EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 1

Martin Biel
mbiel@kth.se

31 augusti 2016

Introduktion

Reglerteknik - Berör analys och styrning av dynamiska system

Typiska problem:

- **Servoproblemet** - Styr ett system till ett givet tillstånd
- **Regulatorproblemet** - Bibehåll ett tillstånd under inverkan av störning

EL1000

- Klassisk reglerteknik
  - Analys: I frekvensplanet via Laplace-transformering
  - Reglering: Återkoppling från mätsignal $\rightarrow$ slutet system
  - Verktyg: Rotort, Nyquistkurvan, Bodediagram
  - PID-regulatorn
- Modern styrteori
  - Analys: I tidsdomänen på tillståndsform
  - Reglering: Tillståndsåterkoppling, polplacering, LQ

- Koncept: Stabilitet, styrbarhet, observerbarhet

- Även
  - Robusthet
  - Datormetoder i Matlab
  - Tidsdiskreta system

Teori

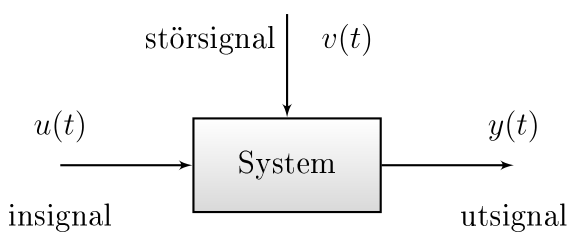
Dynamiskt system:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + u(t) \tag{1}$$

Signaler:

- utsignal, $y(t)$ - Det vi vill styra (ofta direkt/indirekt mätbar)
- insignal, $u(t)$ - Det vi kan kontrollera (styra systemet med)
- referenssignal, $r(t)$ - Det vi vill att systemet ska uppnå/följa
- störsignal, $v(t)$ - Det vi inte kan styra (ofta ej mätbar)

Blockdiagram:



Används för att representera dynamiska system. Hjälpsamt verktyg för att bestämma överföringsfunktioner för mer involverade reglersystem.

Begrepp:

- *Linjärt system*
  $u_1(t) \to y_1(t)$
  $u_2(t) \to y_2(t)$
  $\Rightarrow \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \to \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$
  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

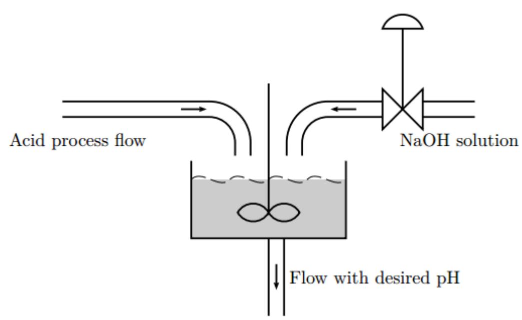
- *Kausal system*
  Utsignalen beror enbart på insignalens tidigare värden

- *Tids-invariant system*
  $u(t) \to y(t)$
  $\Rightarrow u(t-T) \to y(t-T) \forall T$
  Det spelar ingen roll **när** vi lägger på insignal utan **hur länge**.

- *SISO* - "single input single output"

Uppgift 2.11

a)



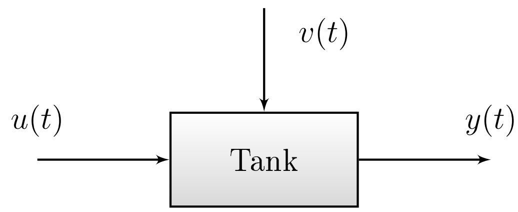
Figur 1: Syratank

$y(t)$ - pH värdet i utflödet
$u(t)$ - Inflödet av NaOH
$v(t)$ - Inflödet av syra

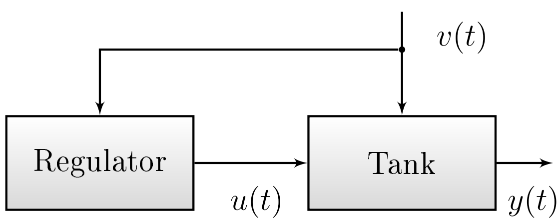
Linjärt? - Troligen inte (otrivial strömning under omrörningen)
Tids-invariant? - Troligen inte (möjligt att strömningen som uppstår utav omrör-

ningen är tidsberoende)
Kausalt? - Ja! (fysikaliskt system)
SISO? - Ja! (en insignal, en utsignal)

b)



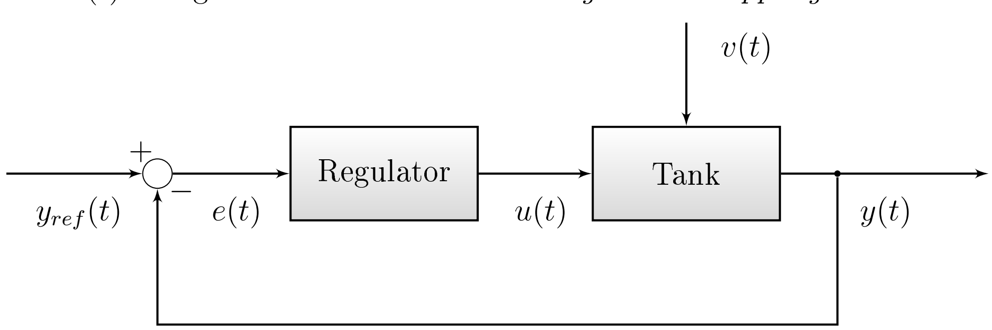
Ifall $v(t)$ är mätbar kan vi använda *Framkoppling*



Med framkoppling kan vi ibland helt eliminera störsignalen (mer om detta i kapitel 7).

+ Reagerar snabbt på ändringar i $v(t)$
− Kräver att $v(t)$ är mätbar
− Känslig för modellfel, kräver god information om processen

Ifall $v(t)$ inte går att mäta använder vi *Negativ återkoppling*



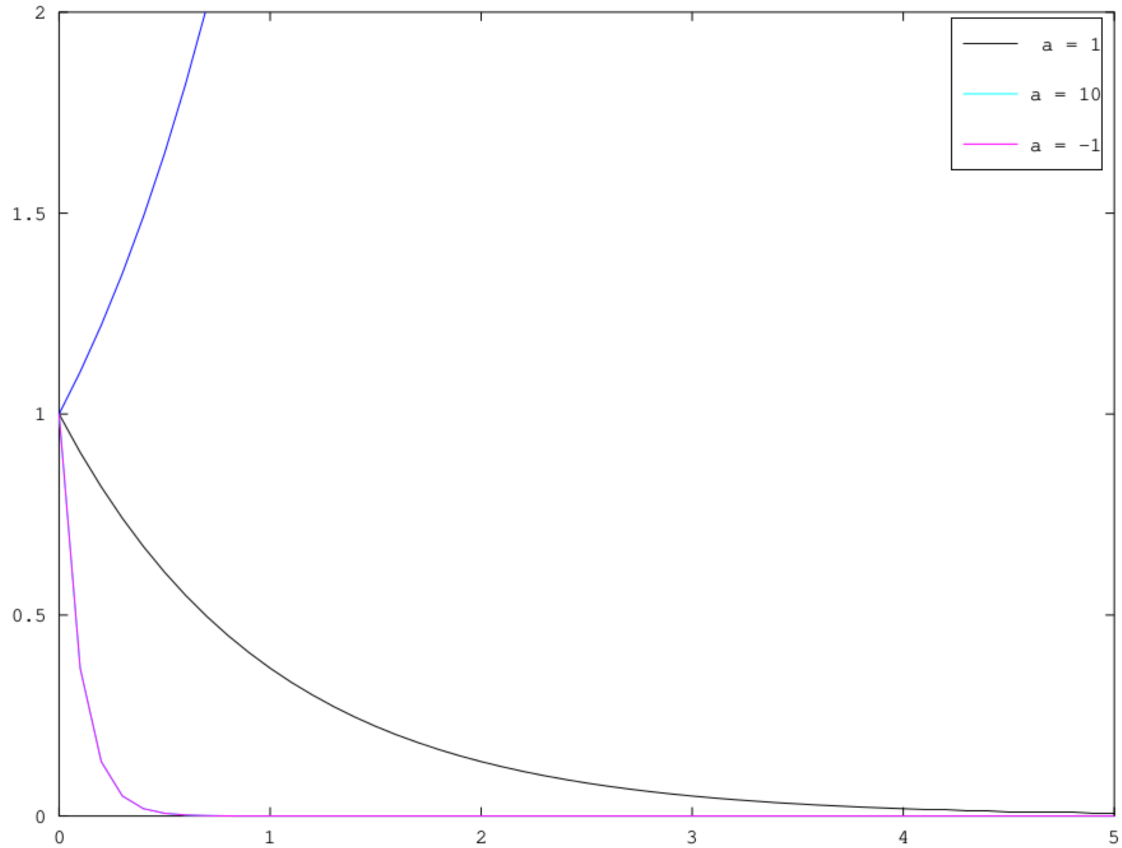
Den här typen av reglering är vanligast i den här kursen.

+ Kan stabilisera instabila system
+ Behöver inte mäta $v(t)$ för att dämpa störningen
− Långsammare störningsdämpning än framkoppling
− Känslig för mätbrus i $y(t)$

Teori

Differentialekvationen (1) har känd analytisk lösning

$$y(t) = y_0 e^{-at}$$



Figur 2: Solutions to (1) for different values of a

Det är tydligt att parametern a styr huruvida lösningen divergerar eller avtar. Storleken på a styr även hur snabbt lösningen går mot noll/oändligheten. Mer involverade differentialekvationer går ej att lösa analytiskt, men vi kommer kunna dra liknande slutsatser om stabilitiet och snabbhet via andra metoder.

Laplacetransformen

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t := Y(s)$$

(Kommer ofta användas som verktyg under kursens gång, repetera!)

Överföringsfunktion

"Överför en signal till en annan i Laplacedomänen"

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Ex)

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + u(t)$$

Antag att $y(0) = 0$ (systemet är inledningsvis i vila) och laplacetransformera:

$$\begin{aligned} sY(s) &= -aY(s) + U(S) \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{s+a}U(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Notera att överföringsfunktionen har ett polynom i nämnaren; detta gäller allmänt för linjära system!

För linjära system

- $G(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ där $P(s)$, $Q(s)$ polynom
- *Pol*: Nollställe till $Q(s)$, singularitet till $G(s)$
- *Nollställe*: Nollställe till $P(s)$

Poler är viktiga för stabilitet. Deras position i komplexa talplanet avgör ifall ett linjärt system är stabilt eller inte

- Poler strikt i vänster halvplan $\Leftrightarrow$ insignal-utsignal stabilt system
- Poler strikt i höger halvplan $\Leftrightarrow$ instabilt system
- Polernas avstånd från origo avgör hur snabbt systemet är
- Poler med imaginärdel ger upphov till svängningar

(insignal-utsignal stabilt: begränsade insignaler ger begränsade utsignaler)

Ex)
Överföringsfunktionen motsvarande (1) har nämnarpolynomet $Q(s) = s + a$ och således en pol i $s = -a$. Enligt ovan är systemet stabilt för $a > 0$ och instabilt för

$a < 0$ vilket stämmer överens med lösningarna i figur 2.

Nollställen är viktiga för ett systems *transienta* egenskaper $\rightarrow$ spelar stor roll för styrningen.

Stegsvar
Utsignalen då insignalen är ett enhetssteg, dvs

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t >= 0 \end{cases}$$

Analys av stegsvaret ger information om ett systems egenskaper.

Slutvärdessatsen
Ifall $sY(s)$ saknar singularitet (stabilt system) så gäller att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{2}$$

Med slutvärdessatsen kan systemets transient undersökas utan att explicit lösa ut $y(t)$!.

Statisk förstärkning

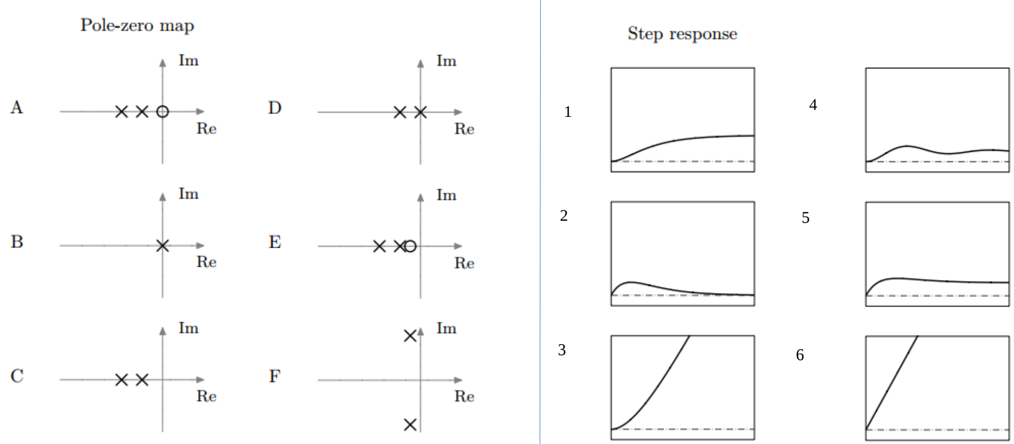
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s} \text{ (stegsvar)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = G(0)$$

$\Rightarrow |G(0)|$ - statisk förstärkning av en konstant insignal.

Uppgift 2.5

Para ihop varje pol-nollställe diagram med motsvarande stegsvar.



Figur 3: Bokstaverade pol-nollställe diagram samt numrerade stegsvar

Stegsvar 3 och 6 divergerar, vilket tyder på instabilitet. Diagram B och D har båda varsin pol i origo, medan de andra systemen har poler strikt i VHP.
$\Rightarrow$ B,D $\leftrightarrow$ 3,6

Hur kan vi skilja B och D åt?
B har en pol i origo, alltså gäller

$$G_B = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(S) = \frac{1}{s}U(s) \Rightarrow sY(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = u(t)$$

Ifall $u(t)$ är ett enhetssteg (konstant signal) så blir även $\dot{y}(t)$ konstant. Stegsvar 6 har konstant lutning. Alltså gäller
B $\leftrightarrow$ 6

D $\leftrightarrow$ 3

F är det enda systemet med komplexa poler och stegsvar 4 är det enda stegsvaret som uppvisar svängigt beteende.
F $\leftrightarrow$ 4

A har ett nollställe i origo

$$G_A(s) = \frac{s}{(s+a)(s+b)}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_A(s)U(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

Endast stegsvar 2 går mot noll i stationäritet. Alltså gäller
A $\leftrightarrow$ 2

C,E är båda stabila, men E har ett nollställe.

$$G_c(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \Rightarrow Y_c(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s} \text{ (stegsvar)}$$

$$\Rightarrow y_c(t) = \{\text{från laplace tabell}\} = \frac{1}{ab}\left(1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{y}_c(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_c(t) = 0 \Leftrightarrow e^{(a-b)t} = 1$$

Men $a \neq b$, så enbart $\dot{y}_c(0) = 0$ gäller. Alltså innehåller stegsvaret till C ingen översläng! Således gäller
C $\leftrightarrow$ 1
E $\leftrightarrow$ 5

Sammanfattningsvis:
B $\leftrightarrow$ 6
D $\leftrightarrow$ 3
F $\leftrightarrow$ 4
A $\leftrightarrow$ 2
C $\leftrightarrow$ 1
E $\leftrightarrow$ 5

Uppgift 2.10

2.10 Figure 2.10a shows the step responses of four different systems. Combine each step response with a transfer function from the alternatives below.

Transfer function	Poles	Zeros	$\lvert G(0)\rvert$
$G_1(s) = \frac{100}{s^2+2s+100}$	$-1 \pm 10\mathrm{i}$		1
$G_2(s) = \frac{1}{s+2}$	-2		1/2
$G_3(s) = \frac{10s^2+200s+2000}{(s+10)(s^2+10s+100)}$	$-10, -5 \pm 8.7\mathrm{i}$	$-10 \pm 10\mathrm{i}$	2
$G_4(s) = \frac{200}{(s^2+10s+100)(s+2)}$	$-2, -5 \pm 8.7\mathrm{i}$		1
$G_5(s) = \frac{600}{(s^2+10s+100)(s+3)}$	$-3, -5 \pm 8.7\mathrm{i}$		2
$G_6(s) = \frac{400}{(s^2-10s+100)(s+2)}$	$-2,\ 5 \pm 8.7\mathrm{i}$		2

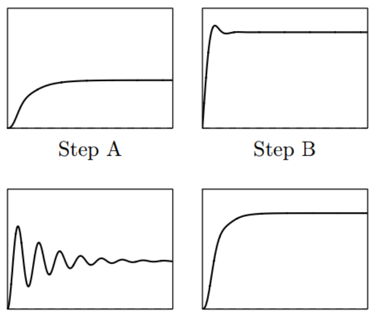


Figure 2.10a. All comparable axes have equal scaling.

Alla stegsvar är stabila. $G_6(s)$ har poler i HHP
$\Rightarrow$ uteslut $G_6(s)$

B,D har dubbel statisk förstärkning som A,C. Enda konfigurationen när detta är möjligt (notera överföringsfunktionernas statiska förstärlning) är ifall
$G_1(s), G_4(s) \leftrightarrow$ A,C
$G_3(s), G_5(s) \leftrightarrow$ B,D
$\Rightarrow$ uteslut $G_2(s)$

$G_4(s)$ har pol i -2 som dominerar det komplexa polparet i $-5 \pm 8.7i$. $G_1(s)$ får svag dämpning som följd av det komplexa polparet med stor imaginärdel $-1 \pm 10i$. Därav följer att
$G_1(s) \leftrightarrow$ C
$G_4(s) \leftrightarrow$ A

$G_3(s)$ har ett nollställe och polen i -10 är markant större än $G_5(s)$:s pol i -1 vilket

indikerar att $G_3(s)$ kommer ge ett snabbare stegsvar (med risk för översläng). Därav följer att $G_3(s) \leftrightarrow$ B
$G_5(S) \leftrightarrow$ D

Sammanfattningsvis:
$G_1(s) \leftrightarrow$ C
$G_4(s) \leftrightarrow$ A
$G_3(s) \leftrightarrow$ B
$G_5(s) \leftrightarrow$ D