Universidad Alfonso X el Sabio

Lucía Mielgo Torres, Martina García González

Grado en Ingeniería Matemática

AMPLIACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Taller 3

28 de enero de 2025

Seguidamente debe de estar el abstract donde se resuma el trabajo realizado. El abstract no debe de contener más de 150 palabras

1. Introducción

1. Desarrolle una función en python que calcule el valor la derivada de una función f(x) en un punto dado mediante la fórmula adelantada. La función debe admitir como variables la función f(x) a derivar, el punto c donde se calcule la derivada y el paso h. Realice lo mismos para las fórmulas atrasada y centrada.

2. Desarrolle un programa que calcule la derivada de la función $f(x) = 4 - e^{x^2}$ alrededor del punto x=0 mediante derivadas adelantadas, atrasadas y centradas, utilizando saltos de paso de h=0.1; h=0.2 y h=0.5. Compare los resultados con el resultado analítico.

3. Implemente la extrapolación de Richardson para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ alrededor del punto x=1 con un salto de paso h=0.5.

4. Desarrolle un programa que grafique la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5$ en el intervalo [0,10] con un salto de paso h=0.1 usando el método de la derivada centrada.

2. Métodos y modelos matemáticos

Para obtener la **fórmula adelantada**, partimos de la serie de Taylor y despejamos la primera derivada:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots \quad (1)$$

Despejando la derivada, obtenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + \dots \tag{2}$$

De este modo, podemos obtener la primera aproximación con su error, que dependerá de la magnitud h:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \tag{3}$$

$$E = \frac{f''(x_i)}{2!}h + \dots \tag{4}$$

$$E = O(h) \tag{5}$$

Para obtener la **fórmula atrasada**, se desarrolla el polinomio en el punto x_{i-1} y, siguiendo la condición $h = x_i - x_{i-1}$, se obtiene:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \dots \tag{6}$$

Despejando la derivada, obtenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{f''(x_i)}{2!}h + \dots \tag{7}$$

Primera aproximación:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \tag{8}$$

Con las **diferencias centradas**, podemos reducir el error. Partiendo de las series anteriores, si restamos ambas, obtenemos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots \tag{9}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots \tag{10}$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + O(h^3) \tag{11}$$

Despejando la derivada, observamos que el error está en función de h^2 y no de h:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{12}$$

La **Extrapolación de Richardson** es una forma de obtener una mejor aproximación a nuestra derivada sin necesidad de disminuir el valor de h. La idea principal de la extrapolación de Richardson es utilizar múltiples aproximaciones de la derivada con diferentes valores de h y combinarlas para eliminar el error de truncamiento de orden inferior.

Cuando calculamos una derivada numérica usando, por ejemplo, la fórmula centrada, el error que obtenemos es del orden de $O(h^2)$. La extrapolación de Richardson permite reducir este error sin tener que disminuir h directamente, lo que puede ser computacionalmente costoso.

El proceso consiste en calcular la derivada usando diferentes tamaños de paso, como h y $h/2$, y luego combinar estas aproximaciones para obtener una mejor estimación. Para la fórmula centrada, la extrapolación de Richardson se expresa como:

$$f'(x_i) \approx \frac{4}{3} f'_{\text{centrada}}(h/2) - \frac{1}{3} f'_{\text{centrada}}(h) \tag{13}$$

Esta combinación elimina el término de error de orden $O(h^2)$, proporcionando una mejor aproximación de la derivada con un error de orden superior, $O(h^4)$.

Este método puede extenderse para obtener aún mayor precisión usando extrapolaciones adicionales, aplicando el mismo procedimiento con diferentes tamaños de paso.

3. Resultados

La solución del ejercicio 1 está en el anexo.

Los resultados del ejercicio 2 son los siguientes:

- Para $h = 0{,}1$:

$$\begin{aligned}\text{Derivada adelantada} &: -0{,}10050167084167949\\ \text{Derivada atrasada} &: 0{,}10050167084167949\\ \text{Derivada centrada} &: 0{,}0\\ \text{Derivada analítica} &: 0{,}0\end{aligned}$$

- Para $h = 0{,}2$:

$$\begin{aligned}\text{Derivada adelantada} &: -0{,}20405387096193994\\ \text{Derivada atrasada} &: 0{,}20405387096193994\\ \text{Derivada centrada} &: 0{,}0\\ \text{Derivada analítica} &: 0{,}0\end{aligned}$$

- Para $h = 0{,}5$:

$$\begin{aligned}\text{Derivada adelantada} &: -0{,}5680508333754828\\ \text{Derivada atrasada} &: 0{,}5680508333754828\\ \text{Derivada centrada} &: 0{,}0\\ \text{Derivada analítica} &: 0{,}0\end{aligned}$$

El código del ejercicio 3 está en el anexo

Los resultados para el ejercicio 3 son los siguientes ; hemos estudiado la función de richardson en punto c=1 y con una h que varía de 0 a 1 para ver como cambian nuestros resultados.

x	$f(x)$
0,0	2,718281828459045
0,1	2,7636158793108283
0,2	2,809060214555681
0,3	2,8545479405608662
0,4	2,8998250375942094
0,5	2,9444543562926655
0,6	2,9878166769639853
0,7	3,02910891113419
0,8	3,067339488639137
0,9	3,101320938483128

La gráfica es la siguiente:

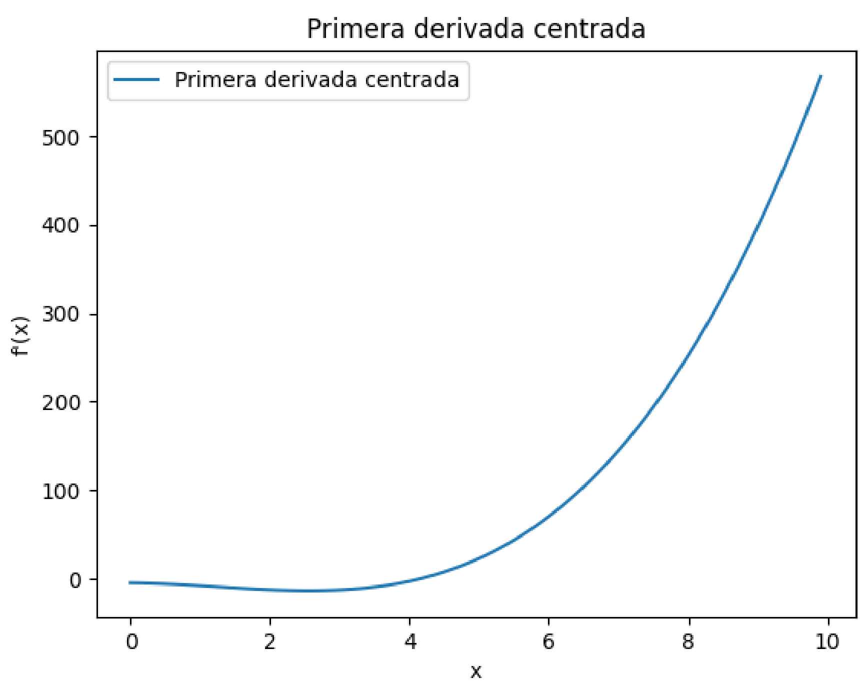

Figura 1: Gráfica de la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5$

4. Discusión

En términos generales, la mejor aproximación entre las fórmulas de diferencias finitas (adelantada, atrasada o centrada) depende del contexto en el que se utilicen y el nivel de precisión requerido. Pero podemos afirmar que la aproximación centrada es mejor en términos de precisión, ya que el error disminuye más rápidamente conforme se reduce h (orden $O(h^2)$ frente al $O(h)$ de las otras dos). Sin embargo, las aproximaciones adelantada o atrasada pueden ser más útiles en situaciones específicas donde no se puede o no se desea utilizar valores futuros o pasados de la función.

5. Conclusiones

La **derivada adelantada** y la **derivada atrasada** tienen un error de orden $O(h)$, mientras que la **derivada centrada** es más precisa con un error de $O(h^2)$. El **método de Richardson** mejora aún más, reduciendo el error a $O(h^4)$ mediante extrapolación, lo que lo hace más preciso que los métodos anteriores con un número similar de evaluaciones.

6. Referencias

7. Anexos

Las funciones utilizadas para realizar los ejercicios son las siguientes.

Código de la función de la derivada adelantada

```
def derivada_adelantada(f, c, h):
    """
    Calcula la derivada de la función f en el punto c usando la fórmula adelantada.

    Parámetros:
    f: función a derivar
    c: punto en el que se calcula la derivada
    h: paso (diferencia pequeña)

    Devuelve:
    Aproximación de la derivada de f en el punto c.
    """
    return (f(c + h) - f(c)) / h
```

Código de la función de la derivada atrasada

```
def derivada_atrasada(f, c, h):
```

```
    return (f(c) - f(c - h)) / h
```

Código de la función de la derivada atrasada

```
def derivada_centrada(f, c, h):
    return (f(c + h) - f(c - h)) / (2 * h)
```

Código de extrapolación de Richardson

```
    def richardson(f,c,h):
      der1=derivada_centrada(f,c,h/2)
      der2=derivada_centrada(f,c,h)
      return (4/3)*der1-(1/3)*der2
```