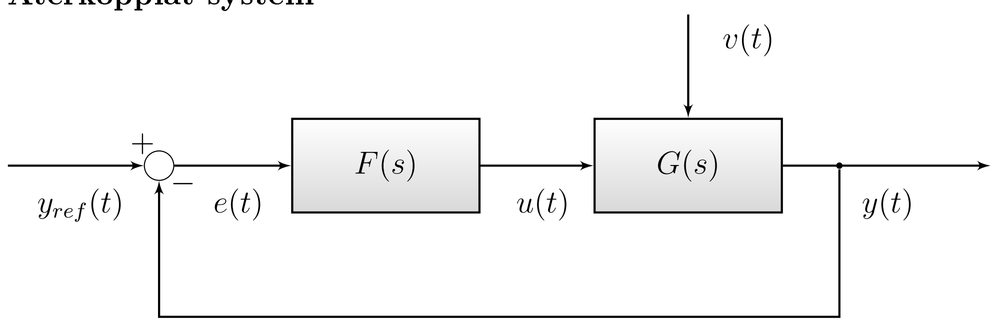
EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 3

Martin Biel
mbiel@kth.se

31 augusti 2016

Repetition

- **Återkopplat system**



Reglerfelet: $E(s) = Y(s) - Y_{ref}(s)$
Regulator: $F(s)$

- **Öppna systemet:** $G_0(s) = F(s)G(s)$
- **Slutna systemet:** $G_c(s) = \dfrac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$
- **PID-Regulator:** $F_{PID}(s) = K_P + \dfrac{K_I}{s} + K_D s$

Andra ordningens system

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Inför:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{a_2} \text{ - Egenfrekvens} \\ \zeta &= \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \text{ - Relativ dämpning} \\ K &= \frac{b}{a_2} \text{ - förstärkning} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Identifiera systemets poler

$$s^* = -\zeta\omega_0 \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Notera att vi får komplexkonjugerade poler då $\zeta < 1$.
Kom ihåg att polernas avstånd från origo påverkar systemets hastighet och att storleken på imaginärdelen påverkar systemets svängighet/dämpning.

Identifiera belopp och argument:

$$\begin{aligned} |s^*| &= \sqrt{(\zeta\omega)^2 + \omega^2(1 - \zeta")} = \omega_0 \\ \arg s^* &= \phi, \text{ där } \cos\phi = \frac{\zeta\omega}{\omega} = \zeta \end{aligned}$$

ω_0 relaterar således till systemets hastighet då dess värde avgör polernas avstånd från origo. Kortfattat gäller:

- ω_0 stor - snabbt system
- ω_0 liten - långsamt system

ζ relaterar till systemets dämpning då dess värde avgör hur stor imaginärdel polerna får. Kortfattat gäller (för $\zeta < 1$:

- ζ stor - svagt dämpat systemet (svängigt)
- ζ liten - start dämpat system (inte svängigt)

För $\zeta > 1$ erhålls ett starkt dämpat system som beter sig likt ett första ordningens system (fast med två exponentialtermer). För $\zeta = 1$ erhålls ett kritiskt dämpat system med överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{(\frac{s}{w_0} + 1)^2}$$

Dubbelpolen i $-\omega_0$ ger för $\omega_0 > 0$ upphov till ett system som rör sig tillbaka till jämvikt fortast möjligt för ett andra ordningens system.

Uppgift 3.2

Givet från uppgift 3.1 är det slutna systemet

$$H(s) = \frac{2F(s)}{s(1+5s) + 2F(s)} H_{ref}(s)$$

a)

Vilka poler får systemet ifall $F(s)$ är en P-regulator med $K_P = 1$?

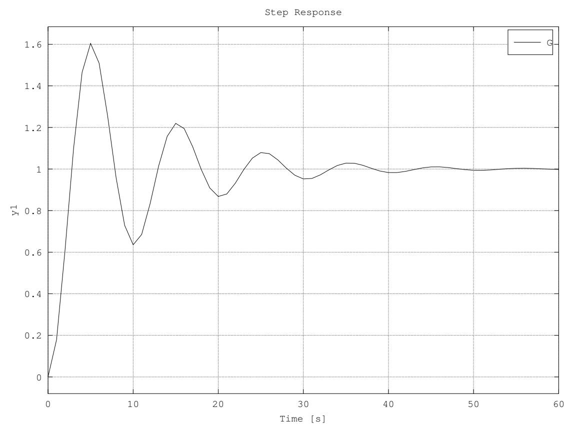
Nämnarpolynomet för det slutna systemet ges av

$$s(1+5s) + 2F(s) = 5s^2 + s + 2$$

Nollställena till detta polynom ges av

$$s^* = -0.1 \pm 0.62i$$

Stegsvaret för det resulterande systemet är återgivet i Figur 1.



Figur 1: Stegsvar för systemet då P-reglering används

Notera att det inte förekommer något stationärt fel, även fast vi inte inkluderande en integrator i $F(s)$. Ifall det nominella systemet $G(s)$ (utan reglering) inehåller en ren integrering så erhålls inget stationärt fel för det slutna systemet. Det kvittar alltså ifall integratorn är en del av regulatorn eller det givna systemet. För att se varför, undersök hur referenssignalen $H_{ref}(s)$ överförs till felet $E(s)$:

$$E(s) = H_{ref}(s) - H(s) = H_{ref}(s) - G(s)U(s) = H_{ref}(s) - F(s)G(s)E(s)$$
$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} H_{ref}(s)$$

Använd slutvärdessatsen då $H_{ref}(s)$ är ett stegsvar:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1 + F(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

Härav följar att ifall antingen $F(s) \to \infty$ eller $G(s) \to \infty$ då $s \to 0$ så kommer $e(t) \to 0$ då $t \to \infty$. Således räcker det med att en ren integrering förekommer i antingen $F(s)$ eller $G(s)$ för att det stationära felet ska gå mot noll.

b)

Använd en PD-regulator så att den relativa dämpningen blir större än $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nu är $F(s) = K_P + K_D s$. Nämnarpolynomet ges nu istället av

$$s(1+5s) + 2(K_P + K_D s) = s^2 + \frac{1+2K_D}{5}s + \frac{2K_P}{5}$$

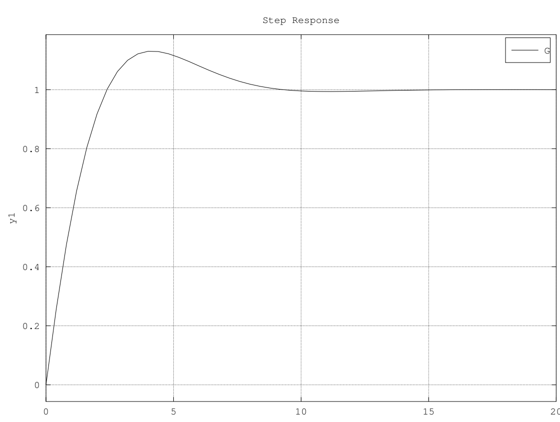
Identifiera egenfrekvensen och den relativa dämpningen $(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K_P}{5}}$$
$$\zeta = \frac{\frac{1+K_D}{5}}{2\sqrt{\frac{2K_P}{5}}} = \frac{1+2K_D}{2\sqrt{10K_P}}$$

Notera att K_D inte påverkar ω_0. Det är således möjligt att först fixera K_P så att en önskad snabbhet uppnås och sedan välja K_D för att reducera överslängen i stegsvaret. Antag att $K_P = 1$, vilket här bara är ett godtyckligt val.

$$\frac{1+2K_D}{2\sqrt{10}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow K_D > \frac{\sqrt{20}-1}{2} \approx 1.7$$

Med de valda parameterna $K_P = 1$ och $K_D = 1.7$ erhålls stegsvaret i Figur 2.



Figur 2: Stegsvar för systemet då PD-reglering används

Jämfört med Figur 1 är det tydligt att systemet nu blivit mer dämpat.