Universidad Alfonso X el Sabio

Martina García González

Grado en Ingeniería Matemática

TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

Enuciado

Los economistas del Banco Central Europeo han ajustado los datos de variación de la tasa de ahorro de las familias (%ΔTasa de ahorro) en función de la variación de PIB (%ΔPIB) y la variación del consumo de los hogares (%ΔCH) en función del tiempo t en trimestres. Todas las tasas de variación son inter-trimestrales. Si consideramos, para simplificar el problema, que $x =$ %ΔPIB e $y =$ %ΔCH, la ecuación a optimizar es:

$$\%\Delta\text{Tasa de ahorro} = J = \int \left[(1+t^2)\cdot x(t) + y(t) + \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)^3 \right] dt$$

Apartado a) Mediante el cálculo de variaciones, calcular las curvas óptimas de PIB y de CH en función de t (en función de las constantes de integración), que optimizan el problema.

Apartado b) Se ha establecido para la simulación que para $t = 0{,}5$, la tasa de variación del PIB y del consumo de los hogares es del 0.5 %. De igual modo, para $t = 1$, las tasas de variación de PIB y de consumo de los hogares es del 1 %. Calcular las curvas óptimas bajo estas condiciones de contorno. Dibujar las curvas.

Apartado c) Los economistas necesitan saber si existe un punto t^* que iguale las curvas de optimización. Demostrar si existe este punto desde un punto de vista gráfico dentro de los intervalos de t de 0 a 2. ¿Qué significado económico podemos concluir tras este análisis?

Apartado d) Aplicando la distancia por diferencias (diferencia entre los valores de x^* e y^*), calcular el punto t^* que minimice dicha distancia entre curvas. Razonar la respuesta e indicar cómo usar este parámetro desde un punto de vista económico.

Apartado e) Las nuevas políticas fiscales establecidas por la UE y la incertidumbre sobre cómo impactarán los conflictos en Oriente Medio y la guerra de Ucrania en la economía de la UE, hacen necesario establecer una función de control de cada una de las variables en función del incremento de la inflación $u(t)$ y $v(t)$. En este sentido, se establecen dos funciones de control:

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{PIB}_t}{\partial t} = u(t), \quad \frac{\partial \Delta \mathrm{CH}_t}{\partial t} = v(t)$$

Parte e) Aplicando técnicas de control óptimo, el equipo económico necesita conocer las curvas optimizadas de la función J, así como las funciones u y v optimizadas en función de t. En este caso, dejar la solución en función de las constantes de integración.

Dado el caso de uso, enumera tres conclusiones desde el punto de vista económico y matemático.

Solución

Apartado a

Con el fin de optimizar el porcentaje de tasa de ahorro, debemos encontrar las curvas óptimas $x^*(t)$ e $y^*(t)$,PIB Y CH respectivamente. La función a optimizar es la siguiente J:

$$J(x, y) = \text{Ópt} \int \left[(1 + t^2) \cdot x + y + (x')^2 + (y')^3\right] \, dt$$

Donde:

- $x =$ %ΔPIB y - $y =$ %ΔCH (consumo de los hogares)

x' y y' indican cómo varían ambas variables con respecto del tiempo (trimestre).

Planteamiento del SEDO

Planteamos SEDO usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo las derivadas, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1+t^2) - 2x'' = 0 \\ 1 - 6y'y'' = 0 \end{cases}$$

Simplificando,obtenemos:

$$\begin{cases} x'' = \frac{1+t^2}{2} \\ y'y'' = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Resolución Sistema:

Hallamos curva $\boldsymbol{x(t)}$:

$$x'' = \frac{1+t^2}{2}$$

Integrando una vez:

$$x' = \frac{1}{2}(t + \frac{t^3}{3}) + c_1$$

Integrando de nuevo:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + c_1 t + c_2$$

Hallamos curva $\boldsymbol{y(t)}$:

$$y'y'' = \frac{1}{6}$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable: $y' = z$ y $y'' = z'$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$zz' = \frac{1}{6}$$

Integrando:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{t}{6} + c$$

Despejamos z:

$$z = \left(\frac{t}{3} + c\right)^{1/2}$$

Deshacemos el cambio de variable $z = y'$, por lo tanto:

$$y' = \left(\frac{t}{3} + c\right)^{1/2}$$

Integrando y':

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{3}t + c\right)^{3/2} + k$$

Por lo tanto, las curvas óptimas para ΔPIB y ΔCH son:

Para ΔPIB, $x^*(t)$:

$$x^*(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + c_1 t + c_2$$

Para ΔCH, $y^*(t)$:

$$y^*(t) = 2\left(\frac{1}{3}t + c\right)^{3/2} + k$$

Apartado b

Imponemos las condiciones: $x(0{,}5) = y(0{,}5) = 0{,}5$ y $x(1) = y(1) = 1$.

Curva óptima $x(t)$

Resolvemos el siguiente sistema para $x(t)$:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}0651041666 + \frac{c_1}{2} + c_2 = 0{,}5$$

$$x(1) = 0{,}291666 + c_1 + c_2 = 1$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{35}{64} \approx 0{,}546875 \\ c_2 = \frac{31}{192} \approx 0{,}161458 \end{cases}$$

Por lo tanto, la curva óptima para $x(t)$ es:

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{24} + \frac{35}{64}t + \frac{31}{192}$$

Curva óptima $y(t)$

Imponemos ahora las condiciones para $y(t)$:

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{3}t + c\right)^{3/2} + k$$

Utilizamos las condiciones de contorno $y(0{,}5) = 0{,}5$ y $y(1) = 1$:

$$y(0{,}5) = 2\left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}5 + c\right)^{3/2} + k = 0{,}5$$

$$y(1) = 2\left(\frac{1}{3} + c\right)^{3/2} + k = 1$$

Restamos la ecuación (2) de la ecuación (1):

$$y(1) - y(0{,}5) = 2\left(\left(\frac{1}{3} + c\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{6} + c\right)^{3/2}\right) = 0{,}5$$

Aplicamos el método de Newton-Raphson (ver código en la sección de Anexos):

$$c_{i+1} = c_i - \frac{y(c_i)}{y'(c_i)}$$

donde:

$$y(c) = 2\left(\frac{1}{3} + c\right)^{3/2} - 2\left(\frac{1}{6} + c\right)^{3/2} - 0{,}5$$

$$y'(c) = 3\left(\frac{1}{3} + c\right)^{1/2} - 3\left(\frac{1}{6} + c\right)^{1/2}$$

Tomando como semilla inicial $c_{\text{inicial}} = 1$, en 4 iteraciones la raíz encontrada es:

$$c = 0{,}750579$$

Sustituyendo en $y(0{,}5)$:

$$k = 0{,}5 - 2\left(\frac{1}{6} + 0{,}1750579\right)^{3/2}$$

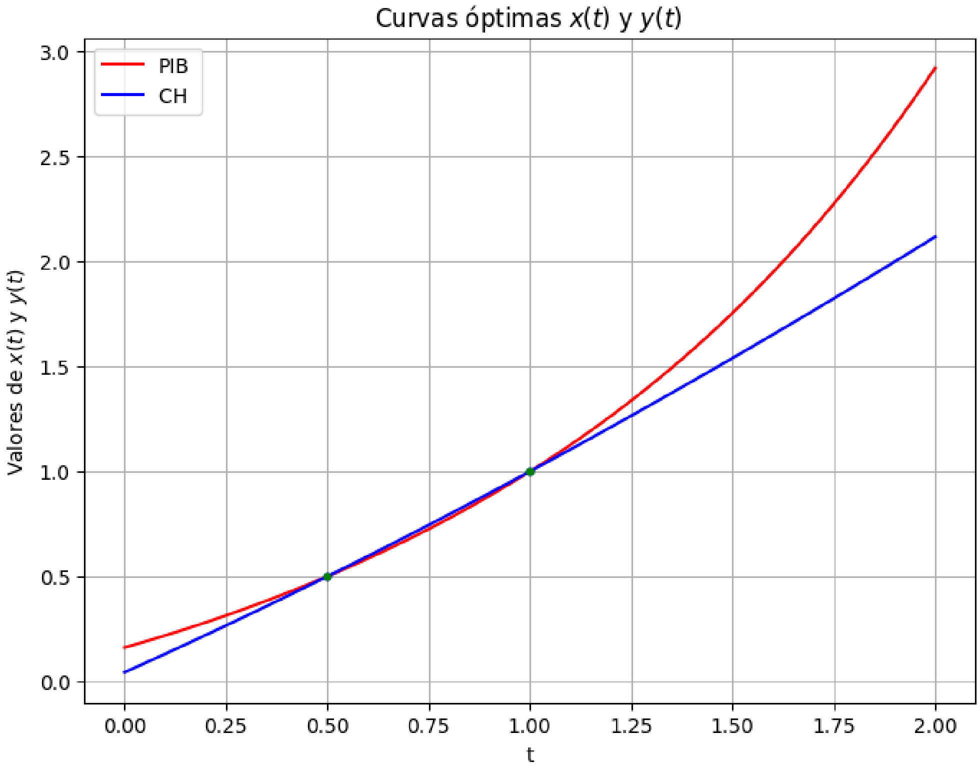
$$k = -1{,}256946$$

Finalmente, la curva óptima para $y(t)$ es:

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{3}t + 0{,}750579\right)^{3/2} - 1{,}256946$$

Gráfica de las curvas %ΔPIB y (%ΔCH) en función de t(trimestre

A continuación, se presenta la gráfica de las curvas $x(t)$ y $y(t)$ optimizadas según las condiciones impuestas:



Breve análisis y extrapolación de las curvas:

1. Función $x(t)$ (PIB):

Dominio: $x(t)$ es un polinomio, lo que significa que está definida para todos los valores reales de t, es decir, su dominio es $(-\infty, \infty)$.

Comportamiento cuando $t \to +\infty$*:*

El término de mayor orden es $\frac{t^4}{24}$, por lo que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$$

El PIB crece rápidamente de manera positiva debido al término de orden 4

—

2. Función $y(t)$ (CH):

Dominio: Para que $y(t)$ esté definida, como la raíz no puede ser negativa:

$$\frac{t}{3} + c \geq 0 \implies t \geq -3c$$

Por lo tanto, el dominio de $y(t)$ es $t \geq -3c$. Si $c = 0{,}75$, esto implica $t \geq -2{,}25$.

Comportamiento cuando $t \to +\infty$: Cuando $t \to +\infty$, el término de mayor orden es $\left(\frac{t}{3} + c\right)^{3/2}$, por lo que:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$$

Extrapolación y comportamiento de $x(t)$ y $y(t)$

A medida que t aumenta, la diferencia entre el crecimiento del PIB y el consumo se vuelve muy grande. Para $t = 10$, el PIB es aproximadamente 447.30, mientras que el consumo es solo 15.20, lo que muestra un desbalance poco realista.

Este desajuste se debe a que el PIB crece de manera exponencial debido al término t^4, mientras que el consumo crece de forma más lenta . En una economía real, el consumo debería seguir de forma más proporcional al crecimiento del PIB.

Además, ambas funciones tienden a infinito conforme $t \to \infty$. Esto es practicamente imposible en la enconomía, ya que ni el PIB ni el consumo pueden crecer indefinidamente sin límites.

Conclusión: Las funciones $x(t)$ y $y(t)$ podrían ser válidas en un intervalo pequeño, como $[0, 5]$, donde el crecimiento es más proporcional. Sin embargo, para valores grandes de t, el modelo se vuelve incoherente, ya que el PIB crece demasiado rápido en comparación con el consumo .

Apartado c

Tras analizar la gráfica, observamos a simple vista que en el intervalo $[0, 2]$ las curvas se intersectan en los puntos t=0.5y t=1.

Esto sugiere que, en esos instantes, la tasa de variación del consumo coincide con la del PIB, es decir, todo lo que la economía del país produce está siendo consumido por los hogares.

La coincidencia de ambas curvas puede interpretarse como un periodo de sostenibilidad económica. En esos instantes, el gasto de los hogares (demanda interna) está impulsando el crecimiento económico. Asimismo, podemos concluir que la economía no depende de otros factores, como la inversión o las exportaciones, para mantener su crecimiento, ya que los hogares tienen ingresos suficientes para consumir todo lo que se produce.

Apartado d

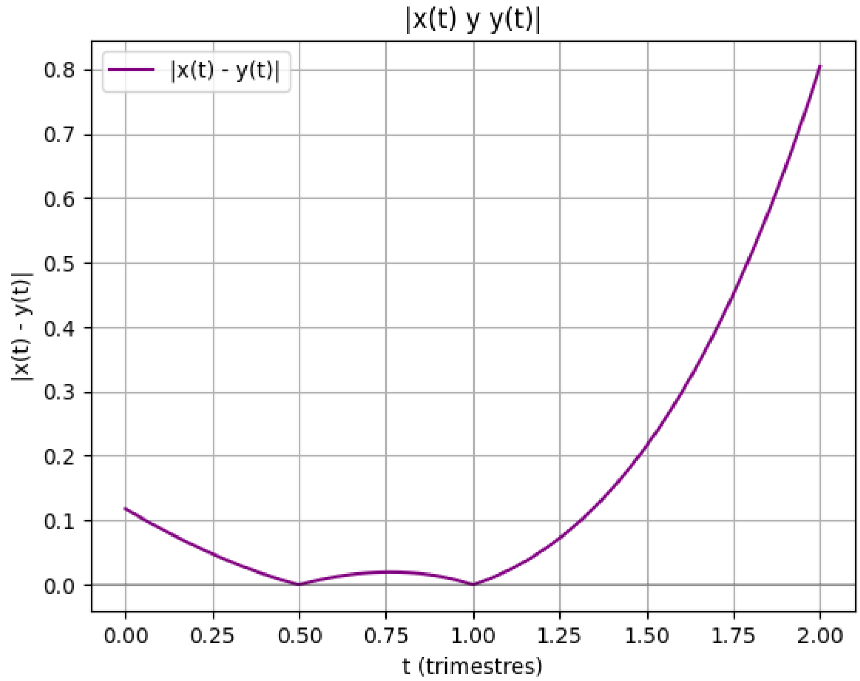
Para calcular la función $d(t) = |x(t) - y(t)|$, hemos evaluado ambas funciones $x(t)$ e $y(t)$ en una serie de puntos . Los resultados obtenidos son los siguientes:

t	$x(t)$ (PIB)	$y(t)$ (Consumo)
0.2	0.2809	0.2226
0.5	0.5	0.5
0.7	0.67677	0.69646
1	1	1
1.2	1.2641	1.21218

A partir de estos valores, hemos identificado los siguientes intervalos de comportamiento para el PIB y el ahorro de los hogares:

- **Intervalo [0, 0.5]**: El PIB está por encima del ahorro en los hogares.
- **Intervalo [0.5, 1]**: El ahorros supera del PIB.
- **Intervalo [1, 2]**: El PIB está nuevamente por encima del ahorro.

Todo esto lo tenemos en cuenta para representar la función de distancia entre ambas curvas, $d(t) = |x(t) - y(t)|$, que se muestra a continuación:



Sabemos que los valores $x(0{,}5) = y(0{,}5)$ y $x(1) = y(1)$ hacen que la distancia entre las dos curvas sea cero Sin embargo, si nuestro objetivo fuese encontrar el valor de t que minimice la distancia $d(t) = |x(t) - y(t)|$, en el caso de que no hubiese puntos de corte deberíamos llevar a acabo el siguente procedimiento;

Definimos la función de distancia $d(t)$ como la diferencia entre las dos curvas:

$$d(t) = |x(t) - y(t)|$$

donde:

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{24} + \frac{35}{64}t + \frac{31}{192}$$

y

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{3}t + 0{,}7506\right)^{3/2} - 1{,}2569$$

Derivamos la función d(t):

$$d'(t) = x'(t) - y'(t)$$

donde la derivada de $x(t)$ es:

$$x'(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{35}{64}$$

y la derivada de $y(t)$ es:

$$y'(t) = \left(\frac{1}{3}t + 0{,}7506\right)^{1/2}$$

Por lo tanto, la derivada de la función de distancia queda como:

$$d'(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{35}{64}\right) - \left(\frac{1}{3}t + 0{,}7506\right)^{1/2}$$

Para encontrar los puntos críticos que minimizasen la distancia, necesitaríamos resolver $d'(t) = 0$ usando el método de Newton Raphson.

Sigificado económico d(t)

La distancia entre las curvas del PIB y el ACH tiene un significado económico relevante. Para ello, voy a tratar de explicar qué podría estar sucediendo en cada uno de los intervalos que habíamos definido anteriormente.

Por un lado cuando el PIB está por encima del ahorro ([0, 0.5] y [1, 2]). Puede significar que los hogares no están gastando lo sufiente en consumo de bienes y servicios. Las causas pueden variar, o bien están ahorrando una mayor parte de sus ingresos, o no tienen suficientes recursos para consumir más. En este contexto, el Banco Central podría aplicar una política monetaria expansiva, que consiste en reducir las tasas de interés(lo que los bancos cobran por prestar dinero). Al bajar los intereses incentivan las empresas y los consumidores a gastar más y a realizar más inversiones. -(Periodos de crisis)

Por otro lado, cuando sucede al revés [0.5,1], es decir, el ahorro está por encima del PIB. El Banco Central debería actuar llevando a cabo una política monetaria restrictiva, aumentando las tasas de interés para controlar el consumo. De esta manera, se animaría a los hogares a ahorrar más y se evitaría la inflación . -(Auge económico)

El caso en el que las curvas del PIB y el ahorro se igualan, supondría una situación de equilibrio económico. Está situación está estudiada en el apartado anterior y refleja un punto en el que no se requieren políticas monetarias expansivas ni restrictivas, ya que el consumo y el ahorro están en balance.-(Equilibrio económico)

En conclusión, la distancia entre las curvas del PIB y el CH es de vital importancia para ayudar a los bancos y gobiernos, ya que les indica qué acciones deben tomar para influir en la economía a través del gasto público (CH).

Apartado e

Sea la función de costo J que se desea optimizar:

$$J = \int \left((1+t^2)x + y + u^2 + v^3\right) \, dt$$

Definimos el Hamiltoniano H:

$$H = (1+t^2)x + y + u^2 + v^3 + h_1 u + h_2 v$$

Condiciones de optimalidad:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + h_1 = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial u'} = 3v^2 + h_2$$

Ecuaciones de estado:

$$\frac{\partial H}{\partial h_1} = u \quad \Rightarrow \quad x' = u$$
$$\frac{\partial H}{\partial h_2} = v \quad \Rightarrow \quad y' = v$$

Ecuaciones de coestado:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = (1+t^2) = -h_1'$$

$$h_1' = -(1+t^2) \quad \Rightarrow \quad h_1 = -t - \frac{t^3}{3} + C_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 1 = -h_2' \quad \Rightarrow \quad h_2' = -1 \quad \Rightarrow \quad h_2 = -t + C_1$$

Sustituyendo en (1):

$$u = -\frac{h_1}{2} = \frac{t + \frac{t^3}{3} - C_2}{2}$$

$$u = \sqrt{-\frac{h_2}{3}} = \sqrt{\frac{t - C_1}{3}}$$

Como $\frac{t-C_1}{3} > 0$:

$$t - C_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad t > C_1$$

En (2):

$$x' = u \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^3}{3} - C_2\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} - C_2 t\right) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{24} - \frac{C_2}{2}t + C_3$$

Para y:

$$y' = u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{3}}(t - C_1)^{1/2}$$

$$y(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}}(t - C_1)^{3/2} + C_4$$

Análisis las funciones de control en EU:

Al establecer las variables de control u(t)y v(t), la UE puede tratar de minimizar la distancia entre las curvas del PIB y el consumo de los hogares (CH), con el fin de asegurar que la economía europea se mantenga equilibrada a pesar de los efectos negativos que la guerra en Ucrania y otros conflictos en Europa .

Lo que está sucediendo en estos países afecta directamente a la economía, en particular el conflicto entre Irán e Israel, dado que esta es una región clave para el suministro de gas y petróleo. Debido a este conflicto constante, se podría interrumpir el suministro, lo que generaría un aumento significativo en el precio de la energía. El aumento en los precios energéticos afectaría directamente a las empresas, reduciendo su rentabilidad y disminuyendo, como consecuencia, el PIB. A esto se suma el aumento gradual de los precios de los bienes esenciales, lo que provocaría una inflación en Europa.De manera similar, la guerra en Ucrania ha interrumpido el suministro de recursos clave, como el gas, agravando aún más la situación.

Para mitigar los efectos negativos de estos conflictos bélicos, la UE debería reducir las tarifas energéticas e invertir en energías renovables. Además, el Banco Central podría implementar una política monetaria expansiva para contrarrestar el impacto económico.

Conclusion Final

- Las técnicas de optimización son fundamentales para el estudio y la predicción económica. A lo largo de este trabajo, estas herramientas nos han permitido calcular las curvas que optimizan la tasa de ahorro en los hogares y determinar las curvas óptimas de control para variables económicas. Estas curvas de control permiten ajustar factores como el PIB y CH para alcanzar el crecimiento deseado, manteniendo la estabilidad económica ante diferentes condiciones. Esto demuestra cómo la optimización ayuda a desarrollar y planificar políticas ecónomicas más eficientes.

- La distancia entre las curvas de PIB y consumo nos ayuda a comprender la situación económica que está atravesando un país. Además, permite a los bancos y gobiernos determinar qué estrategias económicas deben implementar para fomentar el desarrollo óptimo de la economía.

- Las políticas económicas, además de considerar datos históricos y predicciones, deberían integrar factores menos predecibles, como tensiones geoestratégicas que repercutan en la economía. Como hemos visto, los conflictos en Oriente Medio y la guerra de Ucrania afectan al PIB y al consumo de los hogares. Asimismo, es fundamental aplicar medidas anticíclicas(son políticas que los gobiernos y bancos centrales implementan para controlar los periodos de expansión o recesión.) que fomenten un crecimiento económico sostenible. Aunque esto es complejo de llevar a cabo, nuestros análisis deberían incluir diferentes escenarios, para tomar decisiones que, aunque no sean óptimas en el momento, permitan mitigar efectos negativos en situaciones futuras.

Anexos

Código Newton Raphson

```
def newton_raphson(f, df, c0, tol=1e-7):
    c = c0
    iteraciones = 0
    while True:
        iteraciones += 1
        fc = f(c)
        dfc = df(c)
        # Comprobar si  derivada es cercana a cero
        if abs(dfc) < tol:
            print(f"La derivada es muy cercana a cero.")
            return None
        # Aproximación nueva
        c_new = c - fc / dfc
        # Tolerancia
        if abs(c_new - c) < tol:
            print(f"Convergencia alcanzada en {iteraciones} iteraciones.")
            return c_new
        c = c_new
```