebbero permettere una prima osservazione del fenomeno. Mantenere C sul livello di pochi pF, ma sconsigliamo di toglierlo del tutto.

Per quanto riguarda l'**eccitazione**, le indicazioni sono:

- Il *relay* va aperto lentamente: il consiglio è di partire da un'onda triangolare a 0.5Hz, con una ampiezza il più piccola possibile (0.1 – 0.2V) compatibile con la commutazione del *relay*.
- Si suggerisce di usare una polarizzazione **negativa** di $V_{W2} = -400\text{mV}^a$, e un opportuno fondoscala per la misura sui canali di Analog Discovery 2.

Per quanto riguarda l'**acquisizione**, le indicazioni sono:

- Usare un alto sampling rate (10 – 100 MSa/s) e il massimo numero di punti disponibili.
- Usare il segnale amplificato come *trigger*, a scendere, con un livello relativamente basso e vicino al minimo voltaggio misurato che va dal voltaggio di interruttore aperto a quello di chiuso. Usare una sufficiente isteresi e sfruttare il *pretrigger time* per catturare meglio il dato cercato.
- Se possibile, effettuare le misure con il computer **non collegato alla rete elettrica** per minimizzare il rumore dovuto alle 50Hz e/o all'alimentatore del *laptop*.

Se – usando queste indicazioni e dopo (!) un periodo ragionevole di sperimentazione indipendente – non siete in grado di evidenziare alcun segnale utile, contattate i docenti.

^aQuesto voltaggio è piuttosto grande rispetto alle indicazioni tipiche della letteratura, ma garantisce un segnale pulito con il *setup* minimalista e non schermato adottato, senza per questo generare particolari problemi. A livello teorico, il *bias* deve essere molto inferiore alla distanza energetica fra le dispersioni (che non è nota, ma realisticamente molto superiore) e limitare gli effetti di riscaldamento. Idealmente, è quindi meglio se il *bias* è piccolo. Tuttavia, è del tutto inutile scendere sotto 3 – 4 volte $k_B T / e \approx 26\text{mV}$. Si noti anche che il *bias* è partizionato da R_1 cade solo in parte sull'interruttore.

Considerando l'offset V_0 , ci aspettiamo che il segnale in uscita valga $V_{Ch2} = V_0 - iR_f$ dove i è la corrente che scorre

attraverso l'interruttore. Completando il calcolo e detta R la resistenza del relay, si ottiene

$$V_{\text{Ch2}} = V_0 - \frac{R_f}{R_1 + R} V_{\text{W2}} = V_0 + \frac{V_1 - V_0}{1 + R/R_1} \quad (3.4)$$

dove è stato introdotto il voltaggio massimo $V_1 = V_0 - V_{\text{W2}} \cdot R_f / R_1$ che si ottiene a *relay* chiuso.

Homework 1 Verificare, partendo dalle formule fornite, che la conduttanza del *relay* può essere calcolata con la relazione

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{V_{\text{Ch2}} - V_0}{V_1 - V_{\text{Ch2}}} \quad (3.5)$$

a partire dai semplici voltaggio minimo V_0 , voltaggio massimo V_1 e dalla resistenza R_1 , che sono tutti parametri facilmente misurabili in maniera diretta.

Task 4 Stimare V_0 e V_1 nelle condizioni di misura, facendo delle acquisizioni a $V_{\text{W1}} = 0\text{V}$ e a $V_{\text{W1}} = 5\text{V}$.

La trasformazione appena descritta viene effettuata automaticamente da QC.vi, in base ai valori indicati di V_0 , V_1 e R_1 . Indicativamente, si noti anche che il primo gradino di quantizzazione si realizza per una $R \approx 12.9\text{k}\Omega$ di poco superiore alla R_1 indicata in Fig.3.4 e quindi per un valore di V_{Ch2} che si trova circa alla media fra V_0 e V_1 . Come tale, dovrebbe essere relativamente facile da individuare nei dati.

Task 5 Fare delle prime acquisizioni della conduttanza del *relay* secondo le indicazioni riportate, individuando fenomeni di quantizzazione su dati selezionati. Usare queste prime misure per ottimizzare i parametri liberi, in particolare quelli di acquisizione e trigger. Una volta raggiunta una configurazione soddisfacente, fare acquisizioni ripetute da analizzare statisticamente facendo degli istogrammi della conduttanza. Effettuare uno studio statistico senza alcuna selezione: l'aspettativa è che il primo quanto di conduttanza $G = 2e^2/h$ emerga in maniera statisticamente inequivocabile: stimare dalle misure il valore di $2e^2/h$. Riassumere il risultato dello studio, inclusivo di misure selezionate e di studio statistico cumulativo, in un grafico chiamato `QuantizzazionePreliminare.pdf`.

Chiarito il punto di partenza e individuata la fenomenologia, ottimizzare la misura agendo sulle variabili del *set-up*, in una o più delle seguenti direzioni fornite come possibile spunto:

- agire sulla forma d'onda per comandare il *relay*: gli articoli forniti contengono vari spunti in questo senso;
- agire sui componenti del circuito quali le resistenze, il modello di OpAmp¹⁷ il *relay* stesso;
- agire sui metodi di selezione e analisi dei dati, per esempio ponendo delle condizioni specifiche per eliminare i dati evidentemente fallati (ma documentate bene il vostro metodo!).
- agire su qualsiasi altro aspetto vi sembri opportuno.

Task 6 Documentare e svolgere lo studio di ottimizzazione indicato, idealmente individuando una ricetta migliorata per evidenziare la quantizzazione. Riassumere il risultato finale dello studio in un grafico `QuantizzazioneFinale.pdf`.

Task 7 Una delle problematiche citate negli articoli proposti è quella della resistenza in serie alla giunzione atomica, dovuta alla presenza di porzioni di metallo di piccole dimensioni in regime diffusivo. Verificare se i dati raccolti mostrano evidenza di tali effetti, e quanto chiara. Si noti anche che, sebbene tipicamente ci sia un "ultimo atomo" che congiunge i due elettrodi che si stanno separando, nelle misure non è del tutto ovvio che non si stiano misurando più punti di contatto in parallelo. Presentare il risultati dello studio in un grafico chiamato `ResistenzaSpurie.pdf`.

¹⁷Dato che la quantizzazione si sviluppa su pochi microsecondi, l'OpAmp deve essere comunque rapido, considerare come opzioni alternative AD8031, OP27, MCP601, e ricordate le regole sul prodotto banda-guadagno.