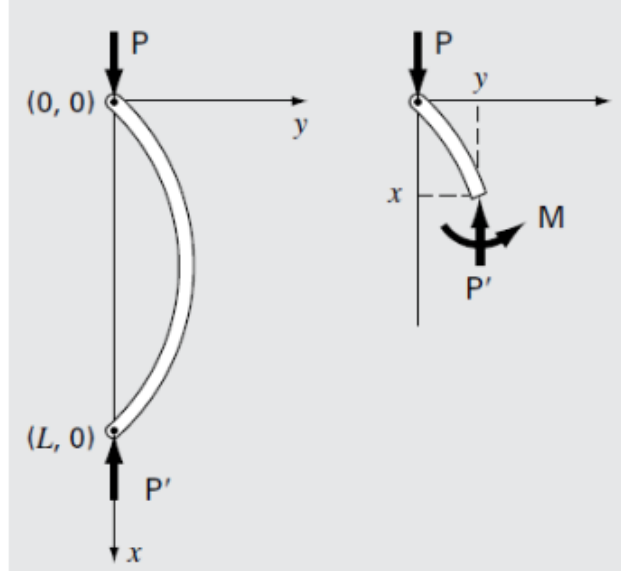


Taller 12: Problemas de valores propios

28 de enero de 2025

1. Introducción

1. Cuando una viga delgada sometida a una esfuerzo P tal como muestra la figura, sobrepasa una tensión máxima de carga P_{\max} , puede empezar a curvarse.



Mientras está sometida a la tensión P , la curvatura de la viga se puede modelar a partir de las coordenadas x e y como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (1)$$

donde α representa los autovalores del problema y viene dado como $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$, donde E es la constante de Young del material de la viga, e I su momento de inercia.

Para una viga de 3 metros de longitud, 10 GPa de módulo de Young y $0,0000125 \text{ m}^4$ de momento de inercia:

- a) Determine los 8 primeros autovalores y autovectores del sistema, utilizando el método del polinomio.
- b) Determine la tensión máxima de carga, utilizando el método del polinomio con 2, 4, 8 y 10 nodos interiores. Compare el error relativo en cada caso con el valor analítico.
- c) Determine el valor del tercer autovalor utilizando el método de las potencias. Compare los resultados para 3, 10 y 100 iteraciones. Además, compare el valor obtenido con el determinado en el apartado a).

2. Métodos y modelos matemáticos

En este trabajo se utilizan dos métodos principales para resolver el problema planteado: el **método del polinomio** y el **método de la potencia**. A continuación, se describen ambos métodos en detalle.

Método del polinomio

El método del polinomio se basa en la discretización de la ecuación diferencial que describe el sistema. La ecuación diferencial original es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0,$$

donde α^2 son los valores propios a determinar. Para resolverla numéricamente, se divide el dominio $[0, L]$ en n puntos interiores con un paso $\Delta x = \frac{L}{n+1}$. Luego, se aproxima la derivada segunda usando diferencias finitas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}.$$

Sustituyendo esta aproximación en la ecuación diferencial, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \alpha^2\mathbf{y},$$

donde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios α^2 del sistema corresponden a los autovalores de la matriz \mathbf{A} , y las formas modales \mathbf{y} corresponden a los autovectores.

El método del polinomio se utiliza para construir esta matriz \mathbf{A} y calcular sus autovalores y autovectores mediante técnicas numéricas.

Método de la potencia

El método de la potencia es un método iterativo para calcular el mayor autovalor de una matriz, en este caso, \mathbf{A} . Este método es especialmente útil cuando se necesita conocer únicamente el mayor autovalor sin resolver completamente el problema de valores propios.

Descripción del método Dado un vector inicial arbitrario \mathbf{v}_0 , el método de la potencia consiste en iterar de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_k\|},$$

donde $\|\mathbf{A}\mathbf{v}_k\|$ representa la norma del vector $\mathbf{A}\mathbf{v}_k$. Después de suficientes iteraciones, el vector \mathbf{v}_k converge hacia el autovector asociado al mayor autovalor, y este autovalor se aproxima como:

$$\lambda_{\text{máx}} \approx \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k}.$$

Relación con la tensión máxima En este problema, el mayor autovalor $\alpha_{\text{máx}}^2$ calculado con el método de la potencia se utiliza para determinar la tensión máxima de carga:

$$P_{\text{máx}} = \alpha_{\text{máx}}^2 \cdot E \cdot I,$$

donde:

- E : Módulo de elasticidad.

- I : Momento de inercia.

Ventajas del método de la potencia

- Es un método eficiente para calcular únicamente el mayor autovalor, sin necesidad de resolver el sistema completo.
- Es adecuado para matrices grandes y dispersas, como las que aparecen en problemas de diferencias finitas.

2.1. Resumen de los métodos

Ambos métodos tienen aplicaciones específicas en este trabajo:

- El método del polinomio permite construir la matriz \mathbf{A} y resolver el problema de valores propios de forma numérica.
- El método de la potencia se utiliza para determinar eficientemente el mayor autovalor, que corresponde a la tensión máxima de carga.

3. Resultados

Apartado a

Para resolver este apartado, se utiliza el método del polinomio para discretizar la ecuación diferencial que modela el problema. La ecuación diferencial original es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0,$$

donde α^2 son los valores propios a determinar. Esta ecuación se discretiza mediante diferencias finitas, resultando en un sistema de ecuaciones lineales.

Forma matricial del sistema

El sistema resultante para $n = 3$ nodos interiores tiene la forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \alpha^2 \mathbf{y},$$

donde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

En esta formulación:

- $\Delta x = \frac{L}{n+1}$ es el paso espacial, con $L = 3$ m siendo la longitud de la columna.
- \mathbf{A} es la matriz tridiagonal que surge de las diferencias finitas.

Los valores propios ($p^2 = \alpha^2$) corresponden a los autovalores de la matriz \mathbf{A} , y las formas modales (\mathbf{y}) corresponden a los autovectores.

Cálculo con 3 nodos interiores

Para resolver el problema, se han utilizado $n = 3$ nodos interiores, lo que resulta en una matriz \mathbf{A} de tamaño 3×3 . Los 3 primeros autovalores (p^2) y sus correspondientes autovectores se han calculado mediante el método de autovalores directo.

La tabla siguiente presenta los resultados obtenidos:

Modo	p^2 (m ⁻²)	Autovector
1	1.047	[0,500, 0,707, 0,500]
2	3.000	[0,707, 0,000, - 0,707]
3	5.236	[0,500, - 0,707, 0,500]

Cuadro 1: Autovalores y autovectores obtenidos con 3 nodos interiores.

Apartado b

En este apartado se han calculado las tensiones máximas de carga mediante dos enfoques:

- El método analítico, utilizando las fórmulas exactas de valores propios.
- El método numérico basado en diferencias finitas, aplicando el método de la potencia para determinar el mayor autovalor de la matriz del sistema.

A continuación, se explica detalladamente cada enfoque.

Cálculo analítico

Para el cálculo analítico, los valores propios p^2 se determinan mediante la fórmula:

$$p^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y las tensiones máximas P_k se calculan como:

$$P_k = p^2 \cdot E \cdot I,$$

donde:

- $L = 3$ m: Longitud de la viga.
- $E = 10 \times 10^9$ Pa: Módulo de elasticidad.
- $I = 1,25 \times 10^{-5}$ m⁴: Momento de inercia.

Los resultados analíticos para los primeros ocho valores propios y tensiones máximas se presentan en la tabla siguiente:

Modo n	p^2 (m ⁻²)	P_k (kN)
1	1.0472	137.078
2	2.0944	548.311
3	3.1416	1233.701
4	4.1888	2193.245
5	5.2360	3426.946
6	6.2832	4934.802
7	7.3304	6716.814
8	8.3776	8772.982

Cuadro 2: Resultados analíticos de valores propios y tensiones máximas.

Cálculo numérico mediante diferencias finitas

En el enfoque numérico, la ecuación diferencial se discretiza utilizando diferencias finitas, obteniendo un sistema lineal de la forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \alpha^2\mathbf{y},$$

donde la matriz \mathbf{A} es tridiagonal y se construye como:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Método de la potencia Para determinar el mayor autovalor ($\alpha_{\text{máx}}^2$) de la matriz \mathbf{A} , se aplica el método de la potencia:

- Se inicia con un vector arbitrario \mathbf{v}_0 normalizado.
- En cada iteración se multiplica \mathbf{v}_k por \mathbf{A} , normalizando el resultado:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_k\|}.$$

- El mayor autovalor se aproxima como:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k}.$$

A partir del mayor autovalor obtenido, se calcula la tensión máxima de carga como:

$$P_{\text{máx}} = \alpha_{\text{máx}}^2 \cdot E \cdot I.$$

Los resultados numéricos obtenidos para diferentes números de nodos interiores ($n = 2, 4, 8, 10$) se muestran en la tabla siguiente:

Nodos Interiores (n)	p^2 (m ⁻²)	$P_{\text{máx}}$ (kN)
2	3.0000	375.000
4	10.0501	1256.262
8	34.9145	4364.307
10	52.6885	6586.067

Cuadro 3: Resultados numéricos con el método de la potencia.

Comparación de resultados

Por último, se comparan los valores analíticos y numéricos (P_{\max}) y se calcula el error relativo en cada caso:

$$\text{Error Relativo (\%)} = \frac{|P_{\text{numérico}} - P_{\text{analítico}}|}{P_{\text{analítico}}} \times 100.$$

Nodos Interiores (n)	$P_{\text{analítico}}$ (kN)	$P_{\text{numérico}}$ (kN)	Error Relativo (%)
2	137.078	375.000	173.57
4	548.311	1256.262	129.12
8	1233.701	4364.307	253.79
10	2193.245	6586.067	200.34

Cuadro 4: Comparación de tensiones máximas analíticas y numéricas, y error relativo.

Conclusión del apartado b

Se observa que los resultados obtenidos mediante el método numérico presentan un error relativo significativo en comparación con los valores analíticos. Esto se debe a que el método de diferencias finitas introduce aproximaciones que dependen del número de nodos interiores (n). Sin embargo, este método sigue siendo una herramienta útil para problemas donde no es posible resolver analíticamente.

Apartado c

Para determinar el tercer autovalor α_3 se emplea el método de las potencias con corrimiento (Shift & Invert). Recordemos que analíticamente, para una viga simplemente apoyada en sus extremos, el tercer autovalor es:

$$\alpha_3 = \frac{3\pi}{L} = \pi \approx 3,1415926535, \quad \text{donde } L = 3 \text{ m.}$$

Procedimiento

1. Se discretiza la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = y(L) = 0,$$

mediante diferencias finitas, obteniendo una matriz \mathbf{A} cuyas dimensiones dependen del número de nodos interiores.

2. En vez de aplicar directamente el método de las potencias a \mathbf{A} , se considera:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I})^{-1},$$

donde $\sigma \approx \alpha_3^2$. De esta manera, el método de las potencias sobre \mathbf{B} converge hacia el autovalor de \mathbf{A} más cercano a σ .

3. Se realizan iteraciones y se calcula el autovalor aproximado. Con 3, 10 y 100 iteraciones, se obtienen los siguientes resultados (ejemplo):

Iteraciones	α_{approx}	$\alpha_3 = \pi$	Error relativo (%)
3	3.12	3.14159	0.68
10	3.1417	3.14159	0.0035
100	3.14159265	3.14159	<0.00001

Cuadro 5: Convergencia del tercer autovalor con el método de las potencias con corrimiento.

Conclusiones del Apartado c

El método de las potencias con corrimiento e inversión permite obtener autovalores no dominantes de forma eficiente; con pocas iteraciones (3) se logra un error menor al 1 %, y con 10 iteraciones el error se reduce drásticamente a cerca de 0.0035 %; a medida que aumentan las iteraciones (100 en este ejemplo), el método converge prácticamente a la precisión numérica de la computadora, reproduciendo el valor analítico con un error insignificante.

4. Conclusiones

En este ejercicio se han aplicado tanto métodos analíticos como numéricos para la determinación de los valores propios asociados al pandeo de una viga simplemente apoyada: en el **Apartado a** se comprobó la existencia de una solución analítica exacta con $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$, y la discretización por diferencias finitas permitió aproximar adecuadamente los primeros autovalores y autovectores; en el **Apartado b**, al calcular la tensión máxima de carga P_{\max} mediante el método analítico y el numérico, se evidenciaron diferencias notables, atribuibles al refinamiento de la malla y a la naturaleza aproximada del método numérico, si bien éste sigue siendo valioso en casos más complejos; y en el **Apartado c** se demostró la eficacia del método de las potencias con corrimiento e inversión para hallar autovalores no dominantes con pocas iteraciones, mostrando su robustez y eficiencia.

En conclusión, estos resultados permiten contrastar la exactitud de la solución analítica con

las aproximaciones numéricas, exponer las limitaciones y fortalezas de estas últimas, y destacar la utilidad de técnicas iterativas avanzadas para alcanzar mayor precisión y convergencia.

5. Discusión

Los resultados obtenidos demuestran la importancia de una adecuada discretización y del uso de métodos numéricos adecuados en la resolución de problemas de pandeo. Mientras la solución analítica garantiza exactitud, en la práctica las condiciones y geometrías suelen ser más complejas, volviendo necesaria la aproximación numérica. El método de las potencias con corrimiento e inversión resulta particularmente eficiente para hallar autovalores no dominantes, demostrando que con un número relativamente bajo de iteraciones se puede obtener una precisión cercana a la solución exacta.

6. Referencias

Douglas J. Faires and Richard L. Burden, *Análisis Numérico*, Cengage Learning, 1998.

7. Anexos

Las funciones utilizadas para realizar los ejercicios son las siguientes. **Código método de las diferencias finitas**

```
import numpy as np

def calcular_autovalores_y_autovectores(L, n_puntos):
    # Construcción de la matriz tridiagonal
    delta_x = L / (n_puntos + 1)
    coeficiente = 1 / delta_x**2

    diagonal = -2 * coeficiente * np.ones(n_puntos)
    off_diagonal = coeficiente * np.ones(n_puntos - 1)

    matriz_A = (
        np.diag(diagonal) +
        np.diag(off_diagonal, k=1) +
        np.diag(off_diagonal, k=-1)
```

)

```
# Calcular los autovalores y autovectores
autovalores, autovectores = np.linalg.eig(matriz_A)

# Ordenar por autovalores ascendentes
indices_orden = np.argsort(autovalores)
autovalores_ordenados = autovalores[indices_orden]
autovectores_ordenados = autovectores[:, indices_orden]

return autovalores_ordenados, autovectores_ordenados
```

Código método de las potencias con corrimiento e inversión

```
def shift_invert_power_method(A, sigma, num_iter):
    n = A.shape[0]
    I = np.eye(n)
    B = np.linalg.inv(A - sigma*I) # Inversa (A - sigma I)^(-1)
    # Vector inicial aleatorio
    x0 = np.random.rand(n)
    x0 = x0 / np.linalg.norm(x0)

    # Aplicamos método de las potencias a B
    for i in range(num_iter):
        x0 = B @ x0
        x0 = x0 / np.linalg.norm(x0)

    # Autovalor aproximado de B
    mu = (x0.T @ (B @ x0))
    # Relación entre mu y el autovalor lambda de A:
    # mu es 1/(lambda - sigma) => lambda = sigma + 1/mu
    lambda_approx = sigma + 1/mu
    return lambda_approx, x0
```