



Proyecto Global Integrador - 2024:
Control de Accionamiento de CA con
Motor Síncrónico de Imanes Permanentes

Automática y Máquinas Eléctricas

Profesor
Ing. Gabriel L. Julián

Alumnos
Avalos, J. Agustín - 13291
Roby Culasso, Martina - 13510

Fecha de presentación: 19/06/2025

Índice

1. Resumen	3
2. Introducción	4
3. Presentación del problema	4
3.1. Carga mecánica	4
3.2. Tren de transmisión	5
3.3. Máquina eléctrica	5
3.3.1. Subsistema mecánico	6
3.3.2. Subsistema electromagnético	6
3.3.3. Subsistema térmico	6
3.4. Inversor trifásico de alimentación	7
3.5. Sensores de retroalimentación	7
3.6. Variables principales en el modelo dinámico completo	8
4. Modelado, análisis y simulación dinámica del sistema físico a “lazo abierto”	9
4.1. Modelo global no lineal (NL)	9
4.1.1. Subsistema mecánico	9
4.1.2. Subsistema electromagnético	10
4.1.3. Subsistema térmico	13
4.1.4. Modelo completo	14
4.2. Linealización jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV) . . .	18
4.3. Linealización por realimentación: Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente	20
4.3.1. Restricción o ley de control mínima	22
4.3.2. Dinámica residual	24
4.3.3. Restricción o ley de control complementaria mínima	25
4.3.4. Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV	27
4.3.5. Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado	28
4.4. Análisis de estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado	29
4.5. Análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	32
4.6. Análisis de controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	34

4.7. Simulación dinámica en el dominio del tiempo	35
4.7.1. Respuesta de estado interno	35
4.7.2. Velocidad y corriente final de establecimiento	44
4.7.3. Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para distintos valores de $i_{ds}^r(0)$	45
4.7.4. Comportamiento de ambos modelos ante una consigna de tensión en el eje “d” (field forcing/field weakening a lazo abierto)	45
5. Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente	47
5.1. Modulador de torque equivalente	47
5.1.1. Compensación de retroalimentaciones físicas naturales del sistema	47
5.1.2. Diseño de lazos de control de corrientes	48
5.1.3. Incorporación de consigna de torque. Compensación de la fricción viscosa equivalente y del torque de carga por gravedad	50
5.2. Controlador externo de movimientos: posición/velocidad	52
5.2.1. Incorporación de la entrada de referencia o set-point de posición	56
5.2.2. Efecto de estimar la dependencia de $R_s(T_s^\circ(t))$ vs. usar un valor nominal constante en el controlador	56
5.3. Observador de estado de orden reducido	59
5.4. Simulación en el dominio del tiempo	62
5.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento	63
5.4.2. Rechazo a perturbaciones	70
5.5. Verificación de desempeño y mejoras	74
5.5.1. Verificación de las especificaciones de operación	74
5.5.2. Mejora del observador	78
5.5.3. Comportamiento térmico de la máquina	80
5.5.4. Respuesta no ideal de sensores y acondicionadores de señal	82
5.5.5. Comportamiento no ideal del modulador de tensión	87
6. Versión final	91
6.1. Modelo de la planta y el controlador completo en tiempo continuo	91
6.2. Discretización del controlador	91
7. Conclusiones	96

1. Resumen

Este proyecto aborda el modelado, análisis y control de un sistema de accionamiento eléctrico de corriente alterna con un motor síncrono de imanes permanentes (PMSM), aplicado al movimiento de un brazo robótico elemental con un solo grado de libertad. Inicialmente, se desarrolla un modelo físico no lineal del sistema completo, que incluye los subsistemas mecánico, electromagnético y térmico, considerando también la influencia del inversor de tensión y los sensores de retroalimentación. A partir de este modelo, se derivan versiones linealizadas mediante técnicas de linealización Jacobiana y por realimentación, obteniéndose representaciones en forma LPV y LTI.

Sobre esta base, se diseña un controlador de movimiento en cascada tipo PID, junto con un modulador de torque equivalente, e incluyendo compensaciones de efectos físicos no ideales. Se implementa también un observador de estado de orden reducido para estimar variables no medidas directamente. El desempeño del sistema a lazo cerrado se analiza mediante simulaciones realizadas en MATLAB/Simulink, verificando estabilidad, seguimiento de consignas y rechazo a perturbaciones. Finalmente, se discretiza el controlador para su futura implementación en una plataforma digital. El estudio demuestra la viabilidad de la estrategia de control vectorial propuesta, garantizando un funcionamiento eficiente del manipulador robótico.

2. Introducción

El presente trabajo se centra en el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para un accionamiento eléctrico de 4 cuadrantes, utilizado en un brazo robótico elemental de un grado de libertad. El sistema está compuesto por una máquina eléctrica de corriente alterna (CA) trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentada por un inversor electrónico trifásico desde una fuente de tensión continua (CC); un reductor de velocidad con engranajes planetarios conectado a la carga mecánica; y cuenta con retroalimentación a través de 1 sensor de posición en el eje del motor, 3 sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor trifásico al estator de la máquina PMSM, y 1 sensor de temperatura en el bobinado del estator.

El contenido del trabajo se presenta en tres grandes apartados. En la primera parte (Sección 4), se aborda el modelado, análisis y simulación dinámica del sistema físico en cuestión, operando a lazo abierto. Esto incluye la formulación de un modelo no lineal que describe el comportamiento de la máquina eléctrica, considerando todos los subsistemas involucrados, y su posterior linealización mediante distintas técnicas. Se desarrollan tanto un modelo equivalente lineal invariante en el tiempo (LTI) como otro con parámetros variables (LPV). Asimismo, se analiza la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de los modelos obtenidos.

La segunda parte (Sección 5) está orientada al diseño de un controlador de posición y movimiento PID en cascada, complementado por un modulador de torque equivalente, que se incluyen para realizar el control de la máquina. En esta instancia, se introducen las compensaciones de las retroalimentaciones físicas naturales del sistema para poder aplicar técnicas de control lineal, se incorpora un observador de estado de orden reducido, y se efectúan mejoras orientadas a optimizar el desempeño del manipulador robótico. Adicionalmente, se verifica que las variables del sistema permanezcan dentro de los límites operativos exigidos, asegurando a su vez un funcionamiento robusto frente a perturbaciones y variaciones de referencia.

La tercera y última parte del trabajo (Sección 6) se centra en la discretización del controlador diseñado, con el objetivo de hacer viable su implementación en una plataforma digital real.

3. Presentación del problema

A continuación, se detallan algunos aspectos relevantes de los componentes del sistema a controlar, que se referenciarán a lo largo de este trabajo. La descripción completa del problema, así como las definiciones de las variables y los valores de las constantes presentes en las ecuaciones mostradas, pueden encontrarse en la guía de trabajo ([1]).

3.1. Carga mecánica

El brazo manipulador robótico elemental en el que se centra este trabajo se encuentra esquematizado en la Figura 1. Lo que se busca controlar es el movimiento del eje que atraviesa su articulación, que cuenta con un solo grado de libertad rotacional y está fijo a una base en el sistema de referencia inercial. El robot está sometido a la acción externa de la aceleración de la gravedad, y tiene parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en su extremo.

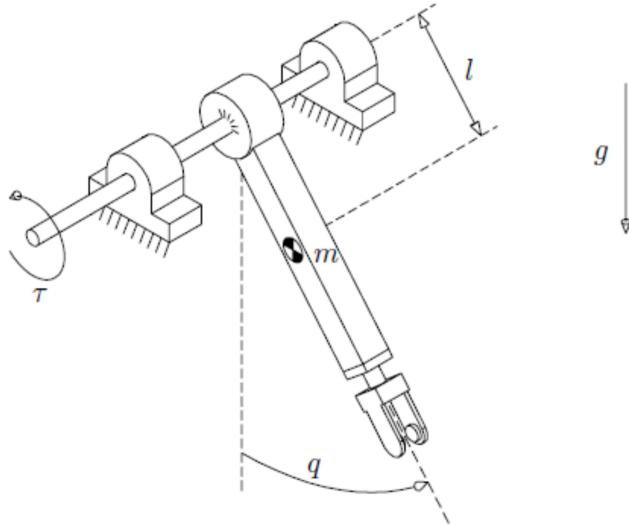


Figura 1: Robot manipulador elemental de 1 g.d.l. en plano vertical (péndulo rígido actuado).

El modelo simplificado equivalente (no lineal, con parámetros variables) referido al eje de salida del tren de transmisión se representa con las siguientes ecuaciones:

$$J_l \cdot \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} \equiv \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (\text{Ec. 2})$$

Siendo:

$$T_l(t) = g \cdot k_l \cdot \sin(\theta_l(t)) + T_{ld}(t) \quad (\text{Ec. 3})$$

3.2. Tren de transmisión

El tren de transmisión consta de una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios. Se asume que el acoplamiento es rígido, es decir, sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”. El momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada, se consideran junto con el motor.

El modelo equivalente (rígido) es el siguiente:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 4})$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (\text{Ec. 5})$$

3.3. Máquina eléctrica

El sistema está accionado por una máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado). Los bornes de fases abc son accesibles desde el inversor electrónico trifásico, y el centro de estrella o es flotante (no accesible).

3.3.1. Subsistema mecánico

Se considera el rotor referido al estator estacionario, que está fijo al sistema inercial de referencia. El modelo equivalente resulta:

$$J_m \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (\text{Ec. 6})$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (\text{Ec. 7})$$

3.3.2. Subsistema electromagnético

Se considera el modelo idealizado equivalente en coordenadas electromagnéticas de rotor $qd0^r$ “fijas” al rotor, aplicando la transformación de Park al circuito de estator estacionario. Es un marco de referencia virtual eléctrico, “sincrónico” solo en régimen estacionario, y difiere en transitorios según varíe la carga:

$$\frac{d\theta_r(t)}{dt} \equiv \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) \cdot \xi + \theta_r(0) \quad (\text{Ec. 8})$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \cdot \theta_m(t) \quad \therefore \quad \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 9})$$

La expresión para el torque electromagnético es:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left[\lambda'_m \cdot i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \right] \quad (\text{Ec. 10})$$

Balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas $qd0^r$):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + \left[\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \right] \cdot \omega_r(t) \quad (\text{Ec. 11})$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (\text{Ec. 12})$$

$$v_{0s}(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (\text{Ec. 13})$$

3.3.3. Subsistema térmico

Se tiene en cuenta un modelo simplificado equivalente de primer orden, considerando solamente pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en el bobinado del estator, y despreciando pérdidas magnéticas en el núcleo. La transferencia de calor al ambiente se produce sólo por conducción y convección natural, sin ventilación forzada.

Potencia de pérdidas real, abc :

$$P_{spred}(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) \quad (\text{Ec. 14})$$

Potencia de pérdidas, equivalente virtual $qd0$:

$$P_{spred}(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot \frac{3}{2} \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) \quad (\text{Ec. 15})$$

Balance térmico del estator:

$$P_{sperd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (\text{Ec. 16})$$

Ley de variación de la resistencia de bobinado del estator:

$$R_s(T_s^\circ(t)) = R_{sREF} \cdot [1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{sREF}(t))] \quad (\text{Ec. 17})$$

3.4. Inversor trifásico de alimentación

El inversor trifásico de 4 cuadrantes que alimenta a la máquina eléctrica consiste en un puente trifásico con llaves electrónicas semiconductoras, y está conectado a una fuente de CC de tensión constante, conmutado con modulación de ancho de pulso (PWM).

No es parte de este trabajo el análisis en detalle de la operación del inversor ni de la fuente de CC, por lo que se consideran ambos como un modulador idealizado de tensión trifásico.

El modelo instantáneo promediado equivalente de tensiones sintetizadas de salida (componente fundamental, sin armónicos) que resulta de hacer dicha consideración es un sistema trifásico de tensiones de fase en bornes de fase de estator, senoidales, de secuencia positiva *abc*, equilibrado, con módulo $V_{sl}(t)$ y frecuencia $\omega_e(t)$.

$$v_{as}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\theta_{ev}(t)) \quad (\text{Ec. 18})$$

$$v_{bs}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 19})$$

$$v_{cs}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 20})$$

$$\omega_e(t) \equiv 2\pi \cdot f_e(t) \equiv \frac{d\theta_{ev}(t)}{dt} \Leftrightarrow \theta_{ev}(t) = \int_0^t \omega_e(\xi) \cdot d\xi + \theta_{ev}(0) \quad (\text{Ec. 21})$$

El marco de referencia virtual eléctrico del rotor es “sincrónico” solamente en régimen estacionario, por lo que, en general, aparece un desplazamiento angular instantáneo relativo entre la coordenada eléctrica sincrónica θ_{ev} de las ecuaciones anteriores y la coordenada eléctrica $qdr0^r$ fija al rotor θ_r . Se denomina “ángulo de desfaseje electromagnético de rotor” y se define como:

$$\delta(t) \equiv \theta_{ev}(t) - \theta_r(t) = \int_0^t [\omega_e(\xi) - \omega_t(\xi)] \cdot d\xi + [\theta_{ev}(0) - \theta_r(0)] \quad (\text{Ec. 22})$$

3.5. Sensores de retroalimentación

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento para retroalimentación:

- 1 sensor de posición angular (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje del motor, asumiendo proceso de “homing” y decodificación idealizados. Mide la posición angular absoluta “rectificada” (al girar más de una revolución).
 - Variable medida: $\theta_m(t)$

- 3 sensores de corriente instantánea de fase, montados en la salida trifásica del inversor hacia los bornes del estator.
 - Variables medidas: $i_{as}(t), i_{bs}(t), i_{cs}(t)$
- 1 sensor de temperatura en el bobinado del estator, para monitoreo de calentamiento y estimación de la resistencia del estator.
 - Variable medida: $T_s^\circ(t)$

3.6. Variables principales en el modelo dinámico completo

Se utilizan las siguientes variables de entrada (entradas manipuladas y perturbaciones), de estado y de salida para el modelo físico:

- Excitaciones (entradas) externas:
 - Variable manipulada (vectorial): sistema trifásico de tensiones de fase reales en bornes de estator $v_{abcs}(t)$, con $V_{sl}(t)$ y $\omega_e(t)$ ajustables a través de manipulación de la modulación PWM del inversor.
 - Variables de perturbación: torque externo de carga mecánica $T_l(t)$ aplicado en la articulación del brazo manipulador; temperatura ambiente $T_{amb}^\circ(t)$.
- Estado interno: posición $\theta_m(t)$ y velocidad $\omega_m(t)$ en el eje del motor; corrientes *virtuales* equivalentes de estator $i_{qd0s}^r(t)$; temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.
- Respuestas (salidas) externas:
 - Variable controlada, no medida directamente (efector final): posición angular de eje de la articulación robótica $q(t) \equiv \theta_l(t)$.
 - Variables medidas para retroalimentación: posición angular de eje del motor $\theta_m(t)$; sistema trifásico de corrientes de fase reales en bornes de estator $i_{abcs}(t)$; temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.

Lo anterior puede representarse vectorialmente de la siguiente manera:

Vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 23})$$

Vector de entradas manipuladas (en coordenadas reales):

$$\mathbf{u}_c(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 24})$$

Vector de entradas de perturbación:

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 25})$$

Vector completo de entradas:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 26})$$

4. Modelado, análisis y simulación dinámica del sistema físico a “lazo abierto”

4.1. Modelo global no lineal (NL)

Para poder construir el modelo global no lineal del sistema, es necesario antes desarrollar los modelos de los subsistemas mecánico, electromagnético y térmico.

4.1.1. Subsistema mecánico

El subsistema mecánico completo incorpora la carga y la transmisión rígida al sistema mecánico de la máquina eléctrica. Se desea referir el modelo equivalente al eje del motor, en lugar del eje de salida del tren de transmisión.

Es posible realizar la simplificación anterior debido a que se considera que la transmisión es rígida, sin elasticidad torsional y sin holgura, lo que garantiza una relación lineal fija entre las velocidades angulares y torques de ambos ejes, así como también una transferencia de potencia sin pérdidas.

Para ello, primero se reemplazan las expresiones dadas por Ec. 4 y Ec. 5 en Ec. 1, de manera que la última queda:

$$\frac{J_l}{r} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\frac{b_l}{r} \cdot \omega_m(t) + r \cdot T_d(t) - T_l(t) \quad (\text{Ec. 27})$$

De Ec. 27 se despeja el torque desarrollado, $T_d(t)$:

$$T_d(t) = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{J_l}{r} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{b_l}{r} \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \right] \quad (\text{Ec. 28})$$

Si se sustituye la última expresión obtenida (Ec. 28) en Ec. 6 y se reordenan los términos, se obtiene:

$$\left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = - \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \cdot \omega_m(t) + T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (\text{Ec. 29})$$

Llamando $J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2}$ y $b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$ y reordenando nuevamente, se llega a:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right] \quad (\text{Ec. 30})$$

Teniendo en cuenta la expresión resultante (Ec. 30), la relación que existe entre la posición $\theta_m(t)$ y la velocidad $\omega_m(t)$ del eje del motor (Ec. 7), y la definición del torque de carga $T_l(t)$ (Ec. 3), es posible representar el subsistema mecánico completo mediante el diagrama de bloques de la Fig. 2.

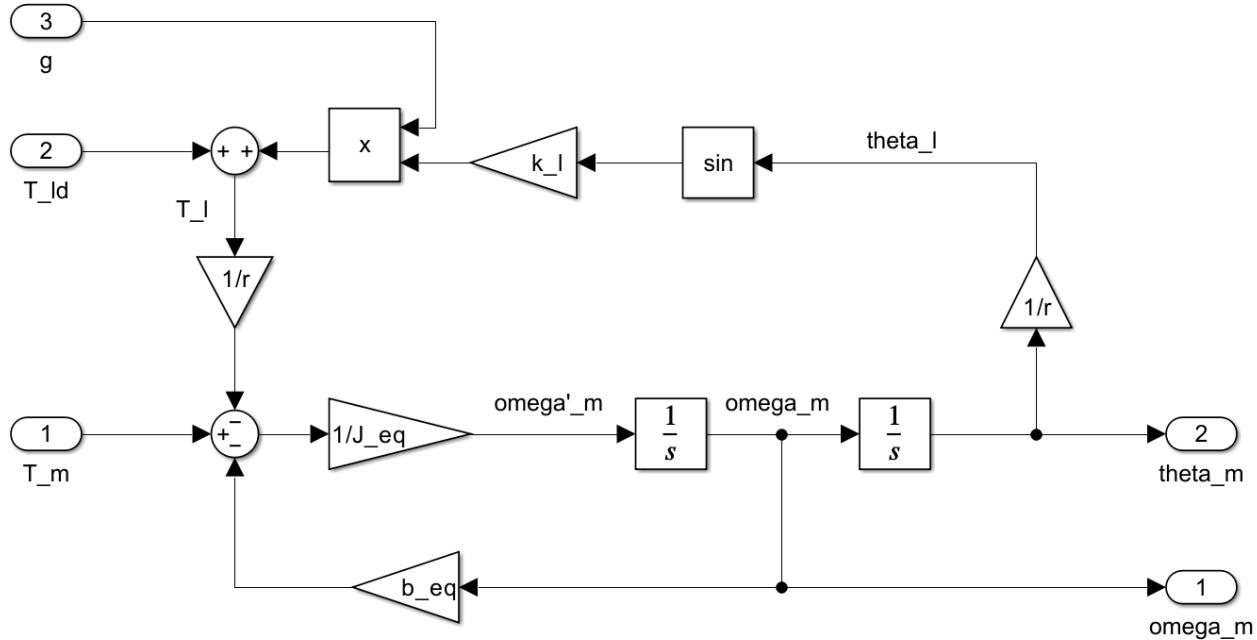


Figura 2: Diagrama de bloques del subsistema mecánico completo.

4.1.2. Subsistema electromagnético

Para obtener el modelo del subsistema electromagnético de la máquina eléctrica, de las ecuaciones del balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (Ec. 11, Ec. 12, Ec. 13) se despejan las derivadas de las corrientes virtuales, y luego se reemplaza $\omega_r(t)$ por la relación establecida en la Ec. 9. Las expresiones resultantes quedan como sigue:

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left[-R_s(T_s^*(t)) \cdot i_{qs}^r(t) - (\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t)) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t) \right] \quad (\text{Ec. 31})$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \left[-R_s(T_s^*(t)) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{ds}^r(t) \right] \quad (\text{Ec. 32})$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left[-R_s(T_s^*(t)) \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t) \right] \quad (\text{Ec. 33})$$

Considerando estas expresiones, e incorporando la Ec. 10 para el torque electromagnético, $T_m(t)$, se construye el diagrama de bloques del subsistema electromagnético, mostrado en la Fig. 3.

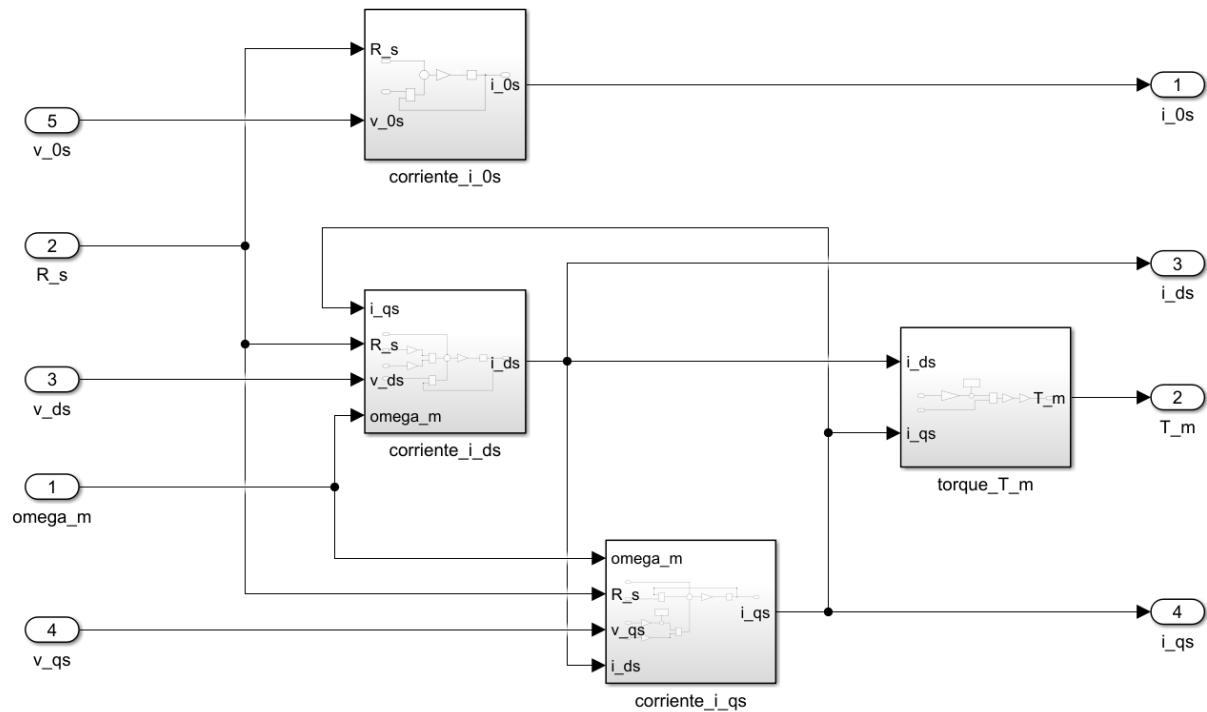


Figura 3: Diagrama de bloques del subsistema electromagnético.

Los diagramas de bloques para las corrientes en el sistema de coordenadas virtuales, y para el torque electromagnético, se muestran a continuación.

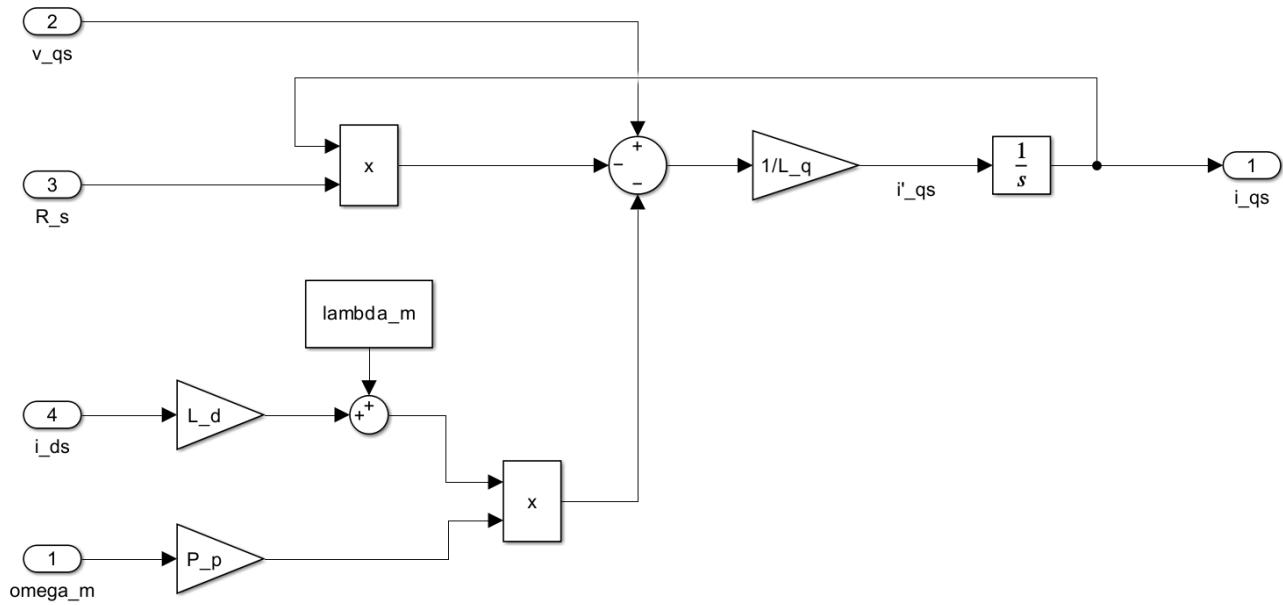


Figura 4: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente $i_{qs}^r(t)$.

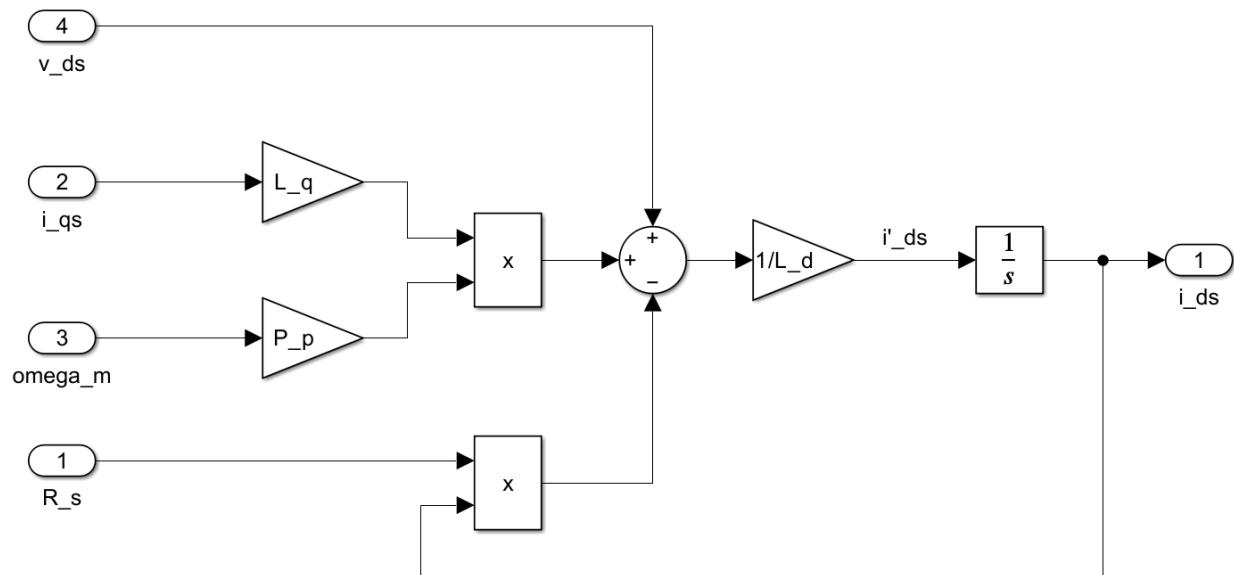


Figura 5: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente $i_{ds}^r(t)$.

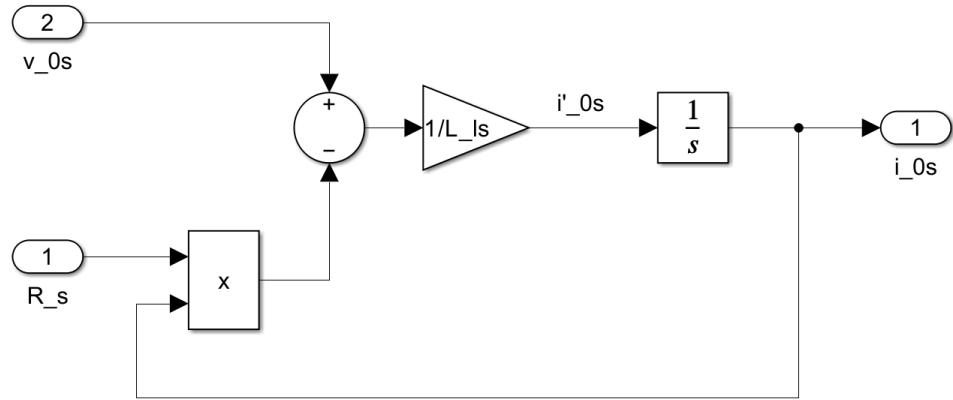


Figura 6: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente $i_{0s}(t)$.

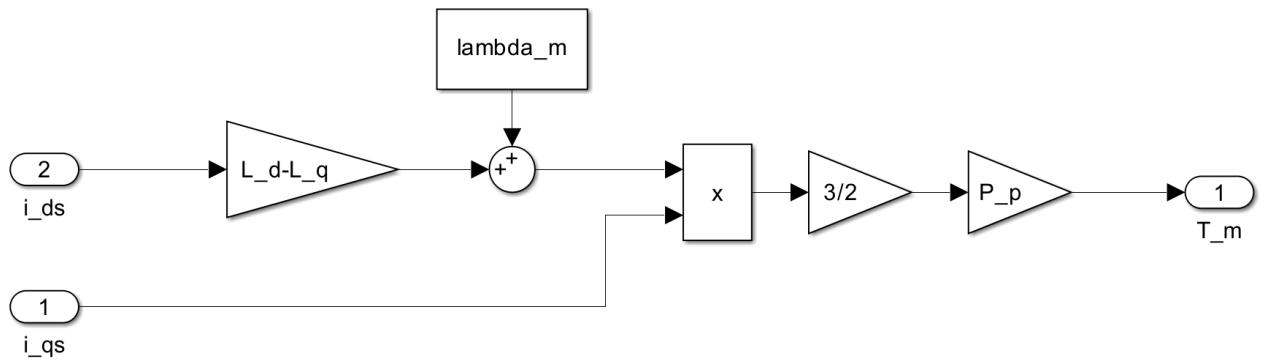


Figura 7: Diagrama de bloques del subsistema magnético, torque $T_m(t)$.

4.1.3. Subsistema térmico

El modelo del subsistema térmico se obtiene a partir de la ecuación del balance térmico del estator (Ec. 16), de donde es posible despejar $\frac{dT_s^o(t)}{dt}$ e incorporar la expresión de la potencia de pérdidas (Ec. 15), para así obtener:

$$\frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[R_s(T_s^o(t)) \cdot \frac{3}{2} \cdot (i_{qs}^r(t) + i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s}^r(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^o(t) - T_{amb}(t)) \right] \quad (\text{Ec. 34})$$

Teniendo en cuenta la expresión resultante, junto con la ley de variación de la resistencia de bobinado del estator, dada por Ec. 17, el diagrama de bloques del subsistema queda como se muestra en la Fig. 8.

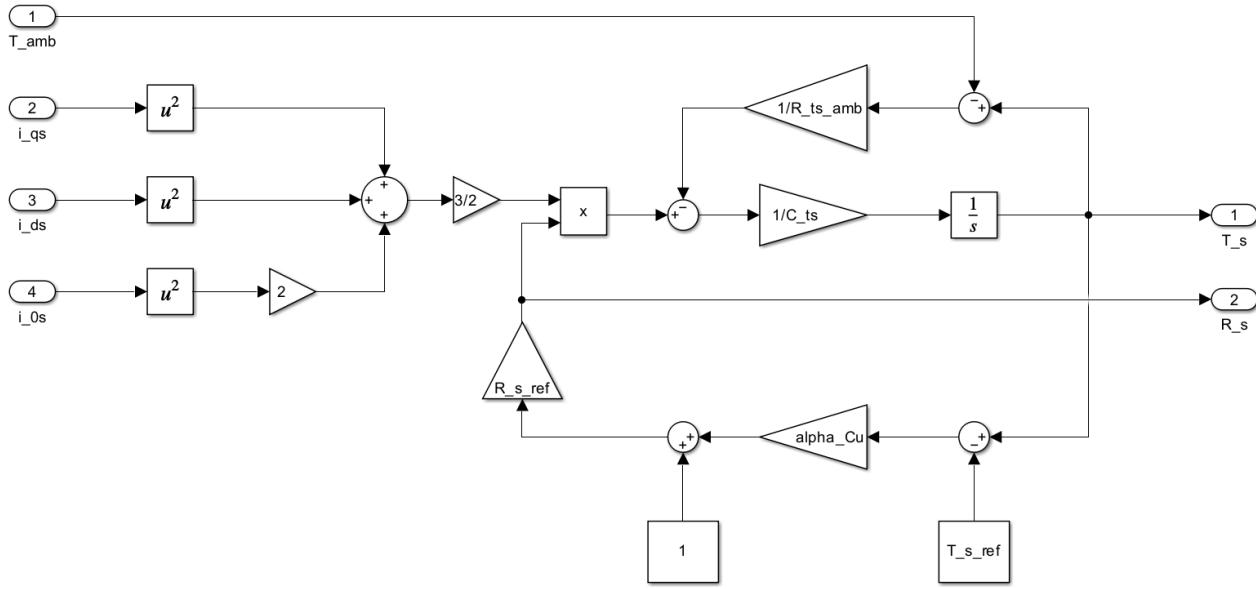


Figura 8: Diagrama de bloques del subsistema térmico.

4.1.4. Modelo completo

El modelo global no lineal completo se construye a partir de los subsistemas presentados anteriormente, incorporando además las transformaciones de Park (directa e inversa), que permiten el acceso físico en bornes a las tensiones y corrientes de fase reales del estator.

Ecuación vectorial

Al observar las ecuaciones obtenidas para los subsistemas, es posible notar que el sistema completo presenta no linealidades debido a que existen productos entre variables de estado, a que hay una variación no lineal de la resistencia de bobinado del estator (depende de la temperatura), y a que los ejes directo (d) y en cuadratura (q) están acoplados. Por este motivo, no es posible obtener la ecuación de estado y de salida del mismo en la forma:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

De todos modos, sí es posible llegar a la forma general para sistemas no lineales en el espacio de estados, que se representa como:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 35})$$

Donde f y g son campos vectoriales que representan la dinámica del sistema y la salida.

Para este caso, la ecuación vectorial de estado resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ -\frac{b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \frac{\lambda_m' + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)}{J_{eq}} \\ -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \frac{\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t)}{L_q} - \frac{R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t)}{L_d} - \frac{R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{ds}^r(t)}{L_d} \\ -\frac{R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{0s}(t)}{L_{ls}} \\ \frac{3}{2} \cdot R_s(T_s^o(t)) \cdot \frac{i_{qs}^{r2}(t) + i_{ds}^{r2}(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)}{C_{ts}} - \frac{T_s^o(t)}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 36})$$

Con condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0}^r \\ T_{s0}^o \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 37})$$

Y ecuación vectorial de salida:

$$\mathbf{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 38})$$

Lo mismo puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \left[-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \left(\lambda_m' \cdot i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \right) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left[-R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \left(\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \right) + v_{qs}^r(t) \right] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \left[-R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot L_q \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t) + v_{ds}^r(t) \right] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left[-R_s(T_s^o(t)) \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t) \right] \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_s(T_s^o(t)) \cdot (i_{qs}^{r2}(t) + i_{ds}^{r2}(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \right] \end{cases} \quad (\text{Ec. 39})$$

Diagrama de bloques

El sistema de ecuaciones anterior puede representarse en forma de diagrama de bloques de estado en forma desagregada como se muestra en la Fig. 9. Cabe aclarar que cada uno de los subsistemas que componen al modelo no lineal fue compactado, pero internamente los bloques se corresponden a lo mostrado en las figuras 2, 3 y 8, respectivamente.

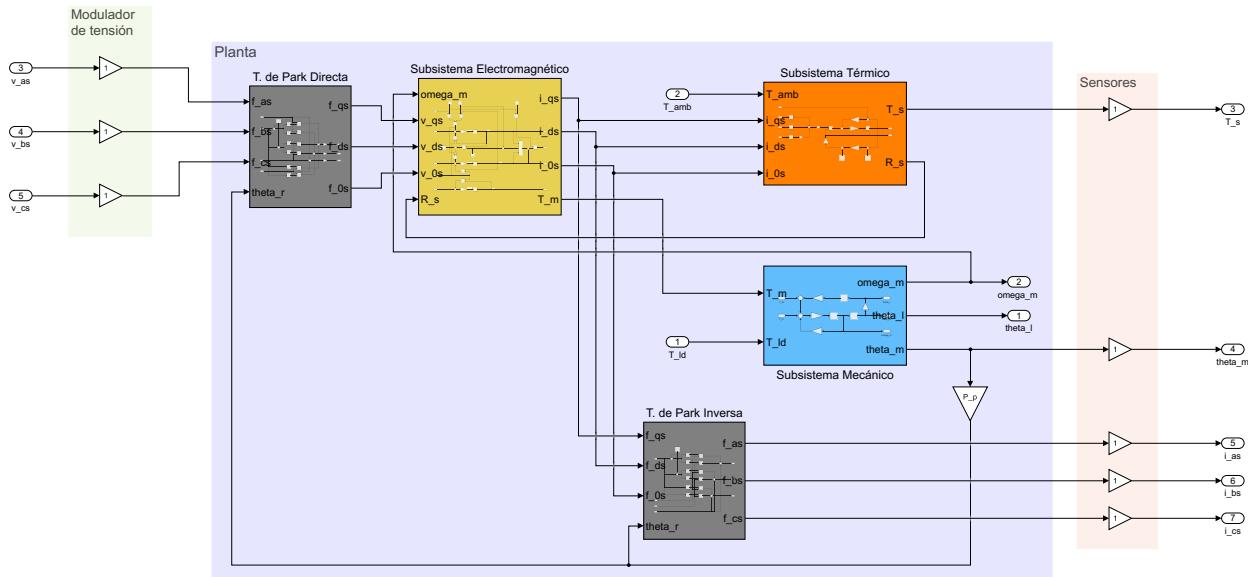


Figura 9: Diagrama de bloques del modelo no lineal completo.

Las transformaciones de Park virtuales fueron incorporadas al diagrama de bloques para poder acoplar la planta al modulador de tensión y sensar las salidas reales de corriente (en coordenadas *abcs*). El bloque compacto que contiene la implementación de la transformación de Park directa se muestra en la Fig. 10, y el de la transformación inversa en la Fig. 11.

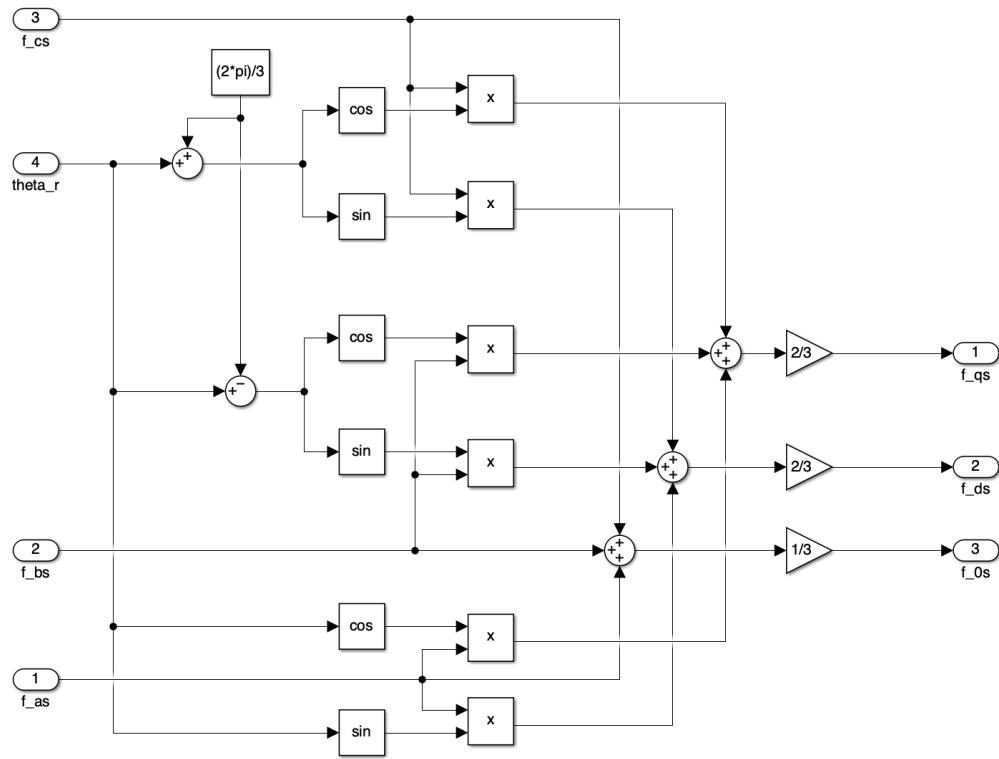


Figura 10: Transformación de Park directa en diagrama de bloques.

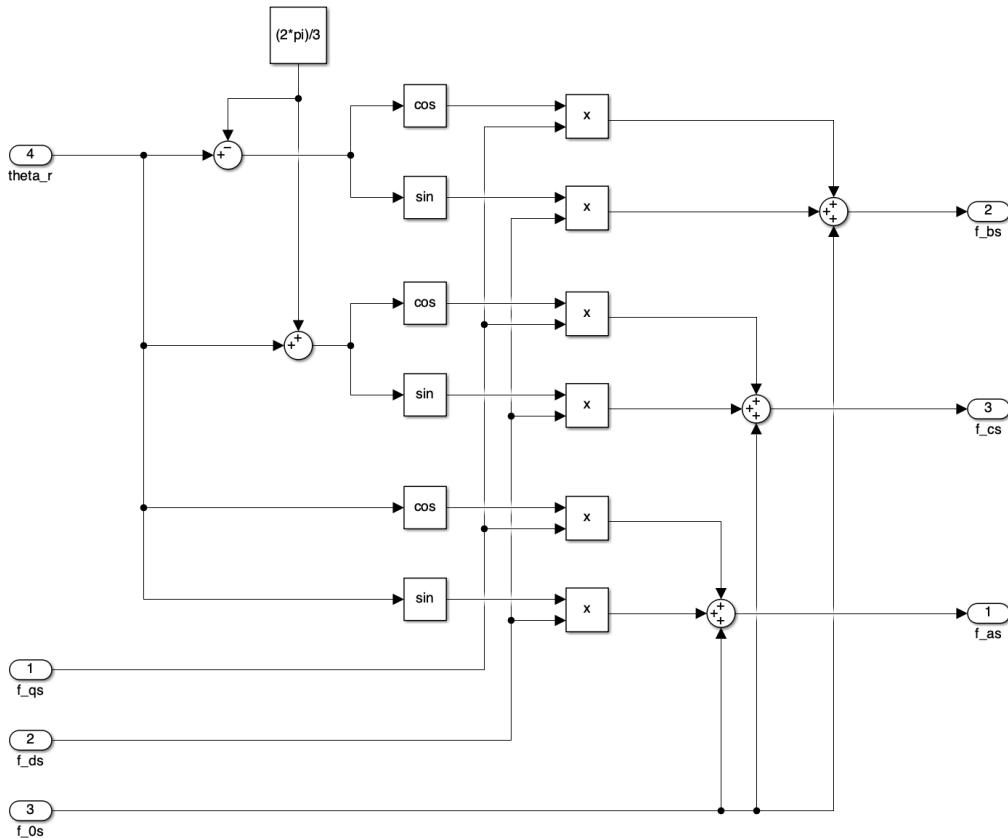


Figura 11: Transformación de Park inversa en diagrama de bloques.

4.2. Linealización jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Como se mencionó anteriormente, el modelo global planteado presenta no linealidades. Para analizar el comportamiento dinámico del sistema, se considera una linealización Jacobiana basada en una aproximación mediante la serie de Taylor truncada de primer orden en un punto genérico de operación. Esto permite obtener un modelo global linealizado con parámetros variables, aplicable al caso general en el que $i_{ds}^r(t) \neq 0$.

En primer lugar, se asume que las variables de estado, de entrada y de salida del modelo pueden representarse como:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}_o(t) + \delta\mathbf{z}(t) \quad (\text{Ec. 40})$$

Donde $\delta\mathbf{z}(t)$ son pequeñas desviaciones locales respecto de los puntos de operación $\mathbf{Z}_o(t)$.

Cabe aclarar que se consideran puntos de operación a todos aquellos pares de valores del estado y las entradas que satisfacen la condición de equilibrio dinámico. Esta condición de equilibrio, en sistemas no lineales, se da cuando la variación de energía se ha disipado completamente, lo que matemáticamente implica que las derivadas de las variables de estado son nulas. Es decir, un punto de operación $(\mathbf{X}_o, \mathbf{U}_o)$ cumple la igualdad $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 0 = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$.

Los puntos de operación pueden ser constantes (lo que coincide con un punto de equilibrio estático) o pueden ser quasi-estacionarios, presentando variaciones relativamente lentas en el tiempo. En contraste, a las pequeñas variaciones se les atribuyen cambios rápidos en el tiempo.

Recordando la forma general de representación de sistemas no lineales (Ec. 35), y teniendo en cuenta que en este caso $\mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(t)$, se llega a:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} + \frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{X}_o(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{U}_o(t) + \delta\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{Y}_o(t) + \delta\mathbf{y}(t) = C \cdot (\mathbf{X}_o(t) + \delta\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 41})$$

Se adoptan condiciones iniciales genéricas para los puntos de operación y nulas para las pequeñas variaciones ($\mathbf{X}_o(t_0) = \mathbf{x}_0, \delta\mathbf{x}(t_0) \equiv 0$).

Luego, si se expande la primera ecuación mediante la serie de Taylor truncada al primer orden, es decir, despreciando los términos de orden superior, se obtiene:

$$f(\mathbf{X}_o(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{U}_o(t) + \delta\mathbf{u}(t)) \approx f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_o (t) \cdot \delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_o (t) \cdot \delta\mathbf{u}(t) \quad (\text{Ec. 42})$$

La expresión anterior puede analizarse en dos partes:

1. Una parte que corresponde al espacio global de puntos de operación $\mathbf{X}_o(t)$, de comportamiento no lineal cuasi-estacionario, descrita por la ecuación:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} = f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \approx 0/\text{cte}; & \mathbf{X}_o(t_0) \equiv \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_o(t) = C \cdot \mathbf{X}_o(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 43})$$

2. Y otra parte que modela linealmente las pequeñas desviaciones $\delta\mathbf{x}(t)$ alrededor de los puntos de operación:

$$\begin{cases} \frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_o (t) \cdot \delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_o (t) \cdot \delta\mathbf{u}(t); & \delta\mathbf{x}(t_0) \equiv 0 \\ \delta\mathbf{y}(t) = C \cdot \delta\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 44})$$

Para el caso particular del sistema en análisis, el espacio de operación global queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Theta_{mo}(t)}{dt} \\ \frac{d\Omega_{mo}(t)}{dt} \\ \frac{dI_{qso}^r(t)}{dt} \\ \frac{dI_{dso}^r(t)}{dt} \\ \frac{dI_{0so}(t)}{dt} \\ \frac{dT_{so}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{cases} \Omega_{mo}(t) \approx \text{cte} \\ \frac{1}{J_{eq}} \left[-b_{eq} \cdot \Omega_{mo}(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \left(\lambda_m' \cdot I_{qso}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot I_{dso}^r(t) \cdot I_{qso}^r(t) \right) - \frac{1}{r} \cdot T_{lo}(t) \right] \approx 0 \\ \frac{1}{L_q} \left[-R_{so}(T_{so}^r(t)) \cdot I_{qso}^r(t) - P_p \cdot \Omega_{mo}(t) \left(\lambda_m' + L_d \cdot I_{dso}^r(t) \right) + V_{qso}^r(t) \right] \approx 0 \\ \frac{1}{L_d} \left[-R_{so}(T_{so}^r(t)) \cdot I_{dso}^r(t) + P_p \cdot L_q \cdot \Omega_{mo}(t) \cdot I_{qso}^r(t) + V_{dso}^r(t) \right] \approx 0 \\ \frac{1}{L_{ls}} \left[-R_{so}(T_{so}^r(t)) \cdot I_{0so}(t) + V_{0so}(t) \right] \approx 0 \\ \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_{so}(T_{so}^r(t)) \cdot (I_{qso}^{r2}(t) + I_{dso}^{r2}(t) + 2 \cdot I_{0so}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_{so}^r(t) - T_{amb}^r(t)) \right] \approx 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 45})$$

Con estado inicial:

$$\mathbf{x}_o(t_0) = \begin{bmatrix} \Theta_{mo}(t_0) \\ \Omega_{mo}(t_0) \\ I_{qso}^r(t_0) \\ I_{dso}^r(t_0) \\ I_{0so}(t_0) \\ T_{so}^r(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^r \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 \quad (\text{Ec. 46})$$

Por otro lado, el modelo dinámico local de pequeñas desviaciones resulta:

$$\begin{cases} \frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} \approx A_o \cdot \delta\mathbf{x}(t) + B \cdot \delta\mathbf{u}(t); & \delta\mathbf{x}(t_0) \equiv 0 \\ \delta\mathbf{y}(t) = C \cdot \delta\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 47})$$

Siendo los vectores:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta\theta_m(t) \\ \delta\omega_m(t) \\ \delta i_{qs}^r(t) \\ \delta i_{ds}^r(t) \\ \delta i_{0s}(t) \\ \delta T_s^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 48})$$

$$\delta\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_c(t) \\ \delta\mathbf{u}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta v_{qs}^r(t) \\ \delta v_{ds}^r(t) \\ \delta v_{0s}(t) \\ \delta T_l(t) \\ \delta T_{amb}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 49})$$

Y donde las matrices A_o y B quedan definidas a partir de las matrices jacobianas:

$$A_o = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_o (t) \right]; \quad B = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_o (t) \right] \quad (\text{Ec. 50})$$

Matriz A, considerando $R_{so} = R_{sREF} \cdot [1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_{so}^r - T_{sREF}^r(t))]$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} (L_d - L_q) I_{dso}^r & \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} (L_d - L_q) I_{qso}^r & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p}{L_q} (\lambda_m' + L_d I_{dso}^r) & -\frac{R_{so}}{L_q} & -\frac{L_d P_p}{L_q} \Omega_{mo} & 0 & -\frac{R_{sREF} \alpha_{Cu}}{L_q} I_{qso}^r \\ 0 & \frac{L_q P_p}{L_d} I_{qso}^r & \frac{L_q P_p}{L_d} \Omega_{mo} & -\frac{R_{so}}{L_d} & 0 & -\frac{R_{sREF} \alpha_{Cu}}{L_q} I_{dso}^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{so}}{L_{ls}} & -\frac{R_{sREF} \alpha_{Cu}}{L_q} I_{0so} \\ 0 & 0 & \frac{3R_{so}}{C_{ts}} I_{qso}^r & \frac{3R_{so}}{C_{ts}} I_{dso}^r & \frac{6R_{so}}{C_{ts}} I_{0so} & \frac{3}{2} \frac{R_{sREF} \alpha_{Cu} (I_{qso}^{r2} + I_{dso}^{r2} + 2I_{0so}^2)}{C_{ts}} - \frac{1}{C_{ts} R_{ts-amb}} \end{bmatrix}$$

Matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{rJ_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts}R_{ts-amb}} \end{bmatrix}$$

La matriz C es la misma para los dos sub-modelos que surgen de la linealización realizada:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Se considera que el modelo es de tipo LPV debido a que la matriz A depende del punto de operación que se elija. Dado que este punto puede variar con el tiempo, la matriz A también experimentará cambios a lo largo del mismo. Sin embargo, en el caso de que se suponga que $f(X_o(t), U_o(t)) = 0$, la matriz A se vuelve constante, lo que implica que el sistema se convierte en LTI. En contraste, las matrices B y C son constantes independientemente del punto de operación que se considere.

4.3. Linealización por realimentación: Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente

Otra forma de linealizar el modelo presentado en la Sección 4.1 es mediante realimentación. Para obtener el modelo simplificado lineal invariante equivalente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Se impone el requisito $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ mediante una estrategia de control vectorial con campo orientado.
2. Debido a que el estator se encuentra conectado en estrella con punto neutro flotante (no accesible), es posible escribir:

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad (\text{Ec. 51})$$

Si ahora se aplica la transformación directa de Park, se obtiene:

$$i_{0s}(t) = \frac{1}{3} \cdot [i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)] = 0 \quad (\text{Ec. 52})$$

Lo que permite llegar a:

$$i_{0s}(t) \equiv 0 \quad \therefore \quad \frac{di_{0s}(t)}{dt} \equiv 0 \quad (\text{Ec. 53})$$

Además:

$$v_{0s}(t) = 0 \quad (\text{Ec. 54})$$

3. Se desprecia el acoplamiento no lineal que aparece en el subsistema térmico debido a la variación de la resistencia del bobinado del estator con la temperatura. Es posible realizar esta simplificación porque la dinámica de este subsistema es significativamente más lenta que la del resto del sistema físico. Por lo tanto, se asume R_s constante e igual a $R_{sREF} = 1,02 \Omega$.

De esta manera, y considerando los ítems previos, la Ec. 34 queda linealizada como:

$$\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot i_{qs}^{r2}(t) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \right] \quad (\text{Ec. 55})$$

Todo lo anterior permite reducir el sistema a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot \left(-R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t) \right) \end{cases} \quad (\text{Ec. 56})$$

Expresado en forma matricial, las ecuaciones de estado y de salida, con estado inicial genérico, quedan:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_l(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec. 57})$$

En la Fig. 12 se encuentra representado el diagrama de bloques de estado del sistema LTI equivalente en forma desagregada, junto con la dinámica de $T_s^\circ(t)$ descrita por la Ec. 55.

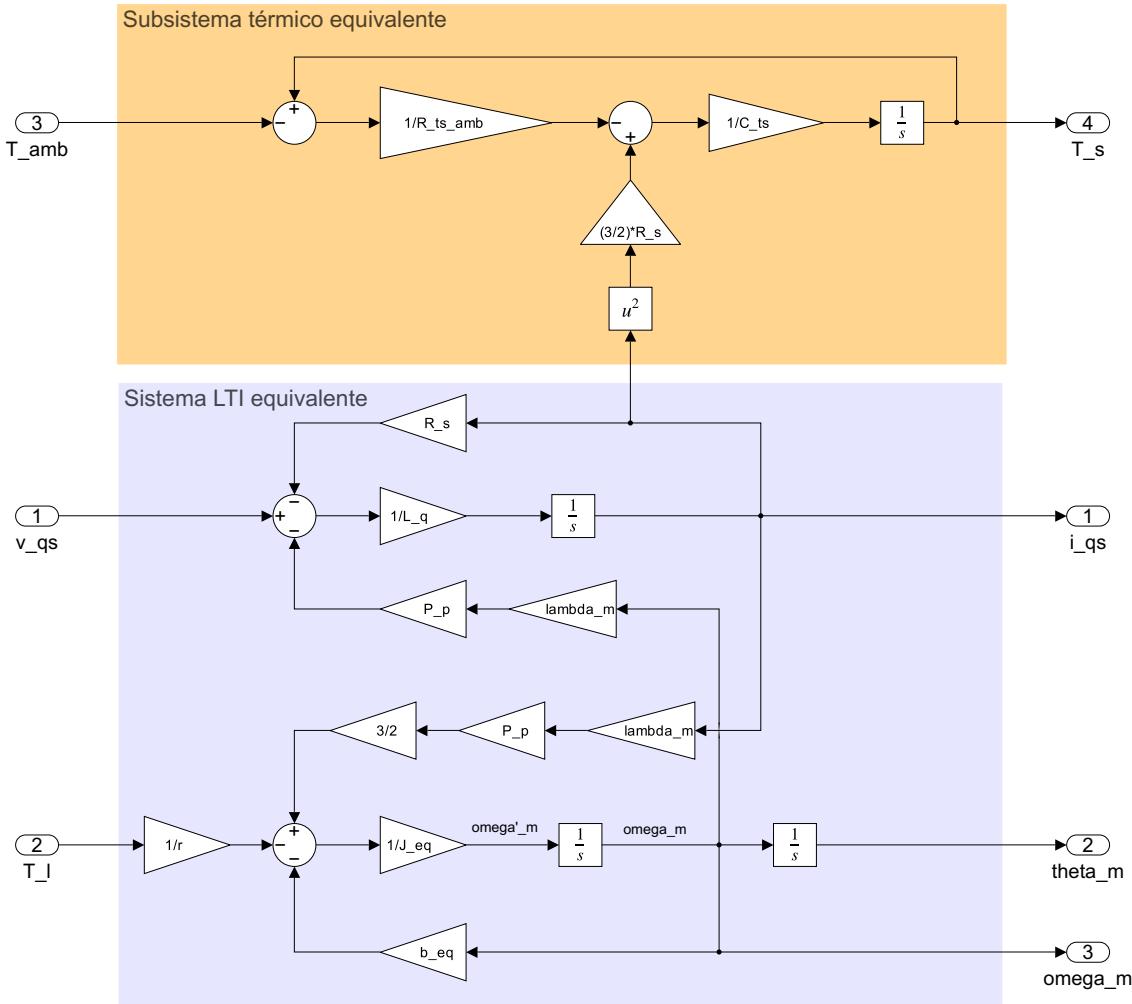


Figura 12: Diagrama de bloques del sistema LTI equivalente.

4.3.1. Restricción o ley de control mínima

Para poder asegurar que lo impuesto sobre $i_{ds}^r(t)$ se cumpla, es necesario aplicar una ley de control mínima sobre las entradas manipuladas $v_{as}(t)$, $v_{bs}(t)$ y $v_{cs}(t)$.

La misma puede determinarse a partir de la ecuación de estado para $i_{ds}^r(t)$ (Ec. 32), considerando $i_{ds}^r(t) = 0$ y $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$:

$$0 = \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \quad (\text{Ec. 58})$$

Despejando $v_{ds}^r(t)$ de la expresión anterior, se obtiene:

$$v_{ds}^r(t) = -L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 59})$$

Ahora, como $v_{ds}^r(t)$ no es una entrada que se pueda manipular de forma directa, es necesario aplicar la transformación inversa de Park para obtener la ley de restricción para las variables en coordenadas reales *abc*s.

La transformación da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t)) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 60})$$

Reemplazando Ec. 54 y Ec. 59, el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t)) \cdot L_q \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot L_q \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot L_q \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 61})$$

Es importante mencionar que se ha asumido que el estado inicial de $i_{ds}^r(t)$ es nulo, es decir, $i_{ds}^r(0) = 0$. De esta forma, si $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$, es posible asegurar que $i_{ds}^r(t) = 0$ para todo instante t .

En la Fig. 13 se implementa la realimentación directa no lineal de estado parcial necesaria para lograr la ley de control determinada, a través de un controlador parcial.

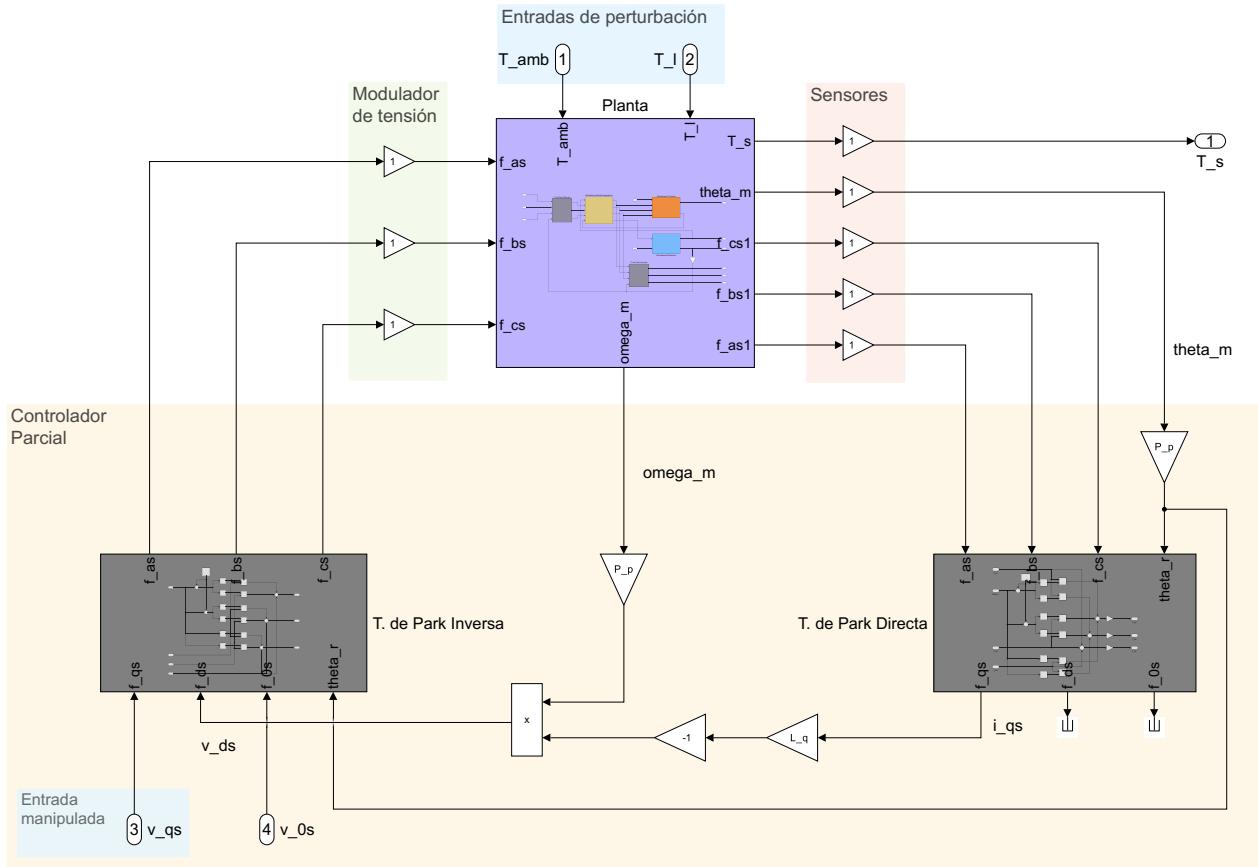


Figura 13: Implementación de la ley de control mínima en el modelo global no lineal completo.

4.3.2. Dinámica residual

Anteriormente, se asumió como hipótesis que $i_{ds}(0) = 0$. Resulta de interés analizar cómo responde el sistema cuando esta condición no se cumple.

Para ello, primero se aplica la ley de control mínima (Ec. 59) en la ecuación de estado de $i_{ds}(t)$ (Ec. 32), con lo que se obtiene:

$$L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -R_s \cdot i_{ds}^r(t) \quad (\text{Ec. 62})$$

Sumando el término de la derecha en ambos miembros de la ecuación:

$$L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} + R_s \cdot i_{ds}^r(t) = 0 \Rightarrow \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \quad (\text{Ec. 63})$$

Se puede apreciar que se ha obtenido una ecuación diferencial ordinaria y homogénea de primer orden. Utilizando la transformada de Laplace y sus propiedades, es posible encontrar su solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) \cdot e^{-\frac{R_s}{L_d} \cdot t} \quad (\text{Ec. 64})$$

En la Ec. 64 se observa que en el caso de que $i_{ds}(0) \neq 0$, la corriente $i_{ds}^r(t)$ decaerá exponencialmente hasta llegar a 0. Esto establece un acoplamiento entre los ejes “d” y “q”, que se extingue a medida que $i_{ds}^r(t)$ decae. Es posible despreciar este efecto en régimen forzado sin mayores consecuencias, ya que es transitorio.

Si al modelo LTI equivalente (Ec. 56) se le incorpora la dinámica residual del eje “d” (Ec. 63), se tiene en cuenta la expresión linealizada del subsistema térmico (Ec. 55), se incluye la dinámica de i_{0s} (aunque luego se haga $v_{0s} = 0$), y además se desprecia el acoplamiento residual NL por las razones mencionadas anteriormente, se obtiene el modelo LTI equivalente aumentado:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot \left[-R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \lambda'^r_m \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t) \right] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{1}{L_d} \cdot R_s \cdot i_{ds}^r(t) \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [-R_s \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t)] \\ \frac{dT_s^r(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts_amb}} \cdot (T_s^r(t) - T_{amb}(t)) \right] \end{cases} \quad (\text{Ec. 65})$$

Su representación en diagrama de bloques se muestra en la Fig. 14.

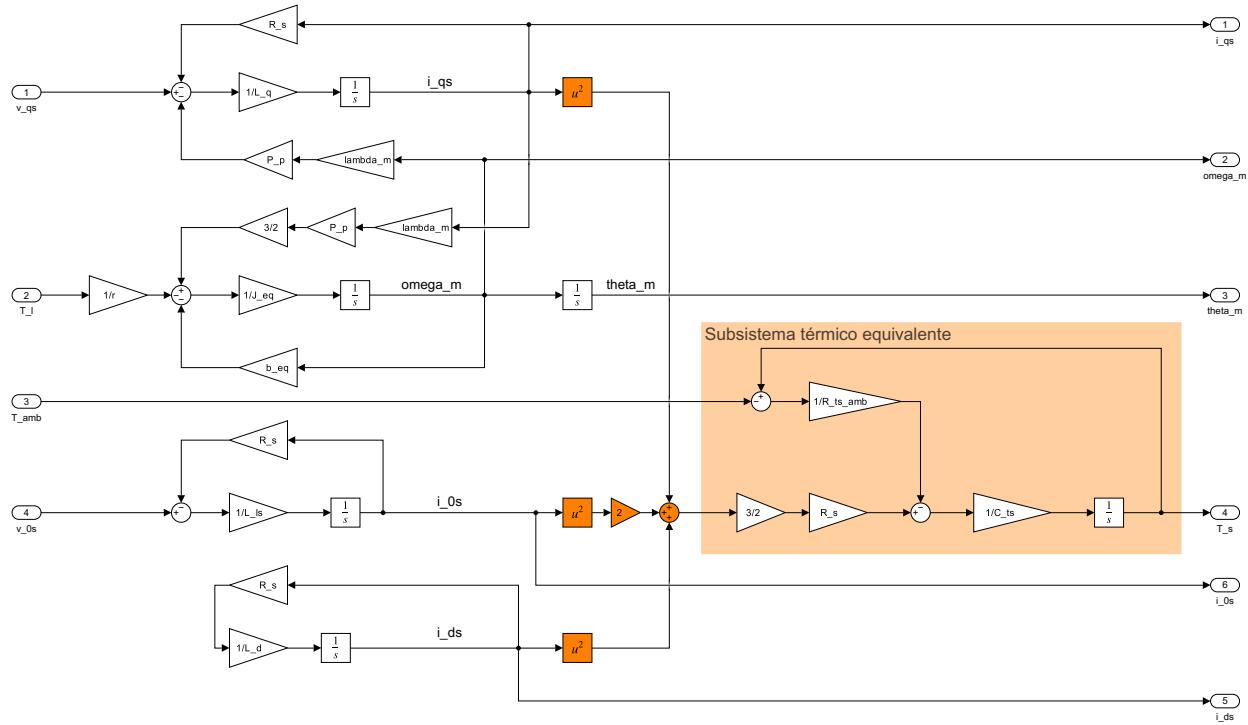


Figura 14: Diagrama de bloques del modelo LTI equivalente aumentado.

4.3.3. Restricción o ley de control complementaria mínima

Si se quiere eliminar el acoplamiento residual no lineal por completo, aún en régimen natural, es necesario implementar una restricción o ley de control complementaria mínima sobre el eje “q”. De esta manera es posible obtener un modelo equivalente completamente lineal, que es independiente del estado inicial de $i_{ds}^r(t)$.

Se tiene:

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left[-R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m' \cdot P_p \cdot \omega_m(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{ds}^r(t) + v_{qs}^r(t) \right] \quad (\text{Ec. 66})$$

Se define una consigna $v_{qs}^{r*}(t)$ tal que:

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{ds}^r(t) \quad (\text{Ec. 67})$$

Reemplazando la Ec. 67 en la Ec. 66 se logra desacoplar los ejes “q” y “d”, obteniendo:

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left[-R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m' \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^{r*}(t) \right] \quad (\text{Ec. 68})$$

Se agrega esta realimentación en el modelo global no lineal de la Fig. 13, obteniendo así el diagrama de bloques del modelo no lineal con ley de control no lineal de la Fig. 15.

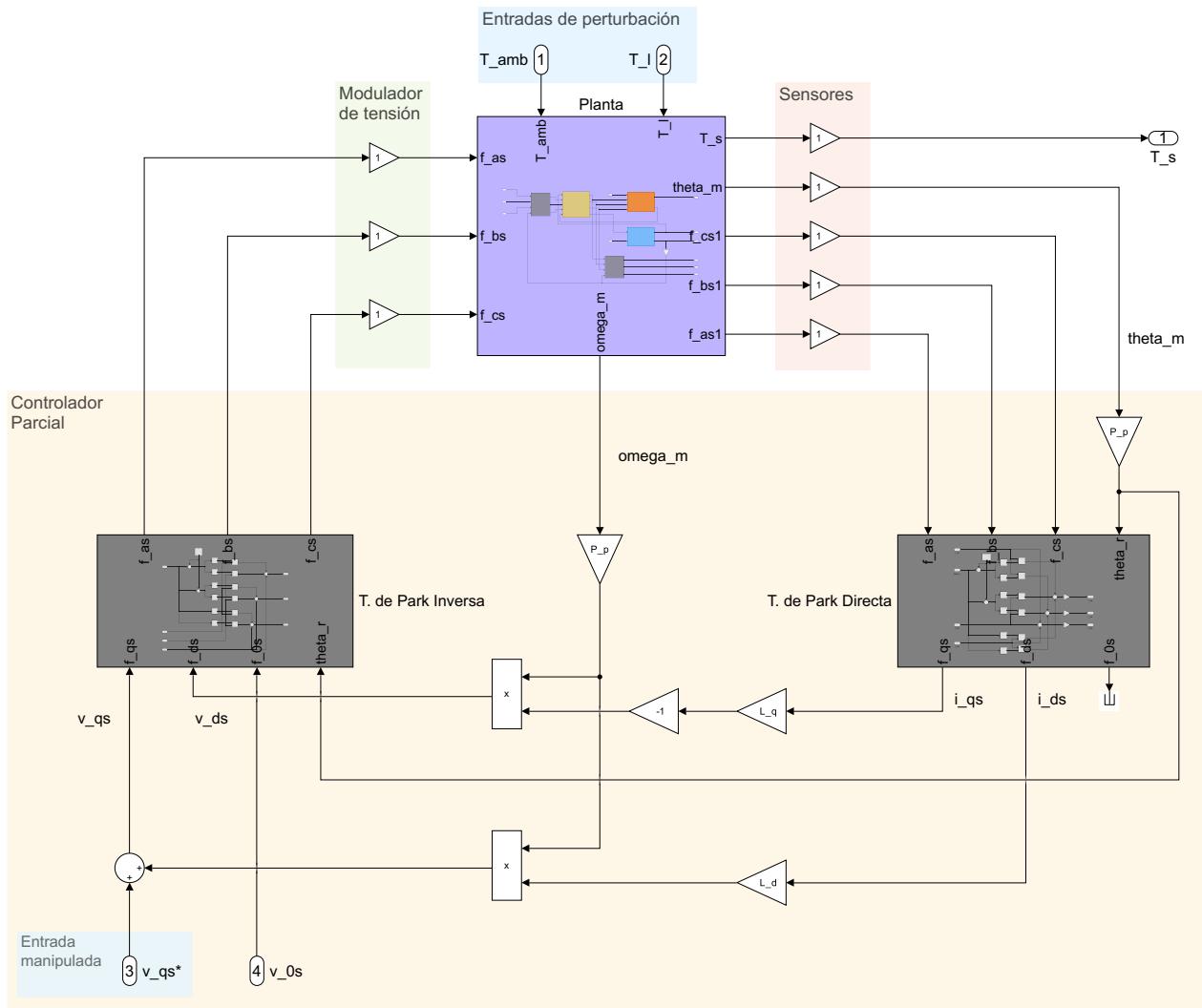


Figura 15: Modelo no lineal con ley de control no lineal.

4.3.4. Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV

Aspectos generales

- El modelo dinámico global LPV es más representativo del sistema real, ya que considera el caso general en el que $i_{ds}^r \neq 0$, lo que implica un espacio con mayor cantidad de puntos de operación. Además, como también tiene en cuenta la variación de R_s con $T_s^\circ(t)$, captura mejor la naturaleza no lineal del sistema.
- El modelo LTI equivalente aumentado es un caso particular del modelo dinámico global LPV, en donde se hace $i_{ds}^r \equiv 0$. Lo anterior produce un desacoplamiento entre los ejes directo y en cuadratura, reduciendo el espacio de puntos de operación y haciendo que se pierdan algunas no linealidades del sistema real. Además, en este modelo se adopta un valor constante para R_s .

Se pueden apreciar las similitudes entre los dos modelos cuando se fuerza $I_{dso}^r \equiv 0$ en el modelo LPV.

Evaluación del modelo LPV para diferentes puntos de operación

Se sabe que la corriente $i_{ds}^r(t)$ está alineada con el campo magnético del rotor, por lo que sus variaciones influyen en el torque electromagnético y la velocidad de rotación de la máquina eléctrica. Se desea analizar qué pasa cuando $I_{dso}^r = 0$, $I_{dso}^r < 0$ y $I_{dso}^r > 0$.

Recordando que el torque electromagnético fue definido en la Ec. 10 como:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left[\lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \right]$$

- Cuando $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado se establece solamente por los imanes permanentes ($\lambda_m'^r$).
- Cuando $i_{ds}^r(t) < 0$, como el término que multiplica a la corriente directa es $(L_d - L_q) > 0$ por tratarse de una máquina de polos salientes, el campo magnético principal se debilita, disminuyendo el torque del motor. Este efecto se conoce como *field weakening*.
- Cuando $i_{ds}^r(t) > 0$, ocurre un efecto contrario; el campo magnético principal se refuerza, aumentando el torque. A este comportamiento se le llama *field forcing*.

La velocidad angular de la máquina puede obtenerse de la Ec. 32 considerando estado estacionario (es decir, $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$):

$$\omega_m(t) = \frac{R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t) - v_{ds}^r(t)}{L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p}$$

- Cuando $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado se establece solamente por los imanes permanentes ($\lambda_m'^r$).
- Cuando $i_{ds}^r(t) < 0$, el término $R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t)$ es negativo, contribuyendo con $-v_{ds}^r(t)$ y aumentando la velocidad del motor.
- Cuando $i_{ds}^r(t) > 0$, ocurre lo contrario; el término $R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t)$ es positivo, oponiéndose al término negativo de la tensión, y disminuyendo así el valor absoluto de la velocidad del motor.

4.3.5. Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado

Para obtener las funciones de transferencia se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones del sistema LTI equivalente (Ec. 56), considerando condiciones iniciales nulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right] \end{array} \right. \quad (\text{Ec. 69})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right] \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \left[V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \Omega_m(s) \right] \end{array} \right. \quad (\text{Ec. 70})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \left[V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \Omega_m(s) \right] \end{array} \right. \quad (\text{Ec. 71})$$

Despejando $I_{qs}^r(s)$ de la última ecuación, se obtiene:

$$I_{qs}^r(s) = \frac{V_{qs}^r(s) - \lambda_m'^r P_p \Omega_m(s)}{s L_q + R_s} \quad (\text{Ec. 72})$$

Sustituyendo (Ec. 72) en (Ec. 70), utilizando (Ec. 69) para dejar la ecuación en términos de $\Theta_m(s)$ y reordenando, se llega a:

$$\Theta_m(s) \left[s^3 J_{eq} L_q + s^2 (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) + s (b_{eq} R_s + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2) \right] = \frac{3}{2} P_p \lambda_m'^r V_{qs}^r(s) - \frac{s L_q + R_s}{r} \cdot T_l(s)$$

Ahora, si se despeja la salida $\Theta_m(s)$ en función de las entradas $V_{qs}^r(s)$ y $T_l(s)$, se tiene:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m'^r V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} (s L_q + R_s) T_l(s)}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2) s}$$

A partir de esta última expresión es posible obtener las funciones de transferencia con respecto a cada una de las entradas por separado:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m'^r}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2) s} \quad (\text{Ec. 73})$$

$$\frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} (R_s + s L_q)}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2) s} \quad (\text{Ec. 74})$$

También resulta de interés calcular las funciones de transferencia para las salidas velocidad angular, $\Omega_m(s)$, y corriente del eje “q”, $I_{qs}^r(s)$, ya que se utilizarán más adelante:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m'^r}{J_{eq} L_q s^2 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2)} \quad (\text{Ec. 75})$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} (R_s + s L_q)}{J_{eq} L_q s^2 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2)} \quad (\text{Ec. 76})$$

$$\frac{I_{qs}^r(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{b_{eq} + s J_{eq}}{J_{eq} L_q s^2 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2)} \quad (\text{Ec. 77})$$

$$\frac{I_{qs}^r(s)}{T_l(s)} = \frac{\frac{1}{r} P_p \lambda_m'^r}{J_{eq} L_q s^2 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} (P_p \lambda_m')^2)} \quad (\text{Ec. 78})$$

4.4. Análisis de estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

Se dice que un sistema LTI es estable si, para toda excitación acotada en el tiempo, todos sus estados toman valores acotados; y si la excitación desaparece, el estado tiende al origen del espacio vectorial de estados.

Esto ocurre cuando todos los polos de la función de transferencia del sistema tienen parte real negativa, lo que es lo mismo que decir que los autovalores de la matriz A del sistema tienen parte real negativa (se encuentran en el semiplano izquierdo del plano de Laplace).

A partir la ecuación característica (denominador de Ec. 73 y Ec. 74 igualado a cero), es posible calcular los polos del modelo LTI equivalente aumentado a lazo abierto para analizar su estabilidad:

$$(J_{\text{eq}} \cdot L_q)s^3 + (L_q \cdot b_{\text{eq}} + R_s \cdot J_{\text{eq}})s^2 + \left(R_s \cdot b_{\text{eq}} + \frac{3}{2}P_p^2 \lambda_m'^r r^2 \right) \cdot s = 0 \quad (\text{Ec. 79})$$

Reordenando, queda:

$$s \cdot \left[(J_{\text{eq}} \cdot L_q)s^2 + (L_q \cdot b_{\text{eq}} + R_s \cdot J_{\text{eq}}) \cdot s + \left(R_s \cdot b_{\text{eq}} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^r r^2 \right) \right] = 0 \quad (\text{Ec. 80})$$

Dado que se trata de un polinomio de tercer grado, tendrá tres raíces, lo que implica la existencia de tres polos. A simple vista, se observa que uno de estos polos se encuentra en el origen, mientras que los otros dos son:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{-(L_q b_{\text{eq}} + R_s J_{\text{eq}}) + \sqrt{(L_q b_{\text{eq}} + R_s J_{\text{eq}})^2 - 4(J_{\text{eq}} L_q)(R_s b_{\text{eq}} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m'^r r^2)}}{2(J_{\text{eq}} L_q)} \\ s_3 = \frac{-(L_q b_{\text{eq}} + R_s J_{\text{eq}}) - \sqrt{(L_q b_{\text{eq}} + R_s J_{\text{eq}})^2 - 4(J_{\text{eq}} L_q)(R_s b_{\text{eq}} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m'^r r^2)}}{2(J_{\text{eq}} L_q)} \end{cases} \quad (\text{Ec. 81})$$

Los polos s_2 y s_3 están directamente afectados por los parámetros J_{eq} , b_{eq} y R_s , por lo que un análisis completo de estabilidad debe contemplar la variación de estos valores.

Además, se puede deducir a partir de función de transferencia presentada en la Ec. 74 que la perturbación T_l introduce un cero, definido como:

$$sL_q + R_s = 0 \implies s = -\frac{R_s}{L_q} \quad (\text{Ec. 82})$$

Este se encuentra sobre el eje real y depende únicamente del valor de la resistencia, ya que el parámetro restante, L_q , es constante.

Se comienza por estudiar la influencia de la resistencia del bobinado del estator sobre los polos, la cual varía en función de la temperatura $T_s^\circ(t)$. Para ello, se consideran valores de R_s correspondientes a distintas temperaturas dentro del rango operativo permitido, que está comprendido entre 20 °C y 115 °C.

Para este análisis, los valores de los parámetros b_{eq} y J_{eq} se mantienen constantes en sus condiciones nominales:

$$\begin{aligned} b_{\text{eq}} &= 2,1944 \times 10^{-5} \frac{\text{Nms}}{\text{rad}} \\ J_{\text{eq}} &= 1,9785 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

En la Fig. 16 se presenta el mapa de polos y ceros para la resistencia calculada para seis valores equidistantes de temperatura que abarcan todo el rango mencionado. Cabe recordar que los ceros corresponden únicamente a la función de transferencia con entrada T_l , pero se incluyen en la gráfica junto con los polos por simplicidad.

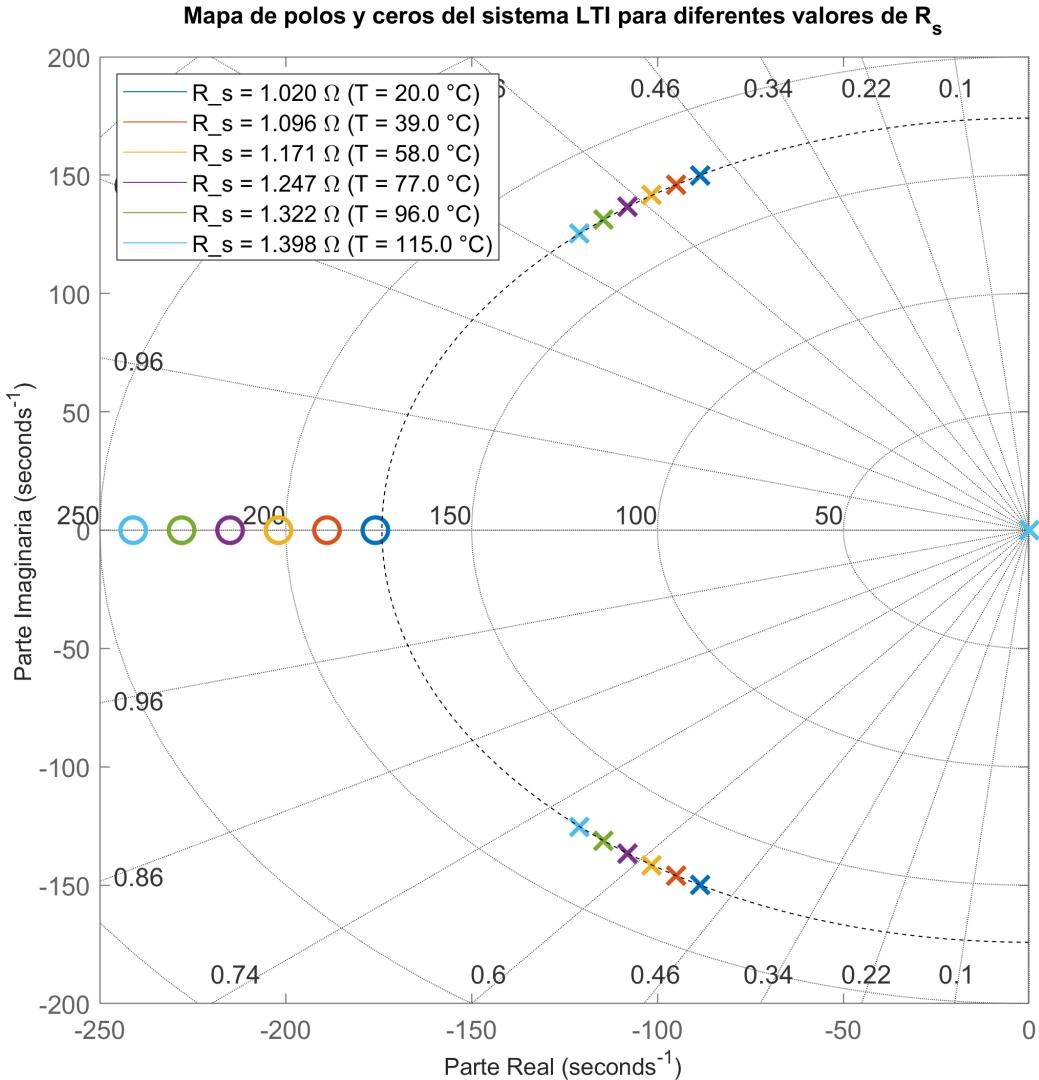


Figura 16: Evolución de polos ante la variación de R_s .

Es posible observar que la parte real de los polos se mantiene negativa y, además, se vuelve aún más negativa a medida que aumenta la temperatura (y por ende, la resistencia), lo cual contribuye a mejorar la estabilidad del sistema. Esto es deseable, ya que durante la operación, se trabaja a temperaturas más altas que la inicial de referencia.

Los ceros también se mueven hacia la izquierda del plano complejo con el aumento de la resistencia del bobinado. Esto se condice con la Ec. 82.

Ahora se hace un análisis análogo al anterior, pero considerando la variación de los parámetros b_{eq} y J_{eq} , y manteniendo la resistencia constante en su valor de referencia ($R_{sREF} = 1,02 \Omega @ T_{sREF} = 20^\circ\text{C}$).

Para valores mínimos de los parámetros de carga, que coinciden con los nominales adoptados anteriormente, se tiene:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ s_2 = -89,49 + i149,94 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ s_3 = -89,49 - i149,94 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases} \quad (\text{Ec. 83})$$

Por otro lado, para valores máximos, $b_{eq} = 2,4028 \times 10^{-5} \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$ y $J_{eq} = 4,5826 \times 10^{-5} \text{kg m}^2$, se obtiene:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ s_2 = -89,19 + i72,91 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ s_3 = -89,19 - i72,91 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases} \quad (\text{Ec. 84})$$

Se concluye que la estabilidad del sistema no se ve afectada al variar estos parámetros, ya que la parte real de los polos se mantiene negativa y, además, permanece prácticamente constante en todos los casos.

Frecuencia natural del sistema y relación de amortiguamiento

A continuación, se analiza el valor de la frecuencia natural del sistema, ω_n , y el amortiguamiento relativo, ζ . Se considera el polinomio característico de la Ec. 80 normalizado, se iguala a cero, y se compara con la ecuación característica estándar de un sistema de segundo orden:

$$s^2 + \frac{(L_q b_{eq} + R_s J_{eq})}{(J_{eq} L_q)} \cdot s + \frac{(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m'^{r2})}{(J_{eq} L_q)} = 0$$

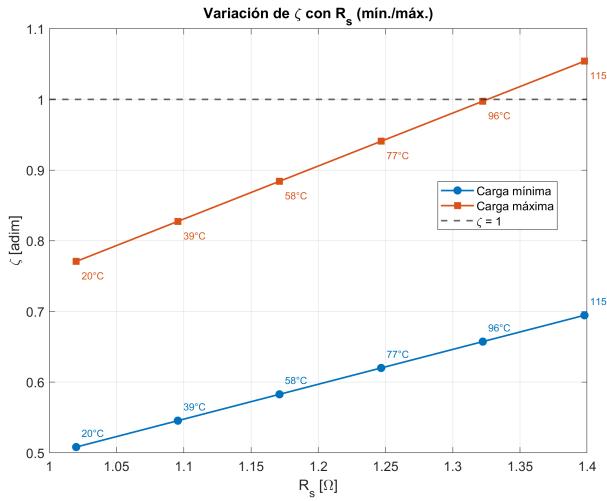
$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Luego:

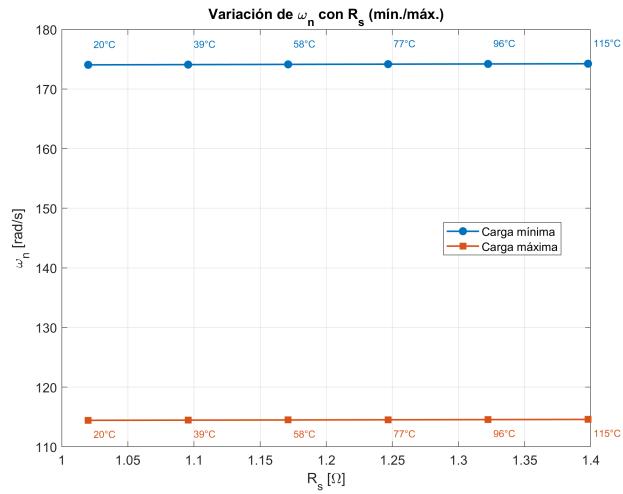
$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m'^{r2}}{J_{eq} L_q}} \quad (\text{Ec. 85})$$

$$\zeta = \frac{L_q b_{eq} + R_s J_{eq}}{2 J_{eq} L_q \omega_n} \quad (\text{Ec. 86})$$

Se procede a estudiar cómo cambian estos valores en función de la resistencia R_s , para parámetros de carga mínimos y máximos.



(a) Relación de amortiguamiento ξ vs. R_s .



(b) Frecuencia natural ω_n vs. R_s .

Figura 17: Frecuencias naturales y relaciones de amortiguamiento para el barrido de R_s con parámetros de carga mínimos y máximos.

En la Fig. 17a se observa que para parámetros de carga mínimos (línea azul), ζ toma valores entre 0,5082 y 0,6935, lo que indica que el sistema puede caracterizarse como subamortiguado ($\zeta < 1$) en estas condiciones para todo el rango de temperaturas considerado. Sin embargo, cuando se toman parámetros de carga máximos (línea naranja), los valores de ζ que se obtienen aumentan, y para resistencias mayores a aproximadamente $1,33\Omega$, la relación de amortiguamiento supera la unidad, indicando que el sistema adopta un comportamiento de tipo sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

Por otro lado, en la Fig. 17b es posible notar que la frecuencia natural del sistema no presenta una gran variabilidad en función de la resistencia en ninguno de los dos escenarios contemplados. Para parámetros de carga máximos, la curva de variación de ω_n se desplaza hacia abajo con respecto a la curva obtenida cuando se consideran parámetros de carga mínimos.

4.5. Análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Se dice que un sistema LTI de orden n es observable en t_0 si, con el sistema en el estado inicial $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Para evaluar si un sistema lineal invariante en el tiempo es observable, se puede hacer uso del Criterio de Observabilidad de Kalman, el cual establece que un sistema LTI de orden n será completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad, \mathcal{O} , es de rango completo. Esta matriz se define como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si \mathcal{O} es cuadrada, tendrá rango completo cuando $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

A continuación se realiza el análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado. La matriz del sistema, A , a considerar es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}} \\ 0 & \frac{P_p\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix}$$

Se empieza por verificar si el sistema es observable desde la variable de estado $\theta_m(t)$. La matriz C es, en este caso:

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

Luego, la matriz \mathcal{O}_{pos} queda definida como:

$$\mathcal{O}_{pos} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p\lambda_m'^r}{J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 87})$$

Cuyo determinante resulta:

$$\det(\mathcal{O}_{pos}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq}} \neq 0 \quad (\text{Ec. 88})$$

Lo anterior permite concluir que la matriz de observabilidad asociada a la salida $\theta_m(t)$ posee rango completo (rango 3), con determinante distinto de cero para cualquier valor de los parámetros de carga. Esto implica que el sistema es completamente observable desde la posición.

Si ahora se evalúa la observabilidad desde la variable de estado $\omega_m(t)$, las matriz C resulta:

$$C' = [0 \ 1 \ 0]$$

Con lo que se obtiene la matriz de observabilidad \mathcal{O}_{vel} :

$$\mathcal{O}_{vel} = \begin{bmatrix} C' \\ C'A \\ C'A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m'}{2J_{eq}} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2}{J_{eq}^2} - \frac{3P_p^2\lambda_m'^2}{2J_{eq}L_q} & -\frac{3b_{eq}P_p\lambda_m'}{2J_{eq}^2} - \frac{3R_sP_p\lambda_m'}{2J_{eq}L_q} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 89})$$

En este caso, como una de las columnas de la matriz \mathcal{O}_{vel} está compuesta solamente por ceros, se sabe que el determinante es nulo, y que el rango no es completo (es decir, es menor a 3). De este modo, se concluye que el sistema no es observable desde la velocidad.

Cabe destacar que para ambos casos se ha considerado la matriz del sistema LTI que resulta de aplicar los desacoplamientos desarrollados en la sección anterior, por lo que incluso desde la posición, los estados $i_{ds}^r(t)$ y $T_s^\circ(t)$ no serán observables. Esto quiere decir que en realidad el sistema es parcialmente observable desde $\theta_m(t)$, y no observable desde $\omega_m(t)$.

4.6. Análisis de controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Es posible decir que un sistema LTI de orden n es controlable en t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito.

Para el análisis de controlabilidad completa del estado, se aplica el Criterio de Controlabilidad de Kalman, el cual establece que un sistema LTI de orden n será completamente controlable si, y sólo si, la matriz de controlabilidad \mathcal{C} es de rango completo. Si esto se cumple, entonces existirá una ley de control que permita ubicar todos los polos de lazo cerrado del sistema a voluntad en el plano de Laplace.

La matriz \mathcal{C} se define como:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Si \mathcal{C} es cuadrada, tendrá rango completo cuando $\det(\mathcal{C}) \neq 0$.

Se procede a analizar la controlabilidad del modelo LTI equivalente aumentado, desde la entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$, y sin considerar la perturbación de la carga mecánica.

Recordando que las matrices A y B son, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}} \\ 0 & \frac{P_p\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad \mathcal{C} resulta:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3P_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}L_q} \\ 0 & \frac{3P_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}L_q} & -\frac{3b_{eq}P_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}^2L_q} - \frac{3R_sP_p\lambda_m'^r}{2J_{eq}L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{R_s^2}{L_q^3} - \frac{3P_p^2\lambda_m'^r}{2J_{eq}L_q^2} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 90})$$

Y su determinante:

$$\det(\mathcal{C}) = \frac{9}{4} \cdot \frac{P_p^2 \cdot (\lambda_m'^r)^2}{J_{eq}^2 \cdot L_q^3} \neq 0 \quad (\text{Ec. 91})$$

Como el determinante de la matriz de controlabilidad es distinto de cero sin importar los parámetros de carga que adopte el sistema, se puede afirmar que el sistema es completamente controlable desde la entrada $v_{qs}^r(t)$.

Sin embargo, nuevamente se debe resaltar que no es posible controlar $i_{ds}^r(t)$ y $T_s^\circ(t)$ desde la tensión del eje en cuadratura, debido a los desacoplamientos realizados en el sistema. Para llevar a cabo su control es necesario implementar entradas de control adicionales o eliminar las restricciones impuestas.

4.7. Simulación dinámica en el dominio del tiempo

En esta sección se comparan las respuestas obtenidas en la simulación dinámica en el dominio del tiempo para el modelo LTI equivalente aumentado (Fig. 14) y el modelo NL con ley de control no lineal (Fig. 15).

4.7.1. Respuesta de estado interno

En primer lugar, se evalúa la respuesta de estado interno del sistema ante un pulso de consigna de tensión de estator en el eje “q” ($v_{qs}^*(t)$), superpuesto con un doble pulso de torque de carga ($T_l(t)$), para $i_{ds}^r(t) = 0$ A.

La magnitud y duración de los pulsos considerados pueden observarse en la Fig. 18.

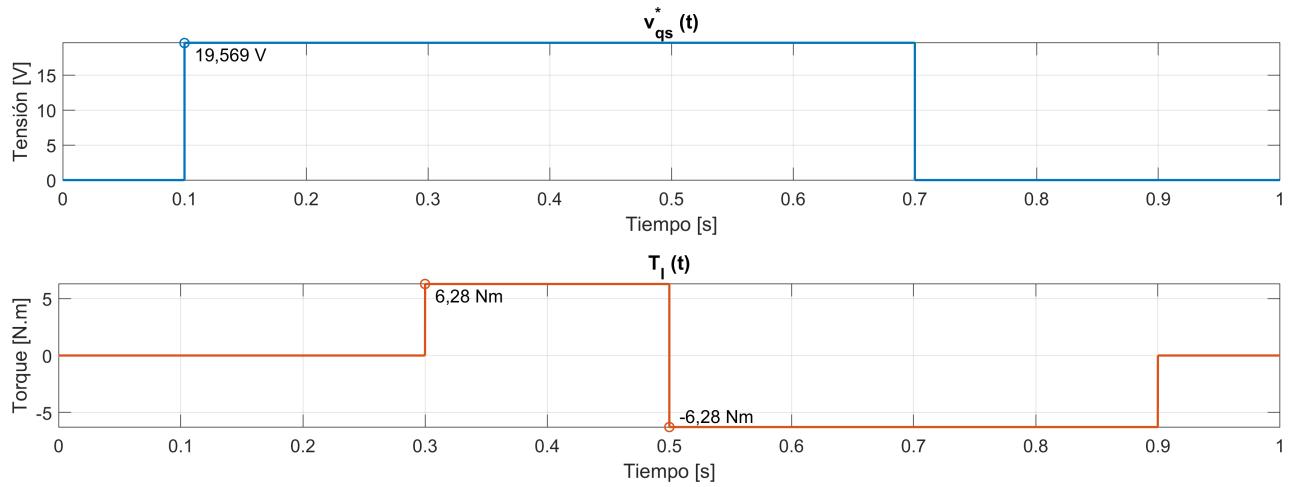


Figura 18: Pulso de tensión $v_{qs}^*(t)$ y doble pulso de torque $T_l(t)$.

En las figuras que se muestran a continuación, puede observarse cómo responden la posición angular $\theta_m(t)$, la velocidad angular $\omega_m(t)$ y el torque electromagnético $T_m(t)$ ante las entradas mencionadas.

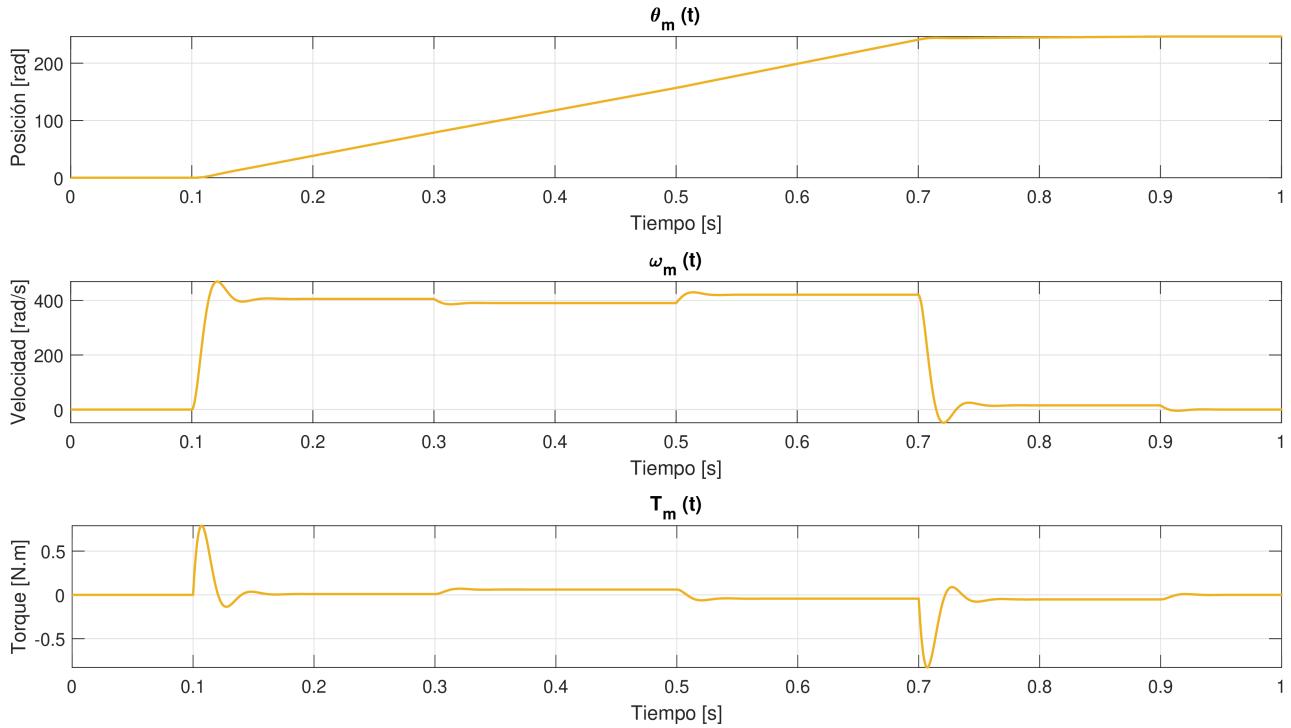


Figura 19: Curvas de posición angular, velocidad angular y torque electromagnético para el Modelo LTI aumentado.

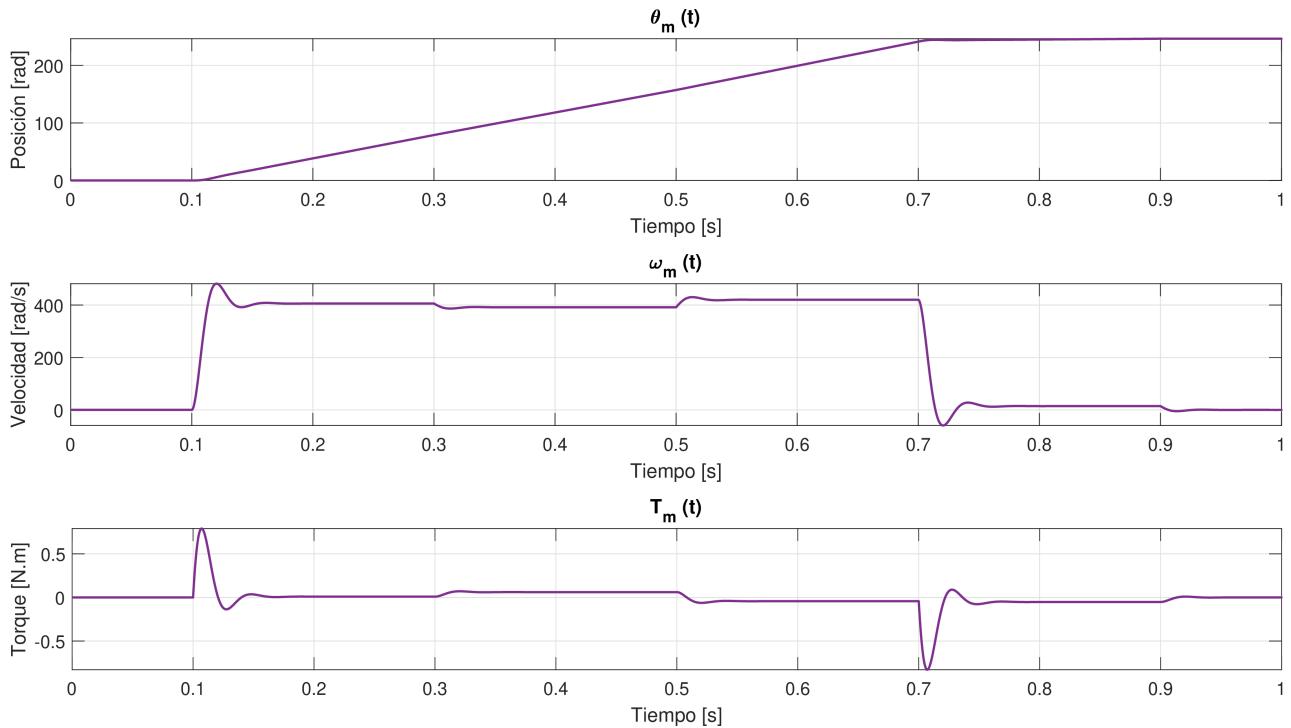


Figura 20: Curvas de posición angular, velocidad angular y torque electromagnético para el Modelo NL con ley de control NL.

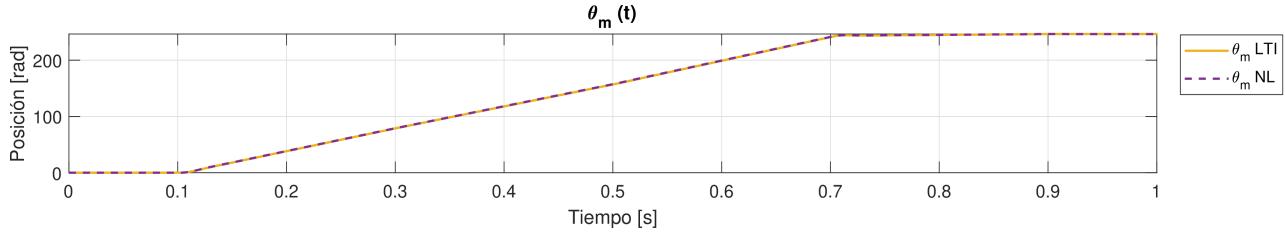


Figura 21: Comparativa de la evolución temporal de la posición angular.

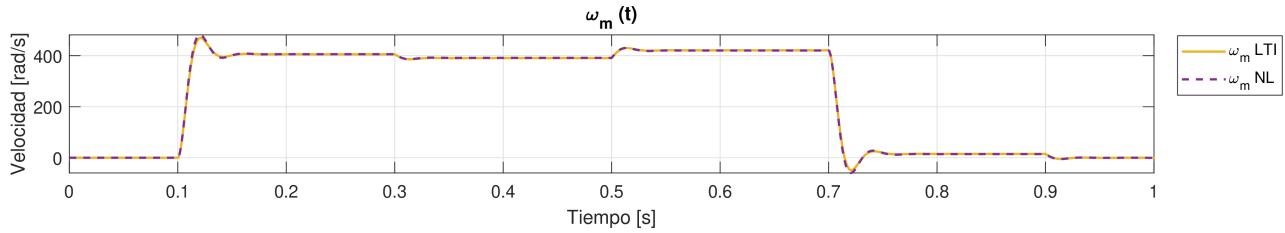


Figura 22: Comparativa de la evolución temporal de la velocidad angular.

La variación de la temperatura en el bobinado del estator, considerando una temperatura inicial de 20°C y una temperatura ambiente $T_{amb}^{\circ}(t) = 20^{\circ}\text{C}$, puede observarse en las figuras 23, 24 y 25.

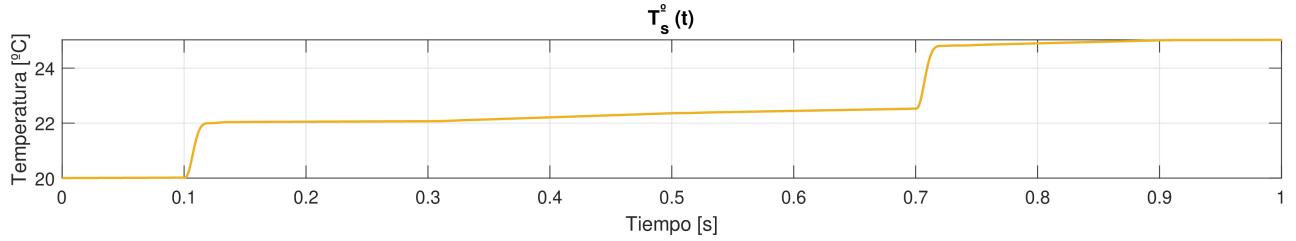


Figura 23: Variación de la temperatura del bobinado del estator, Modelo LTI aumentado.

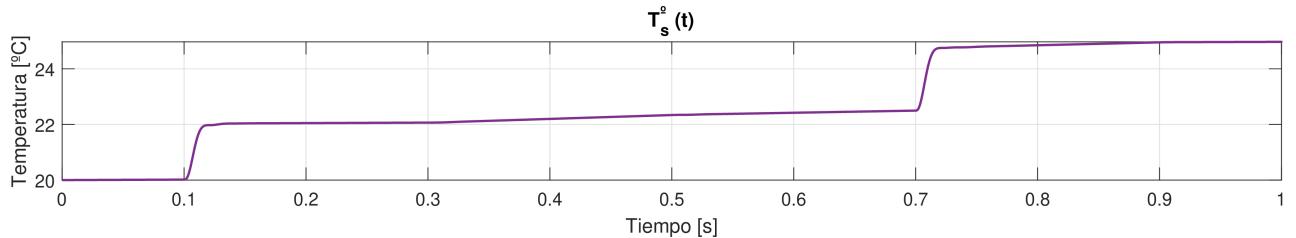


Figura 24: Variación de la temperatura del bobinado del estator, Modelo NL con realimentación NL.

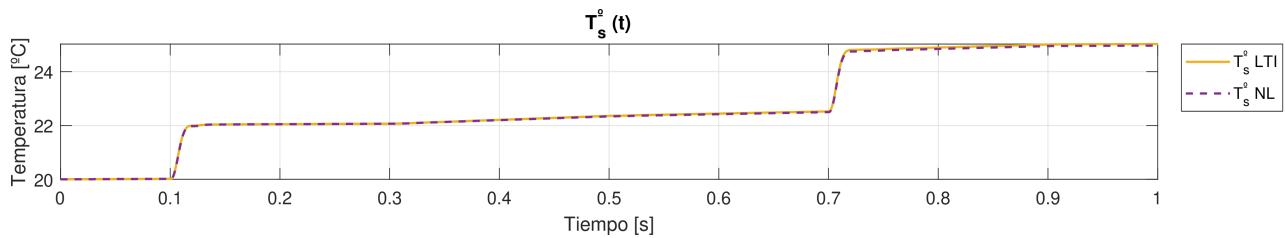


Figura 25: Comparativa de la evolución temporal de la temperatura del bobinado del estator.

En las gráficas que siguen, se muestra la evolución de las tensiones y corrientes en el tiempo, tanto en coordenadas virtuales $qd0s$, como en coordenadas reales $abcs$, para ambos modelos.

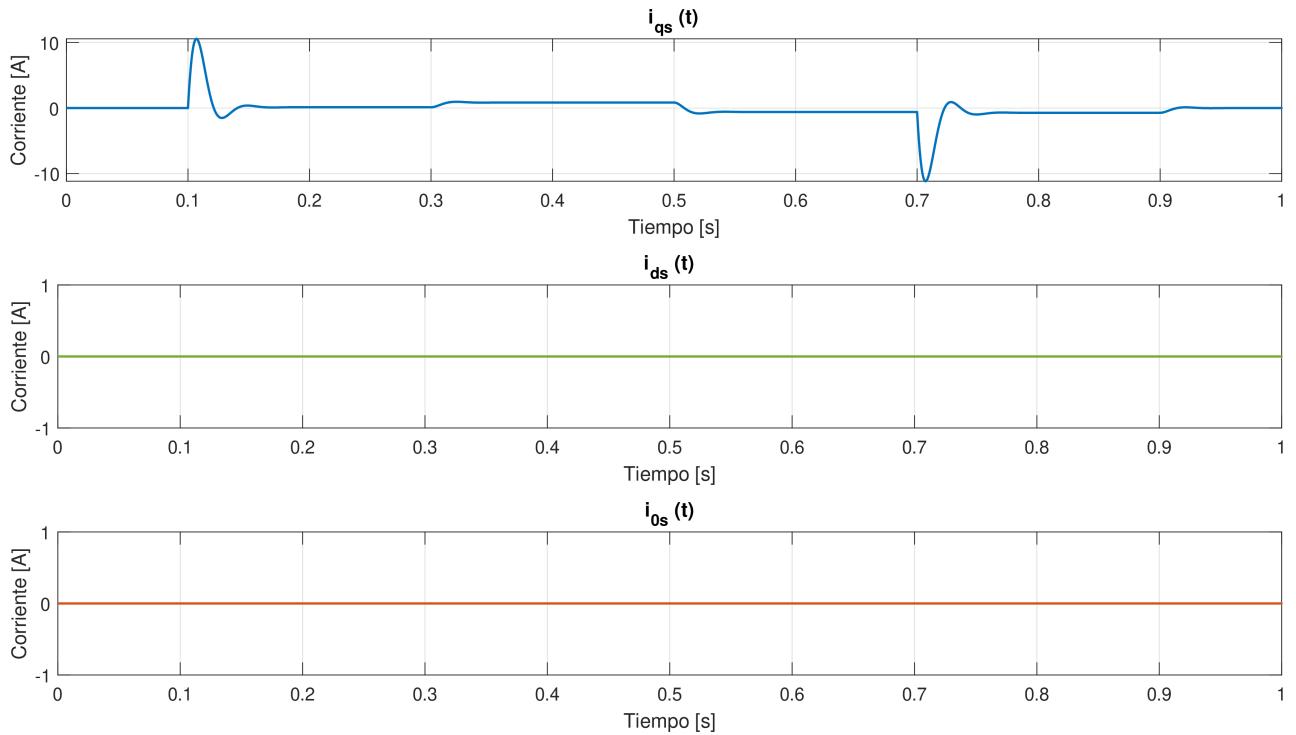


Figura 26: Curvas de corrientes en coordenadas virtuales, Modelo LTI aumentado.

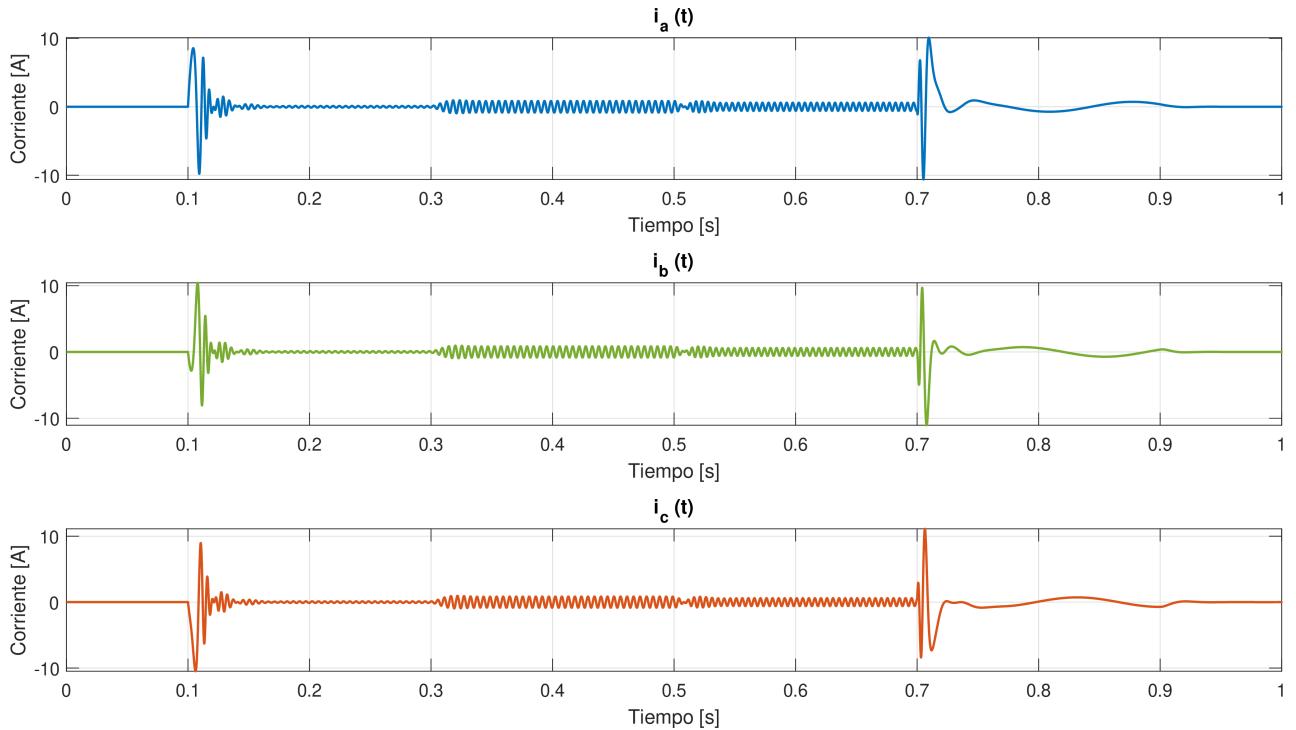


Figura 27: Curvas de corrientes en coordenadas reales, Modelo LTI aumentado.

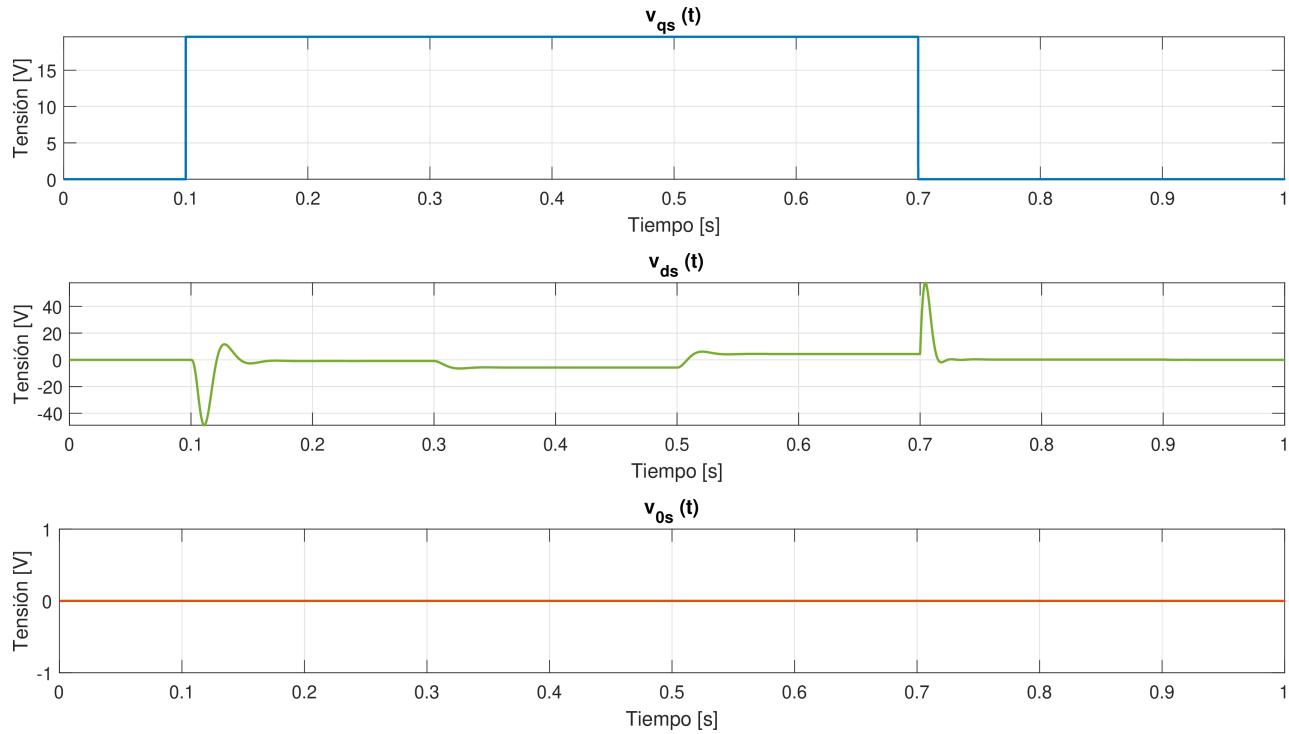


Figura 28: Curvas de tensiones en coordenadas virtuales, Modelo LTI aumentado.

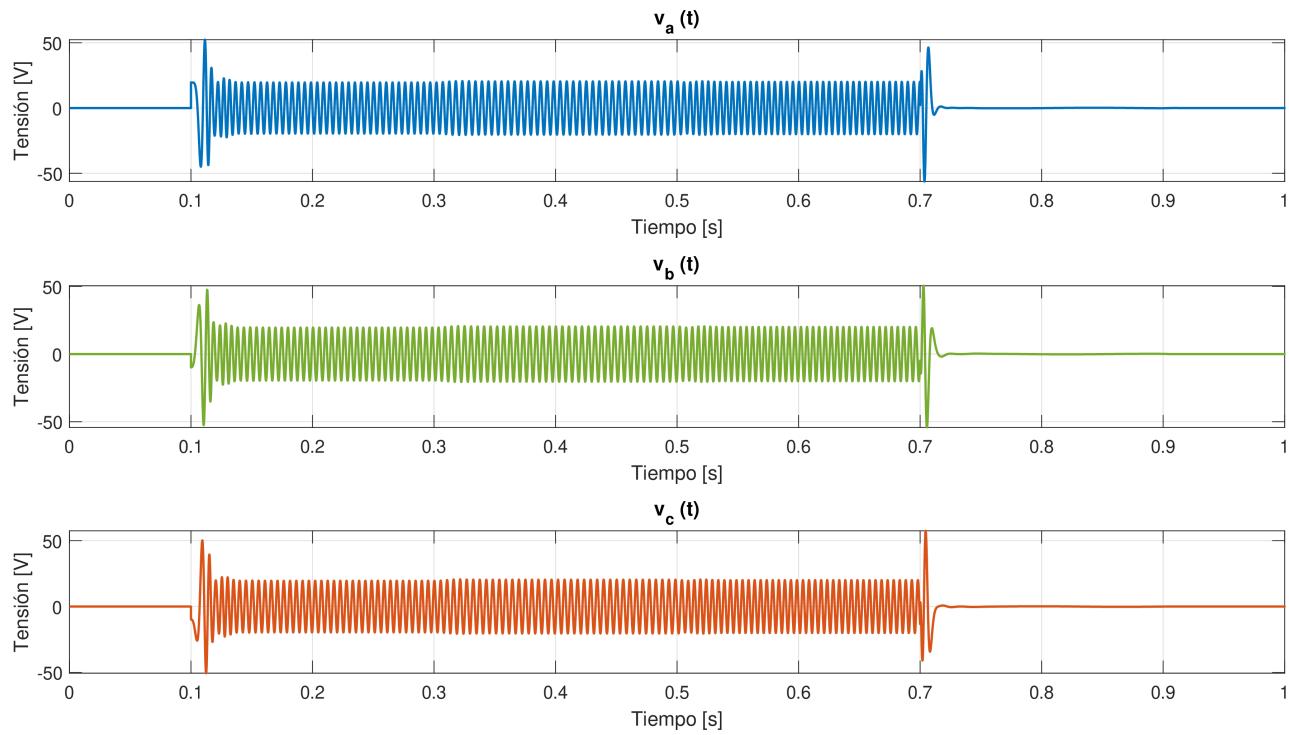


Figura 29: Curvas de tensiones en coordenadas reales, Modelo LTI aumentado.

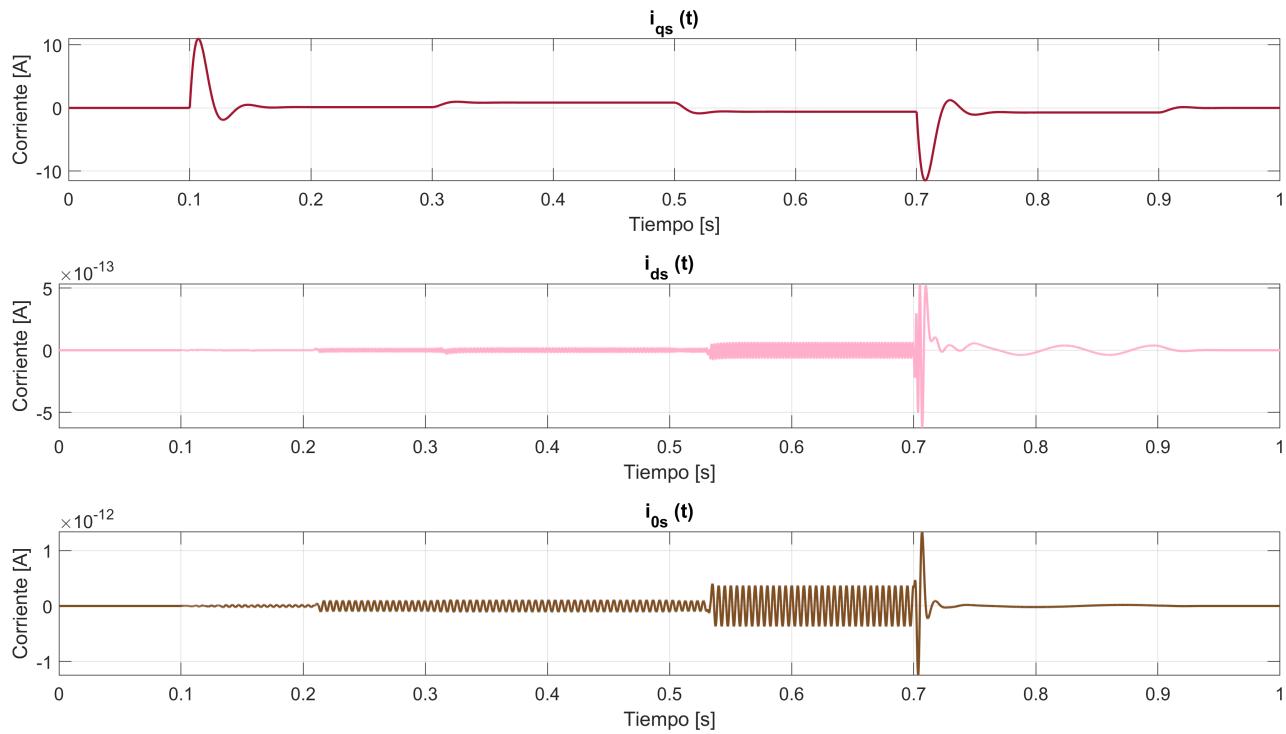


Figura 30: Curvas de corrientes en coordenadas virtuales, Modelo NL con realimentación NL.

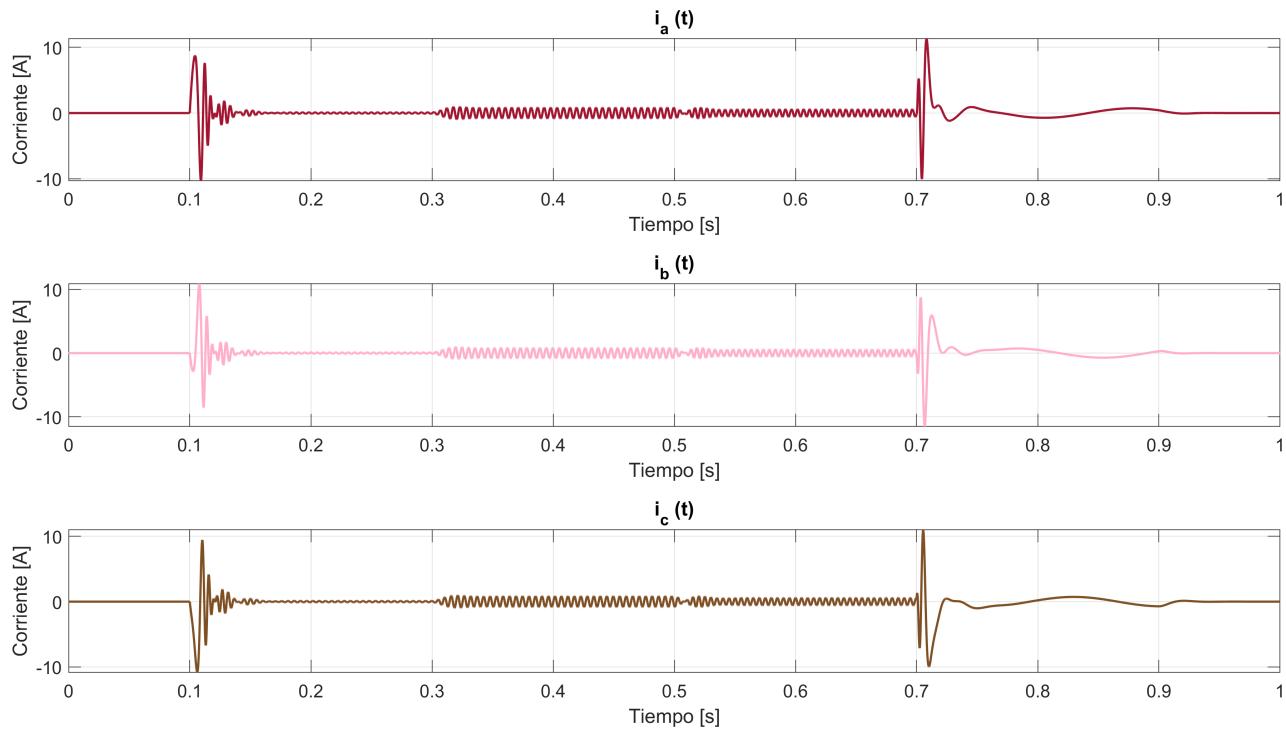


Figura 31: Curvas de corrientes en coordenadas reales, Modelo NL con realimentación NL.

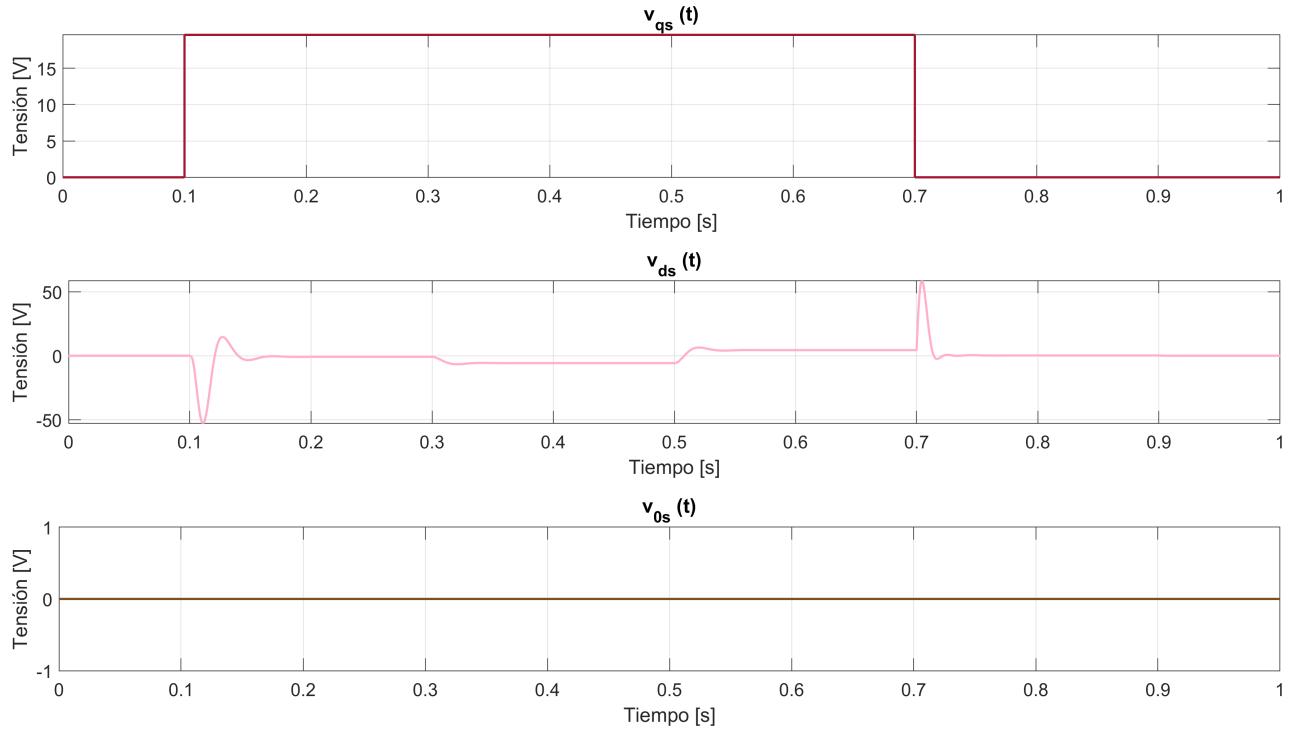


Figura 32: Curvas de tensiones en coordenadas virtuales, Modelo NL con realimentación NL.

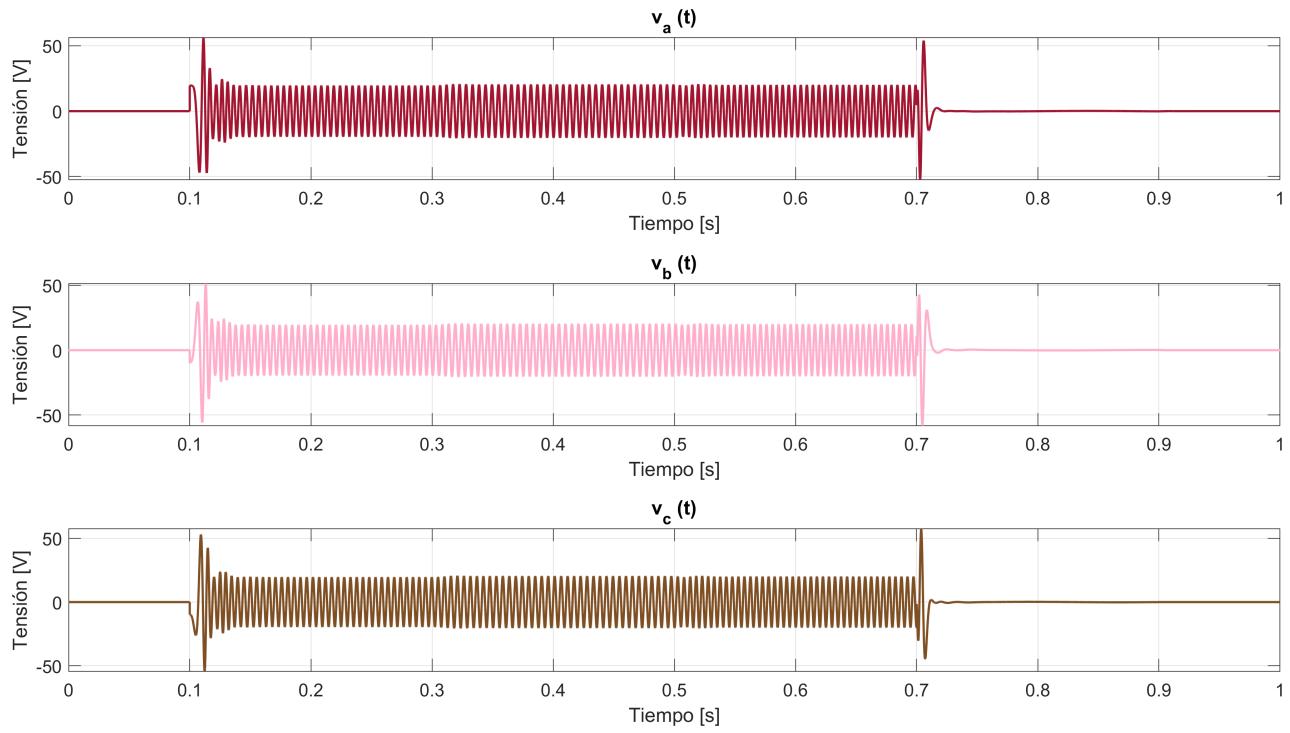


Figura 33: Curvas de tensiones en coordenadas reales, Modelo NL con realimentación NL.

Tras analizar las gráficas presentadas, es posible concluir que los dos modelos desarrollados se comportan prácticamente de la misma forma.

Ante variaciones de temperatura pequeñas respecto a la temperatura de referencia definida (Fig. 25), el hecho de adoptar un valor de resistencia de estator R_s constante (modelo LTI aumentado, $R_s =$

$R_{sREF}(@T_{sREF} = 20^\circ\text{C}) = 1,02 \Omega$) no produce diferencias significativas con respecto a considerar una variación lineal de la misma con la temperatura (modelo NL con realimentación NL).

Es importante resaltar que para ambos modelos, existen valores de corriente y de tensión en coordenadas reales que superan los límites admitidos por la máquina eléctrica. Esto es un defecto que se corregirá más adelante en el trabajo.

Curva paramétrica Torque vs. Velocidad

En la Fig. 34 se muestra la curva paramétrica torque electromagnético vs. velocidad angular para cada instante de tiempo de la simulación del modelo NL.

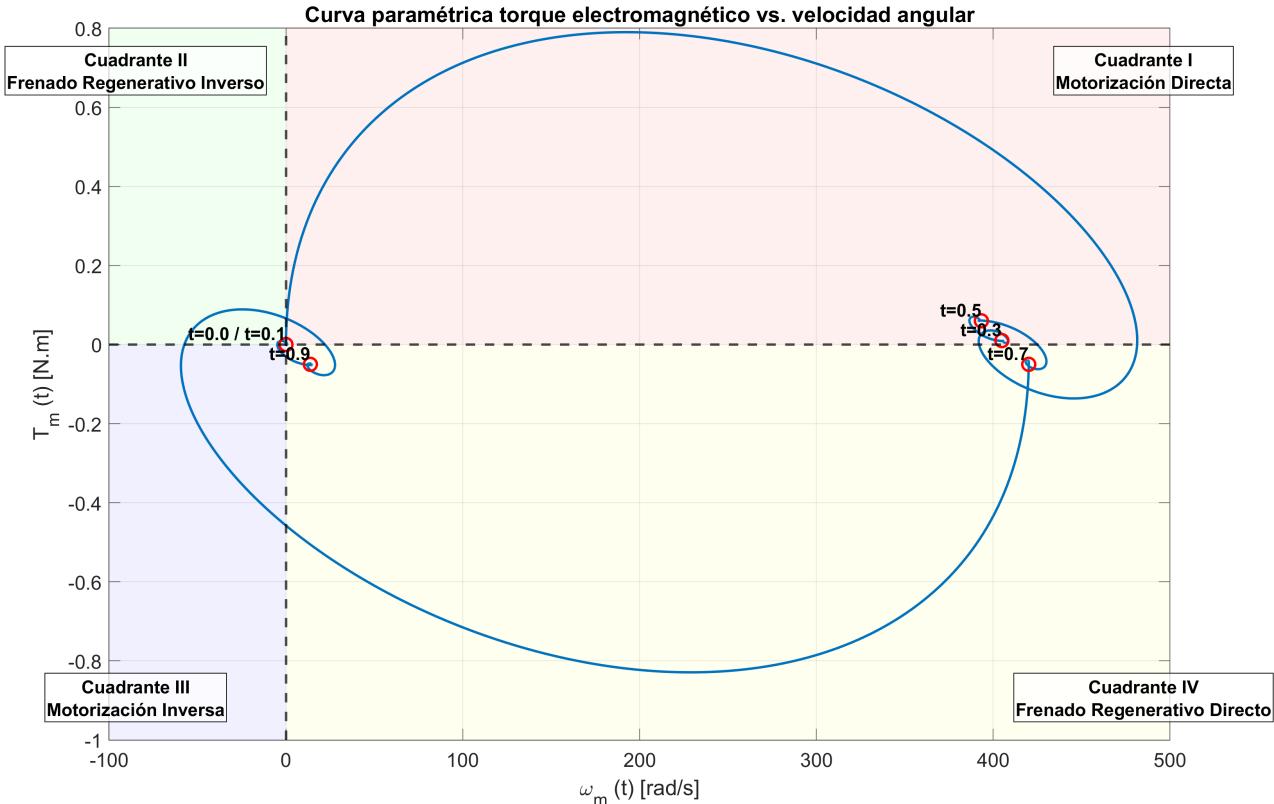


Figura 34: Curva parámetrica $T_m(t)$ vs. $\omega_m(t)$, Modelo NL con realimentación NL.

Se observa que la máquina trabaja en los cuatro cuadrantes, comportándose como motor (motorización directa) y como generador (frenado regenerativo directo).

Además, es posible identificar seis puntos característicos en la curva, que se corresponden con seis estados de equilibrio del sistema dinámico. A continuación se explica lo que ocurre en cada uno de ellos, relacionándolo con los momentos en los que se producen variaciones en los pulsos de entrada de tensión y torque.

- $t = 0\text{s}$: La consigna de tensión v_{qs}^{r*} y la perturbación T_l son nulas, por lo que la velocidad y el torque también lo son.
- $t = 0,1\text{s}$: En este punto, comienza a aplicarse una tensión v_{qs}^{r*} de 19,596 V. El efecto no es instantáneo, por lo que la velocidad y el torque continúan en cero inicialmente.
- Tras aplicar la consigna de tensión, comienza a aumentar la velocidad angular y el torque, hasta estabilizarse en $\omega_m = 404,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $T_m = 0,01 \text{ N.m}$.

- $t = 0,3\text{ s}$: Aquí comienza la perturbación T_l de $6,28\text{ N m}$. En consecuencia, la velocidad disminuye y el torque aumenta, hasta llegar a: $\omega_m = 393,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $T_m = 0,06\text{ N m}$.
- $t = 0,5\text{ s}$: Luego de la perturbación positiva, sigue una negativa de la misma magnitud. Esto hace que la velocidad aumente y el torque se vuelva negativo, terminando en valores de $\omega_m = 420,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $T_m = -0,05\text{ N m}$.
- $t = 0,7\text{ s}$: En este tiempo, se deja de aplicar el pulso de tensión, pero se mantiene la perturbación negativa. Esto provoca una baja pronunciada de velocidad, llegando a $\omega_m = 14,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
- $t = 0,9\text{ s}$: Aquí cesa la perturbación. La velocidad y el torque regresan a valores nulos luego de unos instantes.

Ángulo de torque del rotor

El ángulo de torque del rotor, $\delta(t)$, representa la diferencia angular entre la posición del eje de referencia sincrónico $\theta_{ev}(t)$ (alineado con la tensión de fase a del estator), y la posición angular del rotor $\theta_r(t)$. Matemáticamente, se define como:

$$\delta(t) \equiv \theta_{ev}(t) - \theta_r(t) = \int_0^t [\omega_{ev}(\xi) - \omega_r(\xi)] d\xi + [\theta_{ev}(0) - \theta_r(0)] \quad (\text{Ec. 92})$$

Para obtener $\delta(t)$ durante la simulación, es necesario conocer $\theta_{ev}(t)$ en cada instante de tiempo. Este ángulo puede estimarse a partir de la proyección de las tensiones de fase en el plano $\alpha\beta$, haciendo uso de la transformación de Clarke:

$$\begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 93})$$

Dado que la tensión de fase $v_{as}(t)$ está alineada con el eje α , y las tensiones del estator describen una trayectoria circular en el plano $\alpha\beta$ (en condiciones ideales de operación), el ángulo instantáneo de este vector se puede interpretar como la posición del eje de referencia sincrónico. Por lo tanto, se define:

$$\theta_{ev}(t) = \text{atan2}(v_\beta(t), v_\alpha(t)) \quad (\text{Ec. 94})$$

Donde la función `atan2` devuelve el ángulo entre el vector tensión y el eje α , en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Debido a esto, es necesario corregir las discontinuidades de fase generadas por los saltos de $+\pi$ a $-\pi$ mediante una función que asegure la continuidad temporal del ángulo.

Los resultados de la simulación, teniendo estos cuidados, se muestran en la Fig. 35.

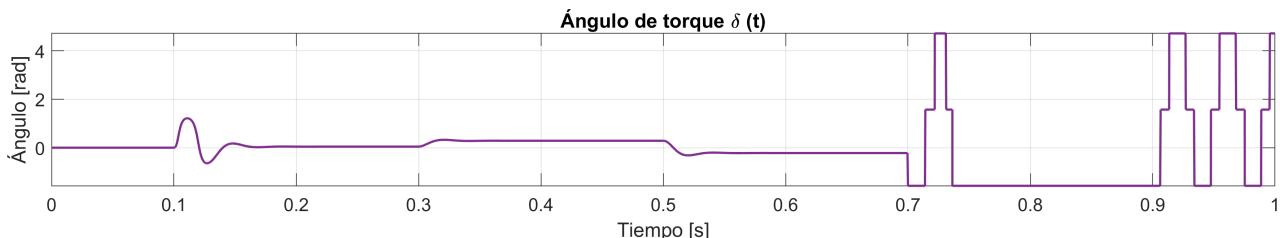


Figura 35: Evolución del ángulo de torque $\delta(t)$.

A partir del instante de tiempo $t = 0,7\text{ s}$, se observa un comportamiento extraño en $\delta(t)$, causado por discontinuidades en la señal $\theta_{ev}(t)$. Dichas discontinuidades ocurren cuando las componentes $v_\alpha(t)$ y $v_\beta(t)$ se vuelven muy pequeñas (cercanas a cero), lo que genera una indeterminación en el cálculo del ángulo (se tiene un cociente $\approx 0/0$ dentro de la función `atan2`).

A pesar de este problema, es posible deducir la forma general que adopta el ángulo de torque $\delta(t)$ en las regiones afectadas, recordando que $T_m(t) \propto \sin(\delta(t))$, y, que para ángulos pequeños, lo anterior puede aproximarse como $T_m(t) \propto \delta(t)$. Nótense las similitudes entre las gráficas de las figuras 20 y 35.

4.7.2. Velocidad y corriente final de establecimiento

En este apartado se determinan parámetros característicos de la respuesta dinámica del sistema ante las variaciones de los pulsos de entrada aplicados. Se consideran: valor de establecimiento, tiempo de crecimiento, tiempo de establecimiento y sobrepico de los transitorios que se producen en las curvas de velocidad angular $\omega_m(t)$ y corriente $i_{qs}^r(t)$.

Cabe recordar qué representan dichos términos:

- **Tiempo de crecimiento:** tiempo que tarda la respuesta del sistema en pasar del 10 % al 90 % de su valor de establecimiento o valor final. Da una idea de la velocidad inicial de la respuesta.
- **Tiempo de establecimiento:** tiempo requerido para que la respuesta del sistema alcance y permanezca dentro de un margen del $\pm 1\%$ alrededor de su valor final. Permite tener una noción de qué tan rápido se estabiliza el sistema.
- **Sobrepico:** valor máximo porcentual que excede la respuesta del sistema respecto a su valor final.

Los datos se obtienen a partir de los resultados de las simulaciones, utilizando la función `stepinfo` de MATLAB para obtener valores más precisos que aquellos que se podrían obtener mediante un análisis visual de las gráficas.

Tabla 1: Características de los transitorios de la curva $\omega_m(t)$

Tipo de pulso aplicado	v_{qs}^{r*}	T_l	T_l	v_{qs}^{r*}	T_l
Tiempo de variación [s]	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Valor de establecimiento [rad/s]	405,86	391,51	420,11	14,379	-0,0041
Tiempo de crecimiento [ms]	9,0900	5,0211	5,0035	9,1451	5,0516
Tiempo de establecimiento [ms]	130,25	338,47	538,43	730,28	938,16
Sobrepico [%]	18,626	34,832	34,973	18,183	34,159

Tabla 2: Características de los transitorios de la curva $i_{qs}^r(t)$

Tipo de pulso aplicado	v_{qs}^{r*}	T_l	T_l	v_{qs}^{r*}	T_l
Tiempo de variación [s]	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Valor de establecimiento [A]	0,1283	0,8463	-0,5991	-0,7249	0,0001
Tiempo de crecimiento [ms]	0,0305	9,0830	9,1325	0,0373	9,2163
Tiempo de establecimiento [ms]	192,28	330,27	530,26	793,80	930,32
Sobrepico [%]	8450,4	18,548	18,436	8572,7	17,964

Se observa que los cambios en el pulso de tensión de estator en el eje “q” tienen una mayor influencia sobre la velocidad angular del motor; mientras que las variaciones del pulso de torque de carga afectan de manera más significativa a la corriente.

Además, recordando las gráficas obtenidas para la evolución de las variables estudiadas, y verificando con los valores obtenidos en las tablas, es posible notar que ambas tienen un comportamiento transitorio similar. Esto es debido a que sus funciones de transferencia poseen los mismos polos (Ec. 75, Ec. 76, Ec. 77, Ec. 78).

4.7.3. Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para distintos valores de $i_{ds}^r(0)$

A continuación se realiza un análisis del comportamiento de la corriente virtual $i_{ds}^r(t)$ para ambos sistemas, cuando sus condiciones iniciales no son nulas (en contraste a lo que se adoptó en la Sección 4.7.1). Se consideran ahora condiciones iniciales de $i_{ds}^r(0) = +0,5$ A (Fig. 36) y $i_{ds}^r(0) = -0,5$ A (Fig. 37).

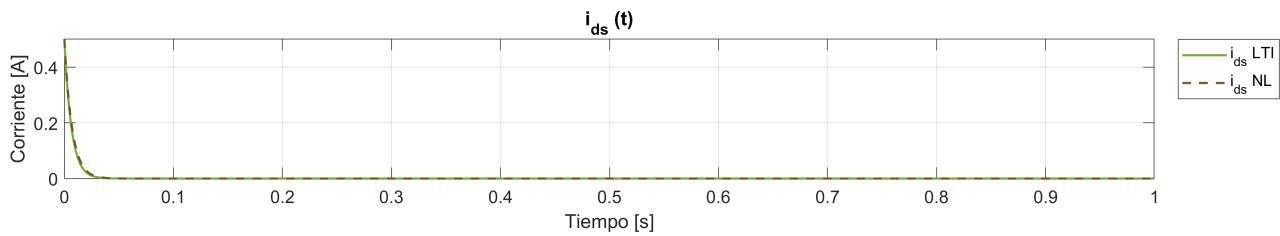


Figura 36: Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para $i_{ds}^r(0) = +0,5$ A.

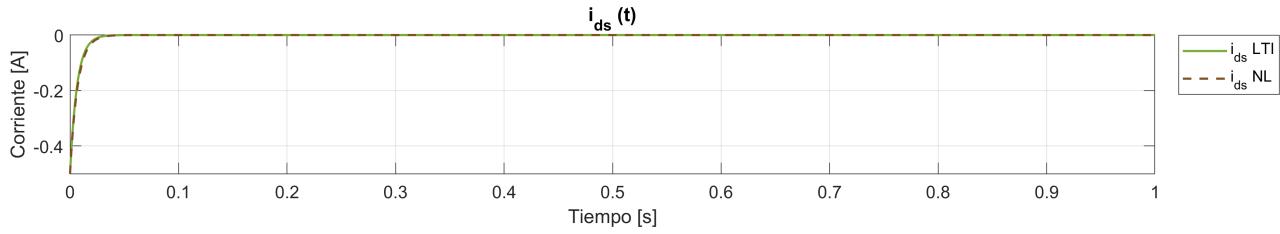


Figura 37: Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para $i_{ds}^r(0) = -0,5$ A.

Las figuras anteriores permiten corroborar, una vez más, que el comportamiento de los dos modelos utilizados (modelo LTI aumentado y modelo NL con ley de realimentación NL) es prácticamente el mismo.

Además, se observa en las simulaciones que la respuesta de las demás variables del sistema no varía con respecto a la obtenida tomando $i_{ds}^r(0) = 0$ A, con lo que se deja en evidencia que el desacople realizado a través de la ley de control complementaria mínima sobre el eje “q” (Ec. 67) es efectivo.

4.7.4. Comportamiento de ambos modelos ante una consigna de tensión en el eje “d” (field forcing/field weakening a lazo abierto)

Se analiza el efecto de agregar una consigna de tensión en el eje “d”, $v_{ds}^{r*}(t)$, sumada a la restricción o ley de control mínima en ese mismo eje, sobre ambos modelos.

En las figuras 38 y 39 se muestran las respuestas de la velocidad angular y del torque electromagnético, respectivamente, ante distintas tensiones aplicadas en el modelo no lineal con realimentación no lineal. La respuesta considerando $v_{ds}^{r*} = 0$ se incluye como referencia. Se comprueba que ante una consigna

de tensión $v_{ds}^{r*} = +1,9695 \text{ V} > 0$, ocurre un reforzamiento de campo (*field forcing*), en donde se puede ver que el torque electromagnético alcanza sobrepicos mayores, mientras que la velocidad angular de establecimiento disminuye. Por otro lado, con $v_{ds}^{r*} = -1,9695 \text{ V} < 0$, se da el efecto de debilitamiento de campo (*field weakening*), donde el torque tiene sobrepicos menores y la velocidad angular de establecimiento aumenta con respecto a la referencia.

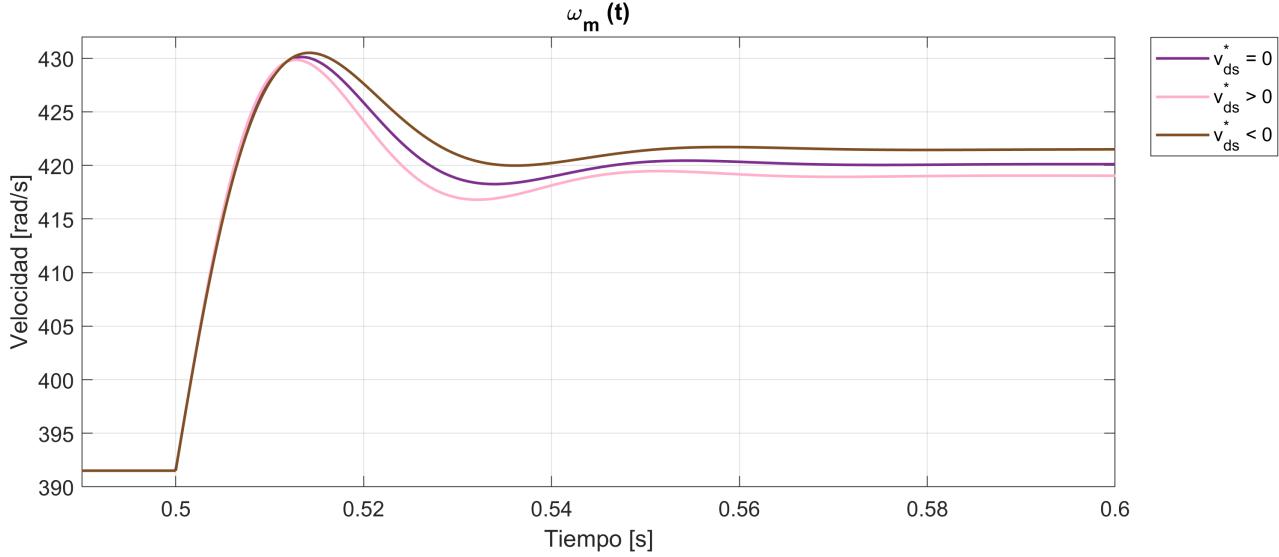


Figura 38: Comportamiento de $\omega_m(t)$ debido a la variación de v_{ds}^{r*} , Modelo NL con realimentación NL.

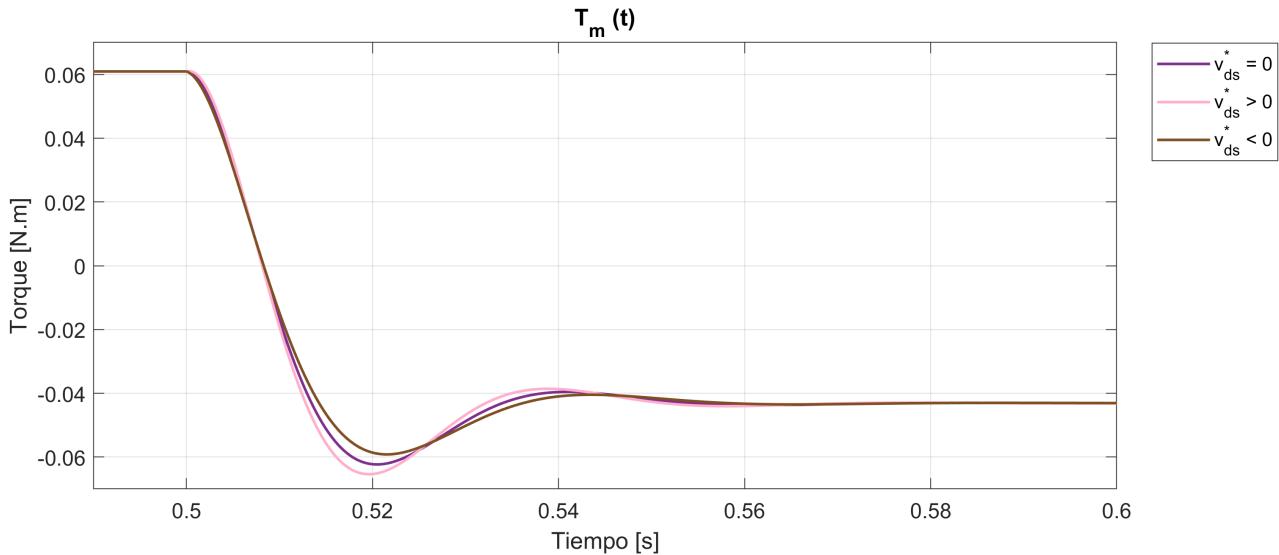


Figura 39: Comportamiento de $T_m(t)$ debido a la variación de v_{ds}^{r*} , Modelo NL con realimentación NL.

En el modelo LTI no es posible aplicar las técnicas de reforzamiento y debilitamiento de campo, debido a que no se tiene en cuenta la influencia de la corriente $i_{ds}^r(t)$ sobre el torque electromagnético, y por lo tanto, tampoco sobre la velocidad angular de la máquina.

5. Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente

En esta sección se desarrolla una estrategia de control vectorial en cascada mediante dos lazos de control: uno interno y otro externo. El primero se encarga de controlar las variables de alta velocidad, en este caso, la corriente y el torque, mientras que el último se encarga de las variables más lentas, la velocidad y la posición.

5.1. Modulador de torque equivalente

5.1.1. Compensación de retroalimentaciones físicas naturales del sistema

Se busca desacoplar las retroalimentaciones físicas naturales del sistema para lograr un lazo interno rápido y libre de no-linealidades. Para ello, se parte del modelo NL del subsistema electromagnético, cuyas ecuaciones (Ec. 31, Ec. 32, Ec. 33) se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} &= \frac{1}{L_q} \left[-R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{qs}^r(t) - (\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t)) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t) \right] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= \frac{1}{L_d} \left[-R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{ds}^r(t) \right] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} &= \frac{1}{L_{ls}} \left[-R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t) \right]\end{aligned}$$

El desacoplamiento se realiza alimentando el subsistema con tensiones que cancelan el efecto de las retroalimentaciones naturales. De este modo, la dinámica resultante establecerá una relación directa entre las entradas de referencia y las derivadas de las corrientes. Se propone lo siguiente:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s(T_s^\circ(t)) i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) [\lambda_m' + L_d i_{ds}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s(T_s^\circ(t)) i_{ds}^r(t) - L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}(t) = v_{0s}^*(t) + R_s(T_s^\circ(t)) i_{0s}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 95})$$

Si se sustituye (Ec. 95) en las ecuaciones del subsistema electromagnético, se obtiene:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ v_{0s}^*(t) = L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec. 96})$$

Así, a partir de las consignas de tensión virtuales es posible acceder directamente a la manipulación de las corrientes virtuales, con lo que luego se podrá controlar el torque electromagnético de la máquina.

El diagrama de bloques en donde se incorpora el desacoplamiento de las retroalimentaciones físicas naturales se presenta en la Fig. 40.

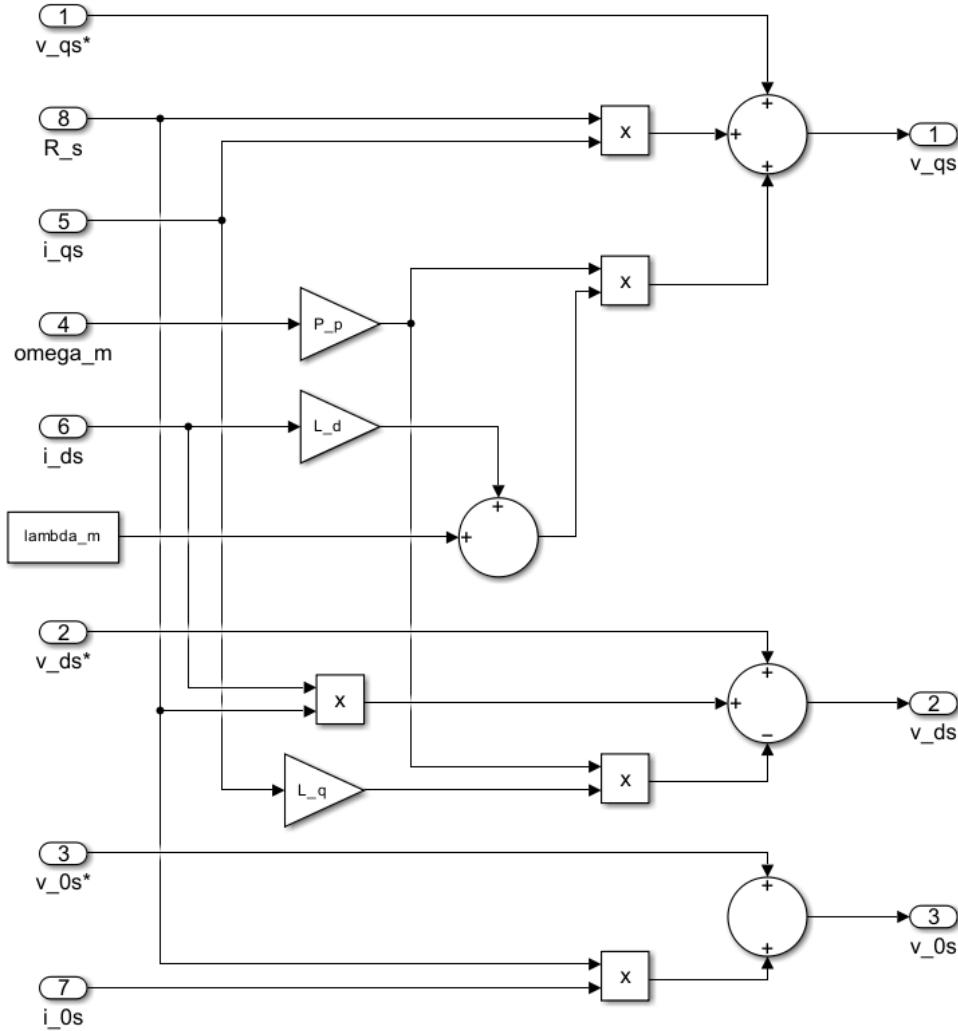


Figura 40: Desacople de retroalimentaciones físicas naturales.

5.1.2. Diseño de lazos de control de corrientes

Es posible lograr un control más preciso del torque utilizando consignas de corriente en lugar de consignas de tensión. Para poder implementar este cambio, es necesario incluir lazos de realimentación de las corrientes reales del sistema, i_{qd0s}^r , de manera que se pueda calcular el error entre ellas y las consignas de corriente dadas, y luego poder modelar el valor de v_{qd0s}^r como proporcional a dicho error. Es decir, para cada eje se tiene:

$$\begin{cases} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^r(t) = R_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \approx v_{ds}^r(t) = R_d \cdot (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \approx v_{0s}^r(t) = R_0 \cdot (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 97})$$

Donde R_q , R_d y R_0 representan las ganancias de control proporcional. Pueden entenderse como resistencias virtuales cuyos valores determinarán la ubicación de los polos de los lazos de corriente.

Funciones de transferencia

Para calcular los valores de estas ganancias y analizar el comportamiento de los lazos, es necesario encontrar sus funciones de transferencia. Si se aplica la transformada de Laplace a Ec. 97, considerando condiciones iniciales nulas, se tiene:

$$\begin{cases} L_q \cdot s \cdot I_{qs}(s) \approx R_q \cdot (I_{qs}^*(s) - I_{qs}^r(s)) \\ L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) \approx R_d \cdot (I_{ds}^*(s) - I_{ds}^r(s)) \\ L_0 \cdot s \cdot I_{0s}(s) \approx R_0 \cdot (I_{0s}^*(s) - I_{0s}(s)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 98})$$

Reordenando las expresiones anteriores, puede llegarse a las funciones de transferencia para cada eje, considerando como entradas a las consignas de corriente, y como salida a las corrientes medidas:

$$\begin{cases} G_{iqs}(s) = \frac{I_{qs}(s)}{I_{qs}^*(s)} = \frac{R_q}{\frac{L_q}{R_q} \cdot s + 1} \\ G_{ids}(s) = \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^*(s)} = \frac{R_d}{\frac{L_d}{R_d} \cdot s + 1} \\ G_{i0s}(s) = \frac{I_{0s}(s)}{I_{0s}^*(s)} = \frac{R_0}{\frac{L_{ls}}{R_0} \cdot s + 1} \end{cases} \quad (\text{Ec. 99})$$

Se observa que las funciones de transferencia obtenidas son de primer orden, con un polo real negativo, y que no presentan ceros. La forma de estas expresiones se asemeja a aquella de un filtro pasa-bajos de primer orden, en donde los polos $-\frac{R_q}{L_q}$, $-\frac{R_d}{L_d}$, $-\frac{R_0}{L_{ls}}$ representan la inversa negativa de la constante de tiempo del filtro.

Ubicación de polos

En todos los ejes se desea ubicar el polo en $p = -5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, por lo que las ganancias proporcionales a incluir toman los valores:

$$\begin{cases} R_q = 5000 \cdot L_q = 29 \Omega \\ R_d = 5000 \cdot L_d = 33 \Omega \\ R_0 = 5000 \cdot L_{ls} = 4 \Omega \end{cases} \quad (\text{Ec. 100})$$

Lo anterior implica un ancho de banda de aproximadamente 796 Hz, que asegura una respuesta rápida ante cambios de consigna y perturbaciones.

Comparación con el Modelo NL con realimentación NL

En el modelo no lineal con realimentación no lineal desarrollado en la Sección 4.3.3, se impuso $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ para desacoplar los ejes directo y en cuadratura. Aunque esto permite linealizar dicha parte del modelo, también limita la velocidad de la respuesta del sistema y descarta la posibilidad de emplear las estrategias de debilitamiento y reforzamiento de campo.

En cambio, con el control proporcional de las corrientes, es posible ubicar los polos donde se deseé, regulando así la velocidad de respuesta. Además, al eliminar la restricción sobre la corriente $i_{ds}^r(t)$, se vuelve posible aplicar control orientado al campo.

Implementación

La implementación de los lazos en diagrama de bloques se presenta en la Fig. 41.

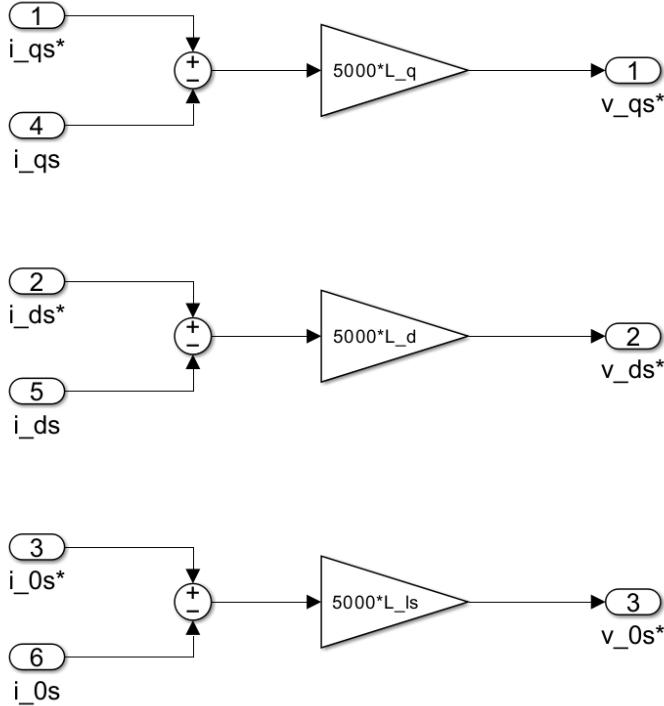


Figura 41: Lazos de control de corrientes.

5.1.3. Incorporación de consigna de torque. Compensación de la fricción viscosa equivalente y del torque de carga por gravedad

Como paso final en el diseño del modulador de torque, se añade una capa que permite ingresar la consigna de torque deseada y transformarla en una corriente de referencia que alimenta a los lazos de control de corriente desarrollados anteriormente.

Para hacerlo, a partir de la ecuación del torque electromagnético (Ec. 10), se escribe:

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \left[\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \right] \cdot i_{qs}^{r*}(t)$$

Sin embargo, para que el sistema pueda seguir la consigna, es necesario compensar las pérdidas de torque que ocurren debido a la fricción viscosa de la máquina y el torque de carga que se produce por la gravedad. La compensación se implementa de manera análoga a la manera en la que se cancelaron las retroalimentaciones físicas naturales del subsistema electromagnético; es decir, incluyendo en la expresión de la consigna los términos que se desean desacoplar.

De esta forma, la consigna que ingresa al modulador queda:

$$\underbrace{T_m^*(t)}_{\text{Consigna de torque}} = \underbrace{T_m'^*(t)}_{\text{Torque deseado}} + \underbrace{b_{eq} \cdot \omega_m(t)}_{\text{Compensación de fricción viscosa}} + \underbrace{\frac{1}{r} \cdot g \cdot k_l \cdot \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)}_{\text{Compensación de torque gravitacional}}$$

Reemplazando la nueva consigna en la expresión del torque electromagnético, se llega a:

$$T_m'^*(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} \cdot g \cdot k_l \cdot \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t)$$

De donde se puede despejar $i_{qs}^{r*}(t)$:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m'^*(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} \cdot g \cdot k_l \cdot \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)]} \quad (\text{Ec. 101})$$

La implementación en diagrama de bloques de este desarrollo se muestra en la Fig. 42.

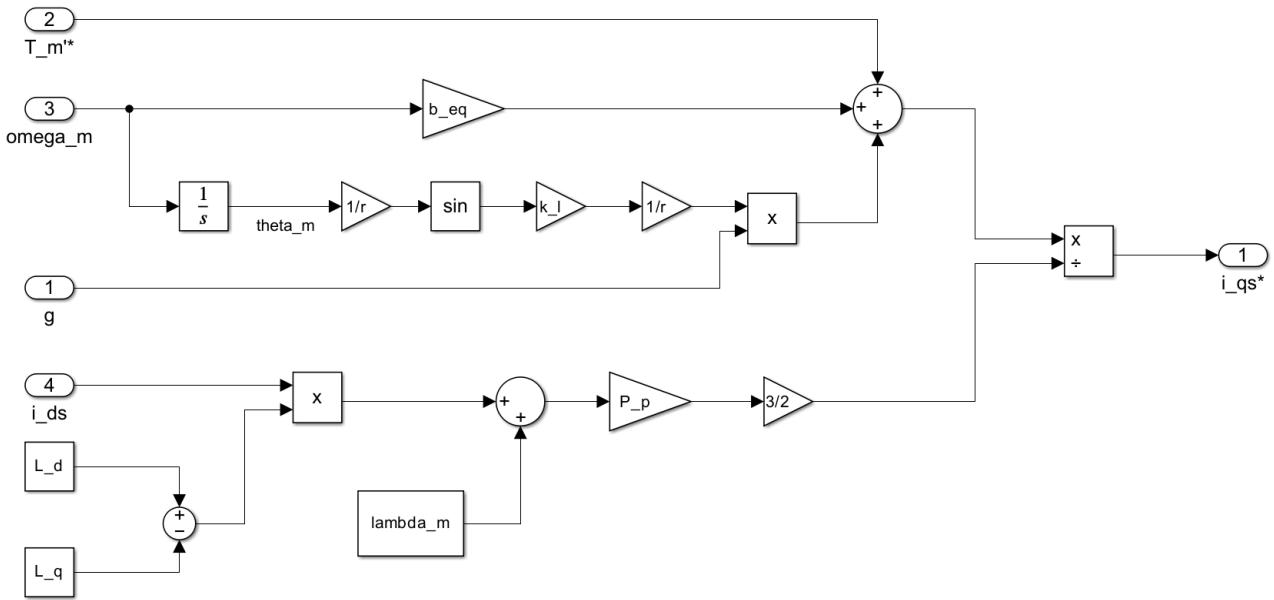


Figura 42: Incorporación de consigna de torque y compensaciones.

Modulador de torque completo

Finalmente, combinando las 3 capas que se desarrollaron en esta sección, se construye el modulador de torque equivalente completo. En la Fig. 43 puede verse cómo se relacionan los bloques compactos de cada etapa, que más adelante se incorporan a la planta.

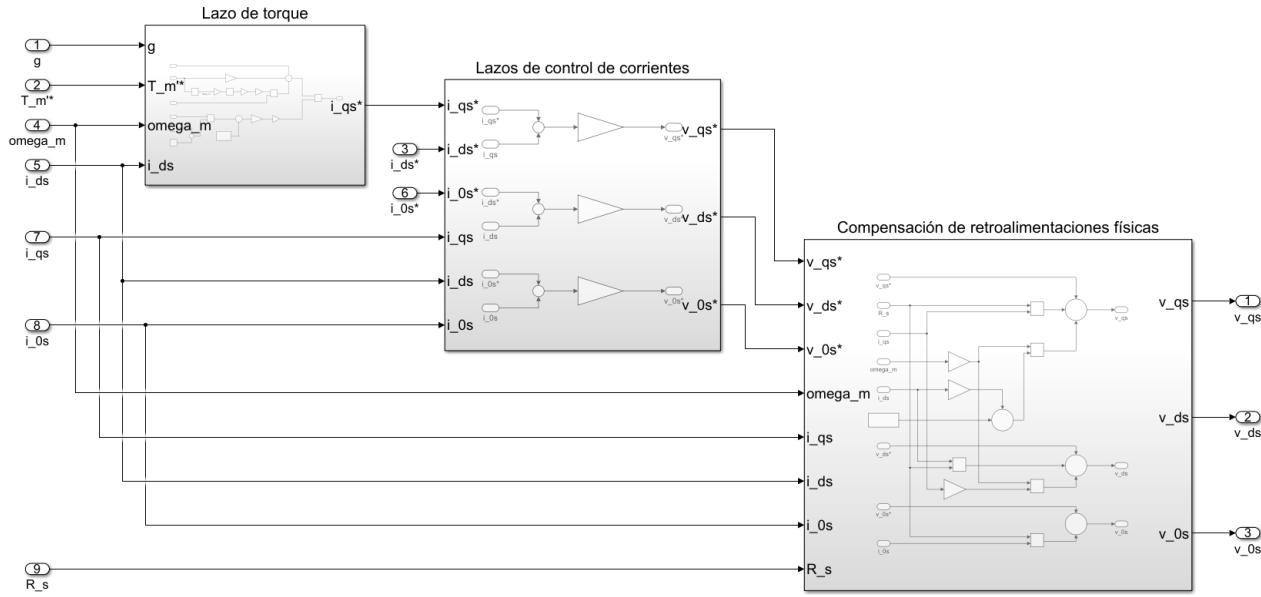


Figura 43: Modulador de torque equivalente.

5.2. Controlador externo de movimientos: posición/velocidad

El objetivo del controlador propuesto en este trabajo es permitir el control de movimiento de la articulación del brazo robótico del sistema en estudio. Hasta el momento, el lazo interno diseñado permite únicamente el seguimiento de una consigna de torque, lo cual puede resultar útil para ciertas aplicaciones, pero no es una forma directa ni intuitiva de modificar la posición o velocidad del brazo.

Por esta razón, en esta sección se plantea el diseño de un controlador externo de movimiento, capaz de generar la consigna de torque que debe ingresar al modulador a partir de referencias de posición o velocidad angular. El diseño se basa en el método de sintonía serie con acción integral (PID), lo que permite mejorar la dinámica del sistema y corregir los errores de estado estacionario producidos por cargas de perturbación.

Como entrada del controlador externo, se utiliza únicamente la velocidad angular del motor (variable de estado realimentada y consigna deseada). A partir de esta variable es posible obtener la posición angular mediante integración. Si se optara por utilizar la posición angular como entrada, sería necesario derivar dicha señal para estimar la velocidad, lo cual no es recomendable en sistemas reales, debido a que las señales medidas suelen estar afectadas por ruido, y la derivación tiende a amplificarlo, deteriorando así el desempeño del sistema de control.

La salida del controlador es la consigna de torque T'_m^* , que queda definida en el dominio de Laplace como:

$$T'_m^*(s) = b_a \cdot E_\omega(s) + K_{sa} \cdot E_\theta(s) + K_{sia} \cdot \frac{E_\theta(s)}{s} \quad (\text{Ec. 102})$$

Donde $E_\theta(s)$ y $E_\omega(s)$ representan los errores entre las consignas y los valores medidos de posición y velocidad angular, respectivamente:

$$E_\theta(s) = \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s) \quad (\text{Ec. 103})$$

$$E_\omega(s) = E_\theta(s) \cdot s \quad (\text{Ec. 104})$$

Y las ganancias del controlador son:

- b_a : coeficiente de fricción viscosa rotacional equivalente activa, medida en $\left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}} \right]$.
- K_{sa} : coeficiente de rigidez rotacional equivalente activa, con unidades $\left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$.
- K_{sia} : coeficiente de rigidez integral rotacional equivalente activa, en $\left[\frac{\text{Nm}}{\text{rads}} \right]$.

Representado en forma de diagrama de bloques, el controlador PID queda como se muestra en la Fig. 44.

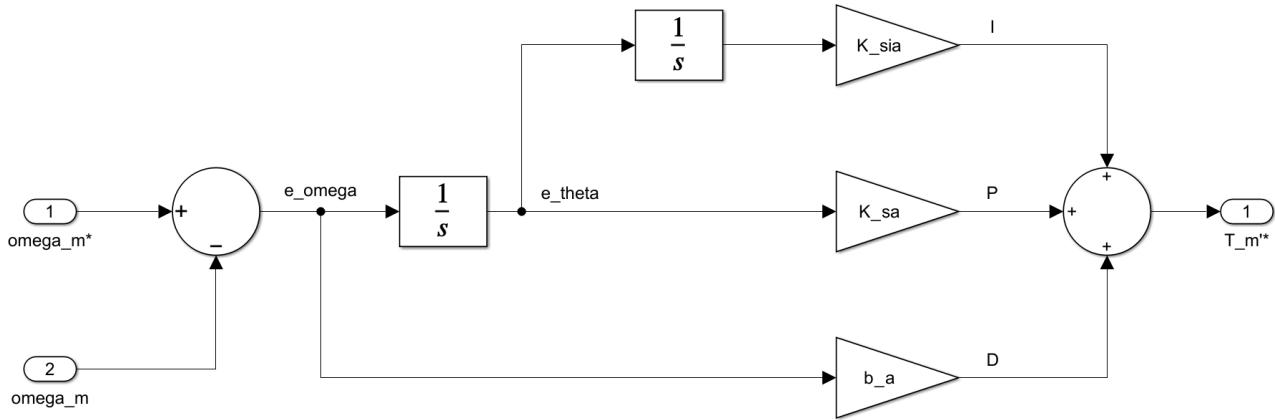


Figura 44: Diagrama de bloques del controlador de movimiento PID.

A continuación, se derivan las funciones de transferencia que relacionan la posición angular medida con la consigna de posición deseada y con el torque de perturbación, respectivamente, para analizar la dinámica del sistema una vez implementado el PID.

Se parte de la expresión que describe al subsistema mecánico (Ec. 30), teniendo en cuenta la compensación del torque por fricción viscosa y del torque recuperador gravitacional que se realizó en la sección previa:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[T'_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_{ld}(t) \right] \quad (\text{Ec. 105})$$

Reordenando convenientemente y aplicando la transformada de Laplace, se llega a:

$$J_{eq} \cdot s \cdot \Omega_m(s) = T'_m(s) - \frac{1}{r} \cdot T_{ld}(s) \quad (\text{Ec. 106})$$

Recordando que $\Omega_m(s) = s \cdot \Theta_m(s)$:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m(s) = T'_m(s) - \frac{1}{r} \cdot T_{ld}(s) \quad (\text{Ec. 107})$$

Ahora, si en la expresión anterior se sustituye la expresión del torque a la salida del controlador (Ec. 102) y se expanden los errores con las ecuaciones Ec. 103 y Ec. 104, se obtiene:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m(s) = b_a \cdot s \cdot [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] + K_{sa} \cdot [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] + K_{sia} \cdot \frac{\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)}{s} - \frac{1}{r} \cdot T_{ld}(s) \quad (\text{Ec. 108})$$

Agrupando términos que contienen $\Theta_m(s)$ en el lado izquierdo de la expresión, y los términos con $\Theta_m^*(s)$ y $T_{ld}(s)$ en el derecho:

$$[J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}] \cdot \Theta_m(s) = [b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}] \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{T_{ld}(s)}{r} \cdot s \quad (\text{Ec. 109})$$

Si se despeja $\Theta_m(s)$, se llega a:

$$\Theta_m(s) = \frac{b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \cdot \frac{T_{ld}(s)}{r} \quad (\text{Ec. 110})$$

En la Ec. 110 es posible identificar las funciones de transferencia buscadas. Para la entrada de consigna de posición, $\Theta_m^*(s)$, se tiene:

$$G_{\Theta_m^*}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)} = \frac{b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \quad (\text{Ec. 111})$$

Dicha expresión representa cómo la posición del motor responde a la consigna ingresada.

Y para la entrada de perturbación de torque, $T_{ld}(s)$, la función de transferencia resulta:

$$G_{T_{ld}}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\frac{T_{ld}(s)}{r}} = \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \quad (\text{Ec. 112})$$

Esta ecuación da una idea de cómo influye el torque de carga sobre la posición angular del motor.

Resulta de interés analizar el comportamiento de la acción integral del controlador en régimen permanente, suponiendo una entrada y una perturbación del tipo escalón unitario. Si se aplica el Teorema del Valor Final a Ec. 111 y Ec. 112, se concluye que:

- Cuando $K_{sia} = 0$: $\lim_{s \rightarrow 0} \{G_{\Theta_m^*}(s)\} = 1$ y $\lim_{s \rightarrow 0} \{G_{T_{ld}}(s)\} = -\frac{1}{r \cdot K_{sa}}$, lo que implica un buen seguimiento de la consigna, pero sin rechazo a las perturbaciones.
- Cuando $K_{sia} \neq 0$: $\lim_{s \rightarrow 0} \{G_{\Theta_m^*}(s)\} = 1$ y $\lim_{s \rightarrow 0} \{G_{T_{ld}}(s)\} = 0$, lo que implica un buen seguimiento de la consigna con rechazo total a las perturbaciones.

Queda en evidencia que el agregado de la acción integral permite corregir el error en estado estacionario que surge a causa de la perturbación del torque de carga.

Lo que resta es encontrar los valores que deben adoptar las ganancias del controlador. Se desea obtener $\zeta = 0,75$ y $\omega_{pos} = 800 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

El polinomio característico del controlador es (denominador de las funciones de transferencia):

$$p(s) = J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia} \quad (\text{Ec. 113})$$

Que, normalizado, queda:

$$p(s) = s^3 + \frac{b_a}{J_{eq}} \cdot s^2 + \frac{K_{sa}}{J_{eq}} \cdot s + \frac{K_{sia}}{J_{eq}} \quad (\text{Ec. 114})$$

El valor de J_{eq} , contemplando valores nominales de J_l y b_l , es de $1,9785 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

Y el polinomio deseado resulta:

$$p_{\text{deseado}}(s) = s^3 + (2 \cdot \zeta + 1) \cdot \omega_{\text{pos}} \cdot s^2 + (2 \cdot \zeta + 1) \cdot \omega_{\text{pos}}^2 \cdot s + \omega_{\text{pos}}^3 \quad (\text{Ec. 115})$$

Igualando término a término, las ganancias del controlador PID quedan como sigue:

$$\begin{cases} b_a = J_{eq} \cdot (2 \cdot \zeta + 1) \cdot \omega_{\text{pos}} = 0,039 \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}} \\ K_{sa} = J_{eq} \cdot (2 \cdot \zeta + 1) \cdot \omega_{\text{pos}}^2 = 31,656 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\ K_{sia} = J_{eq} \cdot \omega_{\text{pos}}^3 = 10\,129,778 \frac{\text{Nm}}{\text{rads}} \end{cases} \quad (\text{Ec. 116})$$

Conocidos estos valores, se procede a calcular los polos del controlador a partir de Ec. 114 igualada a cero. Se consideran los casos de valor nominal (que coincide con el mínimo) y valor máximo de J_{eq} .

Tabla 3: Polos del controlador de movimiento según el valor de J_{eq}

Parámetros	J_{eq} [kg m ²]	Polo 1 [rad/s]	Polo 2 [rad/s]	Polo 3 [rad/s]
Mínimo (Nominal)	$1,978 \times 10^{-5}$	$-800 + 0i$	$-600 + 529,15i$	$-600 - 529,15i$
Máximo	$4,5826 \times 10^{-5}$	$-438,18 + 0i$	$-212,55 + 677,64i$	$-212,55 - 677,64i$

A modo de comparación, en la Fig. 45 se muestra dónde quedan ubicados los polos calculados con respecto a los de la planta original (lazo abierto) y a los polos del lazo de corriente.

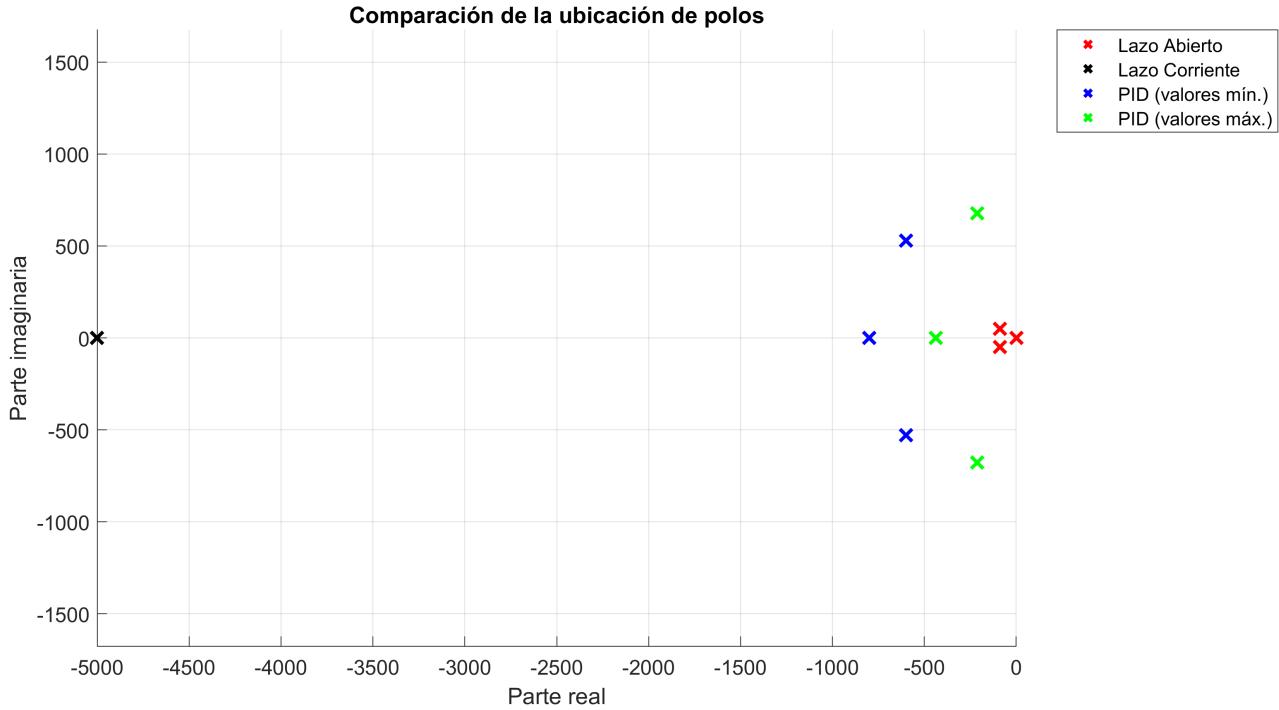


Figura 45: Comparación de la ubicación de polos - lazo abierto vs. lazo de corriente vs. controlador de movimiento.

Es posible apreciar que el lazo de corriente (interno) es significativamente más rápido que el lazo externo, lo que permite operar bajo la suposición de que el lazo interno se estabilizará de manera casi instantánea.

5.2.1. Incorporación de la entrada de referencia o set-point de posición

Resulta de interés proporcionar al sistema una referencia de posición articular en lugar de una consigna de velocidad. Para ello, se incorpora un modelo cinemático que permite manipular directamente dicha variable:

$$q^*(t) = \theta_l^*(t) = \frac{1}{r} \cdot \theta_m^*(t) \quad (\text{Ec. 117})$$

Derivando esta consigna de posición, se obtiene una referencia de velocidad que puede ser utilizada como entrada para el controlador PID. Si bien anteriormente se mencionó que el uso de derivadores no es recomendable debido a la amplificación del ruido presente en señales medidas, en este caso la situación es diferente. Aquí se trabaja con una señal de referencia generada internamente, no con una variable sensada y realimentada desde el sistema físico. Por lo tanto, no está afectada por el ruido electromagnético que pueden introducir cables largos, interferencias o errores en sensores, lo que permite derivarla sin comprometer la robustez del controlador.

El diagrama de bloques creado para incluir la referencia de posición se muestra en la Fig. 46.

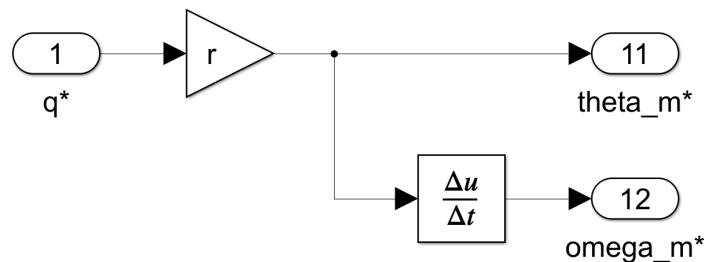


Figura 46: Diagrama de bloques del set-point de posición.

5.2.2. Efecto de estimar la dependencia de $R_s(T_s(t))$ vs. usar un valor nominal constante en el controlador

En la planta física, la resistencia del bobinado del estator, R_s , depende de su temperatura, $T_s(t)$. A partir de la medición de dicha temperatura, el controlador puede actualizar el valor de la resistencia según corresponda durante el funcionamiento de la máquina, para así poder realizar un desacoplamiento más preciso de las no-linealidades naturales y hacer un control adecuado.

Si en vez de hacer esta corrección se considera un valor nominal constante de R_s , se espera notar una degradación en el desempeño del sistema de control a medida que la temperatura se aleja del punto de operación nominal, debido a que la compensación de las variables físicas no sería precisa.

A continuación, se realizan simulaciones para comparar ambos escenarios. Para ello, se le da al sistema una consigna de posición trapezoidal arbitraria a través del bloque de set-point de posición incorporado, y se analiza la respuesta del estado del sistema, añadiendo también el torque electromagnético.

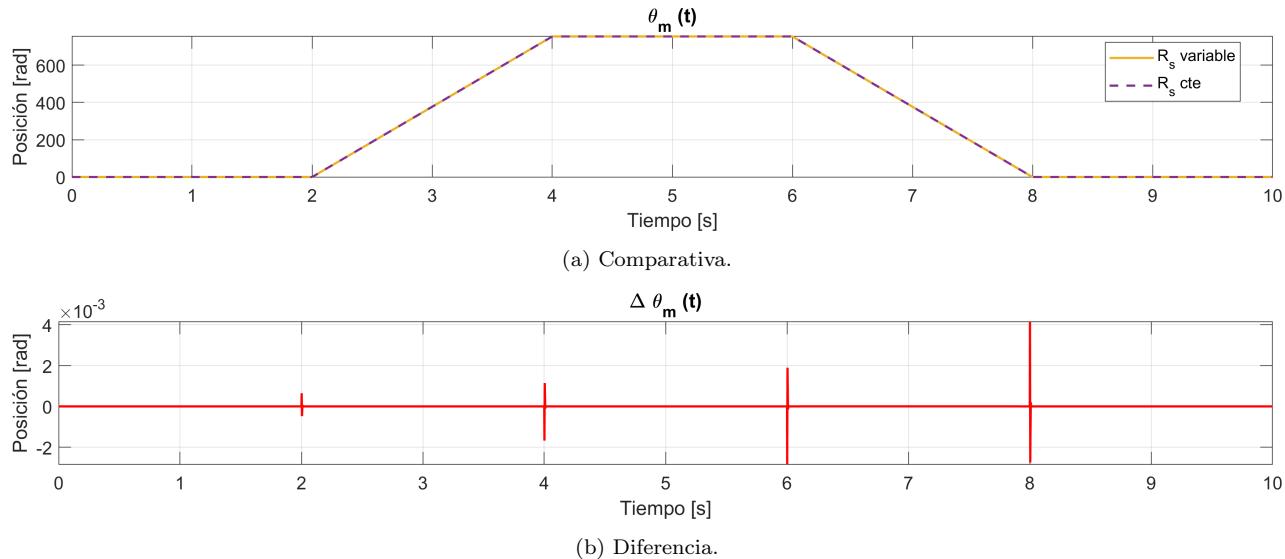


Figura 47: Efecto de considerar o no la variación de R_s en la posición.

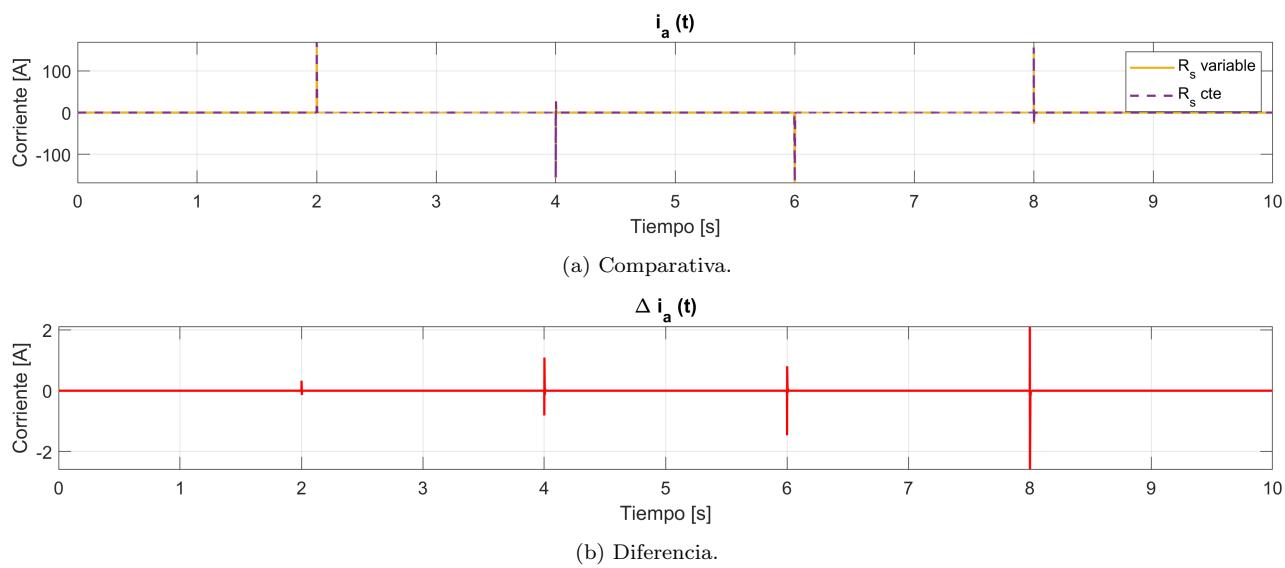
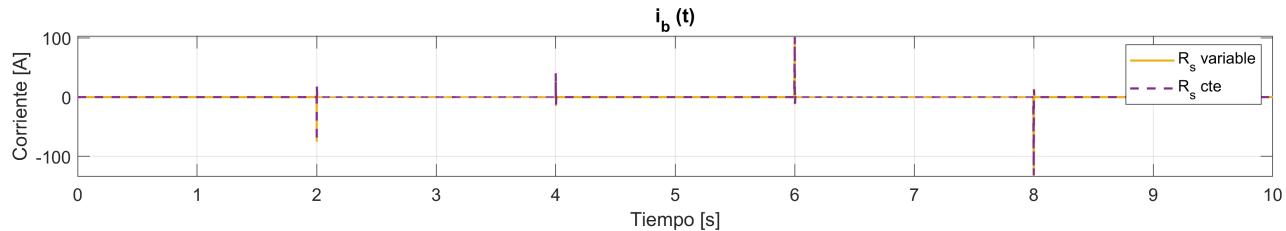
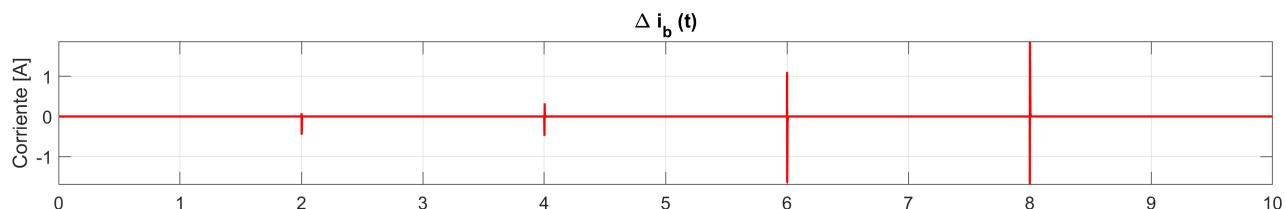


Figura 48: Efecto de considerar o no la variación de R_s en la corriente $i_a(t)$.

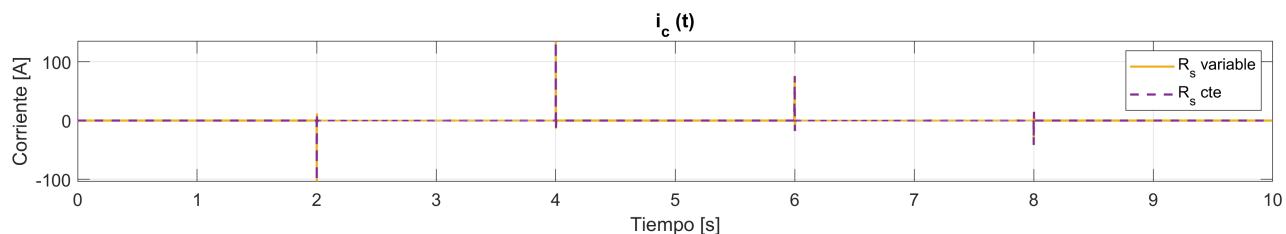


(a) Comparativa.

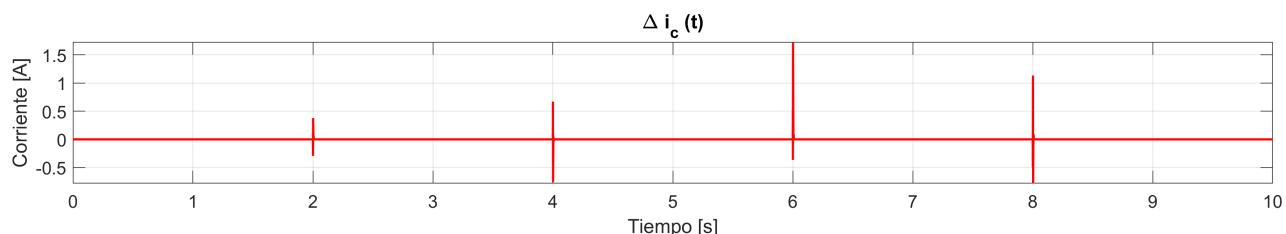


(b) Diferencia.

Figura 49: Efecto de considerar o no la variación de R_s en la corriente $i_b(t)$.



(a) Comparativa.



(b) Diferencia.

Figura 50: Efecto de considerar o no la variación de R_s en la corriente $i_c(t)$.

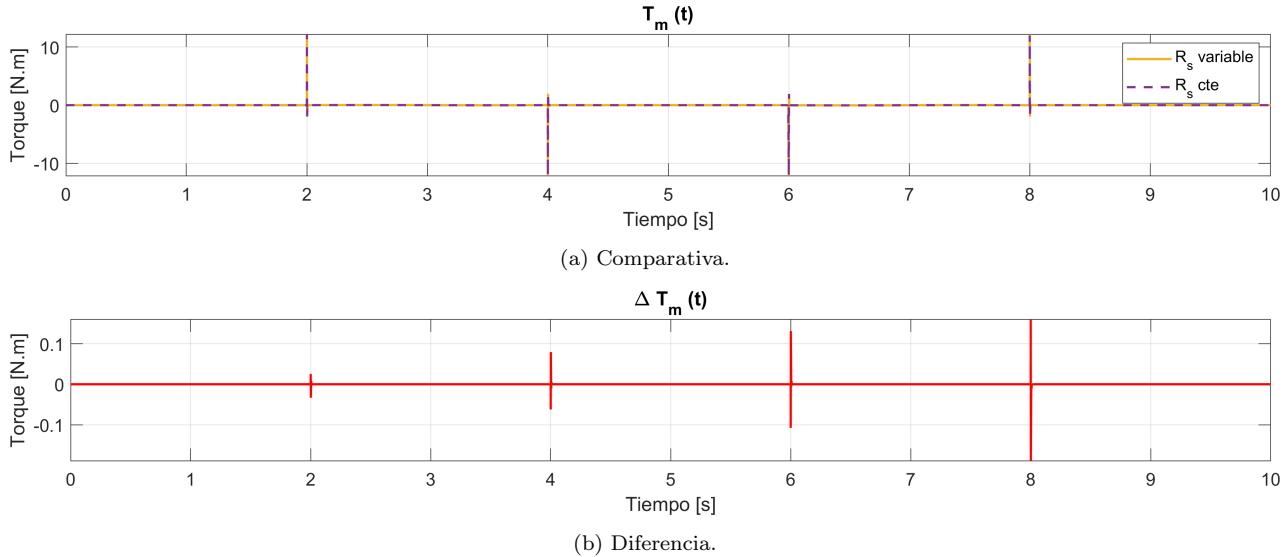


Figura 51: Efecto de considerar o no la variación de R_s en el torque electromagnético.

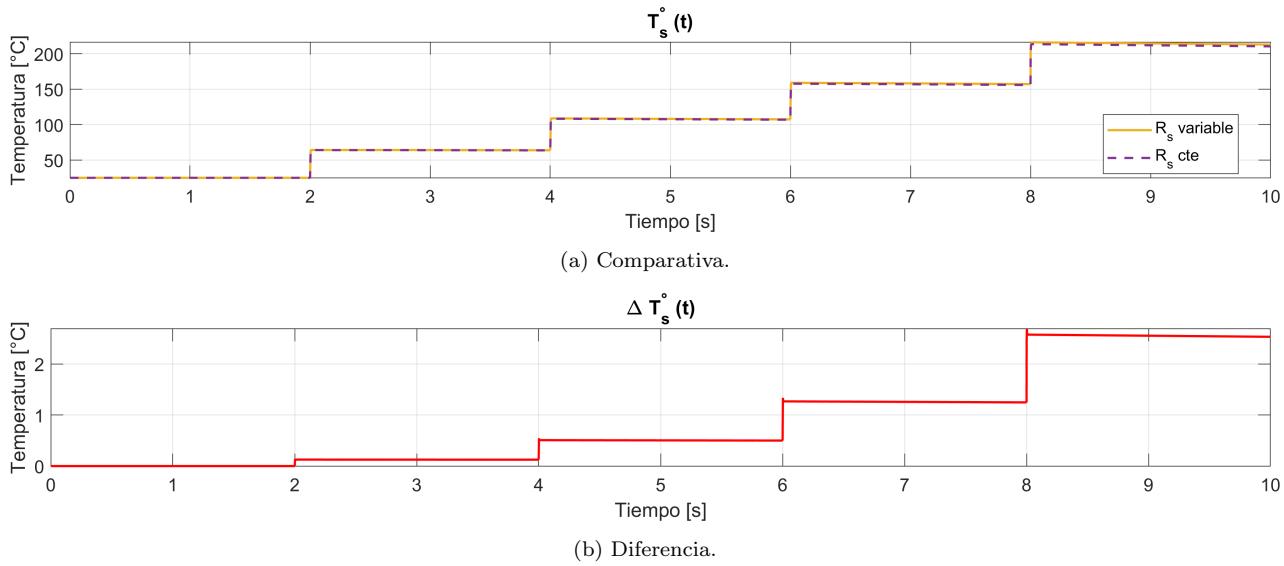


Figura 52: Efecto de considerar o no la variación de R_s en la temperatura del bobinado del estator.

Se deja en evidencia que a medida que aumenta la diferencia en la temperatura del bobinado, el desempeño del modelo que no considera la variación de la resistencia empeora. El seguimiento de la consigna de posición es exitoso en ambos casos, con diferencias de orden pequeño, pero para otras variables, como las corrientes, la discrepancia toma valores considerables, de hasta 2 A en algunos casos, lo cual no es deseable.

Considerando estos resultados, a partir de este punto se mantiene en el controlador un bloque para realizar la estimación de la resistencia adecuadamente mediante la realimentación de la temperatura del bobinado del estator.

5.3. Observador de estado de orden reducido

Anteriormente, se implementó un controlador PID que utiliza como entrada una señal de realimentación de la velocidad del motor para evitar el uso de derivadores en el modelo. Sin embargo, esta estrategia no resulta factible, debido a que no se dispone de un sensor de velocidad, sino únicamente de un encoder

que mide la posición del eje.

Por lo tanto, como el sistema es observable desde la posición, se opta por implementar un observador de orden reducido capaz de estimar la velocidad angular del motor, con el fin de utilizar dicha estimación como señal de realimentación para el controlador externo. Esta solución elimina la necesidad de incorporar sensores adicionales.

El modelo del subsistema mecánico, considerando los desacoplamientos del torque por fricción y por gravedad, es:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(T_m^{*'}(t) - \frac{1}{r} \cdot T_{ld}(t) \right) \end{cases} \quad (\text{Ec. 118})$$

Recordando la expresión matricial de un sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_c \mathbf{u}(t) + B_d \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C \mathbf{x}(t) \end{cases}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Se puede adaptar para representar la Ec. 118, considerando:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = T_m^{*'}(t), \quad \mathbf{d}(t) = T_{ld}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq}r} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

A continuación, se plantea el modelo del observador, que tiene la capacidad de reproducir la salida del sistema a partir de una corrección basada en la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. Dicha corrección se incorpora en la ecuación dinámica mediante un término proporcional al error de salida.

Este modelo queda definido como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A \tilde{\mathbf{x}}(t) + B_c \mathbf{u}(t) + K_e [\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)] \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = C \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}; \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (\text{Ec. 119})$$

Donde $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ denota el vector de estado estimado, $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ la salida estimada, y $K_e = \begin{bmatrix} K_\theta \\ K_\omega \end{bmatrix}$ representa la matriz de ganancias del observador.

En este diseño se asume que las matrices A y B_c utilizadas en el modelo del observador son idénticas a las de la planta (aunque en la realidad suele haber incertidumbre).

Expandiendo la primera ecuación de (Ec. 119), se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= A \tilde{\mathbf{x}}(t) + B_c \mathbf{u}(t) + K_e [C \mathbf{x}(t) - C \tilde{\mathbf{x}}(t)] \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= [A - K_e C] \tilde{\mathbf{x}}(t) + B_c \mathbf{u}(t) + K_e C \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Si ahora se le resta $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$ a $\dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B_c\mathbf{u}(t) + B_d\mathbf{d}(t) - [A - K_eC]\tilde{\mathbf{x}}(t) - B_c\mathbf{u}(t) - K_eC\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= [A - K_eC](\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) + B_d\mathbf{d}(t)\end{aligned}\quad (\text{Ec. 120})$$

Ahora, definiendo el error de estimación como $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$, y considerando un estado inicial nulo para el estado estimado, se tiene:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [A - K_eC]\mathbf{e}(t) + B_d\mathbf{d}(t); \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \quad (\text{Ec. 121})$$

La Ec. 121 representa el modelo de la dinámica del error de estimación. El proceso de diseño del observador implica la selección adecuada de los parámetros K_θ y K_ω mediante la ubicación de sus polos, para asegurar que la dinámica sea estable y que el error inicial que puede surgir por haber considerado $\tilde{\mathbf{x}}_0 \equiv \mathbf{0}$ decaiga rápidamente.

La matriz $A - K_eC$ tiene la forma:

$$A - K_eC = \begin{bmatrix} -K_\theta & 1 \\ -K_\omega & 0 \end{bmatrix}$$

Y el polinomio característico del observador está dado por:

$$p(s) = \det[sI - (A - K_eC)] = s^2 + K_\theta s + K_\omega \quad (\text{Ec. 122})$$

De acuerdo con los requerimientos de la guía, se desean ubicar ambos polos en $p_{\text{obs}} = -3200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. De esta manera, el polinomio deseado queda:

$$p(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 10240000 \quad (\text{Ec. 123})$$

Comparando los términos de Ec. 122 y Ec. 123, se puede deducir que:

$$\begin{cases} K_\theta = 6400 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ K_\omega = 10240000 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

El hecho de haber elegido polos reales e iguales ubicados en $-3200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ asegura una rápida convergencia del observador al valor real sin producir oscilaciones. Los polos están ubicados lo suficientemente alejados de los polos del controlador externo para no interferir con su dinámica. Esto garantiza un tiempo de establecimiento corto del observador.

En forma desagregada, el observador queda:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_m(t) = \tilde{\omega}_m(t) + K_\theta \cdot (\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m'^*(t) + K_\omega \cdot (\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 124})$$

En la Fig. 53 se presenta el diagrama de bloques del observador de estado de orden reducido.

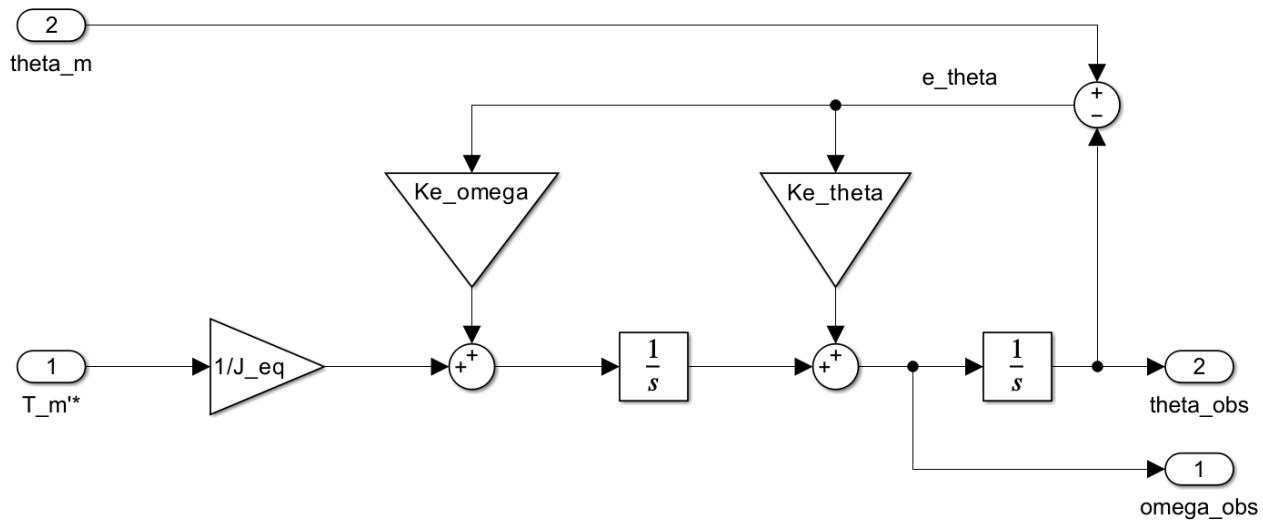


Figura 53: Diagrama de bloques del observador.

5.4. Simulación en el dominio del tiempo

En la Fig. 54 se muestra el diagrama de bloques completo del modelo NL de la planta, al que se le ha incorporado el controlador diseñado hasta el momento, junto con el observador de estado reducido, el modulador ideal de tensión y los sensores ideales.

En este apartado se llevan a cabo simulaciones en tiempo continuo para verificar el desempeño del sistema.

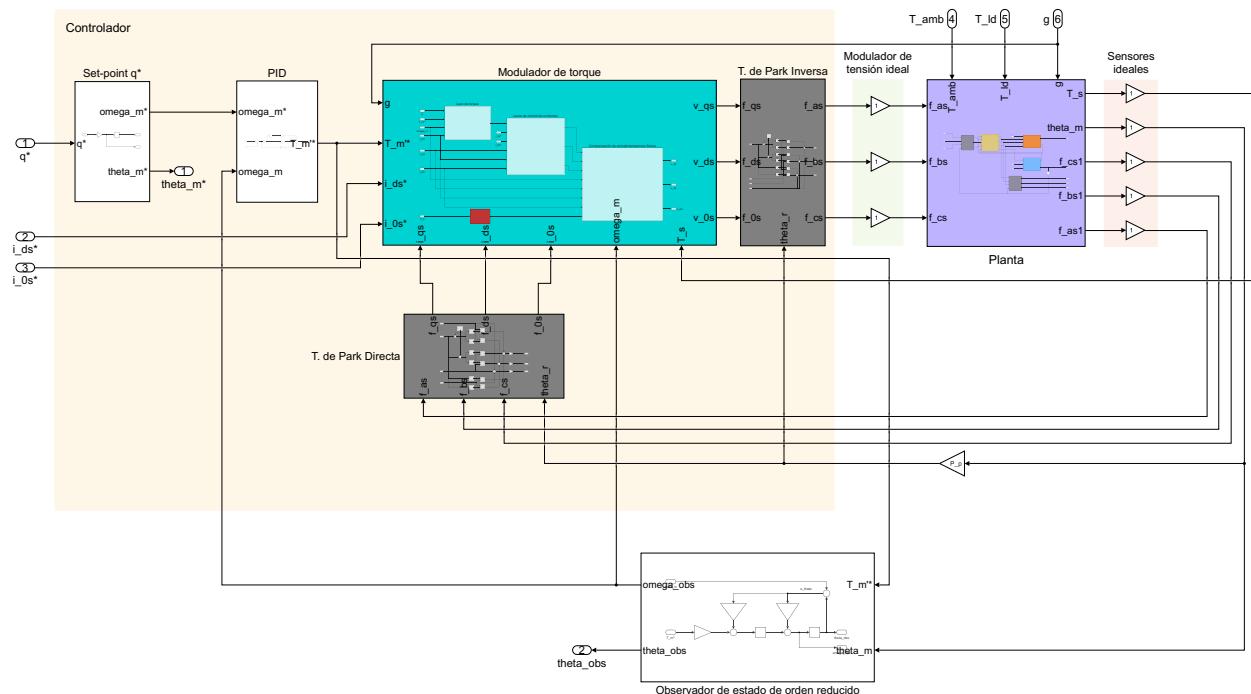


Figura 54: Diagrama de bloques del Modelo Completo NL.

5.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

Con el objetivo de analizar la capacidad del sistema para seguir consignas de movimiento, se define un perfil de posición articular de tipo trapezoidal para el eje del brazo robótico, $q^* = \theta_l^*$, con la forma:

$$\begin{cases} t = 0 \text{ s} \rightarrow \theta_l^*(0) = 0 \text{ rad} \\ t = 5 \text{ s} \rightarrow \theta_l^*(5) = 2\pi \text{ rad} \\ t = 10 \text{ s} \rightarrow \theta_l^*(10) = 2\pi \text{ rad} \\ t = 15 \text{ s} \rightarrow \theta_l^*(15) = 0 \text{ rad} \\ t = 20 \text{ s} \rightarrow \theta_l^*(20) = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

El perfil descrito se muestra en la Fig. 55, junto a su equivalente para el eje mecánico del motor. Cabe recordar que el sistema de referencia del eje de la articulación se relaciona con el eje de la máquina mediante el tren de engranajes que los acopla (implementado mediante el bloque de set-point de posición). La Fig. 56 muestra las consignas de velocidad correspondientes para ambos sistemas.

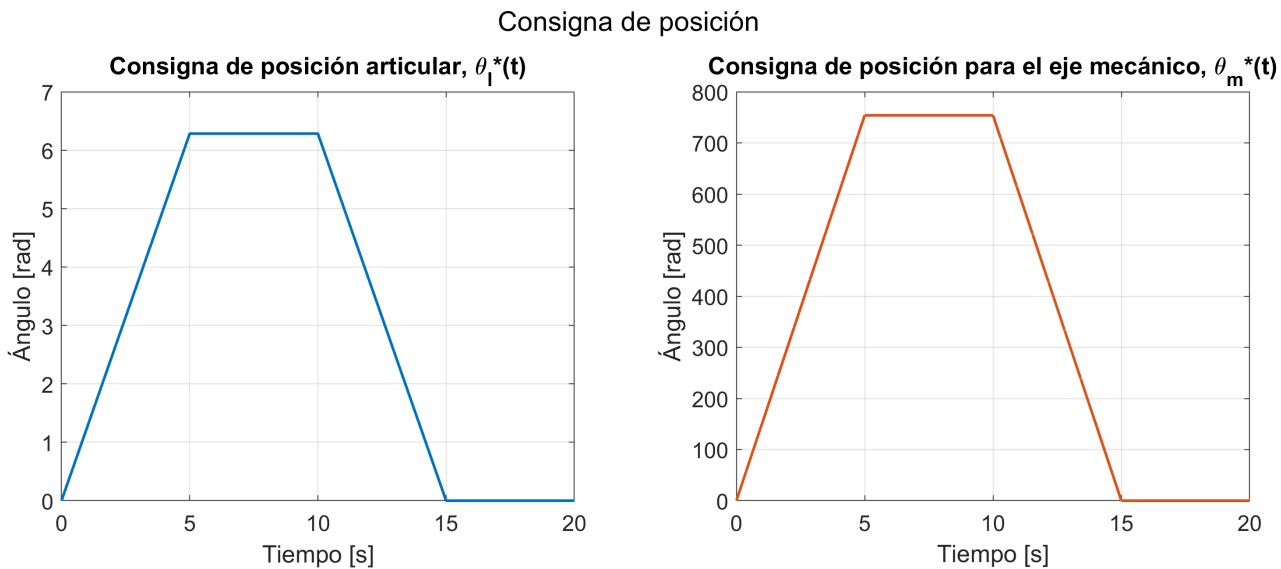


Figura 55: Consigna de posición.

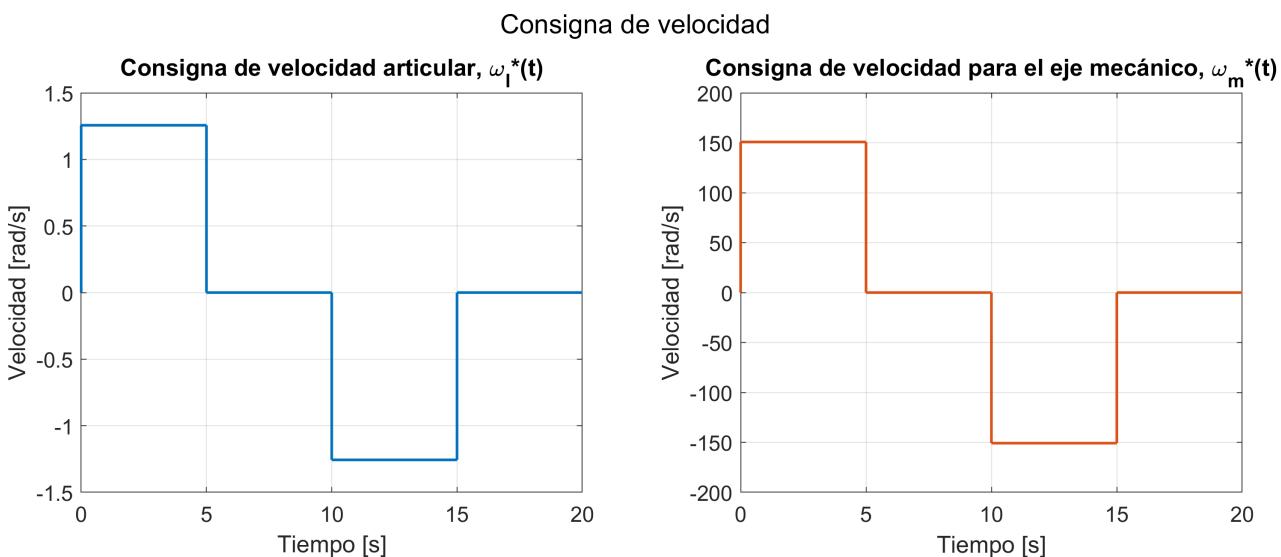


Figura 56: Consigna de velocidad.

Las demás entradas del sistema al momento de simular son: $i_{ds}^*(t) = i_{0s}^*(t) = 0$, $T_{ld}(t) = 0$ y $T_{amb}^* = 25^\circ\text{C}$. Los parámetros de carga se consideran nominales ($m_l = 0 \text{ kg} \rightarrow J_{eq} = J_{eq-nom} = J_{eq-min}$).

Se analizan las variables referidas al eje del motor.

Errores de seguimiento

En la Fig. 57 se muestran la consigna de posición y la posición real del sistema superpuestas. Se hace un acercamiento conveniente en una de las esquinas del perfil trapezoidal, en $t = 5 \text{ s}$, para analizar el transitorio. El detalle del error producido entre ambas variables puede observarse en la Fig. 58.

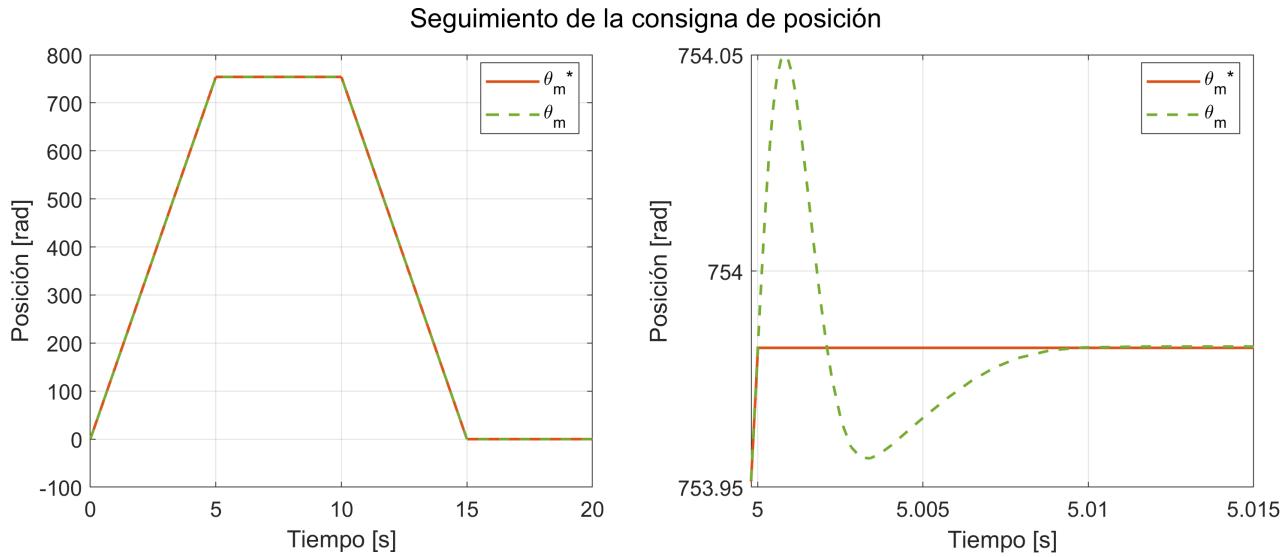


Figura 57: Consigna de posición vs. posición medida.

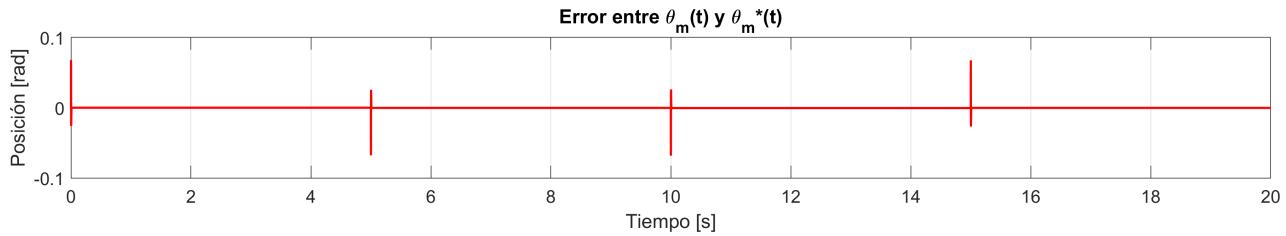


Figura 58: Error de seguimiento en la posición.

Es posible apreciar que en condiciones de carga nula, el sistema es capaz de seguir la consigna satisfactoriamente. Se observan transitorios de corta duración y con sobrepicos mínimos en los instantes en donde se producen cambios de pendiente.

Las figuras 59 y 60 muestran el desempeño del seguimiento de la velocidad.

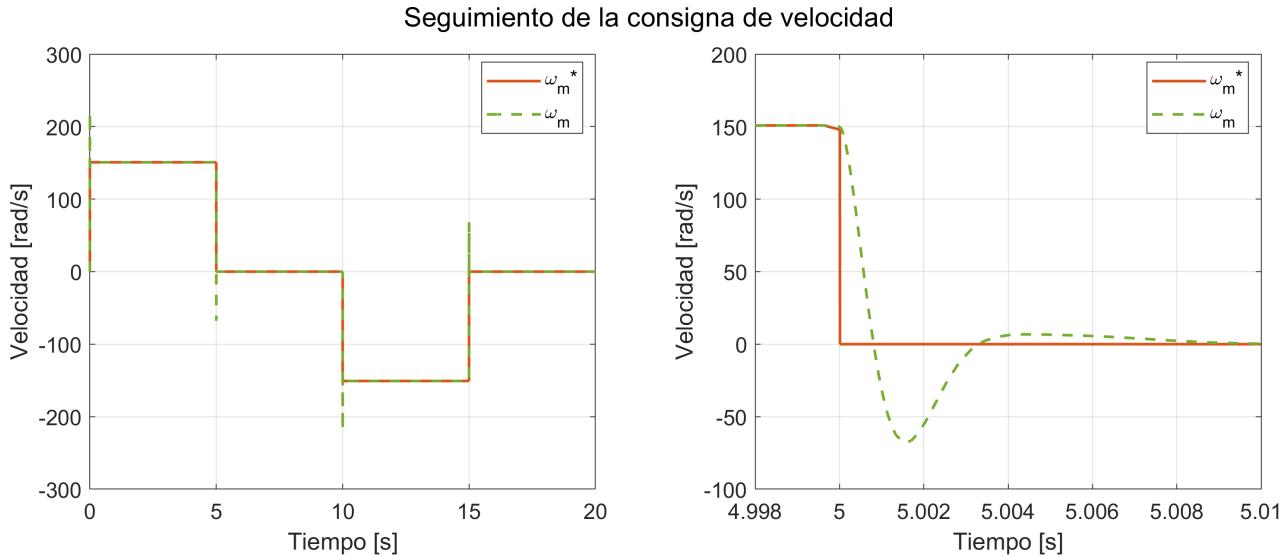


Figura 59: Consigna de velocidad vs. velocidad medida.

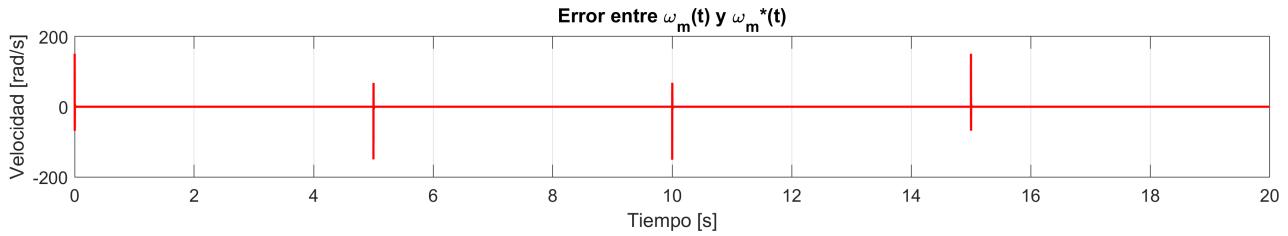


Figura 60: Error de seguimiento en la velocidad.

En cuanto a la velocidad, el sistema es capaz de seguir la forma de la consigna correctamente. Sin embargo, se producen sobrepicos considerables en los escalones.

Errores de estimación

También vale la pena analizar qué ocurre con los estados observados mediante el observador de estado parcial durante la simulación. A continuación, se muestra la posición real del sistema contrapuesta con la posición observada (Fig. 61), junto con la evolución del error de estimación en el tiempo (Fig. 62).

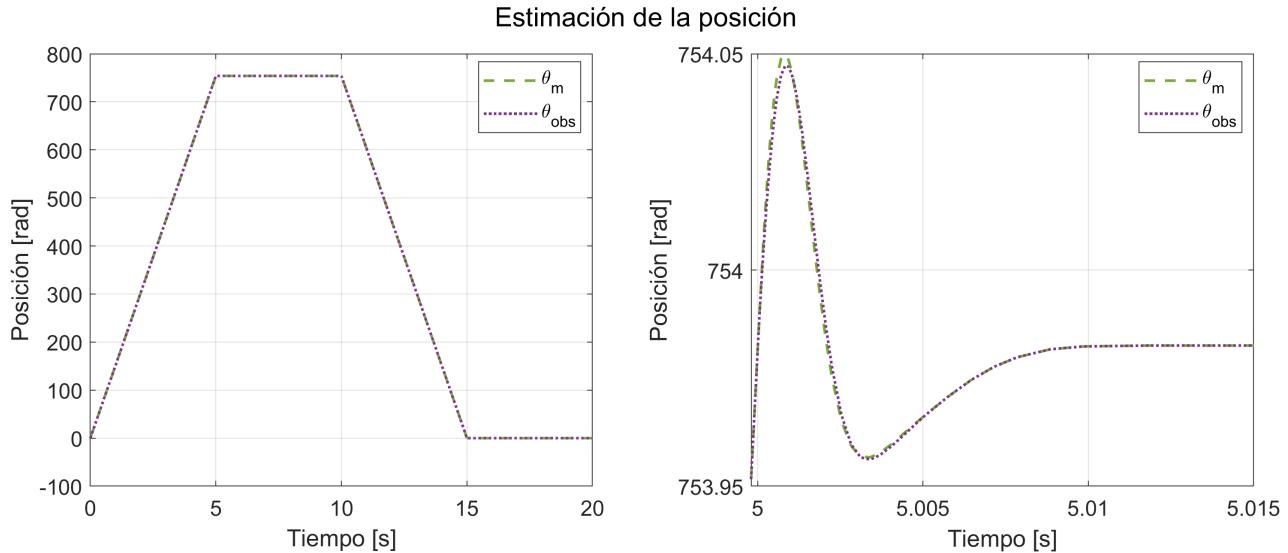


Figura 61: Posición medida vs. observada.

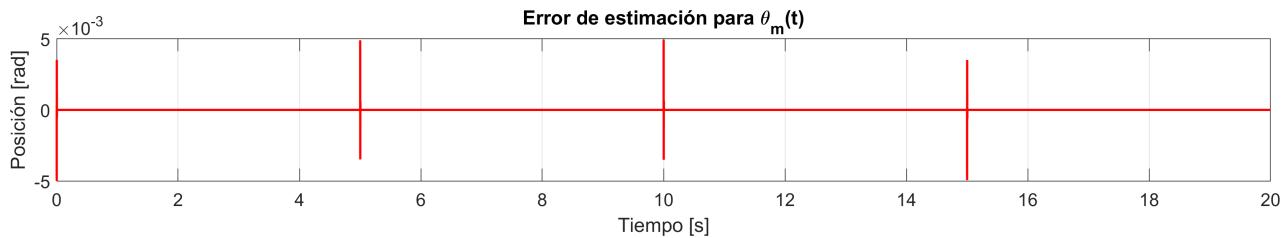


Figura 62: Error de estimación en la posición.

El error de estimación para $\theta_m(t)$, $e_\theta(t) = \theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)$, es del orden de la milésima. Se obtienen transitorios cortos y de sobrepicos aceptables, como ocurre con la variable real.

La exactitud de la estimación de la velocidad puede analizarse con las figuras 63 y 64.

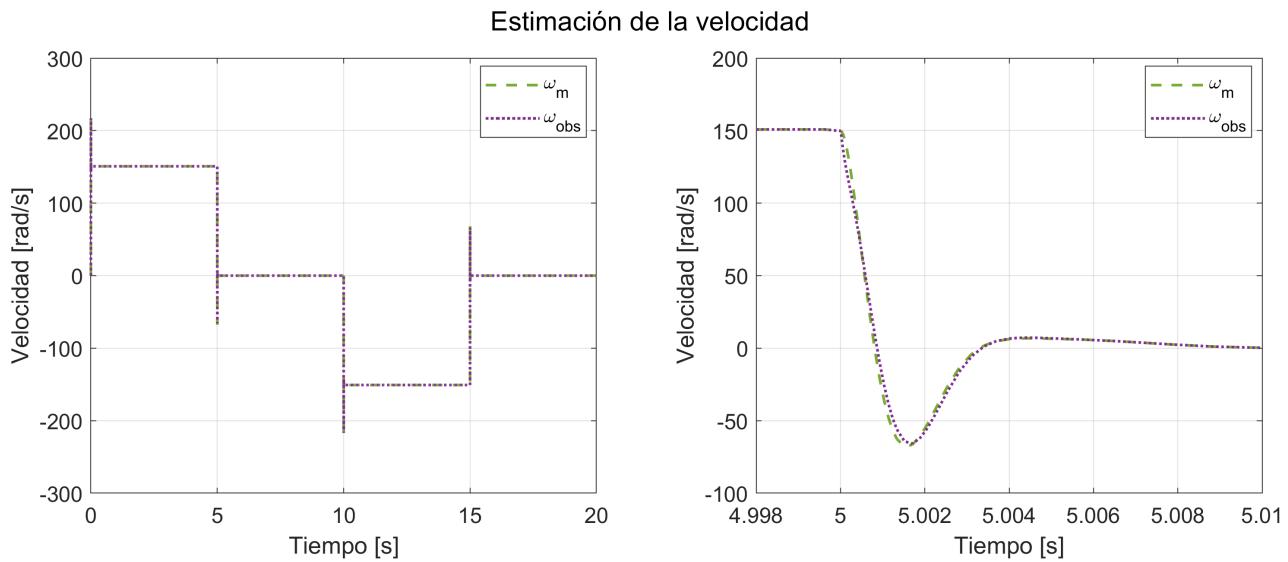


Figura 63: Velocidad medida vs. observada.

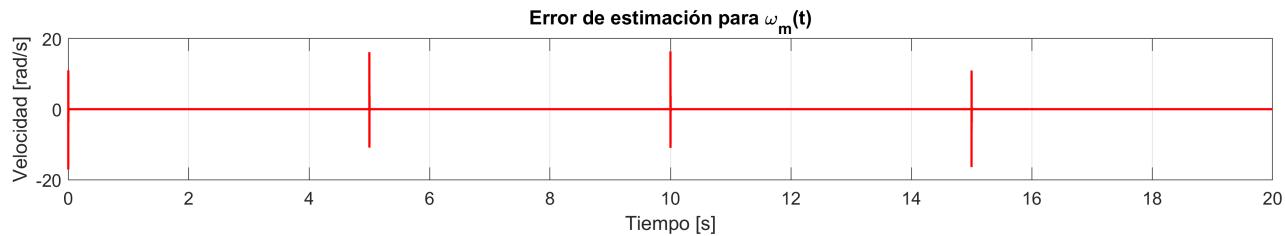


Figura 64: Error de estimación en la velocidad.

En este caso, el error de estimación para $\omega_m(t)$, $e_\omega(t) = \omega_m(t) - \tilde{\omega}_m(t)$, es mayor, pero aún aceptable.

Efecto en las demás variables del sistema

En las imágenes que siguen se muestra la evolución temporal de las corrientes y tensiones del sistema, en coordenadas virtuales y reales.

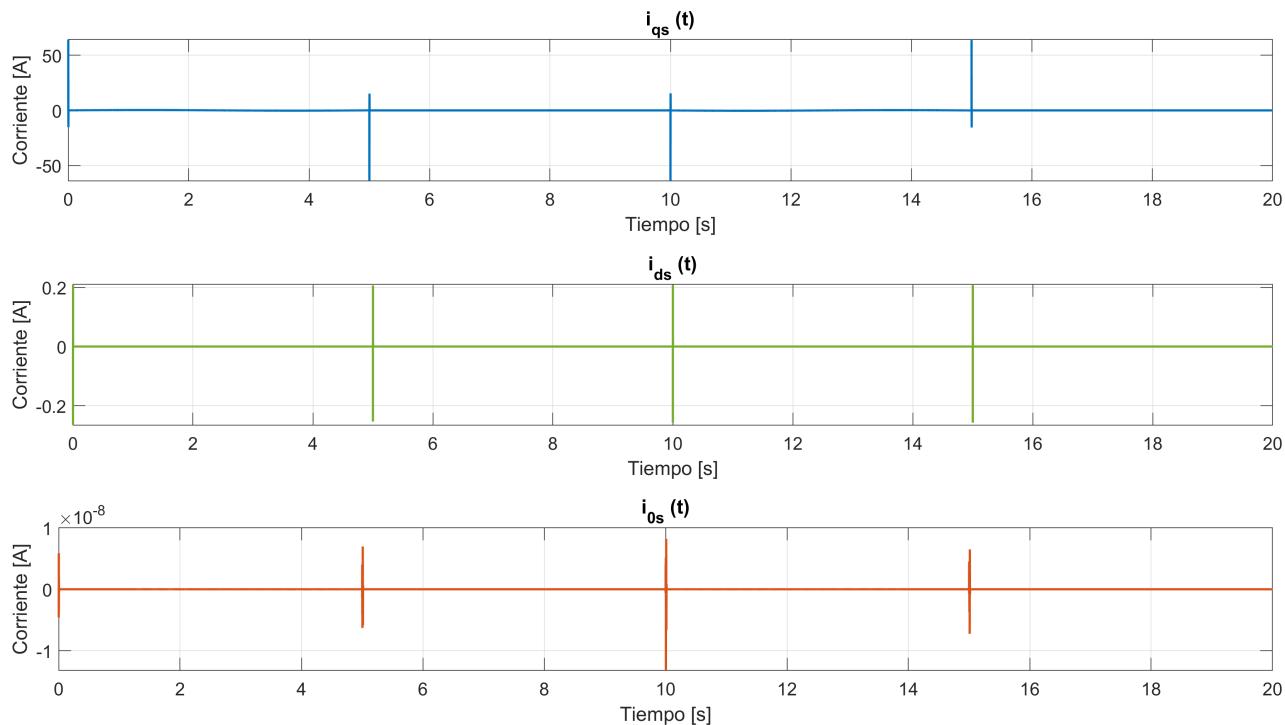


Figura 65: Corrientes en coordenadas virtuales.

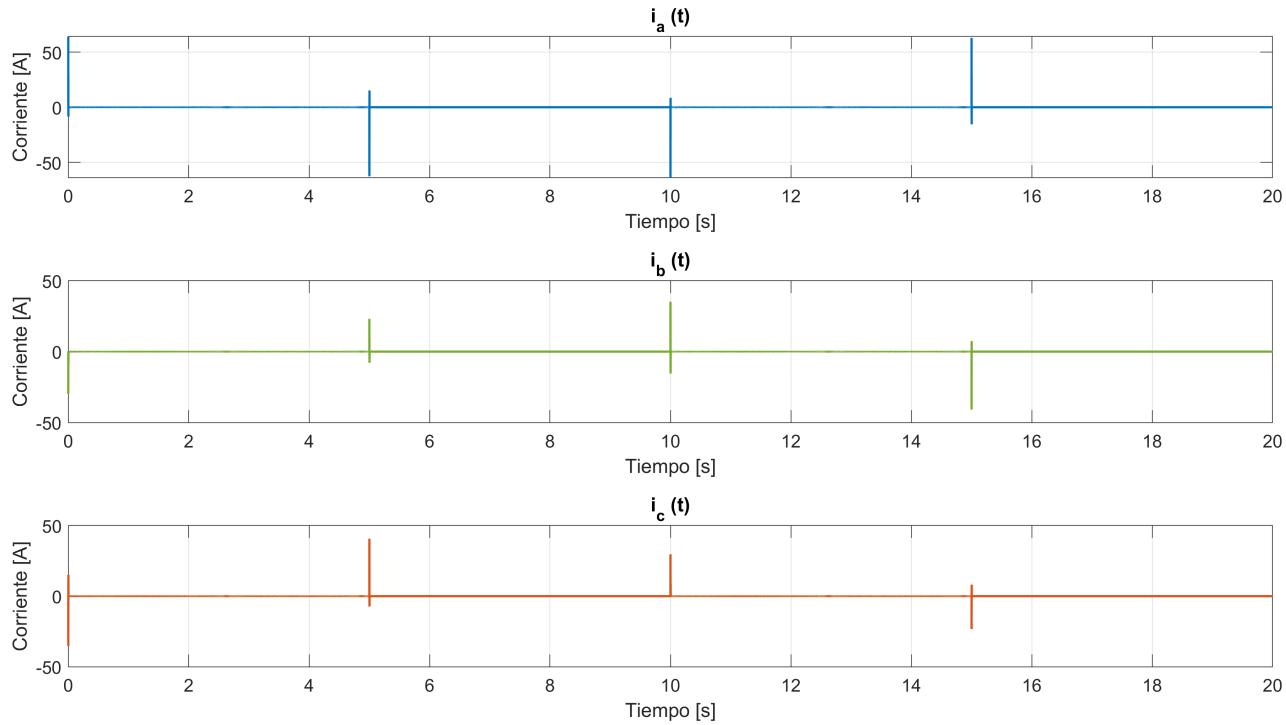


Figura 66: Corrientes en coordenadas reales.

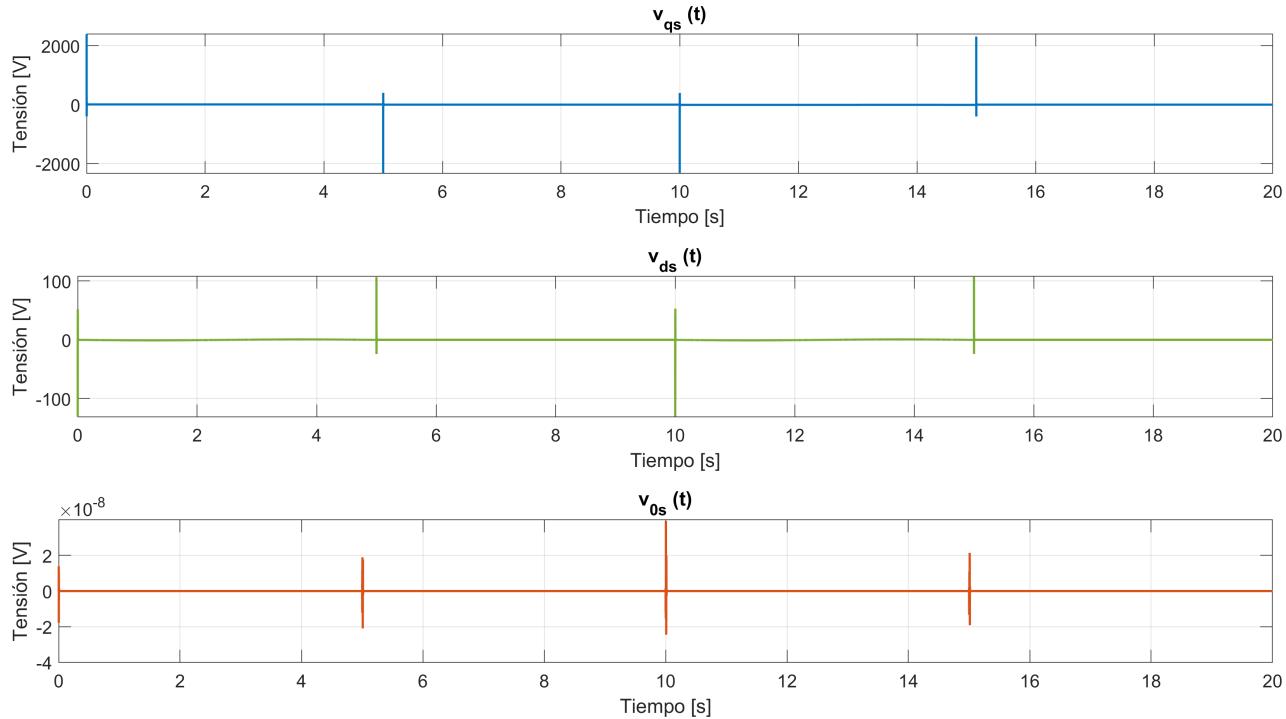


Figura 67: Tensiones en coordenadas virtuales.

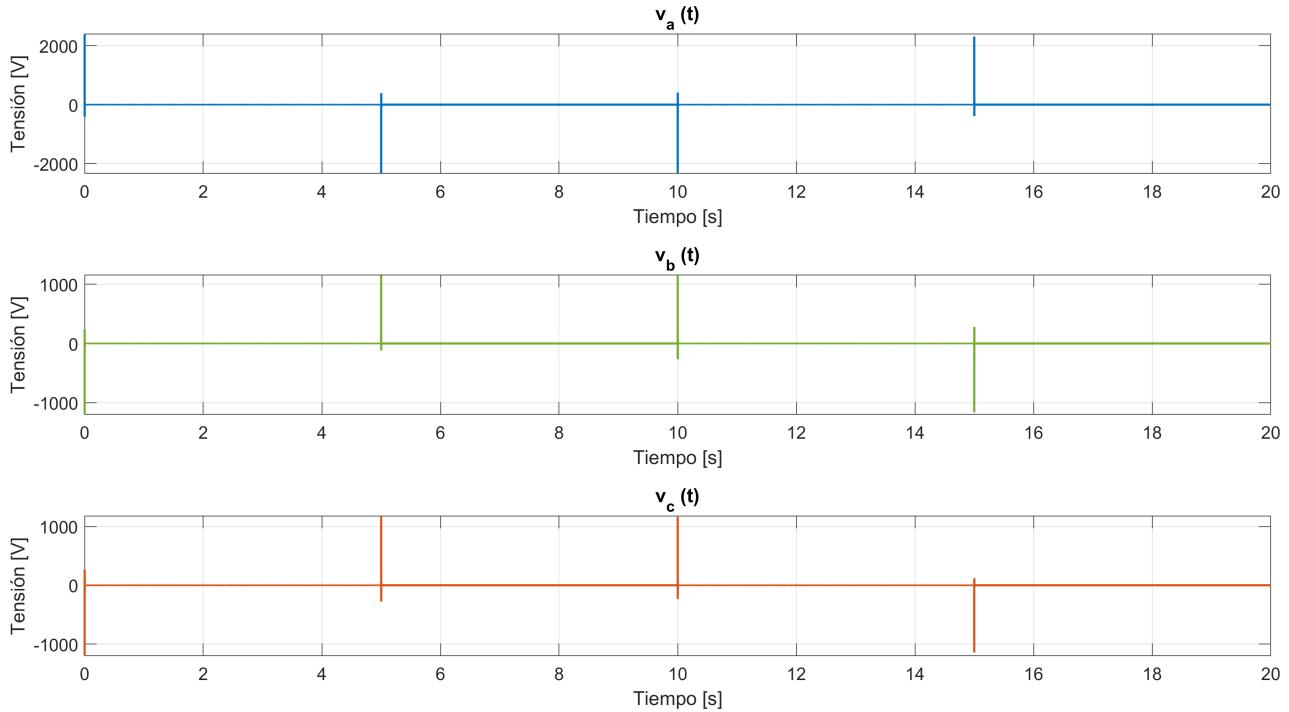


Figura 68: Tensiones en coordenadas reales.

El torque electromagnético puede observarse en la Fig. 69. Por otro lado, en la Fig. 70 se ve el torque impulsor del eje de transmisión, que es una variable a tener en cuenta más adelante para la verificación de las especificaciones de operación.

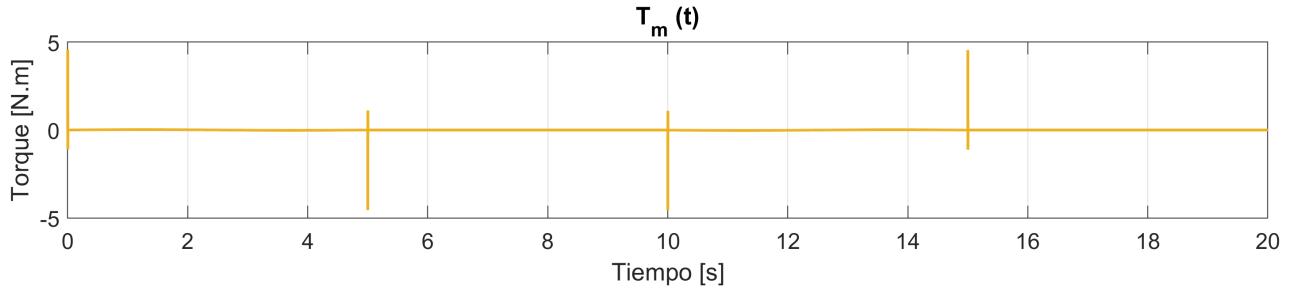


Figura 69: Evolución del torque electromagnético.

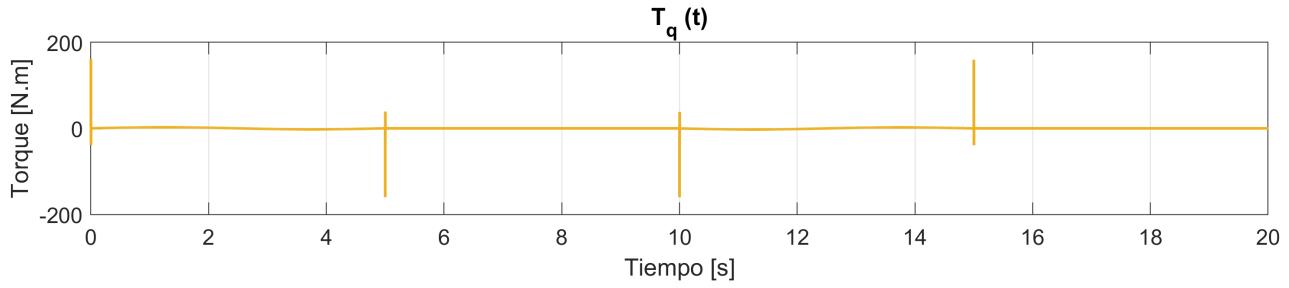


Figura 70: Evolución del torque impulsor.

Finalmente, la temperatura del bobinado del estator se muestra en la Fig. 71.

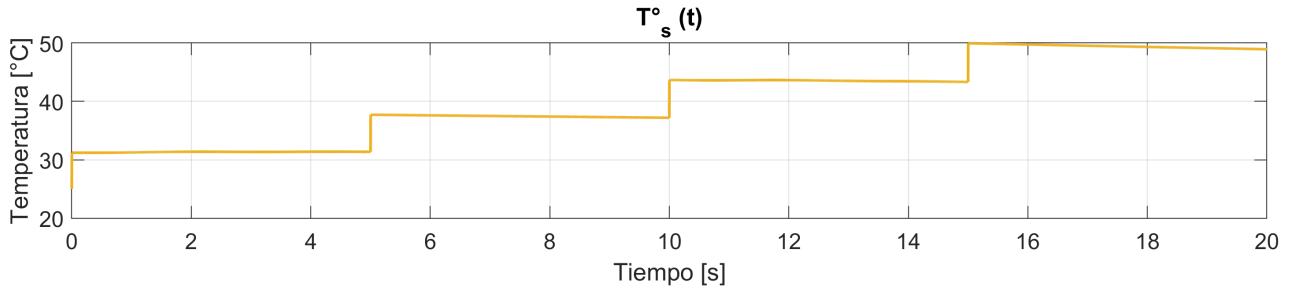


Figura 71: Evolución de la temperatura del bobinado del estator.

5.4.2. Rechazo a perturbaciones

Para evaluar la robustez del sistema ante perturbaciones externas, se propone una entrada $T_{ld}(t)$ tipo escalón, como se muestra en la Fig. 72.

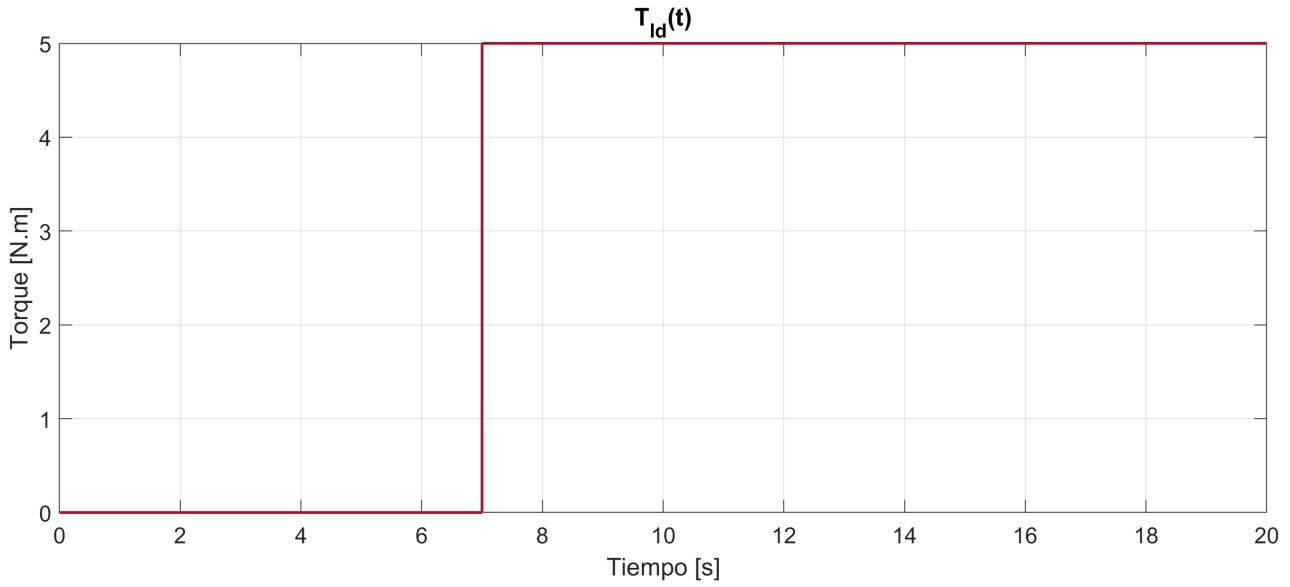


Figura 72: Perturbación $T_{ld}(t)$.

En este escenario de prueba, se analiza únicamente lo que ocurre con respecto a la posición angular del motor. Además, se elimina la consigna de posición aplicada anteriormente, de manera que la referencia a seguir sea nula.

Valores nominales de los parámetros de carga

En primer lugar, se evalúa la respuesta del sistema para valores nominales de los parámetros de carga; es decir, para $m_l = 0 \text{ kg} \rightarrow J_{eq} = J_{eq-min}$.

El resultado obtenido en estas condiciones para la posición puede observarse en las figuras 73 y 74.

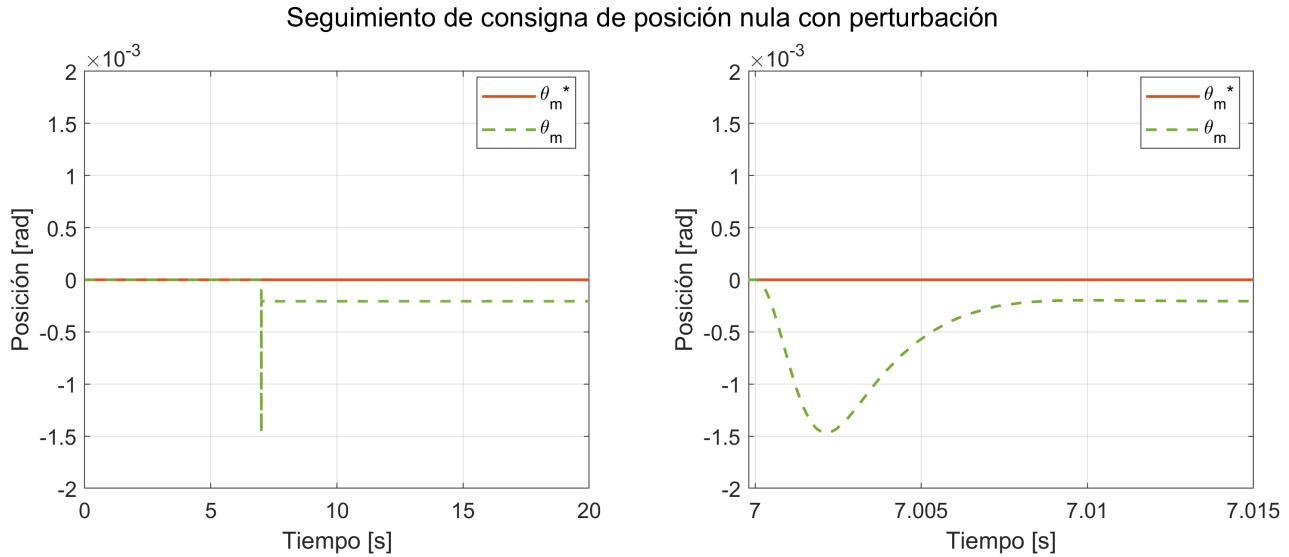


Figura 73: Consigna de posición vs. posición medida. Parámetros nominales de carga.

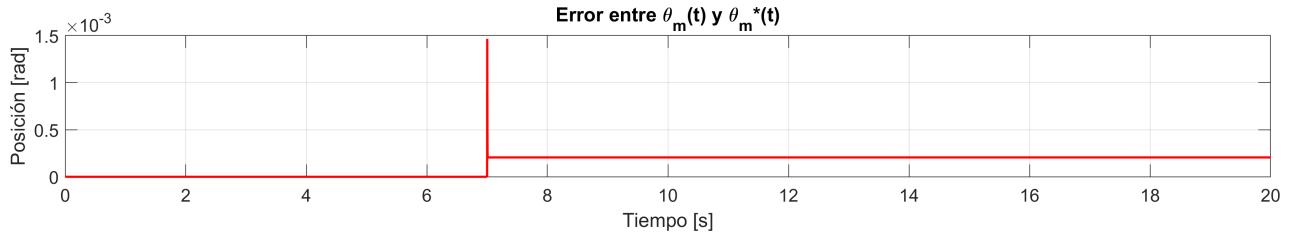


Figura 74: Error de seguimiento en la posición. Parámetros nominales de carga.

Puede verse que al aplicar la perturbación, aparece un error de estado estacionario en la posición, aunque de magnitud pequeña en este caso.

Por otro lado, con las figuras 75 y 76 puede analizarse el comportamiento del observador ante una carga.

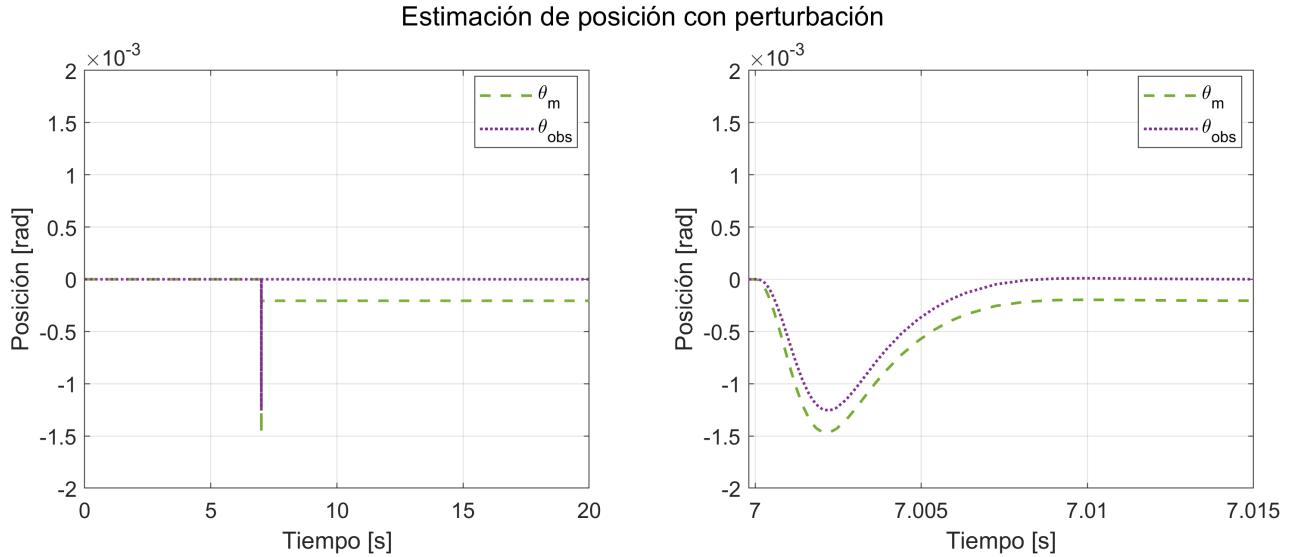


Figura 75: Posición medida vs. observada. Parámetros nominales de carga.

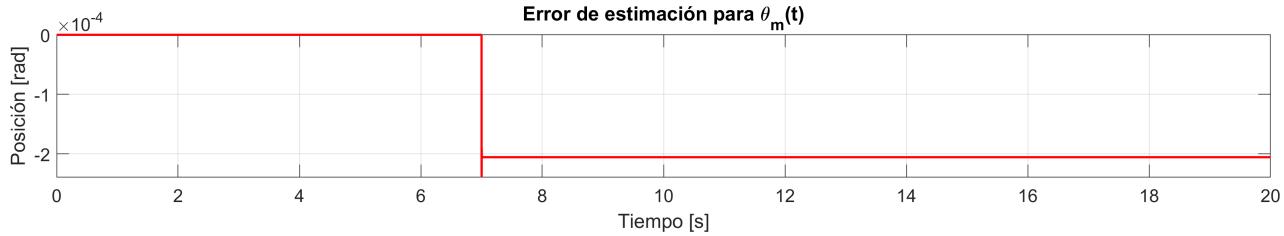


Figura 76: Error de estimación de la posición. Parámetros nominales de carga.

Aparece un error de estimación en régimen permanente entre el observador y la variable real observada debido a que el observador implementado no contempla explícitamente las perturbaciones externas que afectan a la planta. Al aplicar el escalón de torque de carga, el observador continúa estimando la referencia nula (como si no hubieran perturbaciones), lo que no refleja el comportamiento de la variable real.

El observador fue diseñado con una estructura proporcional-derivativa (PD), sin acción integral. Esta limitación impide que el sistema de estimación corrija errores producidos por perturbaciones constantes (de baja frecuencia). Esto evidencia la necesidad de mejorar el diseño del observador.

Valores máximos de los parámetros de carga

Si ahora se consideran valores máximos de los parámetros de carga (se añade una masa de carga útil $m_l = 1,5 \text{ kg} \rightarrow J_{eq} = J_{eq-max}$) para realizar la simulación, se obtienen los siguientes resultados:

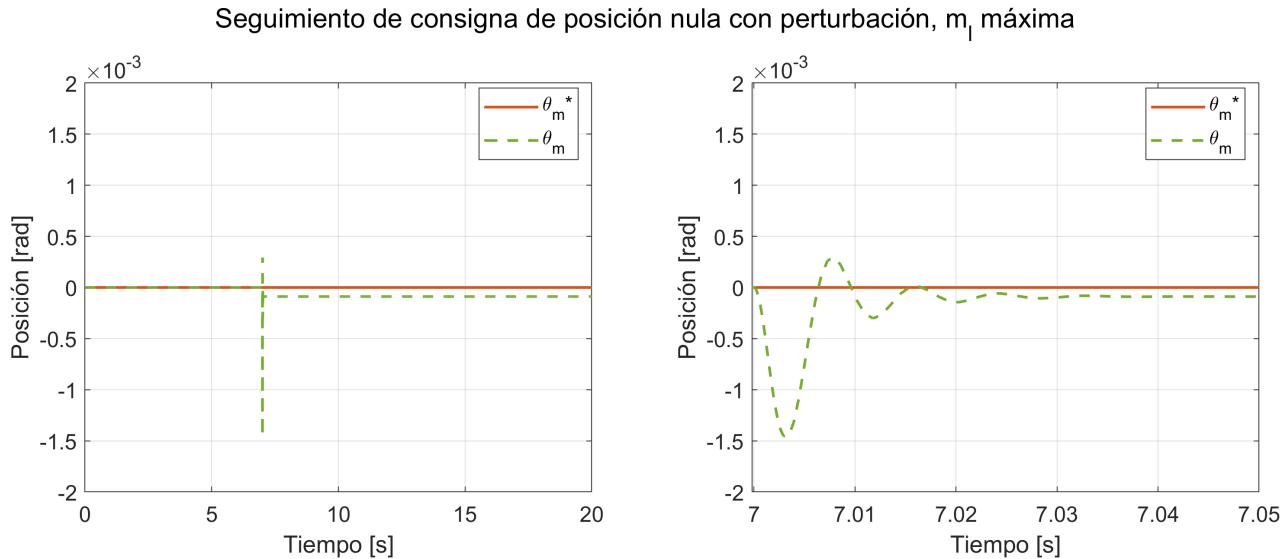


Figura 77: Consigna de posición vs. posición medida. Parámetros máximos de carga.

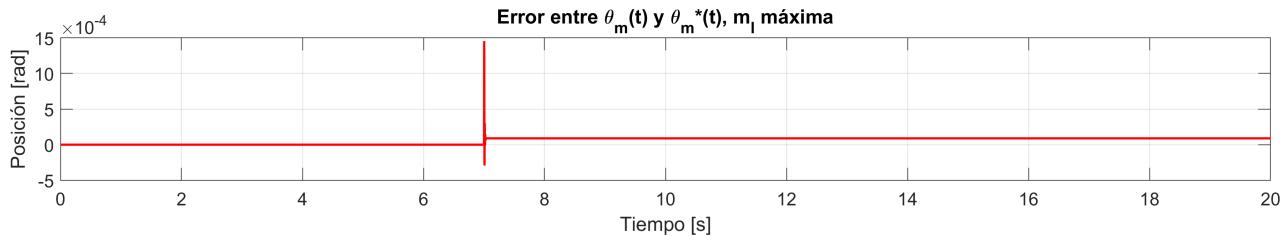


Figura 78: Error de seguimiento en la posición. Parámetros máximos de carga.

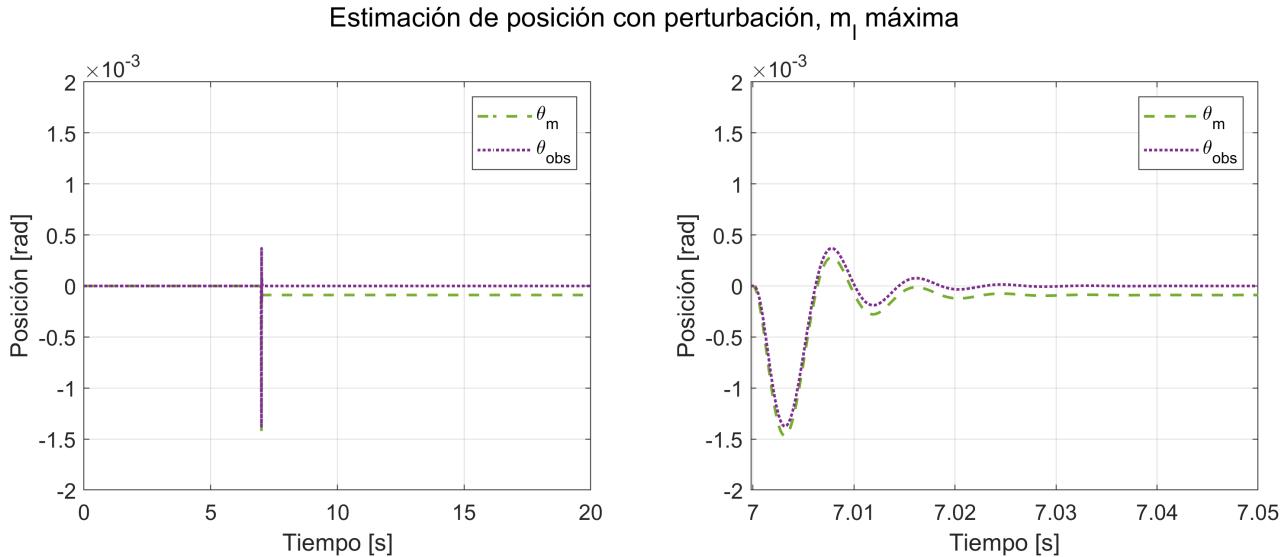


Figura 79: Posición medida vs. observada. Parámetros máximos de carga.



Figura 80: Error de estimación de la posición. Parámetros máximos de carga.

Es posible apreciar que el error de estado estacionario de la posición con respecto a la consigna en la Fig. 77 es menor que el que se observa en la Fig. 73. Esto se debe a que cuando se agrega masa en el extremo del brazo robótico, se produce un aumento en el torque recuperador gravitacional, que tiende a llevar al brazo a su posición de equilibrio estable ($\theta_l(t) = \theta_m(t) = 0$), favoreciendo en este caso a la consigna dada.

El observador presenta nuevamente un error con respecto a la variable medida, por las razones que se explicaron anteriormente.

5.5. Verificación de desempeño y mejoras

5.5.1. Verificación de las especificaciones de operación

En la siguiente tabla se muestra una comparación entre los límites de operación establecidos para los componentes del sistema físico y los valores obtenidos en las simulaciones realizadas en la Sección 5.4.1.

Tabla 4: Valores de operación vs. Valores de simulación

Especificación	Especificación de Operación		Valores de Simulación	
	Régimen Continuo	Valor Pico	Régimen Continuo	Valor Pico
Torque (Caja)	17,0 N m	45,0 N m	2,3 N m	160,5 N m
Velocidad Angular (Motor)	691,15 rad s ⁻¹	691,15 rad s ⁻¹	150,8 rad s ⁻¹	238 rad s ⁻¹
Velocidad Angular (Caja)	6,28 rad s ⁻¹	6,28 rad s ⁻¹	1,3 rad s ⁻¹	1,98 rad s ⁻¹
Corriente (Estator)	0,4 A	2,0 A	0,33 A	64,1 A
Tensión de Fase (Estator)	17,32 V	24,49 V	7,3 V	1178,1 V

Se observa que, en las simulaciones realizadas, el torque a la salida de la caja reductora, la tensión de fase y la corriente del estator, alcanzan valores máximos que exceden significativamente los límites establecidos por las especificaciones de operación de la máquina. Este comportamiento se atribuye principalmente a la consigna de posición de tipo trapezoidal que se aplica al sistema, la cual presenta cambios de pendiente abruptos que introducen discontinuidades en su derivada, produciendo variaciones bruscas en la velocidad y, por consiguiente, aceleraciones excesivas.

Solución propuesta

Para mitigar este problema, se propone reemplazar la consigna de posición por una consigna de velocidad que siga la forma mostrada en la Fig. 56, pero con una forma de variación trapezoidal en lugar de cuadrada. De esta forma, se obtiene un perfil de aceleración más suave y continuo, lo que reduce el esfuerzo dinámico requerido por el sistema y mejora su comportamiento general.

A continuación, se muestra el perfil de velocidad generado, tanto para el eje articular como para el eje motor, considerando una rampa en los trapecios de duración de 0,1 s.

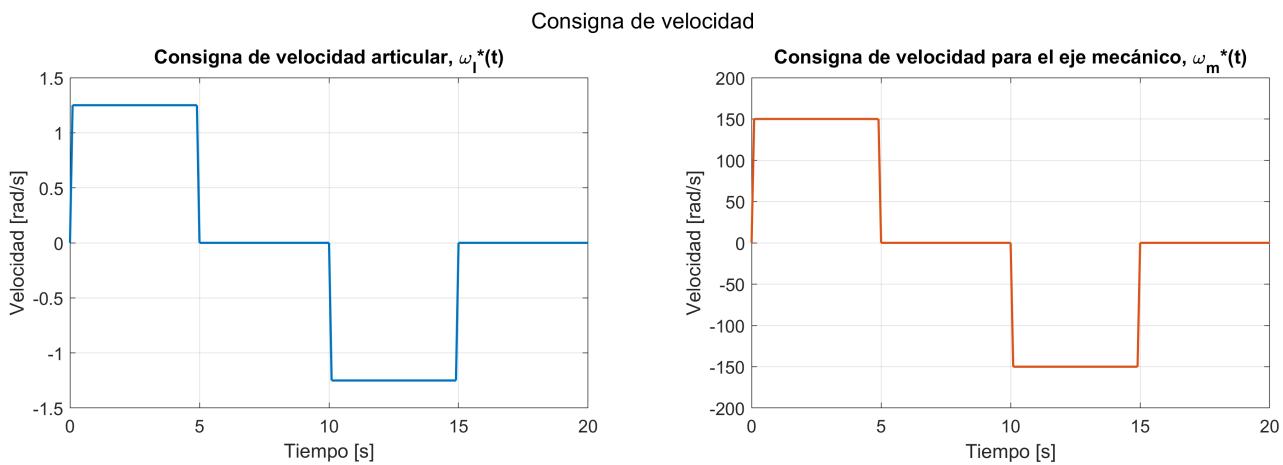


Figura 81: Consigna de velocidad trapezoidal.

El perfil de posición correspondiente, obtenido por integración de la consigna de velocidad, se muestra en la Fig. 82. En ella, se incluye un acercamiento a uno de los codos del trapecio, donde puede observarse

la suavización de la curva respecto del perfil de posición trapezoidal anterior.

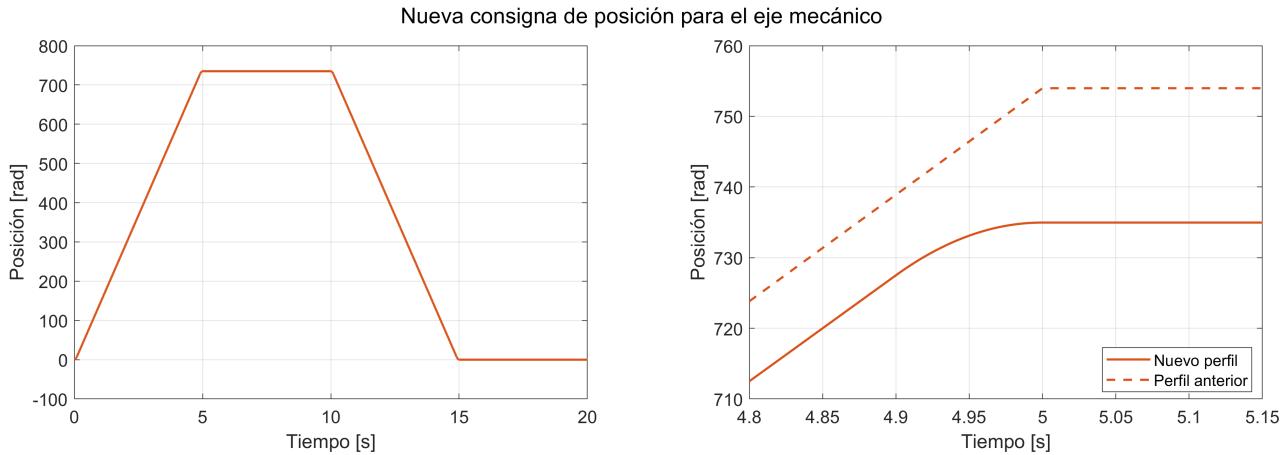


Figura 82: Consigna de posición trapezoidal suavizada.

Para cuantificar la mejora introducida, en la Fig. 83 se compara la aceleración requerida para el seguimiento de la trayectoria en ambos casos: utilizando una consigna de posición directamente, y utilizando una consigna de velocidad. La diferencia evidencia la reducción significativa de los picos de aceleración alcanzados al aplicar el nuevo perfil.

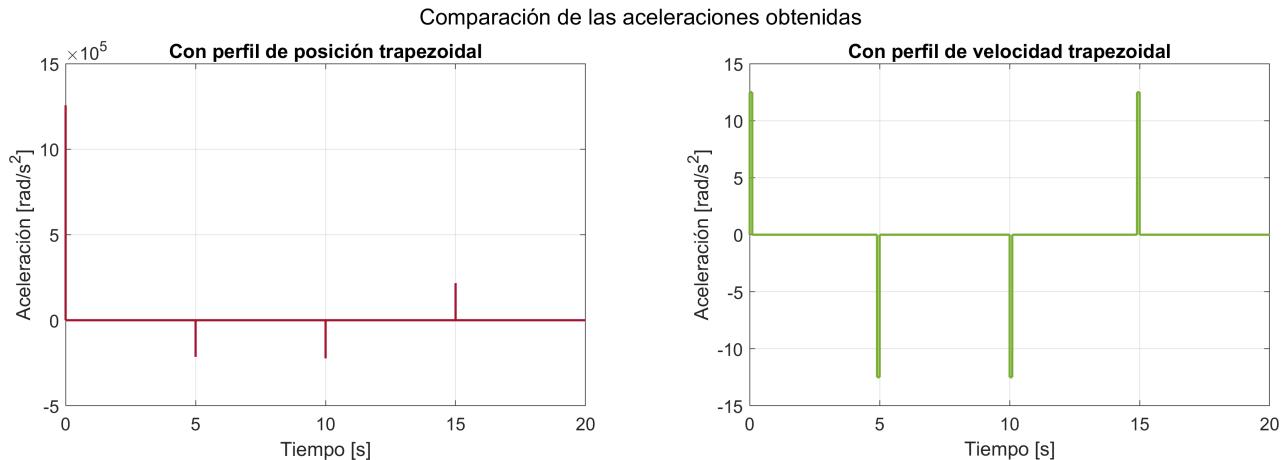


Figura 83: Comparación de los perfiles de aceleración obtenidos para diferentes tipos de consigna.

Por otro lado, puede verse el efecto de esta reducción de la aceleración al analizar las nuevas curvas de respuesta obtenidas para las corrientes, tensiones, torque y temperatura del modelo.

En la Fig. 84 se puede observar que el valor pico que toman las corrientes ha disminuido de 64,1 A a 0,6 A aproximadamente, que está por debajo de los 2 A que se admiten como máximo en condiciones de operación.

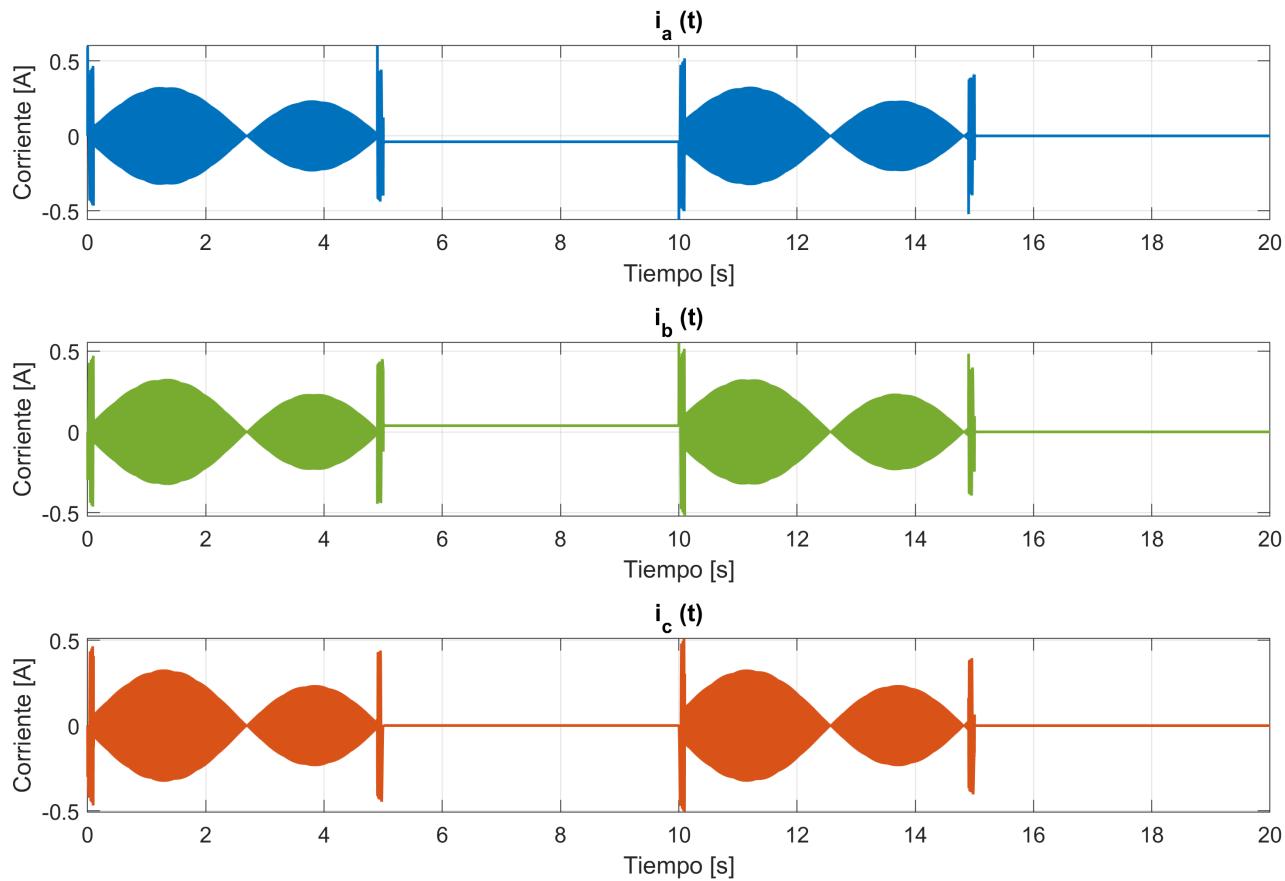


Figura 84: Corrientes en coordenadas reales.

Las tensiones pico también han disminuido mucho, estableciéndose en un valor menor a 10 V, como puede verse en la Fig. 85.

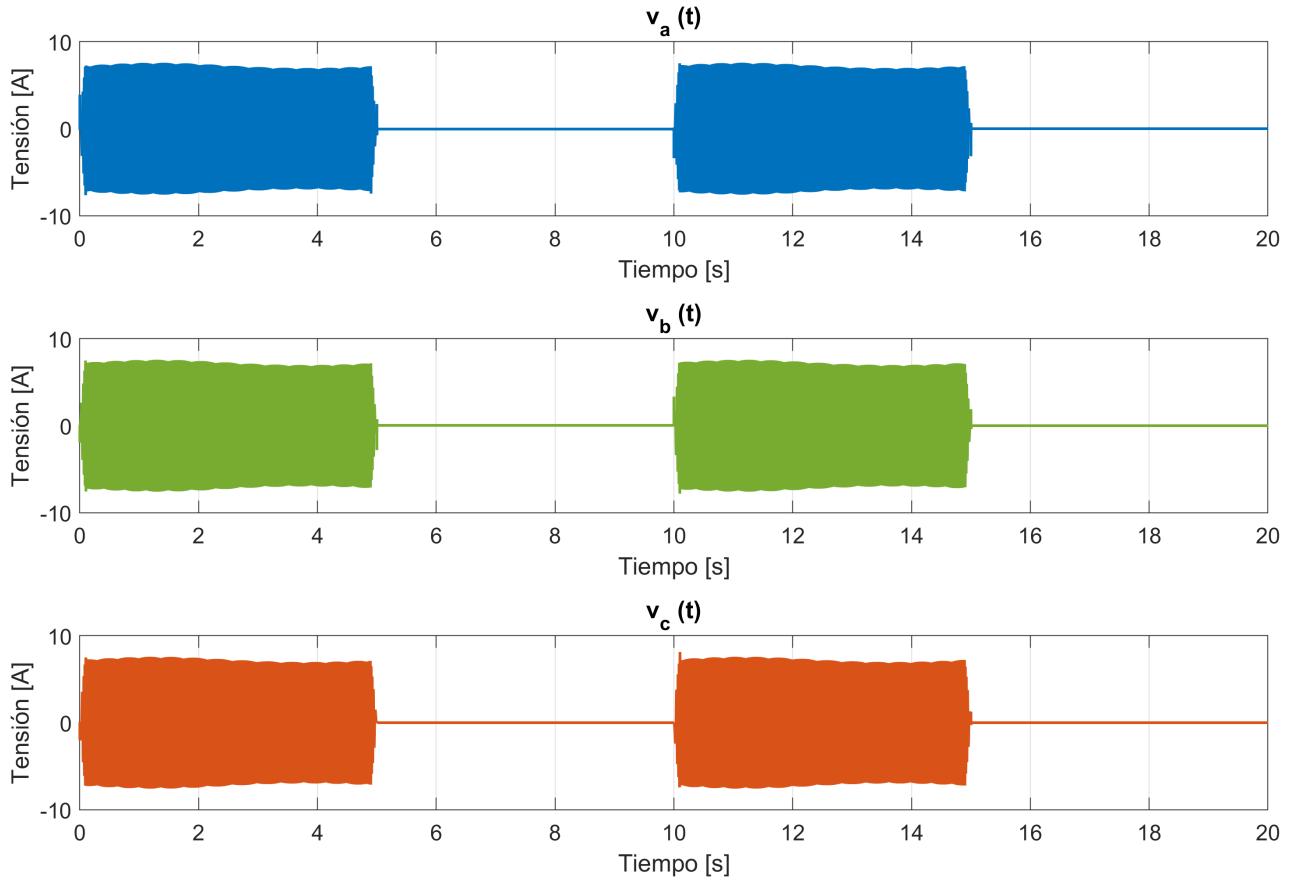


Figura 85: Tensiones en coordenadas reales.

Además, disminuye el torque electromagnético del motor y el torque impulsor de la caja reductora, como se ve en las figuras 86 y 87. El pico de T_q está muy por debajo del máximo admitido.

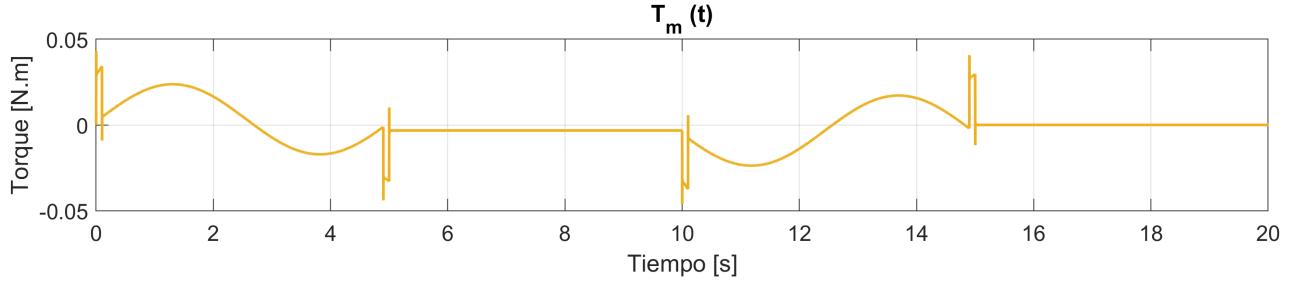


Figura 86: Evolución del torque electromagnético.

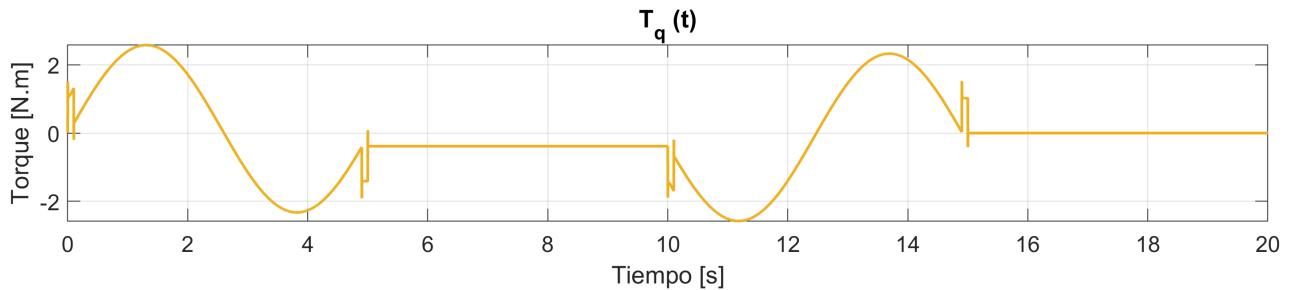


Figura 87: Evolución del torque impulsor.

Otro cambio notable es el de la temperatura del bobinado del estator, que con la consigna anterior, sufría una variación de aproximadamente 25 °C debido a los grandes picos de aceleración producidos, que implicaban grandes corrientes, y por lo tanto, mucho calentamiento de los cables. Ahora, el cambio es de menos de 1 °C, como muestra la Fig. 88.

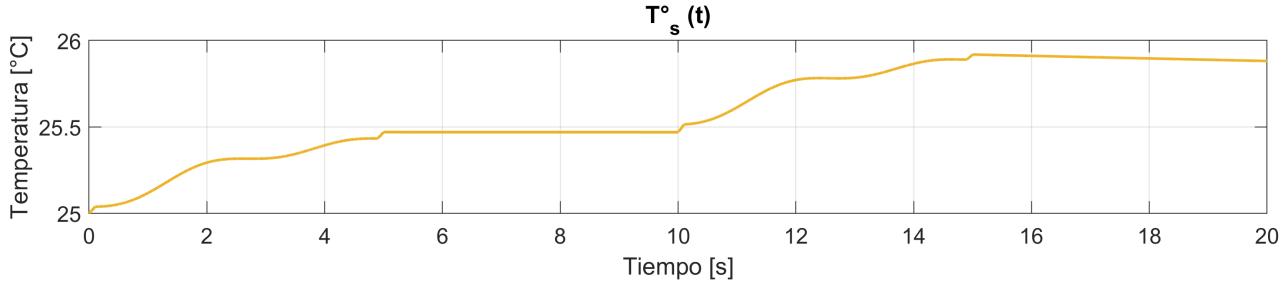


Figura 88: Evolución de la temperatura del bobinado del estator.

5.5.2. Mejora del observador

En las simulaciones realizadas en la sección anterior, se detectó un error de estimación de régimen permanente luego de aplicar la perturbación $T_{ld}(t)$. Con el objetivo de solucionar esta problemática, se propone añadir acción integral al observador de estado diseñado.

Para ello, es necesario aumentar el vector de estados y el vector de estados estimados según la Ec. 125:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \tilde{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 125})$$

De esta manera, en base a [4], el modelo del observador queda redefinido como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + K_e \cdot \mathbf{y}(t) + B_c \cdot \mathbf{u}(t) + B_d \cdot \tilde{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) = K_i \cdot [\mathbf{y}(t) - C \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t)] \end{cases} \quad (\text{Ec. 126})$$

Ahora, si se considera que el elemento de B_d igual a $-\frac{1}{J_{eq} \cdot r}$ es absorbido por la carga $T_{ld}(t)$, entonces puede hacerse $B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y las ecuaciones del observador en forma desagregada resultan:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_m(t) = \tilde{\omega}_m(t) + K_\theta \cdot (\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T'_m(t) + K_\omega \cdot (\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) + \tilde{v}(t) \\ \dot{\tilde{v}}(t) = K_i \cdot (\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 127})$$

Es posible notar que el estado agregado, $\tilde{v}(t)$, corresponde a la integral del error de estimación de la posición angular del eje mecánico. Es decir, ahora el modelo tiene en cuenta el tiempo que permanece la estimación del observador en un valor erróneo con respecto al valor del estado real.

Los valores de las ganancias K_θ , K_ω y K_i pueden obtenerse de manera similar a como se obtuvieron para el observador de orden reducido original; es decir, encontrando el polinomio característico mediante el determinante de la matriz del sistema que describe la dinámica del error, y comparando con el polinomio característico deseado.

En este caso, la matriz del sistema es:

$$A' = [A_X - K_X \cdot C_X] \quad (\text{Ec. 128})$$

Donde:

$$A_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_X = \begin{bmatrix} K_\theta \\ K_\omega \\ K_i \end{bmatrix}, \quad C_X = [1 \ 0 \ 0]$$

Entonces:

$$A' = \begin{bmatrix} -K_\theta & 1 & 0 \\ -K_\omega & 0 & 1 \\ -K_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 129})$$

Y el polinomio característico resulta:

$$p(s) = \det[sI - A'] = s^3 + s^2 \cdot K_\theta + s \cdot K_\omega + K_i$$

Ahora, si se quieren ubicar los tres polos en $-3200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, el polinomio deseado queda:

$$p(s) = (s + 3200)^3 = s^3 + 9600s^2 + 30,72 \times 10^6 s + 3,2768 \times 10^{10}$$

Igualando término a término es posible obtener los valores de las ganancias del observador.

$$\begin{cases} K_\theta = 9600 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ K_\omega = 3,0720 \times 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ K_i = 3,2768 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}^3} \end{cases} \quad (\text{Ec. 130})$$

El diagrama de bloques para el observador mejorado se presenta en la Fig. 89.

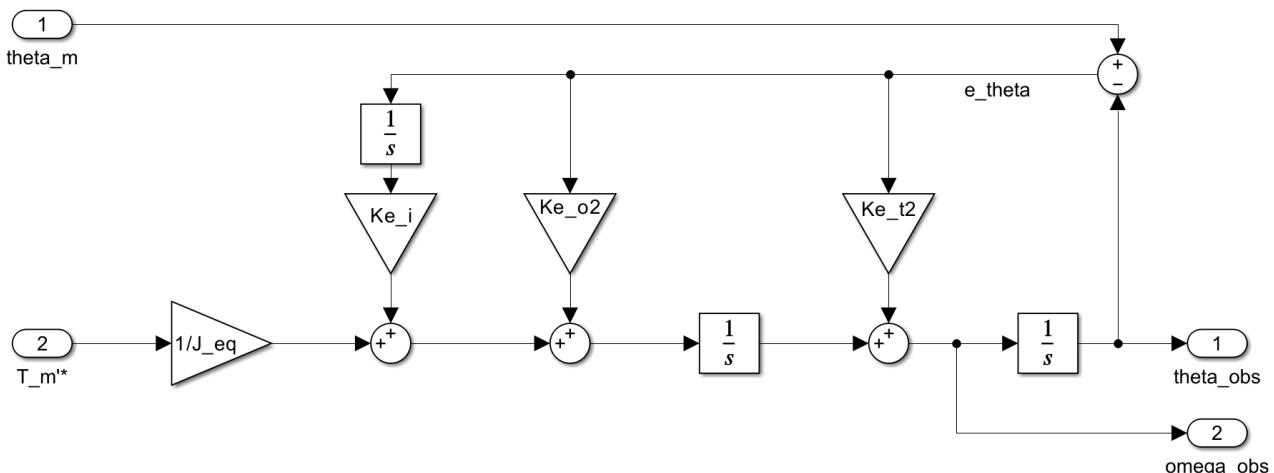
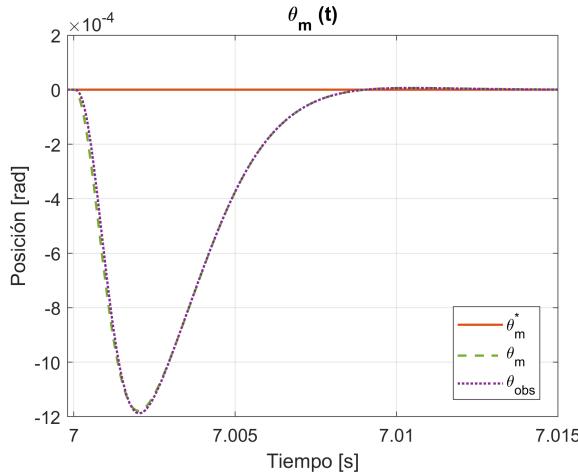


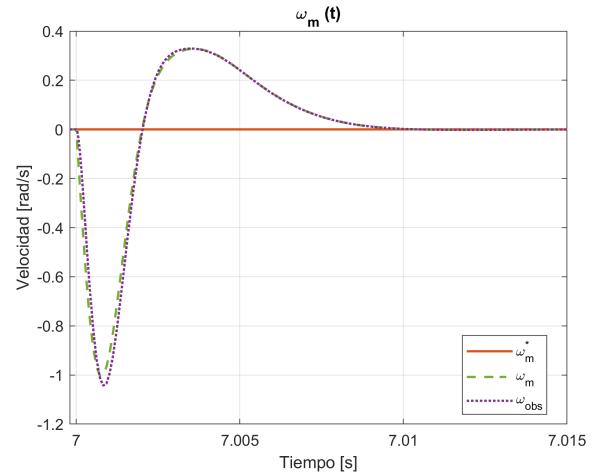
Figura 89: Diagrama de bloques del observador de estado mejorado con acción integral.

Ahora, es posible volver a realizar la simulación que se planteó en la Sección 5.4.2 para analizar el desempeño del nuevo observador de estado.

En la Fig.90a se muestra la consigna de posición, la posición medida y la posición observada. Nótese que ya no existe error de estado estacionario. Lo mismo puede verse en la Fig. 90b con respecto a la estimación de la velocidad.



(a) Estimación de la posición con el observador de estado mejorado.



(b) Estimación de la velocidad con el observador de estado mejorado.

Figura 90: Estimaciones obtenidas con el observador de estado con acción integral.

5.5.3. Comportamiento térmico de la máquina

En este apartado se verifica si la temperatura del bobinado del estator se mantiene dentro de los valores admisibles cuando la máquina opera de forma cíclica.

Para ello, se considera:

- Consigna de velocidad trapezoidal planteada anteriormente, repetida de forma continua 30 veces. Esta consigna hace que el brazo, comenzando en su posición de reposo de 0 rad, realice una vuelta completa y regrese al reposo en un tiempo de 20 s.
- Carga $T_{ld}(t)$ repetitiva. Se considera un ciclo de operación de 20 s, en donde la perturbación pasa de 0 N m a 5 N m en $t = 10$ s. Se consideran 30 ciclos.
- Tanto la temperatura ambiente como la temperatura inicial del bobinado se mantienen en 25 °C.

Los resultados obtenidos para parámetros de carga nominales se muestran en la Fig. 91, y para parámetros de carga máximos en la Fig. 92. El tiempo de simulación total es de $t = 600$ s, debido a que cercano a este tiempo la temperatura deja de aumentar, y se vuelve asintótica.

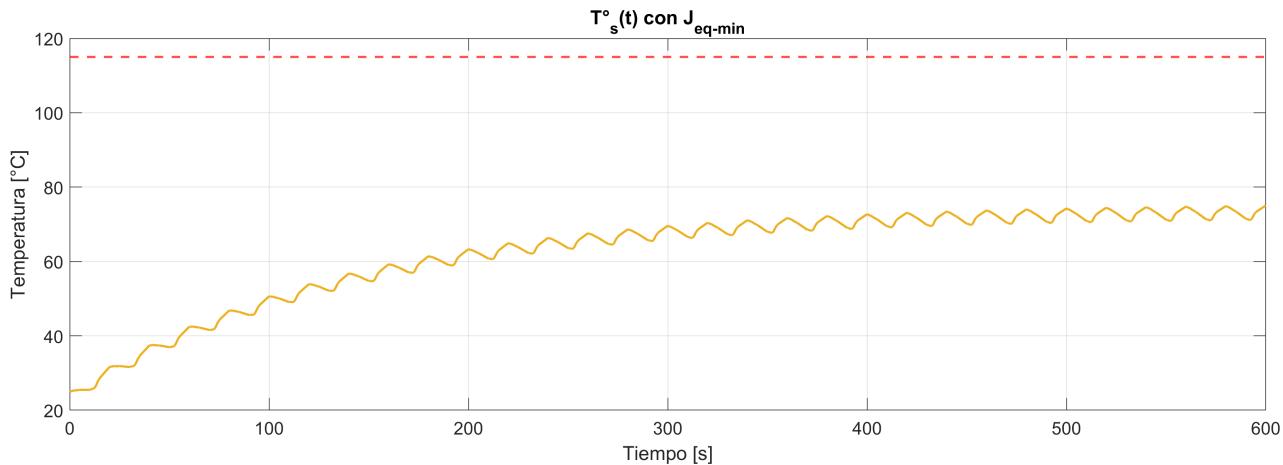


Figura 91: Evolución de la temperatura del bobinado del estator para operación continua repetitiva, con $m_l = 0 \text{ kg}$.

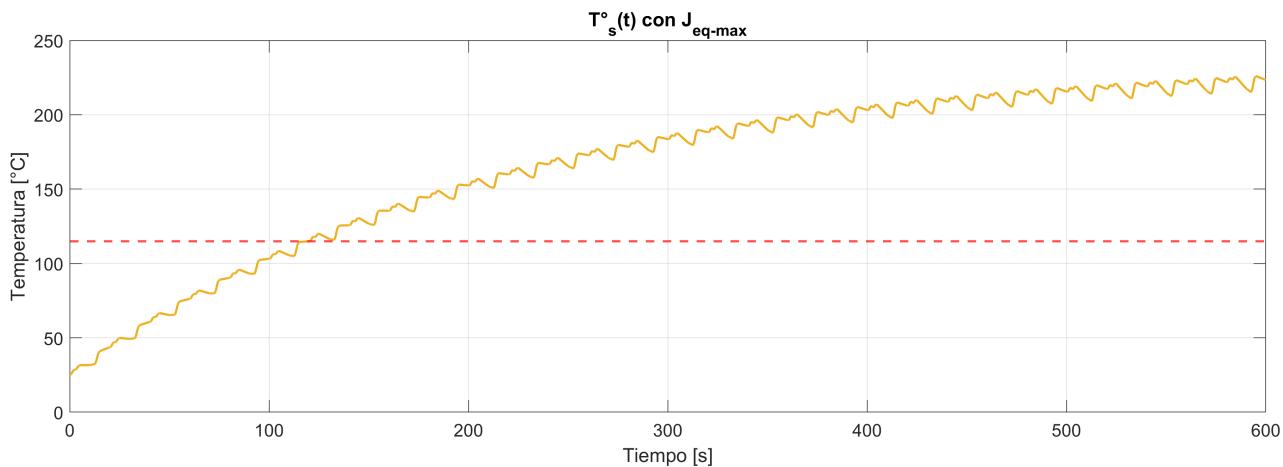


Figura 92: Evolución de la temperatura del bobinado del estator para operación continua repetitiva, con $m_l = 1,5 \text{ kg}$.

En el primer caso, cuando el brazo no está levantando ninguna carga, la temperatura del bobinado se mantiene dentro de los límites de operación establecidos. El valor máximo se estabiliza asintóticamente en torno a los 73 °C, lo cual deja un margen térmico disponible para admitir exigencias mayores sin comprometer la integridad del sistema.

Sin embargo, al operar con la carga útil máxima en el extremo del brazo, la temperatura del bobinado supera ampliamente el límite de 115 °C. Este sobrecalentamiento puede provocar la degradación del material aislante que recubre los conductores del estator.

El aumento de temperatura se debe a que una mayor carga requiere de más torque electromagnético para seguir la consigna impuesta. Esto implica un incremento en la corriente que circula por los bobinados, lo que a su vez genera más pérdidas por efecto Joule y, por ende, un mayor calentamiento.

Además, cabe recordar que el análisis se hizo considerando una temperatura ambiente y una temperatura inicial del bobinado de 25 °C. Con temperaturas ligeramente más elevadas, que podrían darse en días calurosos en entornos sin buena ventilación, incrementaría aún más la temperatura final alcanzada por la máquina.

Por este motivo, en aplicaciones reales, se debe actuar con precaución al exigir a la máquina con trabajos pesados o cíclicos. Podría requerirse la implementación de medidas adicionales de disipación térmica, agregando sistemas de refrigeración activos o ventilación forzada.

5.5.4. Respuesta no ideal de sensores y acondicionadores de señal

Se desea poner a prueba el desempeño del sistema al considerar modelos aproximados equivalentes para los sensores que forman parte del modelo, en lugar de considerarlos ideales (función de transferencia unitaria y ancho de banda infinito), como se ha hecho hasta el momento.

Se proponen modelos con las características de filtros pasa-bajos (LP) de ganancia unitaria, implementados en el espacio de estados (SS):

- Sensor de posición angular: Modelo LP en SS de 2º orden, con $\omega_n = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\zeta = 1$.
- Sensores de corriente: Modelo LP en SS de 2º orden, con frecuencia natural $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\zeta = 1$.
- Sensor de temperatura: Modelo LP en SS de 1º orden, con constante de tiempo $\tau = 20 \text{ s}$.

Sensores de corriente y posición angular

La función de transferencia para un filtro pasa-bajos de 2º orden se define como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Reordenando:

$$[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2] \cdot Y(S) = \omega_n^2 \cdot U(s)$$

Distribuyendo los términos y aplicando la anti-transformada de Laplace, se obtiene:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

Si ahora se definen los estados:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Es posible escribir el modelo de un filtro pasa bajos de 2º orden en el espacio de estados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec. 131})$$

El diagrama de bloques correspondiente se muestra en la Fig. 93.

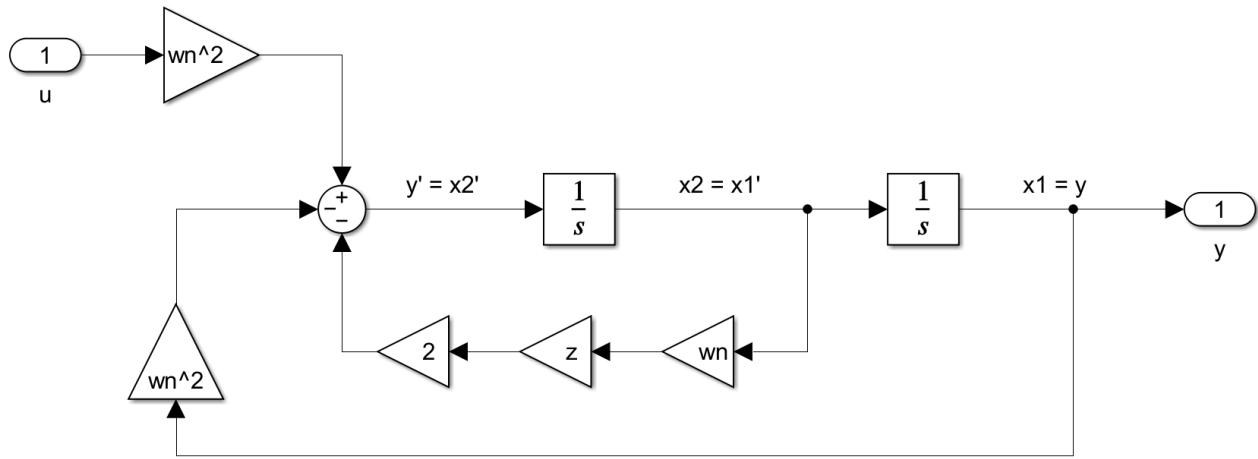


Figura 93: Diagrama de bloques de un filtro LP de segundo orden.

Los sensores de corriente y el sensor de posición pueden añadirse al modelo de la planta implementando el diagrama de bloques anterior, y utilizando para cada uno los valores de ω_n y ζ que se piden.

Sensor de temperatura

Por otro lado, la función de transferencia de un filtro pasa-bajos de 1º orden es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Trabajando con la expresión como se hizo para el filtro de 2º orden, se llega a:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (\text{Ec. 132})$$

A partir de lo cual se obtiene:

$$\begin{cases} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = \left[-\frac{1}{\tau} \right] \left[x(t) \right] + \left[1 \right] u(t) \\ y(t) = \left[\frac{1}{\tau} \right] \left[x(t) \right] \end{cases} \quad (\text{Ec. 133})$$

El diagrama de bloques para este caso se muestra en la Fig. 94. El sensor de temperatura no ideal puede implementarse siguiendo el modelo presentado, y usando la constante de tiempo que se definió anteriormente. Además, es importante calibrar las condiciones iniciales de este sensor, debido a que la temperatura inicial del bobinado, que coincide con la temperatura ambiente, es de 25 °C. Esto último se incorpora asignando una condición inicial igual a este valor en el integrador del filtro.

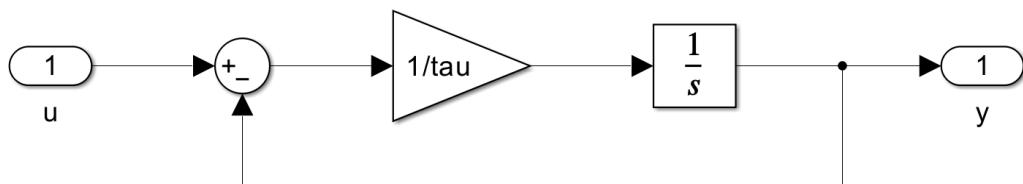


Figura 94: Diagrama de bloques de un filtro LP de primer orden.

Luego de agregar los nuevos sensores al modelo, se repite la simulación realizada en la Sección 5.5.1; es decir, se utiliza una consigna de velocidad trapezoidal y se consideran perturbaciones externas nulas, con parámetros de carga nominales.

Los resultados iniciales pueden verse a continuación.

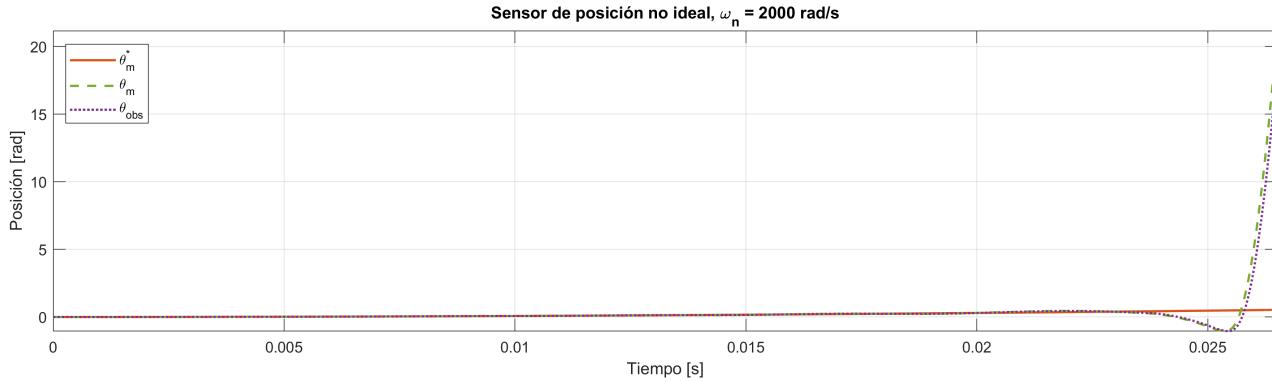


Figura 95: Consigna de posición, posición medida y posición observada - sensor de posición con $w_n = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

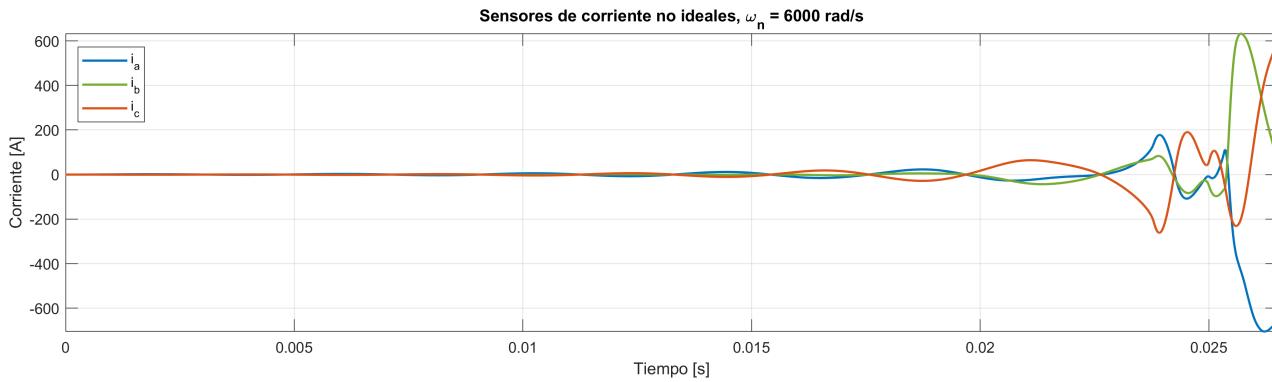


Figura 96: Corrientes i_{abc} medidas - sensores de corriente con $w_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

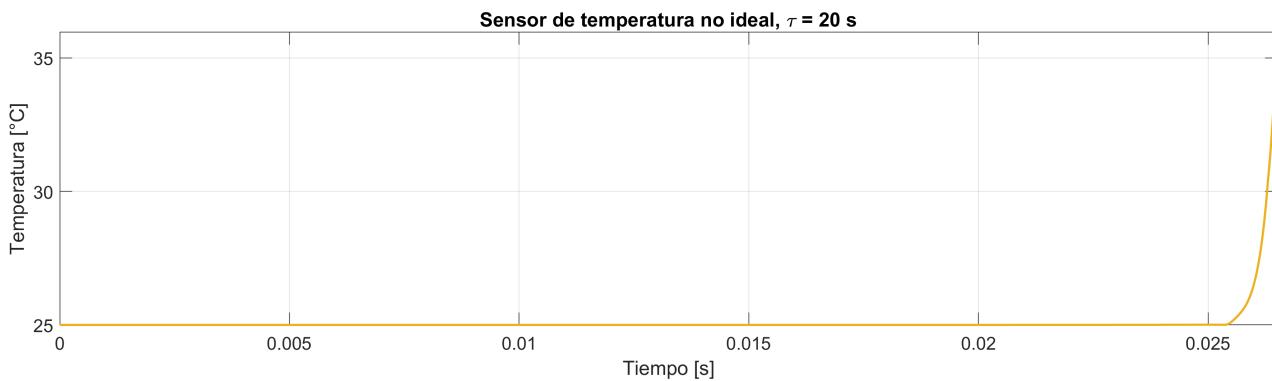


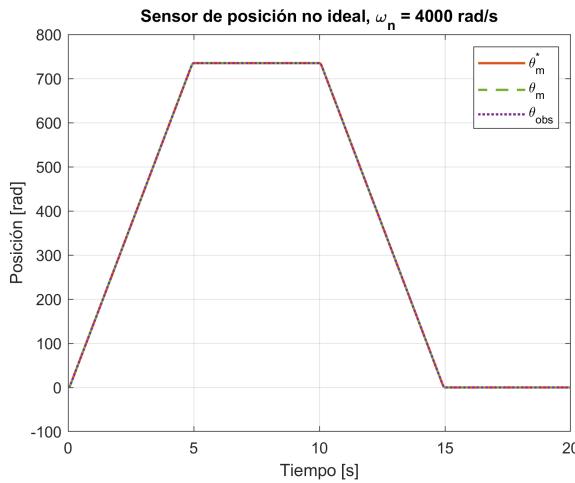
Figura 97: Temperatura medida - sensor de temperatura con $\tau = 20$ s.

Se observa que la simulación se detiene antes de los 0,03 s, debido a divergencias que se producen durante la simulación. Esto ocurre porque los sensores son demasiado lentos para el controlador diseñado (ya que se calibró considerando un comportamiento ideal), y el sistema no logra responder adecuadamente.

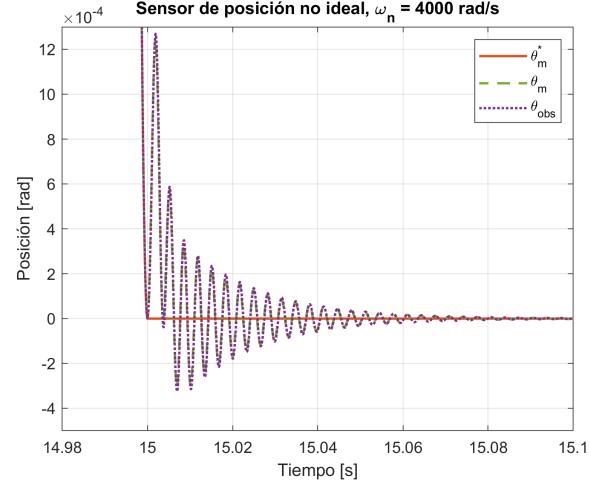
Para subsanar este problema, se vuelven a realizar las simulaciones aumentando el ancho de banda de cada uno de los sensores. Cabe recordar que la frecuencia de corte en un filtro pasa-bajos de primer

orden es $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, y en uno de segundo orden con $\zeta = 1$, puede aproximarse como $\omega_c \approx \omega_n$.

Para el sensor de posición, se comparan los resultados del sensado para $w_n = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $w_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (el doble y el triple de la frecuencia natural considerada inicialmente).

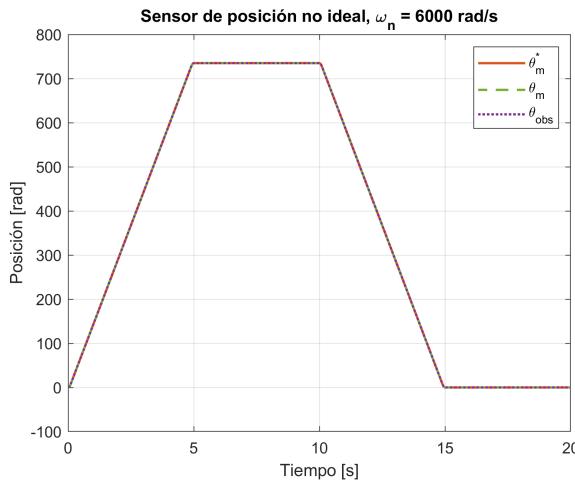


(a) Curvas de posición.

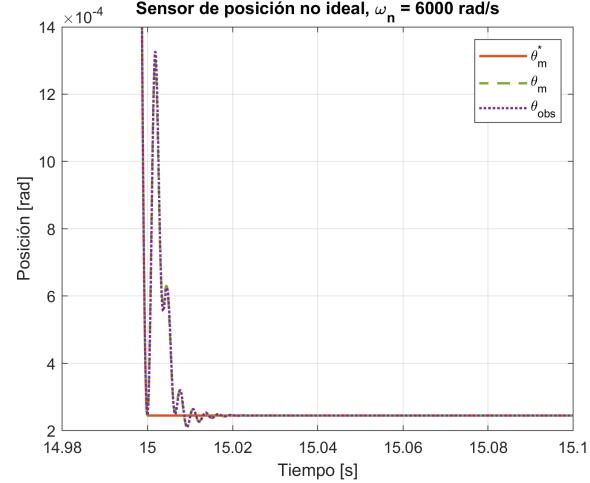


(b) Acercamiento.

Figura 98: Curvas de posición - sensor de posición con $\omega_n = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



(a) Curvas de posición.



(b) Acercamiento.

Figura 99: Curvas de posición - sensor de posición con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

A simple vista, los resultados parecen indistintos. Solamente puede verse una pequeña diferencia de comportamiento alrededor de $t = 15 \text{ s}$, en donde aparecen algunas oscilaciones en las variables medida y observada. Con el sensor de $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, el tiempo de establecimiento es mucho menor. De todas formas, cabe notar que las oscilaciones tienen una magnitud del orden de la diezmilésima.

Es importante destacar que, tras realizar pruebas con distintos valores de ω_n , se determinó que el valor mínimo que permite al sensor de posición operar sin degradar el desempeño del controlador de forma significativa es $\omega_n = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Para los sensores de corriente, también se hace la prueba de duplicar y triplicar la frecuencia natural inicial. Las figuras 100 y 101 muestran lo que se obtiene al aplicar estos cambios.

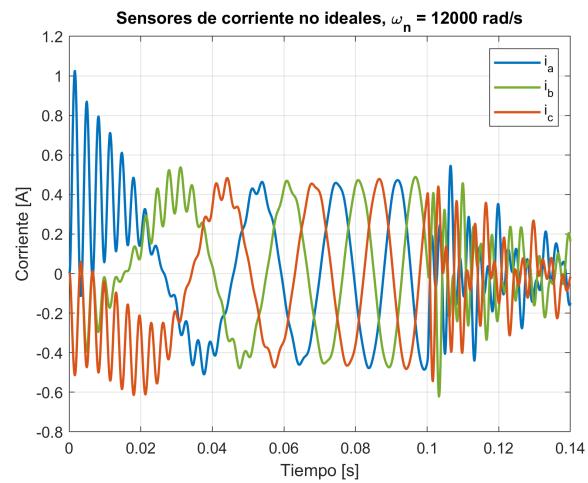
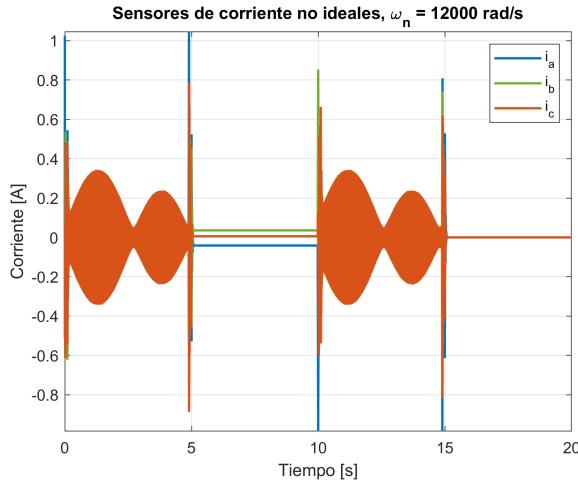


Figura 100: Curvas de corrientes - sensor de posición con $\omega_n = 12000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

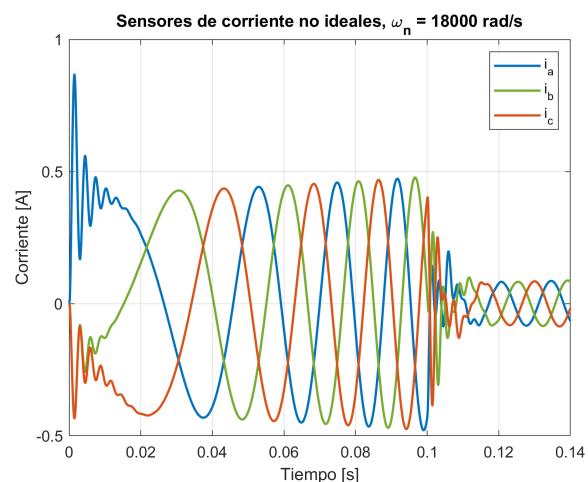
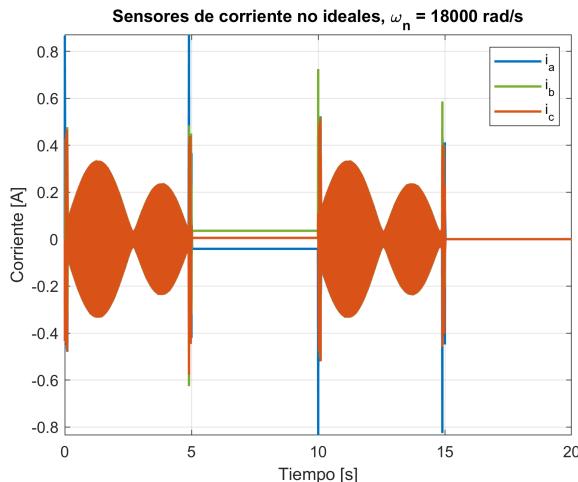


Figura 101: Curvas de corrientes - sensor de posición con $\omega_n = 18000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

En el caso de las corrientes, el desempeño del sistema es mejor para $\omega_n = 18000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, pero con $\omega_n = 12000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ aún se obtienen resultados aceptables.

Finalmente, para el sensado de temperatura, se ponen en contraste las mediciones obtenidas para constantes de tiempo de $\tau = 5 \text{ s}$ y $\tau = 0,05 \text{ s}$.

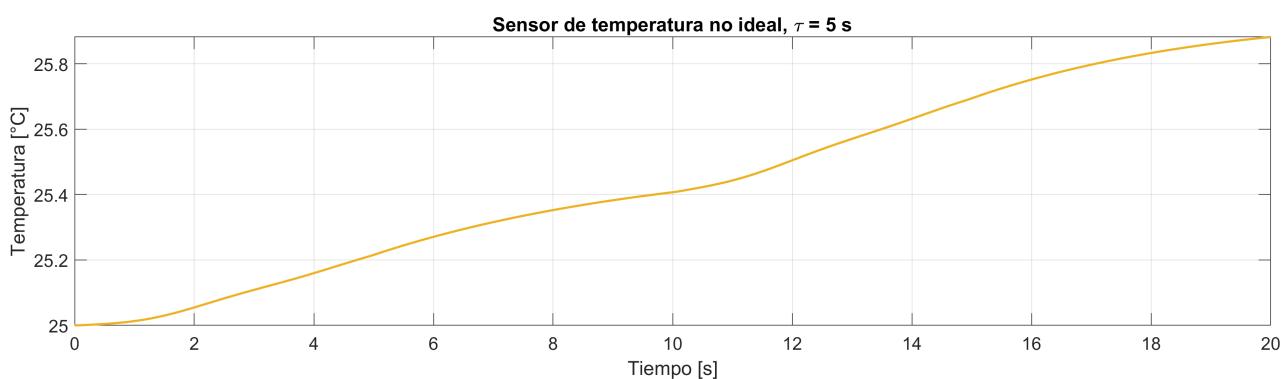
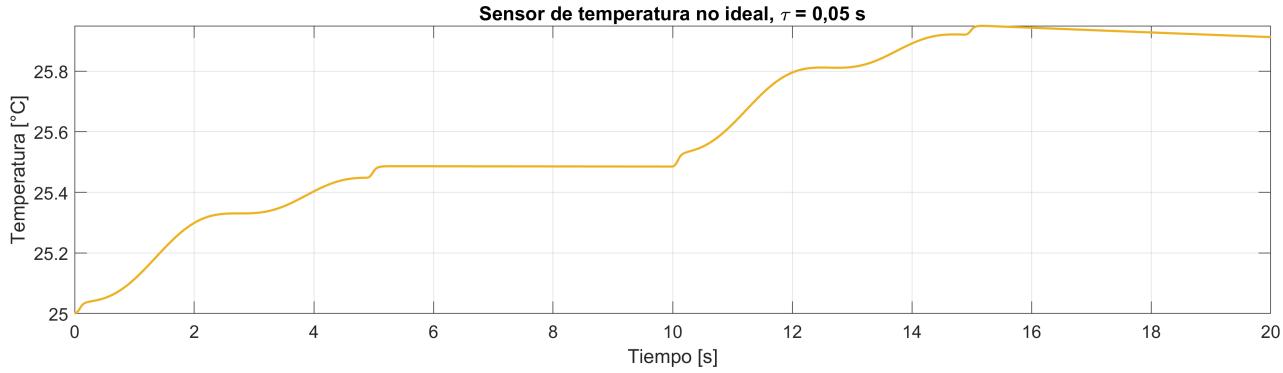


Figura 102: Temperatura medida - sensor de temperatura con $\tau = 5 \text{ s}$.

Figura 103: Temperatura medida - sensor de temperatura con $\tau = 0,05$ s.

La mejora en los resultados obtenidos al aumentar el ancho de banda del filtro que modela al sensor de temperatura es notable. La degradación crítica del sistema de control aparece para constantes de tiempo mayores a $\tau = 5$ s.

5.5.5. Comportamiento no ideal del modulador de tensión

Ahora, se analizan los efectos de considerar un modulador trifásico de tensión de respuesta no ideal. Este elemento es el encargado de convertir las consignas de tensión del modulador de torque en tensiones efectivas en los bobinados del estator de la máquina, a través de un inversor.

Para hacerlo, se desarrolla un modelo aproximado equivalente del inversor de tensión, que tiene en cuenta la saturación y adopta las características de un filtro pasa bajo de segundo orden con ganancia unitaria (ancho de banda limitado), implementado en el espacio de estados.

Se plantea:

- Saturación de tensión: $|v_{abcs}(t)| \leq \frac{\sqrt{2} \cdot V_{sl-max}}{\sqrt{3}}$
- Ancho de banda de tensión v_{abcs} : Modelo LP en SS de 2º orden, con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\zeta = 1$.

El modelo en el espacio de estados del filtro LP de 2º orden fue presentado en la Ec. 131. Para implementar el modulador de tensión, deben considerarse los valores de ω_n y ζ mencionados anteriormente. La saturación se incorpora mediante un bloque saturador a la salida del filtro, con rango $-39,192$ V - $39,192$ V.

Se realiza una simulación en las mismas condiciones que se consideraron para analizar el comportamiento no ideal de los sensores. Los resultados obtenidos para los parámetros propuestos en la guía de trabajo se muestran en las figuras que siguen.

En primer lugar, se presenta lo que ocurre con la posición angular de la máquina medida, junto con su estimación y la consigna dada.

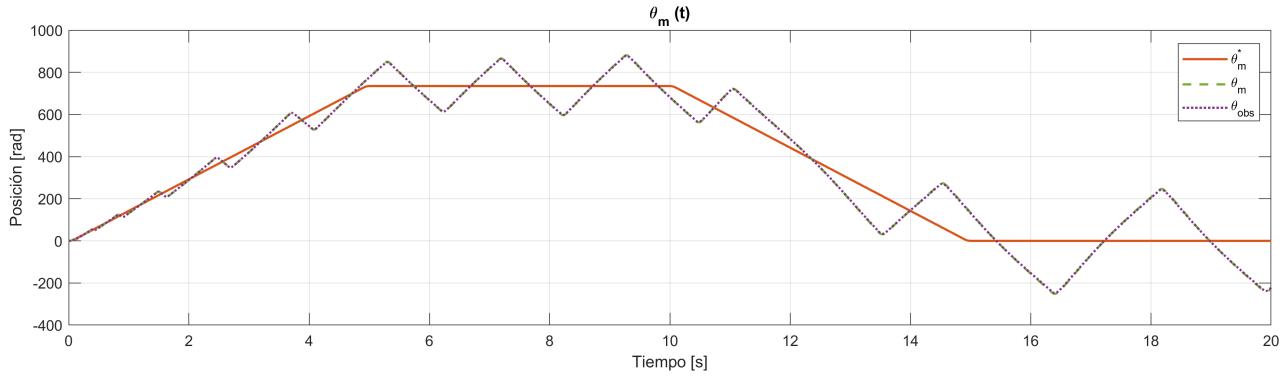
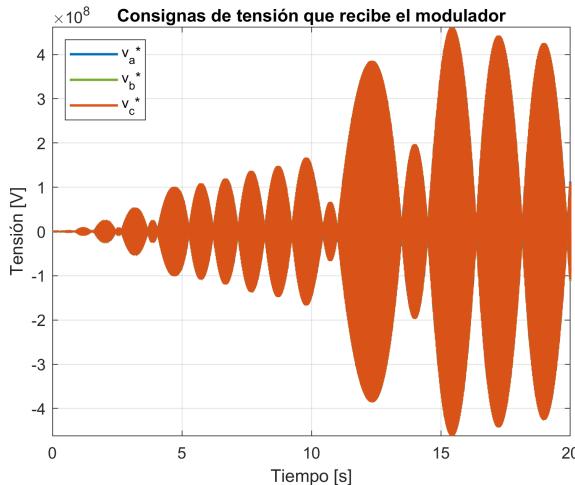


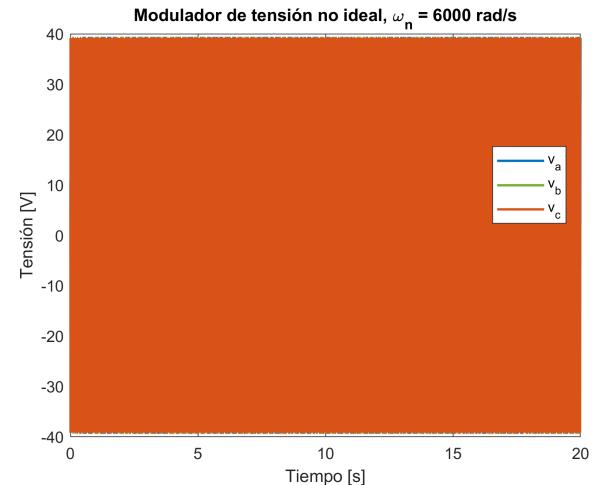
Figura 104: Curvas de posición - modulador de tensión con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Se puede observar cómo la inclusión de los efectos no ideales del modulador de tensión, considerando los parámetros preliminares, produce un seguimiento deficiente de la consigna de posición, lo que da lugar a picos y quiebres en la Fig. 104. Esto genera un ruido considerable en la velocidad, lo que provoca grandes aceleraciones y, en consecuencia, magnitudes elevadas de torque. A continuación, se muestran los efectos que estos torques excesivos tienen sobre las tensiones y corrientes del sistema.

En la Fig.105 se muestra que se generan consignas de tensión de grandes magnitudes, superiores a la capacidad de entrega del modulador. Esto provoca que el modulador se sature dentro de sus valores máximos y mínimos, comportándose de manera similar a un interruptor tipo on/off.



(a) Consignas de tensiones v_{abc}^* .



(b) Tensiones v_{abc} a la salida del modulador de tensión.

Figura 105: Curvas de tensiones - modulador de tensión con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Por otro lado, en la Fig.106 se observa que las corrientes en las bobinas del estator superan los valores admisibles presentados en la Sección 5.5.1.

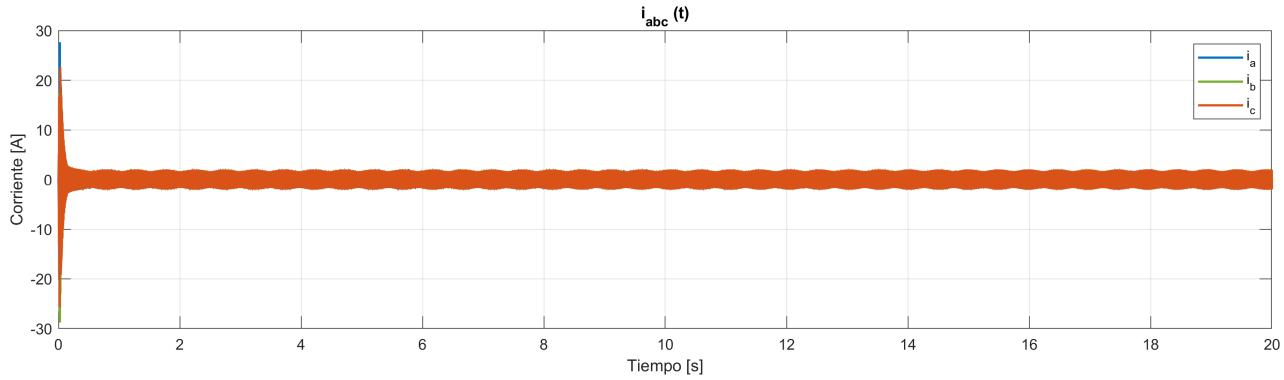


Figura 106: Curvas de corrientes - modulador de tensión con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Finalmente, en la Fig. 107 se muestran los efectos que las grandes corrientes tienen sobre la temperatura de los devanados del estator. Los valores excesivos de temperatura generan las consecuencias descritas en la Sección 5.5.3, que son inaceptables y peligrosas debido a la degradación del aislamiento de las bobinas.

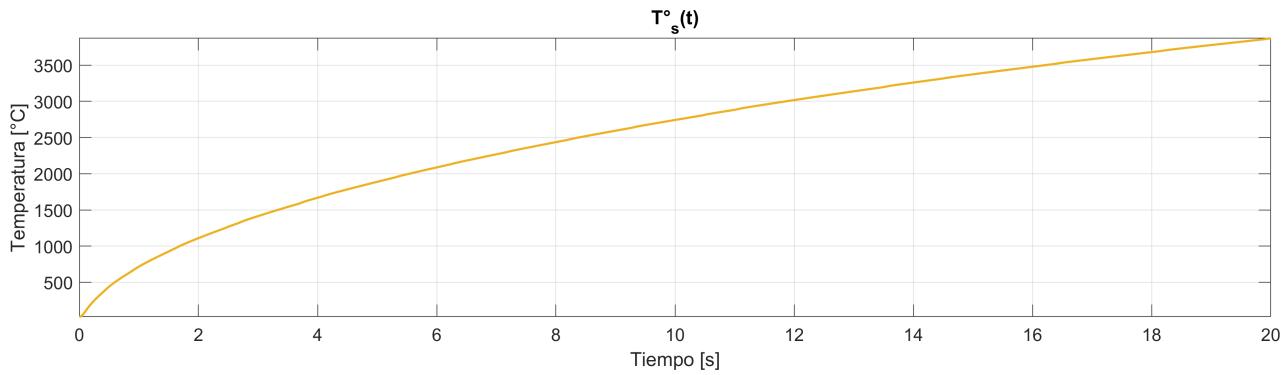


Figura 107: Temperatura medida - modulador de tensión con $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Ante los inconvenientes mencionados, se procede como se hizo para los sensores, y se prueba aumentar la frecuencia de corte del modulador de tensión. En este caso, se encuentran resultados óptimos considerando cuatro veces la frecuencia inicial, es decir, $\omega_n = 24\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

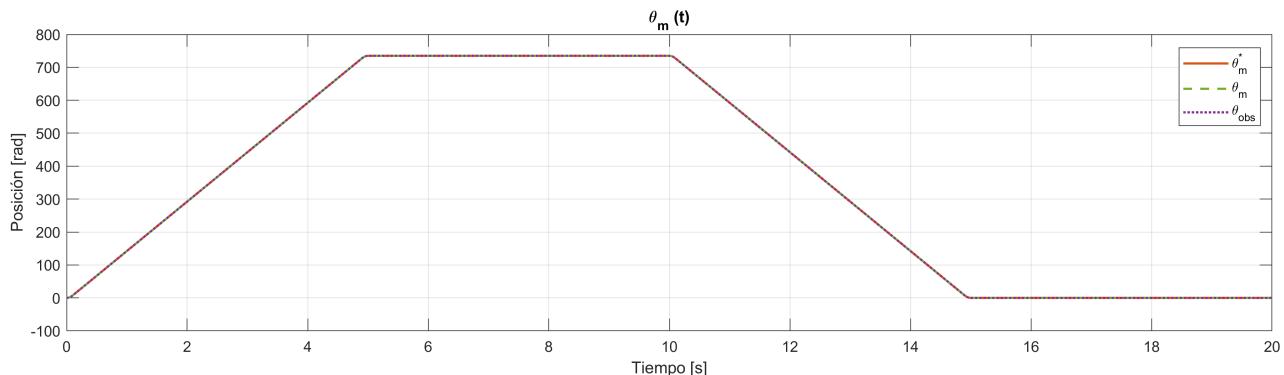
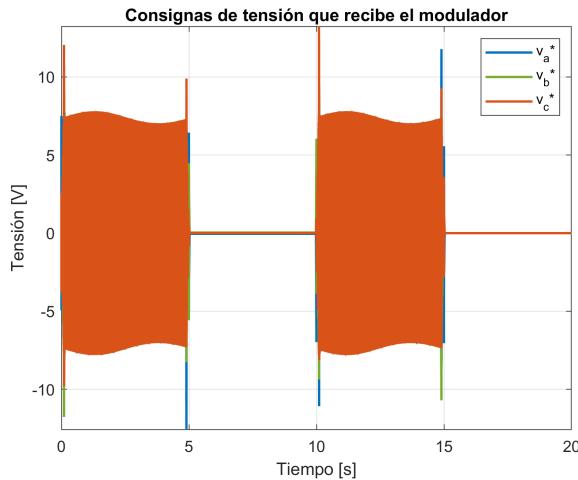
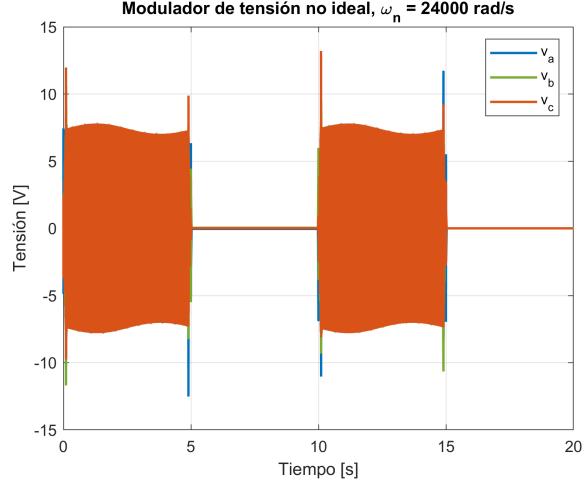


Figura 108: Curvas de posición - modulador de tensión con $\omega_n = 24\,000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



(a) Consignas de tensiones v_{abc}^* .



(b) Tensiones v_{abc} a la salida del modulador de tensión.

Figura 109: Curvas de tensiones - modulador de tensión con $\omega_n = 24000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

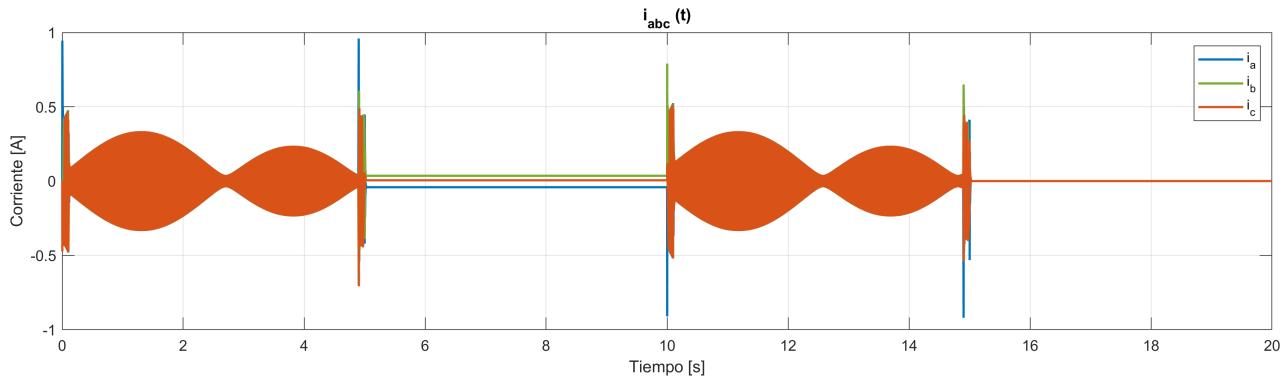


Figura 110: Curvas de corrientes - modulador de tensión con $\omega_n = 24000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

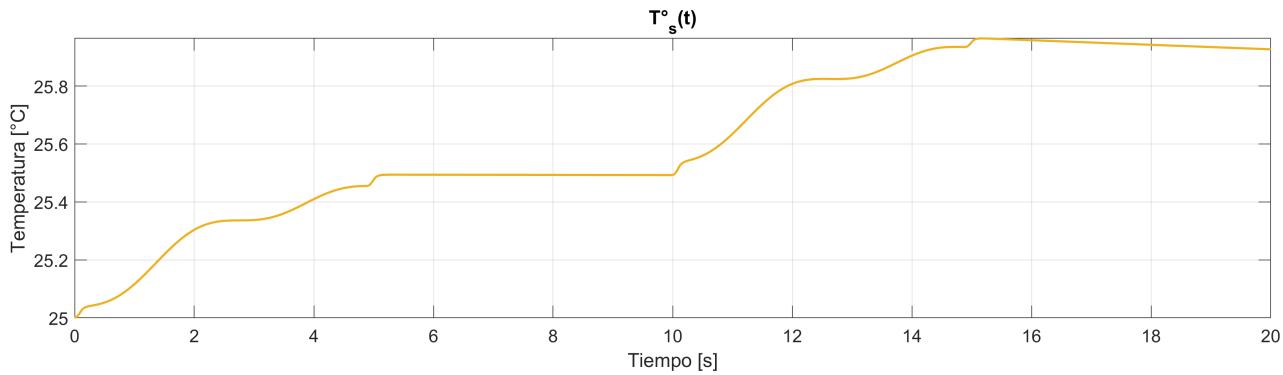


Figura 111: Temperatura medida - modulador de tensión con $\omega_n = 24000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Al comparar los resultados obtenidos al aumentar la frecuencia con los planteados inicialmente, se observa un buen seguimiento del perfil de posición, como se muestra en la Fig.108. Las tensiones de consigna ya no saturan el modulador, como se evidencia en la Fig.109, y la corriente se mantiene dentro de valores aceptables, según la Fig.110. Además, la temperatura se mantiene en rangos adecuados, tal como se muestra en la Fig.111. En general, los inconvenientes se resuelven mediante la implementación de sensores y un modulador de tensión más rápidos, con un mayor ancho de banda.

6. Versión final

6.1. Modelo de la planta y el controlador completo en tiempo continuo

El modelo NL de la planta, junto con los sensores y el modulador de torque no ideales, y el controlador completo con todas las etapas de control integradas se muestra en la Fig. 112.

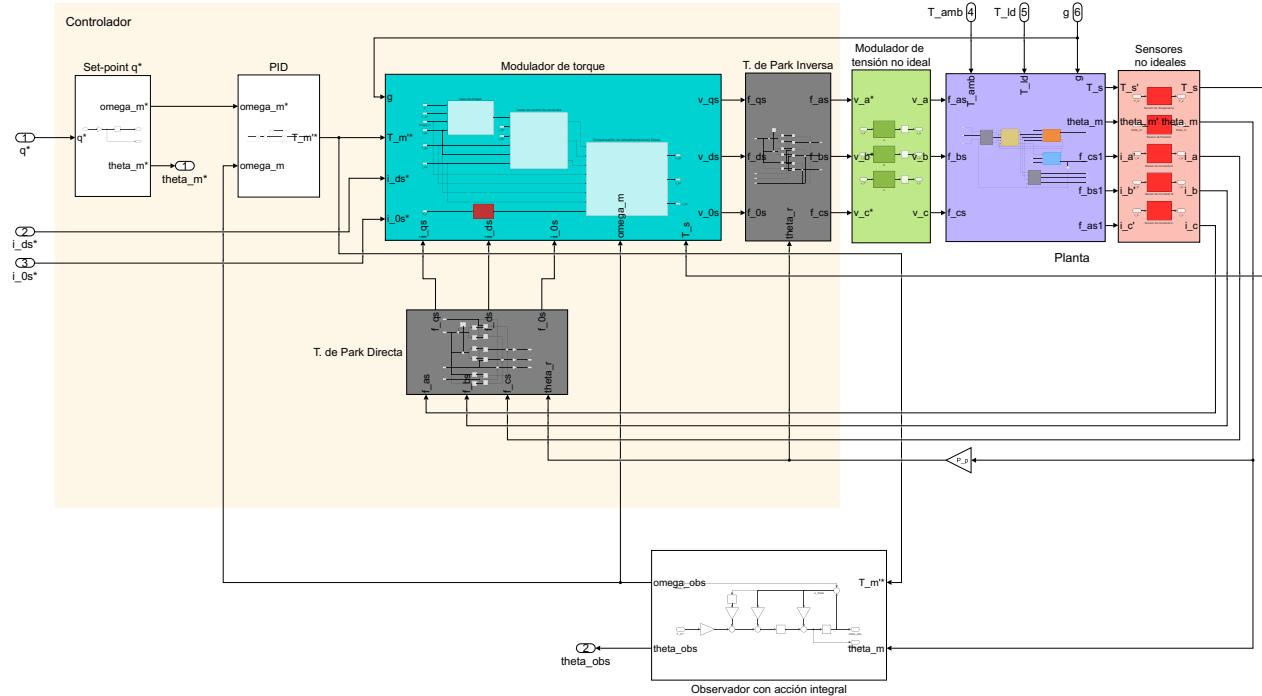


Figura 112: Diagrama de bloques del modelo completo con modificaciones y mejoras.

6.2. Discretización del controlador

Como paso final en este trabajo, se procede a discretizar el controlador diseñado. Esta etapa es fundamental para su implementación en un sistema físico real, ya que el controlador debe ser programado en un dispositivo de cómputo digital, como un microcontrolador, el cual opera en el dominio discreto del tiempo.

Para ello, se utiliza el método de Tustin o transformación bilineal, con un período de muestreo T_s que se define más adelante. Esto permite reemplazar los bloques de integración continua por integradores numéricicos equivalentes dentro del controlador.

En primer lugar, para aplicar el método de Tustin, se parte desde la expresión del método de integración trapezoidal:

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T_s}{2} \cdot (u[n] + u[n-1]) \quad (\text{Ec. 134})$$

Si se aplica la transformada z, se obtiene:

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_s}{2} \cdot (U(z) + U(z) \cdot z^{-1}) \quad (\text{Ec. 135})$$

La expresión anterior puede representarse mediante un diagrama de bloques, como se muestra en la Fig. 113. En este caso, u representa a la variable sin integrar, e y a la variable integrada.

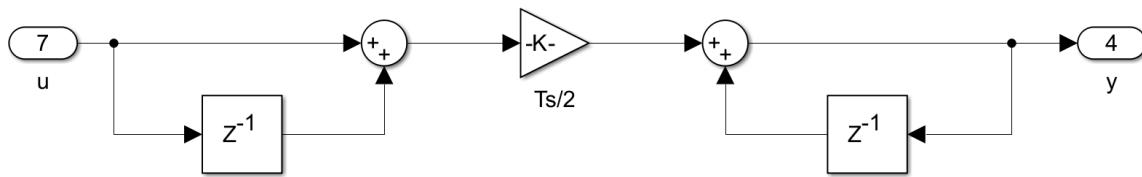


Figura 113: Bloque integrador discreto.

Lo anterior se implementa en controlador de movimiento PID y en el observador de estado como se indica en las figuras 114 y 115.

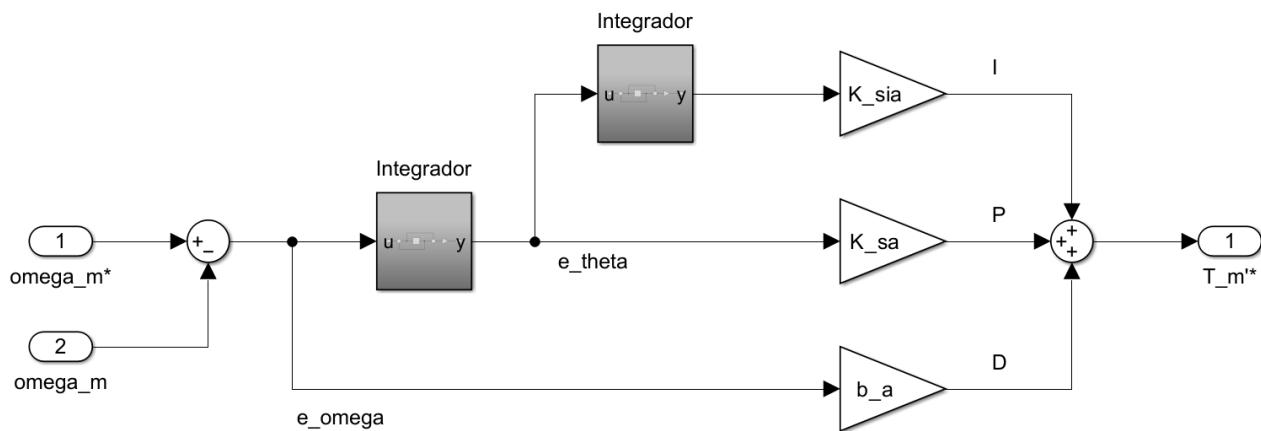


Figura 114: Controlador de movimiento PID discreto.

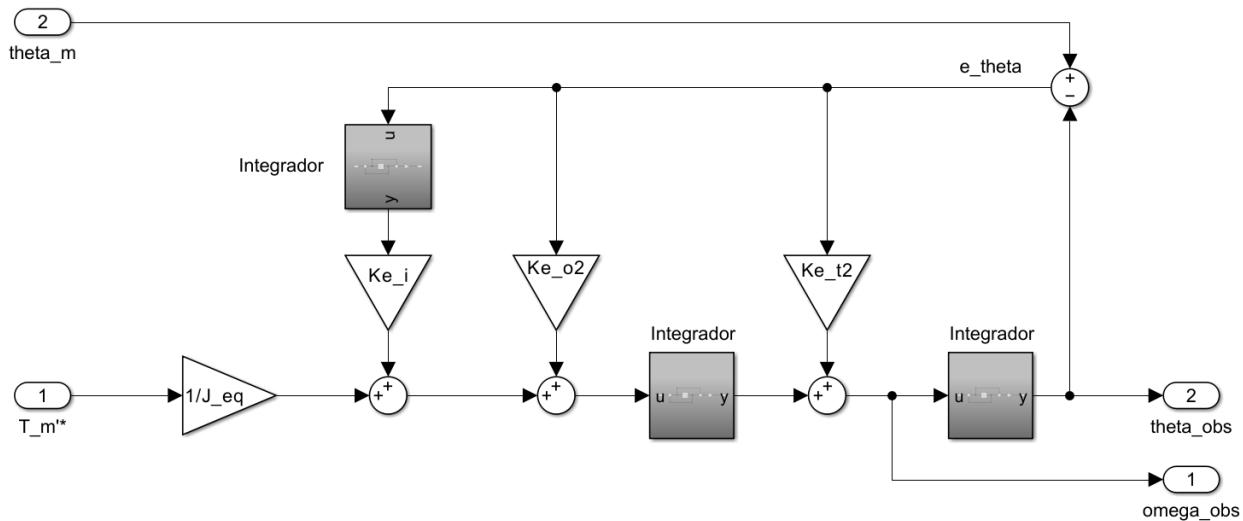


Figura 115: Observador de estados discreto.

Adicionalmente, se deben agregar al sistema retenedores de orden cero (ZOH) en las señales provenientes de los sensores que ingresan al controlador, así como en las salidas del mismo. Estos bloques hacen que

los valores medidos se mantengan constantes entre dos instantes de muestreo consecutivos, permitiendo realizar las aproximaciones discretas necesarias.

El diagrama de bloques del controlador discretizado se presenta en la Fig. 116.

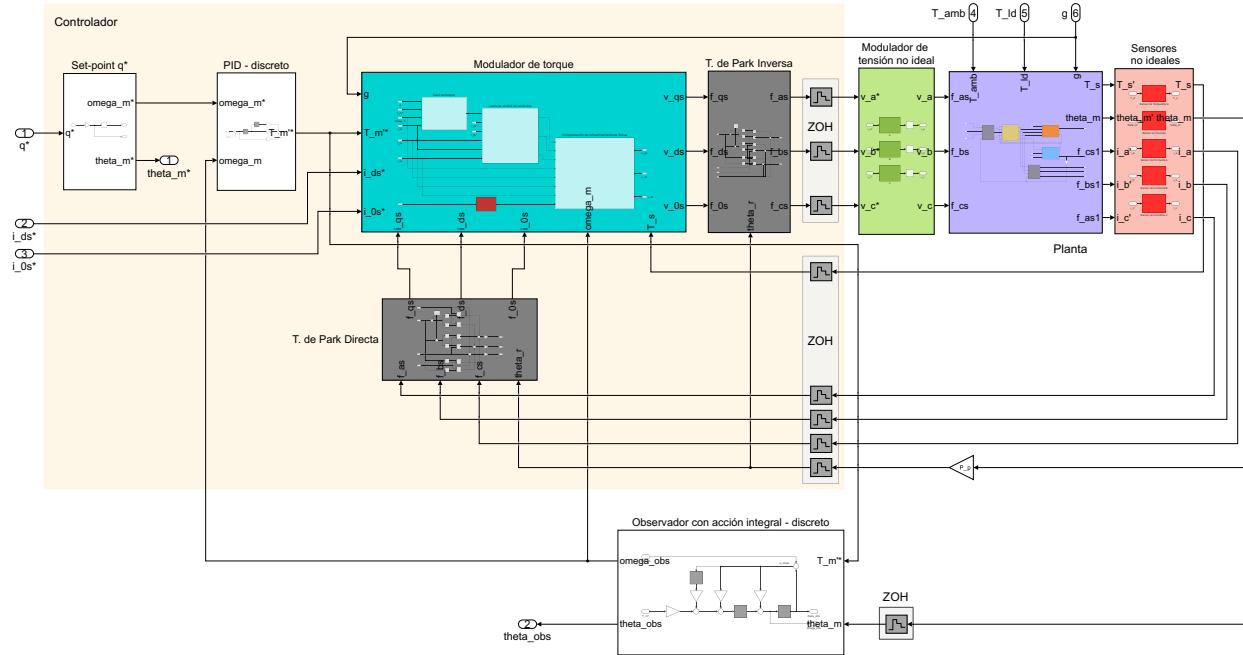


Figura 116: Diagrama de bloques del modelo completo con el controlador discretizado.

Nótese que no se han incluido retenedores luego de las entradas de referencia. Esto se debe a que se considera que el generador de referencias le entrega al controlador las consignas en formato digital.

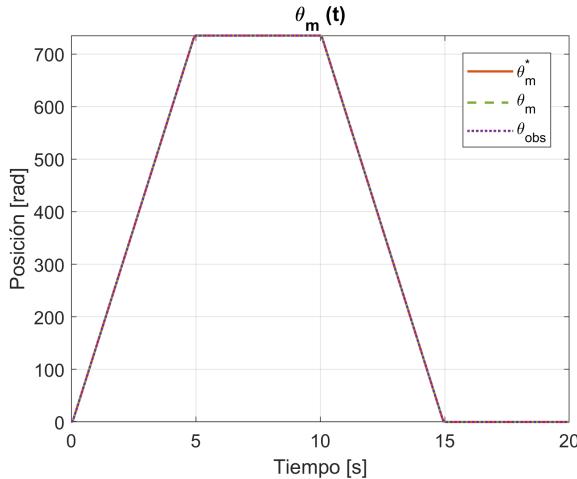
Para seleccionar adecuadamente el tiempo de muestreo T_s a utilizar en los bloques de integración, se sigue un criterio práctico basado en el teorema de muestreo de Nyquist. Si bien este establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la mayor frecuencia presente en el sistema para evitar pérdida de información, en aplicaciones de control se recomienda adoptar una frecuencia significativamente mayor (típicamente entre 10 y 20 veces dicha frecuencia) para garantizar una representación confiable de la dinámica del controlador.

En este caso, el lazo de control más rápido corresponde al de las corrientes, cuyo ancho de banda fue diseñado en aproximadamente 796 Hz. Por lo tanto, se adopta una frecuencia de muestreo:

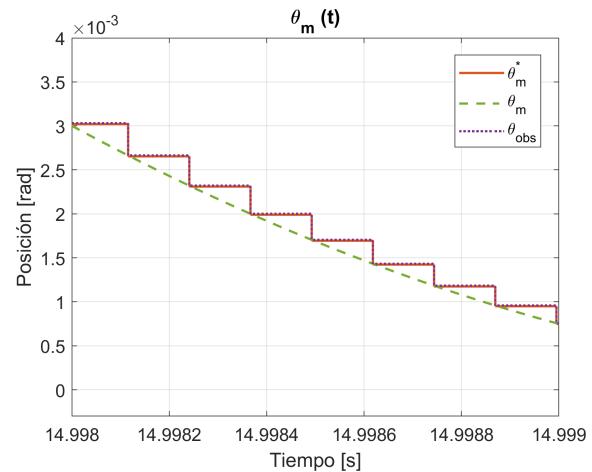
$$f_s = 10 \cdot 796 \text{ Hz} \implies T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10 \cdot 796 \text{ Hz}} \approx 1,256 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (\text{Ec. 136})$$

Finalmente, para verificar el comportamiento del sistema de control en tiempo discreto, se repiten las simulaciones realizadas en la Sección 5.5.5 y se observa cómo responden las variables del sistema. Esto permite analizar si los resultados obtenidos bajo discretización son comparables con los obtenidos en simulación continua.

La posición angular de la máquina medida por el sensor, junto con su estimación y la consigna entregada al sistema, se muestran en la Fig. 117.



(a) Curvas de posición.



(b) Acercamiento.

Figura 117: Respuesta del controlador discreto ante la consigna de movimiento dada.

Se comprueba que el sistema mantiene un buen desempeño, logrando un seguimiento satisfactorio de la consigna de posición sin degradación notable. Además, pueden verse los escalones producidos por la discretización en las variables $\theta_m^*(t)$ y $\theta_{obs}(t)$, y no en la variable de estado que se mide ($\theta_m(t)$), como es de esperarse.

Las curvas de tensión a la salida del modulador, las corrientes sensadas y la temperatura se muestran a continuación.

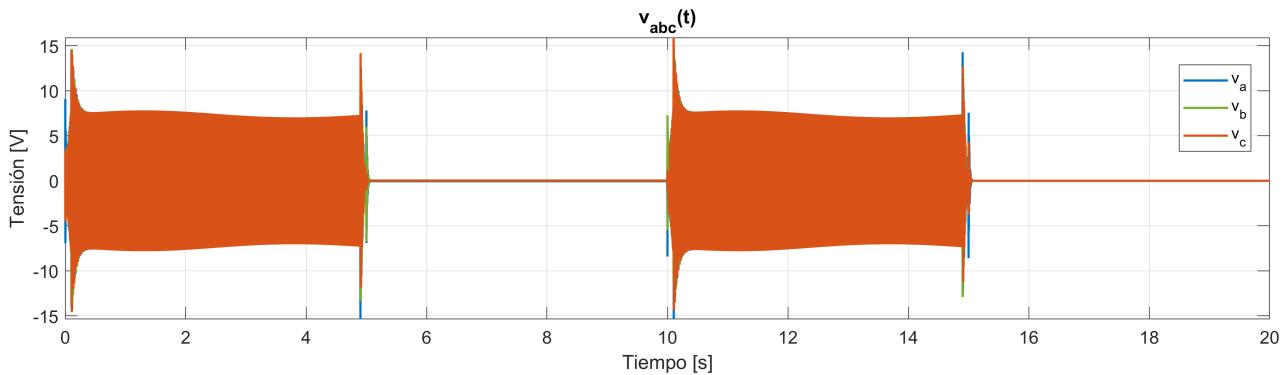


Figura 118: Curvas de tensiones reales - controlador discreto.

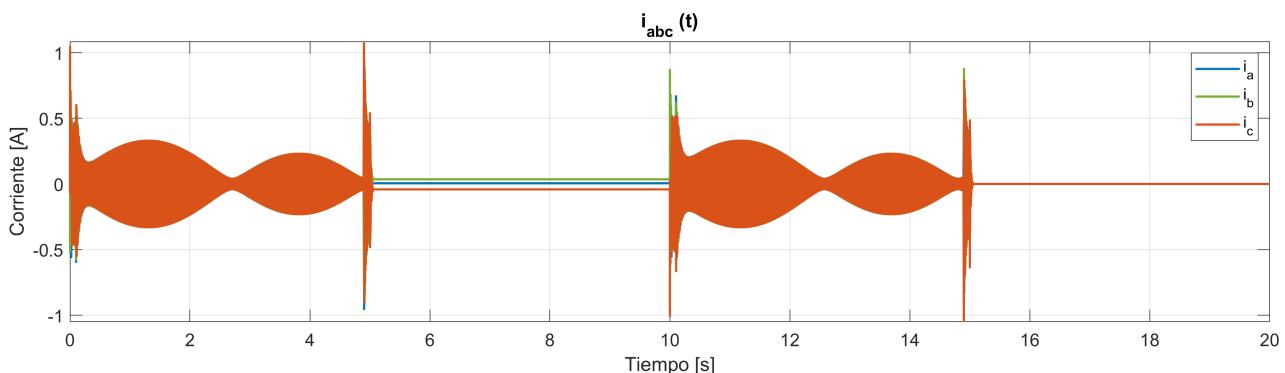


Figura 119: Curvas de corrientes reales - controlador discreto.

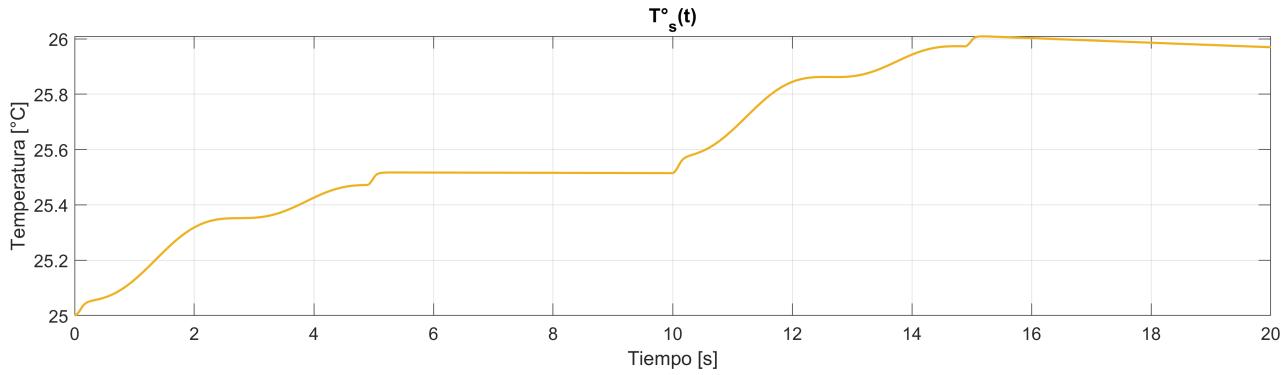


Figura 120: Temperatura medida - controlador discreto.

Al comparar las figuras 118, 119 y 120 con las figuras 109, 110 y 111, respectivamente, se observa que las formas de las curvas obtenidas en la simulación con el controlador discreto reproducen adecuadamente las del controlador continuo. Esto permite concluir que la discretización ha preservado la dinámica del sistema, manteniendo la integridad del controlador original.

7. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue alcanzado exitosamente, habiéndose logrado diseñar e implementar un sistema de control automático robusto para el posicionamiento y el movimiento de un brazo manipulador robótico de un grado de libertad.

Las simulaciones realizadas en distintos escenarios operativos permitieron validar la eficacia del controlador tanto en el seguimiento de consignas de movimiento como en el rechazo de perturbaciones, sin comprometer la integridad del sistema ni exceder las exigencias mecánicas y térmicas de la máquina. Adicionalmente, estas pruebas hicieron posible identificar condiciones de operación que deben ser consideradas cuidadosamente en aplicaciones reales, tales como la presencia de cargas cíclicas o muy pesadas, especialmente en ambientes con temperaturas elevadas.

Se destaca la incorporación de modelos no ideales de los sensores de medición y del modulador de tensión, los cuales permitieron obtener una representación más realista del comportamiento del sistema. A partir de ello, fue posible derivar conclusiones respecto a las características mínimas que deberían cumplir los componentes reales del accionamiento para preservar el desempeño del controlador diseñado.

Como mejoras a considerar para trabajos futuros, con una aplicación real en mente, se propone incluir la dinámica de los sensores y actuadores seleccionados para el sistema en el modelado de la planta, a fin de compensar sus efectos desde la etapa de diseño del controlador. Asimismo, podrían incorporarse cambios orientados al rechazo de perturbaciones más complejas, como rampas o paráolas, en función de los requerimientos específicos de la aplicación final.

Referencias

- [1] Gabriel L. Julián. *Proyecto Global Integrador: Guía de Trabajo - Control de Accionamiento de CA con Motor Síncronico de Imanes Permanentes*. UNCuyo - Ing. en Mecatrónica, 2024.
- [2] G. Franklin, J. Powell y A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7ma Edición. Pearson, 2015.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. 5ta Edición. Prentice Hall, 2010.
- [4] Bahram Shafai y Mehrdad Saif. “Proportional–Integral Observer in Robust Control, Fault Detection, and Decentralized Control of Dynamic Systems”. En: *Control and Systems Engineering*. Vol. 27. Studies in Systems, Decision and Control. Springer, Cham, 2015, págs. 13-43. DOI: 10.1007/978-3-319-14636-2_2.