Repaso Probabilidad

Probabilidad

Medición de manera numérica los resultados de determinado experimento.
Mediada de la ocurrencia de un evento.
La frecuencia de ocurrencia relativa de A es Na / N donde N son las veces que se repite el experimento y Na es la cantidad de veces que ocurre el resultado A. Si hacemos que N tienda a ser un número muy grande, la probabilidad del resultado A se escribe:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}.$$

El límite en la ecuación no lo es en el sentido funcional usual y en ciertos casos, los experimentos necesarios para determinar la probabilidad de un evento pueden hacerse de manera conceptual, obteniendo una definición alterna:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados posibles favorables para el evento } A}{\text{número total de resultados igualmente probables}}.$$

Probabilidad condicional e independencia estadística

Tomando como posibles eventos A y B los cuales pueden o no ocurrir juntos, la ocurrencia conjunta de A y B es P(AB). Si el experimento se repite N veces y Nab es el número de veces que A y B ocurren juntos, la probabilidad conjunta es:

$$P(AB) = \frac{N_{AB}}{N}.$$

Puede ser que la ocurrencia del evento B dependa de alguna manera de la ocurrencia de A. La probabilidad de que suceda B dado a la ocurrencia de A se llama probabilidad condicional de B dado A y se escribe P(B|A):

$$P(B \mid A) = \frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{N_{AB}/N}{N_A/N} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Teorema de Bayes

Es una regla matemática que permite calcular la probabilidad de que ocurra un evento A dado que ya ha ocurrido otro evento B:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}.$$

Medida de ocurrencia de un evento dado que ocurrio otro.

Supongamos que ahora B es independiente de A de modo que la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B. La probabilidad condicional es simplemente:

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{si es independiente.}$$

Se concluye que los dos eventos A y B son estadísticamente independientes si

$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

Esto puede ampliarse a cualquier número arbitrario de resultados.
La independencia estadística es bastante diferente de la exclusión mutua. Si Ay B son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es cero por definición P(AB)=0.

Variable aleatoria y función de distribución acumulativa

Cuando los resultados en sí mismo no son números y resulta complicado describirlos, se introduce el concepto de variable aleatoria para indicar una correspondencia. Se asigna un número real a cada uno de los posibles resultados de un experimento (λ_i), permitiendo graficar la probabilidad contra los eventos.

Variable aleatoria X(λ_i): regla arbitraria establecida para asignar números a eventos según convenga.
La variable aleatoria puede ser discreta o continua, dependiendo de la naturaleza de los posibles resultados del experimento.

Funcion de distribucion acumulativa $F_X(x)$, asociada a una variable aleatoria X se define como:

$$F_X(x) \triangleq P\{X(\lambda) \leq x\} .$$

Es la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor o menor.
Esta función depende tanto de la variable aleatoria X como el valor del argumento x.
Cumple las siguientes propiedades:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 ,$$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \quad \text{si } x_1 < x_2 ,$$

$$\begin{cases} F_X(-\infty) = 0 , \\ F_X(+\infty) = 1 . \end{cases}$$

Para una variable aleatoria discreta con Pi probabilidades asociadas, la función de distribución acumulativa puede expresarse como:

$$F_X(x) = \sum_i P_i u(x - x_i) .$$

Función de densidad de probabilidad

Cuando tenemos infinitos eventos posibles y en cada uno de ellos el resultado de la probabilidad de ocurrencia resulta cercano a cero, resulta más conveniente definir una función cuya área sea la probabilidad de ocurrencia en un intervalo de eventos específicos. Dado que el área se iguala a la probabilidad, dicha función se denomina función de densidad de probabilidad (fdp) pX(x):

$$\int_{-\infty}^{x} p_X(x)\, dx = P\{X \le x\} .$$ donde $$P\{X \le x\} = F_X(x) ,$$

Derivando de ambos lados, se halla una definición equivalente de la función de densidad de probabilidad:

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) .$$

Puede suceder que la derivada no exista en todos los puntos, haciendo necesario recurrir a una operación límite.
Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = F_X(\infty) = 1 ,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx = F_X(x_2) - F_X(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} .$$

Distribucion de Poisson

La **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio fijo, suponiendo que los eventos ocurren de manera independiente y con una tasa promedio constante.

Fórmula de la distribución de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

donde:

- P(X=k) es la probabilidad de que ocurran exactamente k eventos en el intervalo.
- λ es el número promedio de eventos en el intervalo (parámetro de la distribución).
- k es el número de eventos que pueden ocurrir (valor discreto: 0, 1, 2, ...).

Propiedades importantes:

- La media y la varianza de la distribución son iguales a λ.
- Se usa cuando los eventos son raros pero ocurren con cierta regularidad (p.ej., llamadas a un call center, llegadas de autos a un peaje, fallas en una máquina en cierto periodo, etc.).