Universidad Alfonso X el Sabio

Lucía Mielgo Torres, Martina García González

Grado en Ingeniería Matemática

AMPLIACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Taller 5

28 de enero de 2025

1. Introducción

1. Implemente una función en Python que calcule la solución de una ecuación diferencial ordinaria del tipo: $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ donde $t \in [t_0, t_f]$ y con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, siendo x_0 una constante, utilizando el método de Euler. La función debe aceptar como variables a $f(x,t)$, t_0, t_f, x_0, N, siendo N el número de pasos.

2. Implemente computacionalmente un programa que resuelva la ecuación diferencial $y' = ty + t^3$, donde $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$, mediante el método de Euler utilizando los anchos de paso de $h = 0{,}1$, $h = 0{,}01$ y $h = 0{,}001$. Grafique los resultados y compárelos con los resultados de la solución analítica.

2. Métodos y modelos matemáticos

El método de Euler es una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{1}$$

con una condición inicial $y(t_0) = y_0$. El método de Euler utiliza la derivada para aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante una secuencia de pasos discretos. A partir de un valor inicial conocido, se calcula el siguiente valor de la función utilizando la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{2}$$

donde:

- h es el tamaño del paso,

- $t_n = t_0 + nh$ es el tiempo en el paso n,

- y_n es la aproximación numérica de la solución en el tiempo t_n.

El método de Euler es explícito, lo que significa que el nuevo valor y_{n+1} se calcula directamente a partir del valor actual y_n y la pendiente $f(t_n, y_n)$. Este método es sencillo de implementar, pero puede ser ineficiente para obtener soluciones precisas cuando el tamaño de paso h es grande, ya que introduce errores numéricos acumulativos. Sin embargo, al reducir el valor de h, se mejora la precisión de la solución a costa de un mayor número de cálculos.

3. Resultados

4. Discusión

La gráfica muestra cómo el método de Euler se aproxima a la solución analítica conforme se reduce el tamaño del paso h. Para $h = 0{,}1$, la solución numérica presenta una desviación notable a medida que t aumenta, lo que indica una menor precisión. Sin embargo, al disminuir h a 0,01 y 0,001, las curvas obtenidas mediante Euler se ajustan mucho mejor a la solución analítica, evidenciando que un paso más pequeño reduce el error de aproximación.

5. Conclusiones

6. Referencias

Douglas J. Faires and Richard L. Burden, *Análisis Numérico*, Cengage Learning, 1998.

7. Anexos

Las funciones utilizadas para realizar los ejercicios son las siguientes. **Función del Método de Euler**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

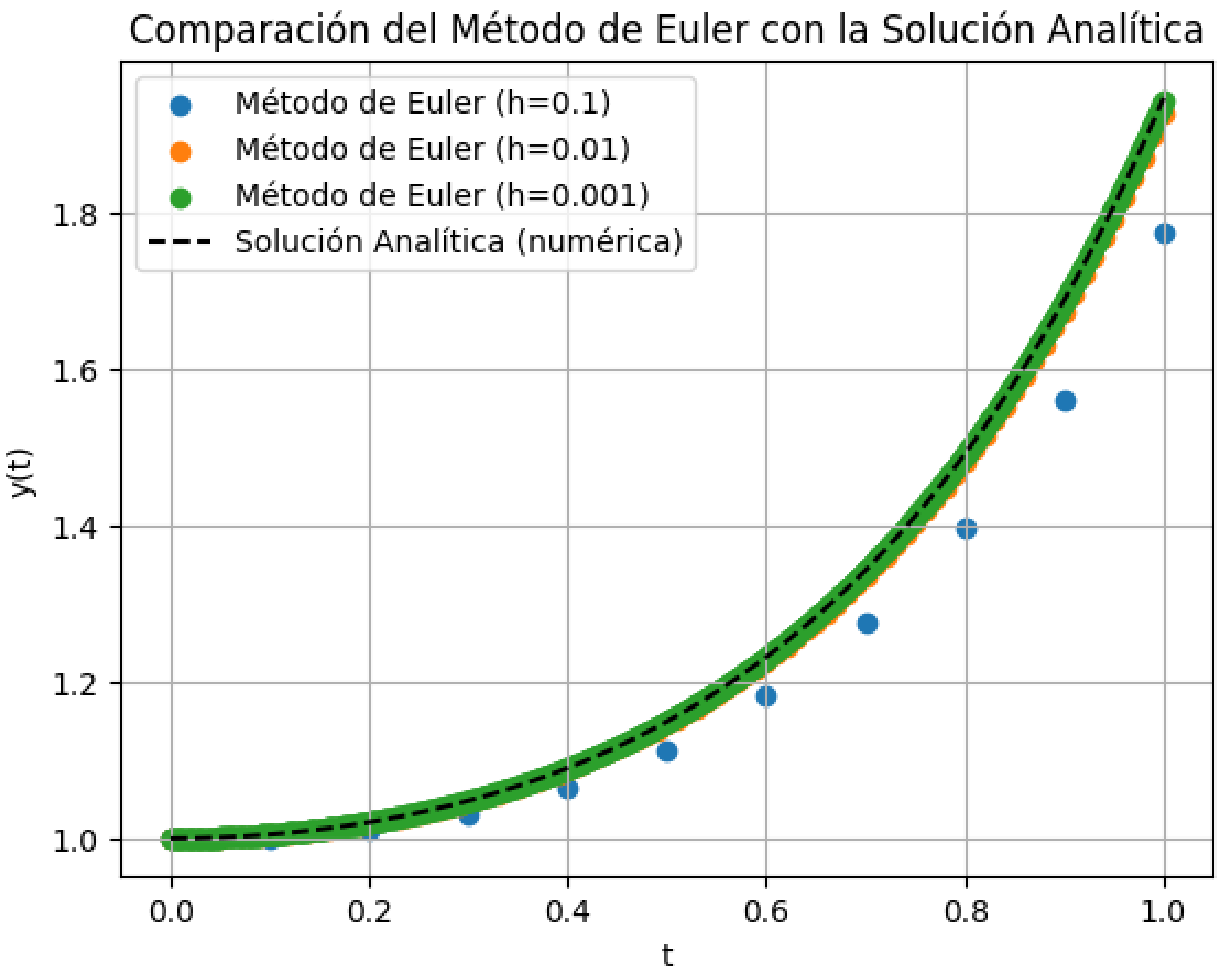

Figura 1: solución del método de Euler y la analítica de $y = ty + t^3$

```
def euler_method(f, t0, tf, x0, N):
"""
f : función que describe la EDO dx/dt = f(x, t)
t0 : tiempo inicial
tf : tiempo final
x0 : valor inicial x(t0)
N : número de pasos
Retorna:
t : array de tiempos
x : array de soluciones x(t)
"""
h = (tf - t0) / N  # tamaño del paso
```

```
t = np.linspace(t0, tf, N+1)
x = np.zeros(N+1)
x[0] = x0

for i in range(N):
    x[i+1] = x[i] + h * f(x[i], t[i])

return t, x
```