EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 9

Martin Biel
mbiel@kth.se

22 september 2016

Repetition

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Styrbarhet

- Ett tillstånd x^* är *styrbart* om det finns en insignal $u(t)$ som tar tillståndsvektorn från $x(0) = 0$ till x^* på ändlig tid.
- $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ - Styrbarhetsmatrisen
- De styrbara tillstånden ligger i span$\{\mathcal{S}\}$.
- Systemet är *styrbart* om alla tillstånd är styrbara, dvs om span$\{\mathcal{S}\} = \mathbb{R}^n$ (alternativt ifall $\mathcal{S}$ har full rang, eller ifall $\det \mathcal{S} \neq 0$ om $\mathcal{S}$ är kvadratisk.

Observerbarhet

- Ett tillstånd $x^* \neq 0$ är *icke-observerbart* om utsignalen är identiskt noll ($y(t) \equiv 0$) då $x(0) = x^*$ och $u(t) \equiv 0$.

- $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ - Observerbarhetsmatrisen
- De icke-observerbara tillstånden ligger i $\ker \mathcal{O}$ (nollrummet till $\mathcal{O}$).
- Systemet är *observerbart* om det saknar icke-observerbara tillstånd, dvs $\ker \mathcal{O} = \emptyset$ (alternativt ifall $\text{span}\{\mathcal{O}\} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ har full rang, eller ifall $\det \mathcal{O} \neq 0$ om $\mathcal{O}$ är kvadratisk).

Uppgift 8.10

Bestäm dimenion för de styrbara och icke-observerbara underrummen. Bestäm även dessa underrum.

a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \end{pmatrix} x$$

Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{pmatrix}$$

Första och andra raden är linjärt beroende. Ifall en stryks är de återstående linjärt oberoende.
$\Rightarrow \dim \text{span}\{\mathcal{S}\} = 2$. Det styrbara underrummet spänns upp av två valfria linjärt oberoende kolumner i $\mathcal{S}$:

$$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Observerbarhet:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Ifall vi utför Gauss-elímినering kommer vi kunna svara på båda frågeställningarna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & -9 & -4.5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{span}\{\mathcal{O}\} = 2, \dim \ker \mathcal{O} = 1$
En basvektor för $\ker \mathcal{O}$ bestäms genom att införa $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ och substituera.

$$\Rightarrow \ker \mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vilket också spänner upp underrummet av icke-observerbara tillstånd.