IUT DE COLMAR

R314

Année 2022-23

Analyse de Fourier

MARTIN BAUMGAERTNER

13 janvier 2023

Table des matières

1 CM 1 - 21 septembre 2022

1.1 Définition

Un signal est dit périodique lorsque que nous pouvons retrouver un travers un signal un zone répétée.
La fréquence d'un signal peut se calculer avec : $\nu = f = \frac{1}{T}$

$f(t)$ = signal périodique de période T. Et, on l'écrira de cette manière :

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$

Les différents harmoniques de rang n peut s'écrire :
$a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) = hn(t)$

Le calcul des coefficients de Fourier :
$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\triangle} f(t)dt$ = valeur moyenne

Ces deux formules servent car nous pouvons calculer les données a_n et b_n pour la grosse formule au dessus avec le petit 1 :
- $a_n = \frac{2}{T} \int_{\triangle} f(t)cos(n\omega t)dt$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_{\triangle} f(t)sin(n\omega t)dt$

1.2 Exemple

Soit le signal :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -\pi \leq t \leq 0 \\ 2 \text{ si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

1.2.1 Tracer le signal

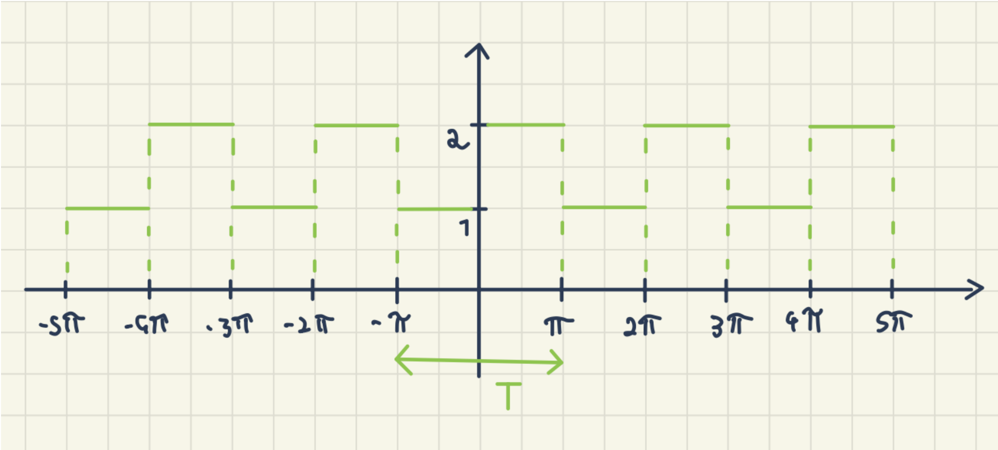


FIGURE 1 – La courbe 1

1.2.2 Calcul de sa valeur moyenne

On calcule d'abord $a_O = \frac{1}{T}\int_{\triangle} f(t)dt$:

$\Rightarrow T = 2\pi$

$\Rightarrow \triangle = [-\pi; \pi]$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2T}(\int_{-\pi}^{0} 1dt + \int_{0}^{\pi} 2dt$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}([t]_{-\pi}^{0} + [2t]_{0}^{\pi})$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}(0 - (-\pi) + (2\pi - 0))$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}(\pi + 2\pi) = \frac{1}{2\pi} = \frac{3}{2}$

1.2.3 Calcul des coefficients de Fourier

Premièrement, on calcule a_n et b_n :

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

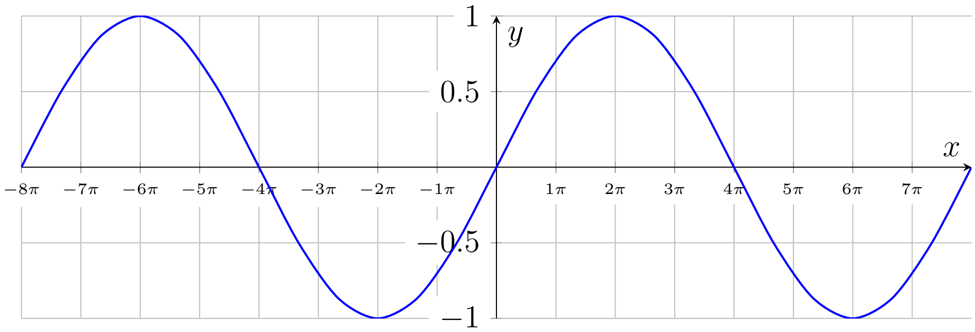
$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{\triangle} f(t)cos(nt)dt$

$\Rightarrow a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} 1cos(nt)dt + \int_{0}^{\pi} 2cos(nt)dt]$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}([\frac{sin(nt)}{n}]_{-\pi}^{0} + [\frac{2sin(nt)}{n}]_{0}^{\pi})$

$\Rightarrow a_n = 0$



La fonction sinus est impaire car $f(-x) = -f(x)$

1.2.4 Donner sa décomposition en série de Fourier

1.2.5 Donner les 4 premières harmoniques

1.2.6 Trucs et astuces

— Si $f(t)$ est pair alors les b_n sont nuls
— Si $f(t)$ est impair alors a_0 les a_n sont nuls
— Si $f(t)$ est quelconque mais que $f(t) - a_O$ est impair alors les a_n sont nuls

2 CM 2 - 13 janvier 2023

2.1 Intégrales

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} sin(2t)dt$

La primitive de $sin(t)$ est $-cos(t)$

Sauf que dans notre cas ça ne s'applique pas, il va donc falloir revenir sur le sinus d'une variable :
on pose $u = 2t$

$du = u'dt$

$du = 2t$

$\frac{du}{2} = dt$

$I = \int sin(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int sin(u)du$

$\frac{1}{2}[-cos(u)] = \frac{1}{2}[-cos(2t)]_{-\pi}^{\pi} = [\frac{-cos(2t)}{2}]_{-\pi}^{\pi} = 0$

L'intégral d'une fonction impaire sur l'intervalle symétrique par rapport à 0 est nulle.