EL1000 - Reglerteknik, allmän kurs
Övning 9

Martin Biel
mbiel@kth.se

27 september 2016

Repetition

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Styrbarhet

- Ett tillstånd x^* är *styrbart* om det finns en insignal $u(t)$ som tar tillståndsvektorn från $x(0) = 0$ till x^* på ändlig tid.
- $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ - Styrbarhetsmatrisen
- De styrbara tillstånden ligger i span $\{\mathcal{S}\}$.
- Systemet är *styrbart* om alla tillstånd är styrbara, dvs om span $\{\mathcal{S}\} = \mathbb{R}^n$ (alternativt ifall $\mathcal{S}$ har full rang, eller ifall $\det \mathcal{S} \neq 0$ om $\mathcal{S}$ är kvadratisk.

Observerbarhet

- Ett tillstånd $x^* \neq 0$ är *icke-observerbart* om utsignalen är identiskt noll ($y(t) \equiv 0$) då $x(0) = x^*$ och $u(t) \equiv 0$.

- $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ - Observerbarhetsmatrisen

- De icke-observerbara tillstånden ligger i $\ker \mathcal{O}$ (nollrummet till $\mathcal{O}$).

- Systemet är *observerbart* om det saknar icke-observerbara tillstånd, dvs $\ker \mathcal{O} = \emptyset$ (alternativt ifall $\text{span}\,\{\mathcal{O}\} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ har full rang, eller ifall $\det \mathcal{O} \neq 0$ om $\mathcal{O}$ är kvadratisk).

Uppgift 8.10

Bestäm dimenion för de styrbara och icke-observerbara underrummen. Bestäm även dessa underrum.

a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \end{pmatrix} x$$

Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{pmatrix}$$

Första och andra raden är linjärt beroende. Ifall en stryks är de återstående linjärt oberoende.
$\Rightarrow \dim(\text{span}\,\{\mathcal{S}\}) = 2$. Det styrbara underrummet spänns upp av två valfria linjärt oberoende kolumner i $\mathcal{S}$:

$$\text{span}\,\{\mathcal{S}\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Observerbarhet:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Ifall vi utför Gauss-elíminering kommer vi kunna svara på båda frågeställningarna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & -9 & -4.5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{O}\}) = 2, \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$

En basvektor för $\ker \mathcal{O}$ bestäms genom att införa $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ vilket ger $x_2 = -0.5t$ och $x_1 = 0$. Alltså ges nollrummet av

$$\Rightarrow \ker \mathcal{O} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

vilket även ger underrummet av icke-observerbara tillstånd.

b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} x$$

Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -32 \end{pmatrix}$$

Första raden faller bort och återstående rader är linjärt oberoende.

$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{S}\}) = 2$. Det styrbara underrummet spänns upp av två valfria linjärt oberoende kolumner i $\mathcal{S}$:

$$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}$$

Observerbarhet:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Tredje kolumnen faller bort och de återstående är linjärt oberoende.
$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{O}\}) = 2, \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$. Utför Gauss-eliminering:

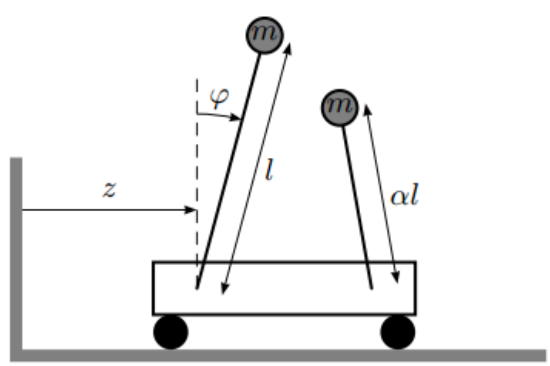
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -9 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \dim(\ker \mathcal{O}) = 1$
Alltså ges nollrummet av

$$\Rightarrow \ker \mathcal{O} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vilket även ger underrummet av icke-observerbara tillstånd.

Uppgift 8.13



Figur 1: Two pendlar på en vagn

a)

Linjärisera systemet kring $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ när $l = m = g = 1$.

Pendel 1: $\ddot{z}\cos\varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 = \sin\varphi_1$
Pendel 2: $\ddot{z}\cos\varphi_2 + \alpha\ddot{\varphi}_2 = \sin\varphi_2$
Linjärisering:
Pendel 1: $\ddot{z} + \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1$
Pendel 2: $\ddot{z} + \alpha\ddot{\varphi}_2 = \varphi_2$
Låt $u = \ddot{z}$ utgöra insignal och inför tillstånden

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1 & &\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\
x_2 &= \dot{\varphi}_1 & &\Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 - u \\
x_3 &= \varphi_2 & &\Rightarrow \dot{x}_3 = x_4 \\
x_4 &= \dot{\varphi}_2 & &\Rightarrow \dot{x}_4 = \frac{1}{\alpha}(x_3 - u)
\end{aligned}$$

Alltså erhålls

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} u$$

b)

För vilka α är systemet styrbart?

Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{S}$ är kvadratisk, så vi kan beräkna determinanten för att dra slutsatser om styrbarhet.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1\right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \det \mathcal{S} \neq 0$ om $\alpha \neq 1$.
$\Rightarrow$ Systemet är styrbart ifall $\alpha \neq 1$.

Fallet $\alpha = 1$ motsvarar ett system där pendlarna är lika långa, vilket resulterar i att varje insignal ger upphov till samma vinkelförändring $\varphi_1 = \varphi_2$ i båda pendlarna. Således går det inte att uppnå alla tillstånd eftersom det inte är möjligt att nå tillstånd där $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

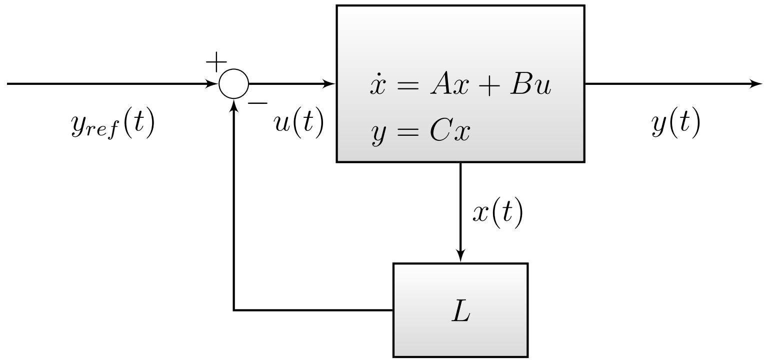
Tillståndsåterkoppling

Återkoppla systemets tillstånd istället för utsignalen. Slutna systemet ges av

$$\dot{x} = Ax + B(r - Lx) = (A - BL)x + Br \quad y \qquad = Cx$$

$\Rightarrow$ Slutna systemet får poler motsvarande egenvärdena till $A - BL$ (istället för A).
$\Rightarrow$ Vi kan påverka polerna med L!

Sats (s.183)
Ifall systemet är styrbart kan polerna (egenvärdena) till $A-BL$ placeras godtyckligt.

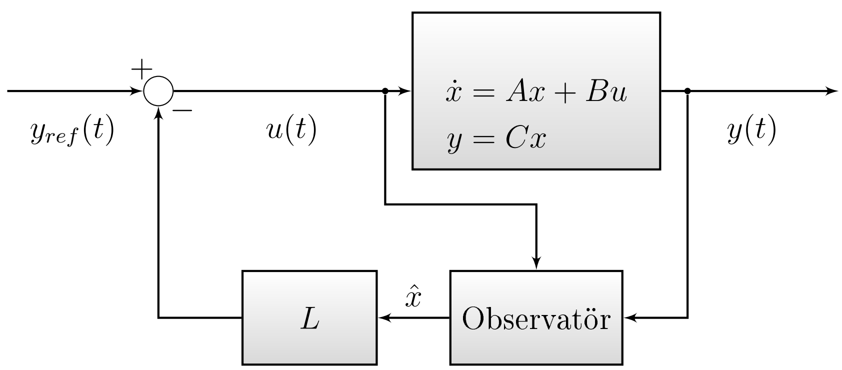


Figur 2: Tillståndsåterkoppling

Ifall systemet inte är styrbart kan det ändå vara möjligt att placera polerna önskvärt.

Tillståndsobservatör

Om inte tillstånden är mätbara kan en observatör användas för att uppskatta $x(t)$ från $y(t)$. Observatören är också ett dynamiskt system som simulerardet ursprungliga



Figur 3: Tillståndsobservatör

systemet.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

De två första termerna simulerar systemet och den sista termen är en korrigerande term som motsvarar återkoppling av den verkliga utsignalen (observatören simulerar

$C\hat{x}$ men utsignalen ges av y). Undersök skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$:s dynamik:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= Ax + Bu - \{A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})\}\\ &= Ax - A\hat{x} + K(Cx - C\hat{x})\\ &= (A - KC)\tilde{x}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Om $(A - KC)$ är stabil (egenvärden i VHP) så går skattningsfelet mot noll.

Sats (s.193)
Ifall systemet är observerbart kan polerna (egenvärdena) till $A - KC$ placeras godtyckligt

Ifall systemet inte är observerbart kan det ändå vara möjligt att placera polerna önskvärt.

1 Uppgift 9.1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u\\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

a)

Bestäm en tillståndsåterkoppling som placerar polerna i

(i) $-3, -5$

(ii) $-10, -15$

Vad begränsar godtycklig dynamik?

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har full rang.
$\Rightarrow$ Kan placera polerna till $A - BL$ godtyckligt.

$$A - BL = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - l_1 & -1 - l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(sI - (A - BL\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s + 2 + l_1 & 1 + l_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s + 2 + l_1 = +1 + l_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2 + (2 + l_1)s + (1 + l_2) = 0$$

Identifiera koefficient så att de efterfrågade polerna erhålls.

(i) $(s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15$
$\Rightarrow l_1 = 6, l_2 = 14$
$\Rightarrow u = -6x_1 - 14x_2 + y_{ref}$

(ii) $(s+10)(s+15) = s^2 + 25s + 150$
$\Rightarrow l_1 = 23, l_2 = 149$
$\Rightarrow u = -23x_1 - 149x_2 + y_{ref}$

Ju längre ut i VHP polerna placeras desto större koefficienter dyker upp i styrlagen, vilket resulterar i en större insignal.
$\Rightarrow$ Godtycklig dynamik kan ej uppnås på grund av fysiska begränsningar i insignalen.

b)

<u>Om enbart $y(t)$ kan mätas, bestäm en observatör. (och diskutera polernas påverkan)</u>

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

har full rang.
$\Rightarrow$ kan placera polerna till $A - KC$ godtyckligt.
Skattningsfelets dynamik ges av

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

Vi vill att skattningsfelet går mot noll snabbare än det styrda systemets dynamik. Således bör observatörens poler placeras längre till vänster i VHP än det slutna systemet. (t.ex. i $s = -20$). Ifall polerna placeras för långt ut blir observatören känslig för mätbrus.

$$A - KC = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(sI - (A - KC)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} s + (2 + k_1) & 1 \\ -1 + k_2 & s \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2 + (2 + k_1)s + (1 - k_2) = 0$$

Två poler i $s = -20$ ger

$$(s + 20)^2 = s^2 + 40s + 400$$

$\Rightarrow k_1 = 38, k_2 = -399$ Den resulterande observatören ges av

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 38 \\ -399 \end{pmatrix} \left[y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} \right]$$