

# Universidad Alfonso X el Sabio

Martina García González, Lucía Mielgo Torres

*Grado en Ingeniería Matemática*

AMPLIACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

---

## Taller 11: Problemas de valores en la frontera

28 de enero de 2025

### 1. Introducción

1. Se tiene una barra metálica de 10 metros de longitud. Los extremos de la barra se colocan a una temperatura de  $40^{\circ}$  uno y  $200^{\circ}$  el otro. Determine la distribución de temperatura en grados Celsius con una precisión de 10 cm, si la barra no tiene pérdidas de calor, es decir, la distribución de temperatura viene dada como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

2. Repita el ejercicio anterior, suponiendo una pérdida de temperatura con la temperatura ambiente. En este caso, si tomamos la temperatura ambiente como  $T_a = 20^{\circ}$ , la distribución de temperatura estaría modelada por:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 0,2(T - T_a) = 0$$

3. Repita los apartados anteriores si se cambia la temperatura del extremo de  $200^{\circ}$  a  $-20^{\circ}$ .

## 2. Métodos y modelos matemáticos

### Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales (EDP) aproximando las derivadas mediante expresiones algebraicas en un dominio discretizado. Este método se basa en la discretización del dominio continuo en puntos llamados nodos, donde se calcula la solución aproximada.

### 2.1. Aproximación de las derivadas

La base del método consiste en reemplazar las derivadas en una ecuación diferencial por aproximaciones basadas en diferencias finitas. Las fórmulas más comunes son:

- Derivada primera (diferencia hacia adelante):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Derivada primera (diferencia hacia atrás):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}.$$

- Derivada primera (diferencia centrada):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

- Derivada segunda:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}.$$

### 2.2. Discretización del dominio

Para resolver una ecuación diferencial, se discretiza el dominio continuo en un conjunto finito de puntos. Por ejemplo, si el dominio es  $[0, L]$ , se divide en  $N$  subintervalos de longitud  $\Delta x$ , donde  $x_i = i\Delta x$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

## 2.3. Sustitución en la ecuación diferencial

Las derivadas en la ecuación diferencial se reemplazan por las aproximaciones por diferencias finitas. Esto transforma la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve para los valores de la función en los nodos del dominio.

## 2.4. Ventajas y limitaciones

El método de diferencias finitas es sencillo de implementar y adecuado para problemas lineales. Sin embargo, su precisión depende del tamaño de los pasos  $\Delta x$ , y puede requerir refinamientos en problemas no lineales o cuando se busca alta precisión.

En resumen, el método de diferencias finitas transforma problemas continuos en sistemas discretos resolubles numéricamente, proporcionando una solución aproximada que converge a la solución exacta a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ .

# 3. Resultados

## Ejercicio 1 - Resolución del Problema de Distribución de Temperaturas

Para determinar la distribución de temperatura a lo largo de una barra metálica de 10 metros, con temperaturas fijas en los extremos de  $40^\circ C$  y  $200^\circ C$ , seguimos los pasos descritos:

### 1. Discretización del dominio:

- Dividimos la barra en intervalos de  $\Delta x = 0,1$  m, obteniendo  $N = 101$  nodos.
- Los extremos tienen temperaturas fijas:

$$T_0 = 40^\circ C \quad \text{y} \quad T_{10} = 200^\circ C.$$

### 2. Aproximación por diferencias finitas:

- La ecuación diferencial  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$  se discretiza utilizando diferencias finitas:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, 9.$$

- Esto genera un sistema lineal tridiagonal para los nodos internos.

### 3. Sistema matricial:

- La matriz del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

y el vector  $b$  que incluye las condiciones de frontera es:

$$b = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ T_{10} \end{bmatrix}.$$

### 4. Resolución:

- Resolvemos el sistema lineal  $A \cdot T = b$  para obtener las temperaturas  $T_1, T_2, \dots, T_9$ .

## Resultados

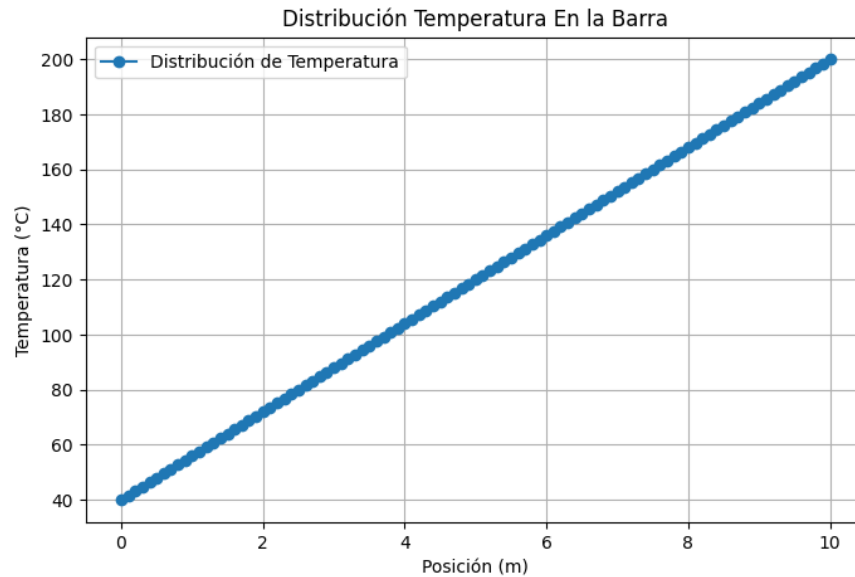
A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los nodos distribuidos uniformemente a lo largo de la barra con temperaturas iniciales  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = 200^\circ C$ :

Nodo	Posición ( $x$ m)	Temperatura ( $^\circ C$ )
$T_0$	0.0	40.0
$T_1$	0.1	41.6
$T_2$	0.2	43.2
$T_3$	0.3	44.8
$T_4$	0.4	46.4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{96}$	9.6	193.6
$T_{97}$	9.7	195.2
$T_{98}$	9.8	196.8
$T_{99}$	9.9	198.4
$T_{100}$	10.0	200.0

Cuadro 1: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = 200^\circ C$ .

## Gráfica

La gráfica de la distribución de temperaturas es:



**Descripción:** La gráfica muestra una distribución lineal de temperaturas a lo largo de la barra, confirmando que no hay pérdidas de calor y la solución cumple la ecuación  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ .

## Ejercicio 2

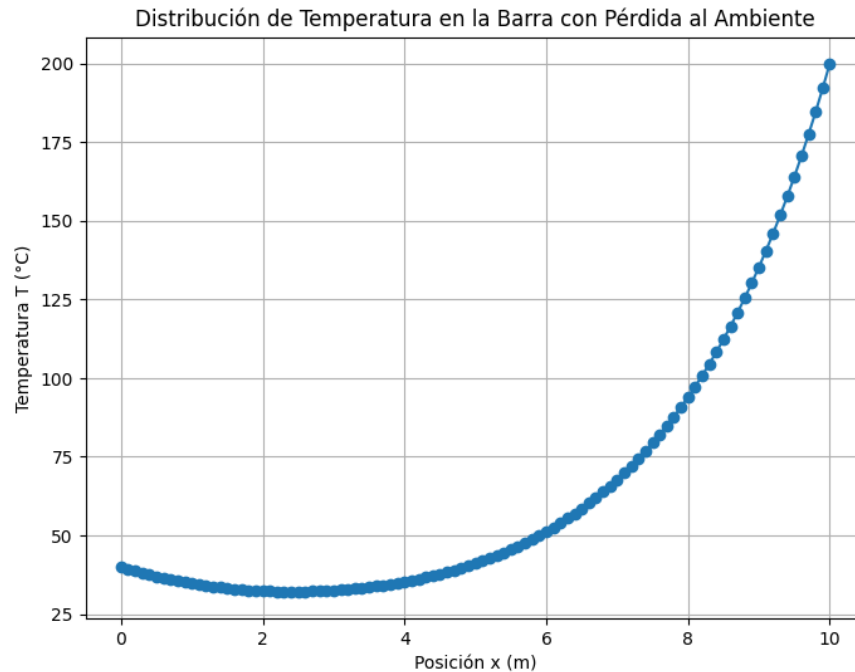
### Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los nodos distribuidos uniformemente a lo largo de la barra con temperaturas iniciales  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = 200^\circ C$  contando con una pérdida de calor al ambiente de  $T_a = 20^\circ$  :

Nodo	Posición ( $x$ m)	Temperatura ( $^\circ C$ )
$T_0$	0.0	40.00
$T_1$	0.1	39.31
$T_2$	0.2	38.66
$T_3$	0.3	38.04
$T_4$	0.4	37.46
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{96}$	9.6	170.59
$T_{97}$	9.7	177.46
$T_{98}$	9.8	184.64
$T_{99}$	9.9	192.15
$T_{100}$	10.0	200.00

Cuadro 2: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  ,  $T_{10} = 200^\circ C$  y  $T_a = 20^\circ C$ .

La gráfica de la distribución de temperaturas es:



**Descripción:** La gráfica muestra una distribución no lineal que sigue un comportamiento típico de gradiente térmico en una barra bajo conducción de calor, con pérdida hacia el ambiente.

## Ejercicio 3

### Ejercicio 3-1

Hemos resuelto este apartado utilizando el mismo procedimiento que en el ejercicio uno, pero considerando diferentes temperaturas en los extremos de la barra. Primero analizamos el caso con  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$ . A continuación, mostramos los resultados en 10 nodos distribuidos uniformemente a lo largo de la barra.

## Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los nodos distribuidos uniformemente a lo largo de la barra con temperaturas iniciales  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$ :

Nodo	Posición ( $x$ m)	Temperatura ( $^\circ C$ )
$T_0$	0.0	40.0
$T_1$	0.1	39.4
$T_2$	0.2	38.8
$T_3$	0.3	38.2
$T_4$	0.4	37.6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{96}$	9.6	-17.6
$T_{97}$	9.7	-18.2
$T_{98}$	9.8	-18.8
$T_{99}$	9.9	-19.4
$T_{100}$	10.0	-20.0

Cuadro 3: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$ .

## Gráfica

La gráfica muestra cómo varía la temperatura a lo largo de la barra de longitud 10 m, con una temperatura inicial de  $T_0 = 40^\circ C$  en un extremo y  $T_{10} = -20^\circ C$  en el otro extremo. Se observa una disminución lineal de la temperatura desde el extremo caliente hacia el extremo frío

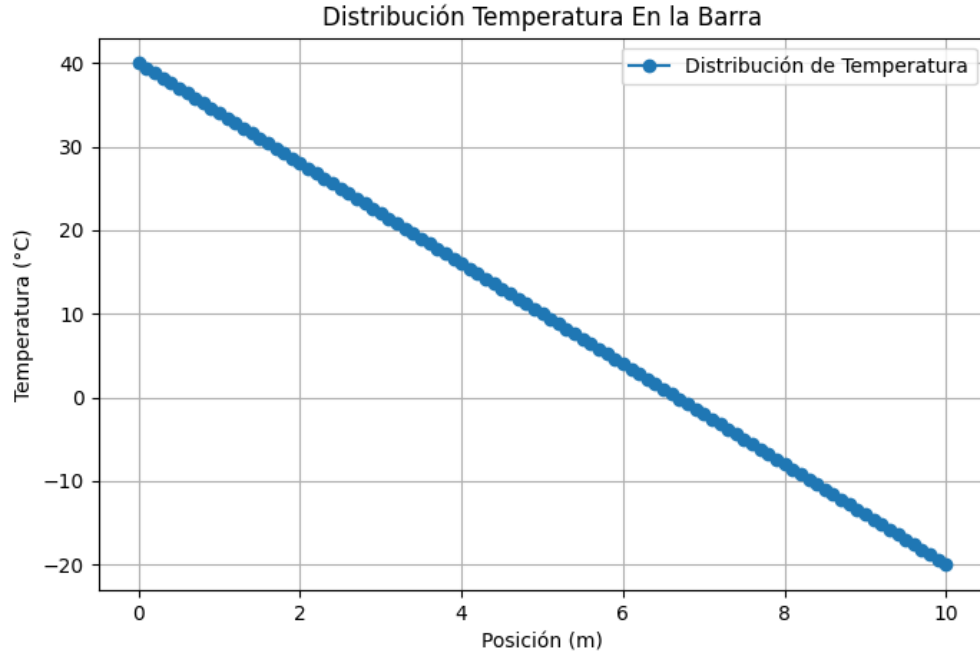


Figura 1: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$ .

### Ejercicio 3-2

### Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los nodos distribuidos uniformemente a lo largo de la barra con temperaturas iniciales  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$  con una pérdida de calor al ambiente de  $T_a = 20^\circ$ :

Nodo	Posición ( $x$ m)	Temperatura ( $^\circ C$ )
$T_0$	0.0	40.00
$T_1$	0.1	39.08
$T_2$	0.2	38.21
$T_3$	0.3	37.37
$T_4$	0.4	36.56
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{97}$	9.7	-14.92
$T_{98}$	9.8	-16.54
$T_{99}$	9.9	-18.23
$T_{100}$	10.0	-20.00

Cuadro 4: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$  con pérdida de calor.



## Gráfica

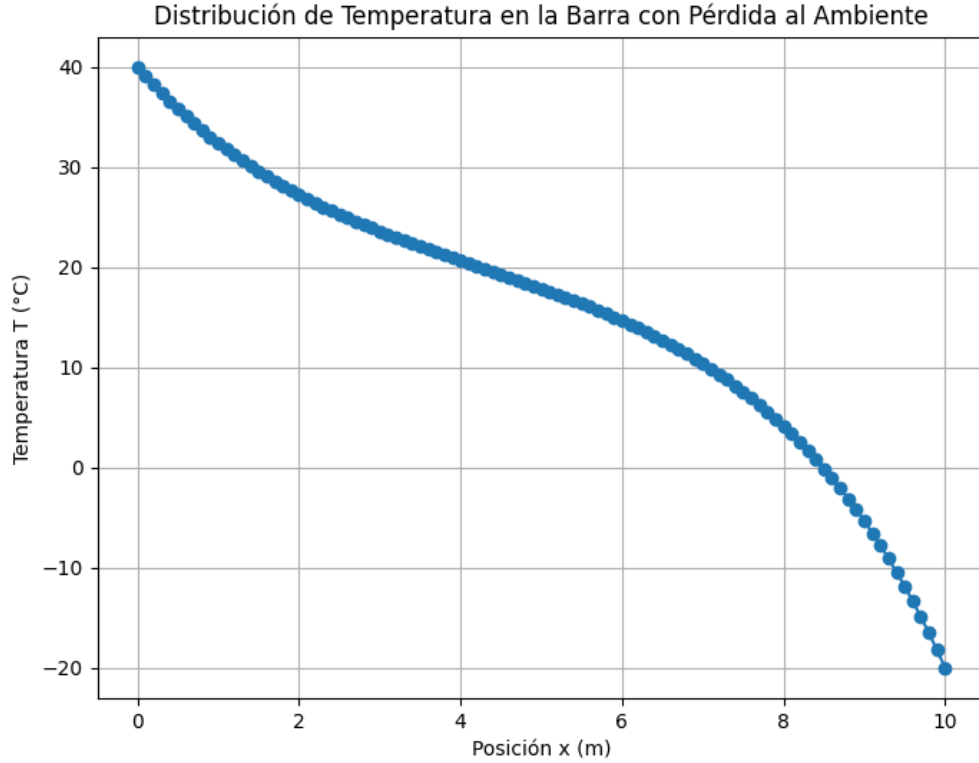


Figura 2: Distribución de temperaturas a lo largo de la barra para  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$  con pérdida de calor.

La gráfica muestra una distribución no lineal que sigue un comportamiento típico de gradiente térmico en una barra bajo conducción de calor, con pérdida hacia el ambiente.

## 4. Discusión

En ausencia de generación interna de calor y bajo condiciones estacionarias, la ecuación diferencial que describe la conducción de calor en una dimensión es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Esto implica que la segunda derivada de la temperatura respecto a la posición es cero, indicando que el gradiente térmico es constante a lo largo de la barra.

En el **Ejercicio 1**, donde se consideró una barra sin pérdidas de calor al ambiente y con

temperaturas en los extremos de  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = 200^\circ C$ , se observa una distribución lineal de temperaturas a lo largo de la barra. Esto confirma que la solución satisface la ecuación diferencial, indicando un estado estacionario sin generación ni pérdida de calor interna o externa. La temperatura varía uniformemente, propio de una conducción de calor pura en una dimensión sin efectos adicionales.

En el **Ejercicio 2**, al introducir una pérdida de calor al ambiente con una temperatura ambiente de  $T_a = 20^\circ C$ , la distribución de temperatura se vuelve no lineal. La barra pierde calor continuamente hacia el ambiente, lo que significa que la tasa de disipación de calor depende directamente de la diferencia de temperatura entre la barra y el ambiente, lo que provoca cambios en el gradiente térmico a lo largo de la barra. Esto demuestra que las pérdidas de calor influyen significativamente en la distribución de temperaturas, haciendo que la variación sea más pronunciada cerca de los extremos donde la diferencia con el ambiente es mayor.

En el **Ejercicio 3-1**, al considerar temperaturas en los extremos de  $T_0 = 40^\circ C$  y  $T_{10} = -20^\circ C$  sin pérdidas de calor, se mantiene una distribución lineal de temperaturas, disminuyendo uniformemente a lo largo de la barra.

Sin embargo, en el **Ejercicio 3-2**, al incluir pérdidas de calor al ambiente, la distribución vuelve a ser no lineal, reafirmando que las pérdidas al ambiente generan una desviación de la linealidad en la distribución de temperatura.

En todos los casos con pérdidas de calor, se nota que la temperatura de la barra tiende a acercarse a la temperatura ambiente en regiones alejadas de los extremos con temperaturas fijadas. Esto indica que el ambiente actúa como un sumidero de calor, especialmente en zonas donde la temperatura de la barra es más alta que la del ambiente. Ignorar estas pérdidas podría llevar a diseños ineficientes o fallos en aplicaciones prácticas donde el control térmico es esencial.

$T_0 = 40^\circ C$  ,  $T_{10} = 200^\circ C$  y  $T_a = 20^\circ C$ .

## 5. Conclusiones

La comparación entre los diferentes escenarios destaca la influencia significativa que tienen las condiciones de contorno y las pérdidas de calor al ambiente en la distribución de temperaturas en una barra.

Para un análisis completo y realista de problemas de conducción de calor, es esencial incluir todos los factores que pueden afectar el sistema, lo que incluye tanto las condiciones de contorno como las interacciones con el ambiente.

Por otro lado, el método de diferencias finitas aplicado en la resolución del problema de distribución de temperaturas en la barra metálica ha demostrado ser una técnica numérica eficaz y de fácil implementación. Al discretizar el dominio en nodos y aproximar las derivadas mediante expresiones algebraicas, se transformó la ecuación diferencial continua en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Esto nos ha permitido obtener soluciones numéricas que reflejan adecuadamente el comportamiento físico esperado, como la distribución lineal de temperaturas en ausencia de pérdidas de calor y la distribución no lineal al considerar pérdidas al ambiente.

Este método destaca por su simplicidad y flexibilidad para incorporar diversas condiciones de contorno, siendo aplicable tanto a problemas lineales como no lineales. Sin embargo, la precisión de las soluciones depende del tamaño del paso, pudiendo requerir refinamientos para aumentar la exactitud en casos más complejos. En resumen, el método de diferencias finitas es una herramienta valiosa y útil a la hora de resolver problemas de ingeniería y ciencias aplicadas, facilitando la resolución numérica de ecuaciones diferenciales y proporcionando soluciones aproximadas que son coherentes con los principios físicos subyacentes del problema.

## 6. Referencias

Douglas J. Faires and Richard L. Burden, *Análisis Numérico*, Cengage Learning, 1998.

## 7. Anexos

Las funciones utilizadas para realizar los ejercicios son las siguientes.

### Datos del problema

```
L = 10.0    # Longitud de la barra en metros
T0 = # Temperatura en x=0 (°C)
TL = # Temperatura en x=L (°C)
Ta = # Temperatura ambiente (°C)
kappa = 0.2 # Coeficiente de pérdida de calor
```

```

h = 0.1          # Tamaño del paso (metros)
N = int(L / h)   # Número de segmentos
n = N + 1        # Número de nodos

```

## Código para contar sin pérdidas de calor

```

# Número de nodos internos
n_internal = int(L / dx) - 1

# Construcción de la matriz A
A = np.zeros((n_internal, n_internal)) # Matriz vacía
for i in range(n_internal):
    A[i, i] = 2 # Diagonal principal
    if i > 0:
        A[i, i - 1] = -1 # Diagonal inferior
    if i < n_internal - 1:
        A[i, i + 1] = -1 # Diagonal superior

# Construcción del vector b
b = np.zeros(n_internal)
b[0] = T0
b[-1] = T10

# Resolver el sistema de ecuaciones
temperaturas_internas = np.linalg.solve(A, b)

# Vector completo de temperaturas
T = np.zeros(n_internal + 2)
T[0] = T0
T[1:-1] = temperaturas_internas
T[-1] = T10

# Generar los nodos x y mostrar resultados en forma de tabla
x = np.linspace(0, L, len(T))
resultados = pd.DataFrame({"x (m)": x, "T (°C)": T})
print(resultados)

```

## Código para contar con pérdidas de calor

```
# Vectores para las posiciones y temperaturas
x = np.linspace(0, L, n)
T = np.zeros(n)

# Número de ecuaciones y variables desconocidas
m = n - 2 # Excluyendo los nodos con condiciones de frontera conocidas

# Coeficientes para la matriz tridiagonal
a_diag = 2 + kappa * h**2 # Coeficiente diagonal
a_offdiag = -1             # Coeficientes fuera de la diagonal
f = kappa * h**2 * Ta     # Término independiente

# Construcción de la matriz A (m x m) y el vector B (m x 1)
A = np.zeros((m, m))
B = np.full((m, 1), f)

# Llenado de la matriz A
for i in range(m):
    if i > 0:
        A[i, i - 1] = a_offdiag
    A[i, i] = a_diag
    if i < m - 1:
        A[i, i + 1] = a_offdiag

# Ajuste de los términos independientes por las condiciones de frontera
B[0] -= T0 * a_offdiag # Ajuste por la condición en x=0
B[-1] -= TL * a_offdiag # Ajuste por la condición en x=L

# Resolución del sistema de ecuaciones
T_interior = np.linalg.solve(A, B).flatten()

# Incorporación de las temperaturas conocidas en los extremos
T[0] = T0
T[1:-1] = T_interior
```

```
T[-1] = TL
```

```
# Conversión de la solución a una matriz n x 1
```

```
T_matrix = T.reshape(n, 1)
```