Ayudantía 18 Métodos Matemáticos II

Martín Armas Ll.

Universidad de Chile

Contenidos

Pregunta 1

Evaluadas en $X \in \mathbb{R}^2$, encuentre las formas cuadráticas asociadas a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_A = X^t A X$$

Respuesta 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$Q_A = X^t A X$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + \alpha x_2^2$$

$$= \boxed{x_1^2 + 4x_1x_2 + \alpha x_2^2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_B = X^t B X$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$= \boxed{x_2^2 + 2x_1x_2}$$

Respuesta 1

Sea $X \in \mathbb{R}^2$ un vector que viene dado por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} Q_A(X) &= X^t A X \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + \alpha x_2^2 + 4x_1 x_2 \end{aligned}$$

Respuesta 1

Sea $X \in \mathbb{R}^2$ un vector que viene dado por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
Q_B(X) &= X^t B X \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_2^2 + 2x_1 x_2
\end{aligned}
$$

Pregunta 2

$b = 3$

Encuentre la matriz simétrica que está asociada a la siguiente forma cuadrática:

$$Q_A(X) = \boxed{x_1^2 - 4x_2^2 + \boxed{6}x_1x_2}$$

$A = A^t$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Respuesta 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$Q_A = X^t A X$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 & b x_1 + c x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a x_1^2 + b x_1 x_2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

$$= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$$

Respuesta 2

Tomemos la matriz A cuyos componentes son 3 incógnitas:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Sabemos que la forma cuadratica de A viene dada por:

$$\begin{aligned} Q_A(X) &= X^t A X \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 & bx_1 + cx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + cx_2^2 + 2bx_1x_2 \end{aligned}$$

Respuesta 2

Igualando con la forma cuadratica dada por el enunciado, observamos que se debe cumplir $a = 1$, $c = -4$ y $b = 3$. Cualquier matriz que cumpla con estas condiciones, será una matriz asociada a la forma cuadrática $Q_A(X)$. Por ejemplo, una de estas matrices es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$a = 1$
$b = 3$
$c = 4$

Pregunta 3

Dadas constantes a, b, c, definamos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Dado $X \in \mathbb{R}^3$, muestre entonces que la forma cuadrática asociada a la matriz A es:

$$Q_A(X) = \boxed{ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2}$$

Respuesta 3

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$Q_A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a + 0 \cdot x_2 + 0 x_3 & 0 x_1 + b \cdot x_2 + 0 x_3 & 0 x_1 + 0 x_2 + c x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a x_1 & b x_2 & c x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q_A = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2}$$

Respuesta 3

Sea $X \in \mathbb{R}^3$ un vector que viene dado por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} Q_A(X) &= X^t A X \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 & bx_2 & cx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 \end{aligned}$$

Pregunta 4

Determine el signo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Respuesta 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_A = X^t A X$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \cdot x_2 & 0x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 0 \cdot x_2$$

$$Q_A = \underset{+}{\underline{2}} \cdot \underset{+}{\underline{x_1^2}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_B = X^t B X$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 & 0x_1 - 1 \cdot x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 - x_2^2 \longrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow +$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -$$

Respuesta 4

Partimos por la matriz A. Calculamos su forma cuadrática:

$$
\begin{aligned}
Q_A(X) &= X^t A X \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1^2
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que para todo valor de $x_1 \in \mathbb{R}$ se cumple $Q_A(X) > 0$, por lo que la matriz A es definida positiva.

Respuesta 4

Ahora, calculamos la forma cuadrática de la matriz B:

$$\begin{aligned} Q_B(X) &= X^t B X \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Podemos ver que si $|x_1| > |x_2|$ tenemos $Q_B > 0$, pero si $|x_1| < |x_2|$ tenemos $Q_B < 0$. Luego, al depender de los valores que tomen x_1, x_2, la matriz no tiene signo.

Pregunta 5

Explique por qué si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas, entonces $A + B$ es una matriz definida positiva.

Respuesta 5

$$X^t A X > 0 \quad \wedge \quad X^t B X > 0$$

$A + B$

$$Q_{A+B} = X^t (A+B) X$$
$$= (X^t A + X^t B) X$$
$$= X^t A X + X^t B X$$

Respuesta 5

El hecho de que las matrices A y B sean matrices definidas positivas, nos informan que, para todo vector $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$(X^tAX > 0) \wedge (X^tBX > 0)$$

Sabemos que la forma cuadrática de la matriz $A + B$ viene dada por:

$$\begin{aligned} Q_{A+B}(X) &= X^t(A+B)X \\ &= (X^tA + X^tB)X \\ &= X^tAX + X^tBX \end{aligned}$$

Dado que $Q_{A+B}(X)$ se conforma por la suma de dos numeros positivos, tenemos que $Q_{A+B}(X) > 0$ para todo $X \neq 0_n$. Concluimos que la matriz $A + B$ es definida positiva.

Pregunta 6

Explique por qué si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz definida positiva, entonces $-A$ es una matriz definida negativa.

Respuesta 6

$X^t A X > 0$

$z^{\frac{3A}{}} : -A$

$$Q_{-A} = X^t(-A)X$$
$$= X^t(-1 \cdot A)X$$
$$= -(X^t A X)$$

Respuesta 6

El hecho de que A es una matriz definida positiva, nos informan que, para todo vector $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $X^tAX > 0$
Sabemos que la forma cuadrática de la matriz $-A$ viene dada por:

$$\begin{aligned} Q_{-A}(X) &= X^t(-A)X \\ &= -X^tAX \\ &= -(\underline{X^tAX}) \end{aligned}$$

Dado que Q_{-A} se conforma por la multiplicación de un número negativo con uno positivo, tenemos que $Q_{-A} < 0$ para todo $X \neq 0_n$. Concluimos que la matriz $-A$ es definida negativa.