Příklady z PASX1

Pavel Rusnok

September 25, 2017

Abstract

Příklady jsou z knihy R. Potockého: Zbierka úloh z pravděpodobnosti a matematickej štatistiky

1 Elementární pravděpodobnost

Příklad 9: S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet a) 6 b) menší než 7. [0,1388; 0,4166]
Příklad 10: V pytlíku máme a bílých a b černých kuliček. Taháme dvakrát za sebou jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že
a) alespoň jedna z vytáhnutých kuliček je bílá, když po prvním tahu vrátíme kuličku zpátky do pytlíku.
b) obě kuličky jsou bílé, když první vytáhnutou kuličku už nevracíme.
$[P(A) = \frac{a^2+2ab}{(a+b)^2}, P(B) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}]$
Příklad 11: Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsané na pěti kartách. Náhodně vybereme tři karty a položíme vedle sebe v pořadí, ve kterém jsme je vybrali. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že výsledné trojciferné číslo bude sudé. [0,4]
Příklad 12: S jakou pravděpodobností tři náhodně vybraní lidé nemají narozeniny ve stejný den? (Vyloučíme 29. únor) [0,9917]
Příklad 14: Dřevěnou kostku, která má nabarvené všechny stěny, rozdělíme na 1000 malých kostiček stejných rozměrů. Všechny namícháme a náhodně vybereme jednu kostičku. Vypočítáme, jaká je pravděpodobnost, že kostka bude mít
a) jednu nabarvenou stěnu b) dvě c) tři d) žádnou [0,384; 0,096; 0,008; 0,512]
Příklad 15: Na stěnu nádražní haly se má namontovat deset automatů na prodej cestovních lístků. Tři automaty jsou určené na prodej cestovních lístků do zahraničí. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že právě tyto tři automaty budou namontované vedle sebe. [0,067]
Příklad 16: Z n=32 hracích karet vytahujeme dvakrát za sebou jednu kartu. Vypočítejte
a) jaká je pravděpodobnost, že obě karty jsou esa, když jsme první kartu nevrátili.
b) jaká je pravděpodobnost, že obě karty jsou stejné barvy (červená, černá), když jsme první vytáhnutou kartu zase vrátili. [0,012; 0,25]

Příklad 17: V autoopravně je z každých dvaceti oprav 10 na výměnu oleje, 3 na opravu brzd, 2 na nastavení světel a zbytek patří do kategorie jiné. Jaká je pravděpodobnost opravy z kategorie jiné. [0,25]
Příklad 18: Máme 5 vstupenek za 10 korun, 3 za 15 korun a 2 dvacetikorunové vstupenky. Vybereme náhodně tři vstupenky. Určete, jaká je pravděpodobnost toho, že alespoň dvě vstupenky budou za stejnou cenu. [0,75]
Příklad 19: V dodávce je 100 kůsů křišťálových váz. Z nich je 5 chybných. Při kontrole se náhodně vyberou 4 kusy. Určete pravděpodobnost toho, že
a) jedna z vybraných váz je chybná
b) aspoň jedna z vybraných váz je chybná. [0,1765; 0,188]

2 Geometrická pravděpodobnost

Příklad 39: Vyberu náhodně dvě čísla z intervalu [0,1] ($x, y \in [0, 1]$). Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet není větší než jedna a jejich součin není menší než 0,09. [0,2]
Příklad 40: Vyberu náhodně dvě čísla z intervalu [0,1] ($x, y \in [0, 1]$). Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet není větší než jedna a jejich součin není větší než 2/9. [0,487]
Příklad 41: Tyč délky d je náhodně rozlomená na tři části. Určete, jaká je pravděpodobnost, že z třech vzniklých částí lze sestavit trojúhelník. [0,25]
Příklad 42: Na úsečce $\overline{OA}$ délky d jsou náhodně zvolené dva body $B(x)$ a $C(y)$ a zároveň platí $x \leq y$. Určete pravděpodobnost, že délka úsečky $\overline{BC}$ je menší, než délka úsečky $\overline{OB}$. Předpokládáme, že pravděpodobnost volby bodu na úsečce je úměrná délce této úsečky. [0,25]
Příklad 43: Předpokládáme, že koeficienty kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ vyhovuje podmínce $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$ a všechny možnosti jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že kořene kvadratické rovnice jsou
a) reálné čísla, b) jsou kladné. [0,5416; 0,021]
Příklad 44: Dvě osoby mají stejnou možnost přijít na domluvené místo ve kteroukoli dobu mezi dvanáctou a třináctou hodinou. Časy příchodu obou osob jsou nezávislé. Kdo přijde na domluvené místo první, počká na druhého 20 minut a potem odejde. Určete, jaká je pravděpodobnost, že se osoby potkají? [0,556]
Příklad 45: Dva nákladní automobily dováží náklad do stejného skladu v časovém intervalu 12 hodin. Časy příjezdů obou automobilů jsou nezávislé. První auto čeká po zastavení na vyložení nákladu jednu hodinu a druhé dvě hodiny. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že jedno z nákladních aut bude muset čekat, až se vyloží náklad auta, které přijelo dříve. [0,2326]
Příklad 46: Stojíte na zastávce, kde staví autobus a tramvaj. Autobus jede jednou za čtyři minuty a tramvaj jednou za šest minut. Jaká je pravděpodobnost, že
a) autobus přijede před tramvají, b) autobus nebo tramvaj přijedou do dvou minut. [0,667; 0,667]

3 Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost jevů

Příklad 50: V pytlíku máme 5 bílých a 7 černých kuliček. Z pytlíku vytahujeme za sebou dvě kuličky. Po prvním vytáhnutí kuličku
a) nevrátíme b) vrátíme.
Vypočítejte pravděpodobnost toho, že po druhém tahu budeme mít dvě bílé kuličky. [0,1515; 0,1736]
Příklad 51: V určité zásilce je 90% standartních výrobů, mezi kterými je 60% výrobků mimořádné kvality. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek z celé zásilky je mimořádné kvality. [0,54]
Příklad 52: Z celkové produkce závodu je 4% nepodařených výrobků a z dobrých výrobků je 75% standartních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standartní. [0,72]
Příklad 53: Z výrobků určitého druhu dosahuje 95% předepsanou kvalitu. V jistém závodě, který vyrábí 80% celkové produkce, má předepsanou kvalitu až 98% výrobků. Máme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Vypočítejte, s jakou pravděpodobností byl tento výrobek vyroben ve vzpomínaném závodě. [0,825]
Příklad 69: V továrně pracuje nezávisle šest automatů. Pravděpodobnost, že první, druhý, ..., šestý automat nebude potřebovat v průběhu směny opravu je postupně $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,75$, $P(A_3) = 0,95$, $P(A_4) = 0,9$, $P(A_5) = 0,7$, $P(A_6) = 0,85$. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že v průběhu pracovní směny
a) nebude ani jeden automat potřebovat opravu
b) alespoň jeden z automatů nebude potřebovat opravu
c) alespoň jeden z automatů bude potřebovat opravu. [0,305; 0,9999887; 0,695]
Příklad 70: Sportovec třikrát nezávisle vystřelil na cíl. Pravděpodobnost zásahů je postupně 0,5, 0,6, 0,8. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že
a) v cíli bude právě jeden zásah, b) v cíli bude alespoň jeden zásah. [0,26; 0,96]
Příklad 71: Pravděpodobnost toho, že zákazní vejde do obchodu v průběhu jedné minuty je $p = 0,01$. Určete pravděpodobnost toho, ře v průběhu 100 minut vejdou do obchodu tři zákazníci. [0,0609]
Příklad 72: Určete, jaká je pravděpodobnost, že při 5-násobném nezávislém opakování hodu pravidelnou kostkou padne
a) šestka při druhém a čtvrtém hodu, ale při prvním, třetím a pátém nepadne,
b) šestka právě dvakrát. [0,016; 0,16]
Příklad 73: Statisticky je ověřené, že z každých 1000 narozených dětí je 515 chlapců a 485 děvčat. Určete pravděpodobnost, že mezi čtyřmi po sobě narozenými dětmi budou
a) první dva chlapci a pak dvě děvčata
b) právě dva chlapci. [0,0624; 0,3743]
Příklad 84: V rodině je n dětí. Pravděpodobnost narození chlapce je $p = 0,515$. Určete počet dětí, aby mezi nimi byl alespoň jeden chlapec s pravděpodobností rovnající se alespoň $0,99$. [$n \geq 6,36 \Rightarrow n = 7$]

4 Věta o úplné pravděpodobnosti. Bayesovy vzorce

Příklad 86: Tři závody vyrábí elektrické žárovky. První závod vyrábí 45% celkové produkce, druhý 40% a třetí 15%. Z produkce prvního závodu je 70% standartních, druhého závodu 80% a z produkce třetího závodu 81%. Určete pravděpodobnost toho, že si zákazník koupí standartní žárovku. [0,7565]
Příklad 87: Součástky, ze kterých se montují stroje, dodávají tři výrobní závody. Je známo, že první závod má 0,3% nepodařených výrobků, druhý 0,2% a třetí 0,4% nepodařených výrobků. První závod dodal 1000 výrobků, druhý 2000, a třetí 2500 výrobků. Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude nepodařený? [0,003]
Příklad 88: V dílně pracuje 20 pracovníků, kteří vyrábí výrobky stejného druhu. Každý z nich vyrobí za směnu stejné množství, ale ne stejné kvality. Deset pracovníků vyrobí 94% výrobků s mimořádnou kvalitou, šest 90% a čtyři pracovníci 85% výrobků mimořádné kvality. Všechny výrobky jsou neroztříděné na skladě. Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek bude mimořádné kvality? [0,91]
Příklad 89: Máme čtyři pytlíky. V prvním jsou 3 bílé a 2 černé, v druhém 2 bílé a 2 černé, v třetím 1 bílá a 4 černé a ve čtvrtém 5 bílých a 1 černá kulička. Náhodně si zvolíme jeden pytlík a vytáhneme jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že kulička bude bílá? [0,5333]
Příklad 105: Ocelové odlitky jsou kontrolované rentgenovým přístrojem, který odhalí chybu v odlitku s pravděpodobností 0,98 a dobrý odlitek označí za špatný s pravděpodobností 0,001. Je známé, že chyba se vyskytuje u 0,3% odlitků. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že odlitek označený přístrojem za chybný je skutečně špatný. [0,746]
Příklad 106: Máme tři pytlíky kuliček. V prvním jsou 2 černé, 3 červené a 1 bílá kulička, v druhém 2 bílé, 1 černá a 1 červená kulička a v třetím 4 bílé, 5 černých a 3 červené kuličky. Náhodně zvolíme jeden z pytlíků kuliček a vytáhneme z něj 2 kuličky. Jedna z vytáhnutých kuliček je bílá a druhá červená. Jaká je pravděpodobnost toho, že jsou kuličky z třetího pytlíku. [0,254]
Příklad 107: V určité společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 180 cm je 5% mužů a 1% žen. Náhodně vybraná osoba je nad 180 cm. Jaká je pravděpodobnost toho, že je to žena? [0,196]
Příklad 108: Při vyšetřování pacienta je podezření na tři navzájem se vylučující nemoci. Pravděpodobnost výskytu první nemoci je 0,3, druhé, 0,5 a třetí 0,2. Laboratorní test dává pozitivní výsledek u 15% nemocných na první nemoc, 30% nemocných na druhou nemoc a 30% na třetí. Jaká je pravděpodobnost druhé nemoci, když laboratorní test vyjde pozitivní. [0,588]

5 Náhodné proměnné

Příklad 10: Nechť náhodná proměnná X nabývá hodnot 0, 1 s pravděpodobnostmi $P(X = 0) = p$, $P(X = 1) = 1 - p$. Určete distribuční funkci a znázorněte ji

graficky.
Příklad 11: Náhodná proměnná X nábývá hodnoty i s pravděpodobností $p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$ pro $i = 1, 2, \ldots, 6$. Sestrojte distribuční funkci a její graf!
Příklad 12: Házíme třikrát hrací kostkou. Nechť náhodná proměnná X je počet hozených šestek. a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné proměnné, b) Sestrojte graf pravděpodobnostní funkce, c) Sestrojte graf distribuční funkce.
Příklad 13: Řidič potřebuje projet čtyřmi světelnými křižovatkami. Na každé křižovatce ho světla zastaví, nebo mu dovolí jet dál s pravděpodobností $p = 0,5$. Nechť náhodná proměnná X je počet křižovatek, které řidič projede na zelnou (oranžovou zanedbáváme) až do první křižovatky, kde musí zastavit (je červená). a) Určete rozdělení náhodné proměnné X. b) Sestrojte graf pravděpodobnostní funkce. c) Určete distribuční funkci a graficky znázorněte.
Příklad 14: Třikrát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je $p = 0,7$. Určete a) pravděpodobnostní funkci počtu zásahů při třech nezávislých výstřelech, b) distribuční funkci a sestrojte graf.
Příklad 15: Náhodná proměnná X má distribuční funkci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 3 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{pro } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{pro } x > 6 \end{cases}$$

a) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné. b) Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce.
Příklad 16: Náhodná proměnná je dána distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ x^2 & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

Určete a) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, b) $P(0,25 < X < 0,75)$
Příklad 17: Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné X má tvar

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{pro } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.
Příklad 37: Nechť náhodná proměnná X nabývá hodnot $0, 1, 2, \ldots, n-1$ s pravděpodobnostmi $P(X = i) = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné. $[\frac{n-1}{2}, \frac{n^2-1}{12}]$
Příklad 38: Pravděpodobnost zásahu terče při každém ze čtyřech výstřelů je $p = 0,8$. Nechť náhodná proměnná představuje počet zásahů terče. a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné proměnné, b) vypočítejte její střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku. [3,2;0,64;0,8]
Příklad 39: Náhodná proměnná X je dána tabulkou:

X	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné. [2;1]
Příklad 41: Náhodná proměnná X je dána hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0 & \text{pro } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a rozptyl. [0,75;0,0375]
Příklad 8.6: Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl hodu kostkou a střední hodnotu a rozptyl součtu ok po hodu dvou kostek. [3,5;$\frac{35}{12}$;7;$\frac{35}{6}$]
Příklad 8.9: První hráč hodí kostkou a pokud je výsledek větší než 3 pak jeho skóre je hozený výsledek. V opačném případě hodí kostkou ještě jednou a jeho skóre je součet obou hodů. Druhý hráč hodí dvěmi kostkami a jeho skóre bude $x_1 + x_2 - p$, kde x_1, x_2 jsou počty hozené na kostkách a p je zvolený parametr. a) Vypočítejte střední hodnoty skóre obou hráčů. b) Určete pravděpodobnost, že skóre prvního hráče bude vyšší než skóre druhého (pro $p = 0$). c) Určete pravděpodobnost, že skóre obou hráčů bude stejné. d) Pro kterou hodnotu paramteru budou střední hodnoty obou hráčů stejné? f) Hráči odehrají 100 her s hodnotou parametru $p = 3$. Jaký je předpokládaný zisk (ztráta) prvního hráče?
Příklad 8.11: Hodíme kostkou pět krát a náhodná proměnná X bude počet hozených šestek. Určete její pravděpodobnostní funkci. Který počet šestek je nejpravděpodobnější? Jak by se odpověd̆ změnila kdyby bylo hodů kostou šest (deset, sto, tisíc)?
Příklad 8.12: Doktor odhaduje úspěšnost léčby nějaké nemoci na 80%. Najděte pravděpodobnost, že právě 2 z 8 pacientů budou léčení úspěšně. [0,001]
Příklad 8.17: Poissonovo rozdělení se může použít např. v situaci, když pozorujeme mikroskopem výskyt nějakých drobných částic a chceme odhadnout počet částic ve čtverci o ploše S. Rozdělíme čtverec na n^2 stejných částí o ploše $\frac{S}{n^2}$ a zjistíme pravděpodobnost p výskytu částice v malé části čtverce. Pokud předpokládáme vzájemnou nezávislost výskytu částic, bude mít počet částic v celém čtverci binomické rozdělení $Bin(n^2, p)$. Pro velké n^2 můžeme toto rozdělení velmi dobře aproximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = p \cdot n^2$.
Příklad 8.19: Počet automobilových neštěstí na jistém úseku dálnice má Poissonovo rozdělení s parametrem 0,8 za týden. Vypočítejte pravděpodobnost, že a) během týdne budou alespoň dvě neštěstí b) během tří týdnů budou právě tři neštěstí.
Po čase byla dálnice rokonstruovaná a v prvních 8 týdnech bylo jenom jedno neštěstí. Vypočítejte pravděpodobnost tohoto jevu za předpokladu, že parametr Poissonova rozdělení se nezměnil. Co můžeme vyvodit z výsledku. [0,191; 0,209; 0,011 (parametr lambda je třeba změnit, stávající model už nepopisuje přesně kvalitu/stav/bezpečnost dálnice)]
Příklad 8.20: Letadlo má 116 sedadel. Dlouhodobé pozorování ukazují, že v průměru 2,5% pasažérů s letenkou se nedostaví na let. Letecká společnost prodala 120 letenek na jistý let. Jaká je pravděpodobnost, že se dostaví víc jak 116 pasažérů? Jaká je pravděpodobnost, že některé sedadlo zůstane volné? [0,647; 0,185]

Příklad IP5.7: Házíme 12krát kostkou. Nechť náhodná veličina X je počet hozených šestek. Spočítejte pravděpodobnost, že hodím 7 až 9 šestek ($P(7 \leq X \leq 9)$). [0,001]
Příklad IP5.20: Zásilka 250 procesorů obsahuje 17 chybných. Kontrola vybere náhodně 5 procesorů. Nechť X je počet chybných procesorů mezi pěti, které vybrala kontrola. a) Určete $P(X = 3)$, b) $P(X \leq 2)$, c) $P(X > 1)$ d) a vygenerujte 100 000 příkladů náhodné proměnné X. [0,002;0,9976;0,039;rbinom]
Příklad 58: Při sériové výrobě určité součástky je 1% zmetků. Náhodně vybereme 100 součástek pro kontrolu. Nechť náhodná proměnná X je počet zmetků v kontrolním vzorku 100 součástek. Určete a) $P(X = 2)$ b) $P(X \leq 2)$. [0,185;0,921]
Příklad 58b (souvisí s Příkladem IP5.20): Při sériové výrobě jiné součástky je $6,8\%$ zmetků. Náhodně vybereme 5 součástek pro kontrolu a náhodná proměnná X je opět počet změtků v kontrolním vzorku 5 součástek. Určete tentokrát a) $P(X = 3)$, b) $P(X \leq 2)$. [0,0027;0,9972]
Příklad 60: Do telefónní ústředny příjde za hodinu asi 120 požadavků na spojení. Pravděpodobnost, že za čas t příjde právě k je určena Poissonovým rozdělením. Určete jaká je pravděpodobnost, že za dvě minuty příjdou do ústředny právě dva požadavky. [0,147]
Příklad 58c (souvisí s Příkladem 58): Při náhodných kontrolách součástek, které probíhají během 24 hodin se v průměru během jedné kontroly najde 1 zmetek. Nechť X je počet nalezených zmetků během 24 hodin. Určete a) $P(X = 2)$, b) $P(X \leq 2)$. [0,184; 0,920]
Příklad 61: Náhodná proměnná X má poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\mathrm{E}[X] = \lambda = 3$. Určete a) pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná bude menší než její střední hodnota, b) pravděpodobnost, že náhodná proměnná bude mít pouze kladné hodnoty. [0,423;0,950]
Příklad 63: Kniha "Naše Kuchařka" byla vytisknuta v nákladě 100 000 kusů. Pravděpodobnost, že je kniha špatně svázaná je $p = 0,0001$. Určete pravděpodobnost, že v celém vydání je a) nanejvýš 5 chybně svázaných knih, b) právě 5 chybně svázaných knih c) alespoň 5 chybně svázaných knih. [0,067;0,0378;0,971]
Příklad 64: Telefónní ústředna obsluhuje $n = 3000$ lidí. Pravděpodobnost, že libovolný člověk bude v průběhu hodiny telefonovat, je $p = 0,002$. Nechť proměnná X představuje počet účastníků, kteří budou v průběhu hodiny telefonovat. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že v průběhu hodiny budou telefonovat čtyři lidé. [$54e^{-6}$]
Příklad 65: Pracovnice obsluhuje $n = 800$ vřeten, na které se navíjí příze. Pravděpodobnost roztrhnutí příze na každém z vřeten za čas t je $p = 0,005$. Určete pravděpodobnost toho, že se za čas t příze neroztrhne na více než deseti vřetenech. [0,997]
Příklad 66': Z produkce závodu je 99,8% standartních výrobků a 0,2% zmetků. Vypočítejte pravděpodobnot toho, že mezi $n = 500$ náhodně vybranými výrobky budou víc jak tři zmetky. [0,0189]
Příklad 69: Za jednu pracovní směnu se vyrobí 1000 kusů výrobků, ze kterých je průměrně 50 chybných. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost toho, že v zásilce s rozsahem $n = 100$ výrobků bude právě 10 chybných. [0,0167]

Příklad 70: Dílna vyprodukuje 5000 výrobků, ze kterých je průměrně 5% zmetků. Náhodně jsme vybrali $n = 50$ výrobků. Určete pravděpodobnost toho, že ve výběru budou tři zmetky. [0,22]
Příklad 71: Automatická linka produkuje 95% výrobků první jakosti a 5% zmetků. Ze 100 výrobků vybereme náhodně 10. Vypočítejte pravděpodobnost, že mezi nimi budou nanejvýš dva zmetky. [0,993]
Příklad IQ1: Předpokládejme, že IQ v populaci má normální náhodné rozdělení se střední hodnotou 100 a rozptylem 50. Člověk, se kterým lze pokacat u piva má IQ mezi 85 až 115. Jaká je pravděpodobnost, že s náhodně vybraným člověkem na ulici půjde pokecat u piva. [0,97]
Příklad IQ2: Předpokládejme, že IQ v populaci má normální náhodné rozdělení se střední hodnotou 100 a rozptylem 50. Pokud by vypukla válka a generál chce poslat do války 95 procent nejblbějších, tj. 5 procent nejchytřejších zůstane doma. Kde má stanovit hranici v IQ testech? Pokud by zároveň nechtěl poslat do války 5 procent nejhloupějších lidí, kde by měl stanovit spodní hranici v IQ testech? [111,6; 88,4]
Příklad Norm1: Předpokládáme, že výška u chlapců na základních školách má normální rozdělení N(150,30). Ve školách je 20000 chlapců. Z kolika chlapců by trénér národního týmu basktebalu vybíral, kdyby se rozhodl vybírat pouze z 10-ti procent nejvyšších chlapců? Jakou výšku by měl nejmenší z nich? [2000, 157]

6 Sdružené distribuce

Příklad 1: Sdružená pravděpodobnostní funkce proměnných X a Y je dána následující tabulkou:

		X		
		1	2	3
Y	2	0,2	0,1	0,3
	5	0,1	0,05	0,05
	6	0,05	0	0,15

V i-tém sloupci a j-tém řádku je pravděpodobnost $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, kde $i = 1, 2, 3$ a $j = 2, 5, 6$. Jaká je pravděpodobnost, že $P(Y > 3X)$? [0,15]
Příklad 2: Ze sáčku obsahujícím 9 červených, 8 zelených a 3 žluté kuličky vytahujeme 6 kuliček. Nechť X je počet vytáhnutých červených kuliček a Y zelených. Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci X a Y. Jaká je pravděpodobnost $P(X = 1, Y \leq 4)$? [0,094]
Příklad 22: Sdružená pravděpodobnostní funkce proměnných X a Y je dána touto tabulkou:

		Y	
		1	2
X	1	1/10	2/5
	2	1/10	1/20
	3	1/4	1/10

Spočítejte a) střední hodnotu a rozptyl náhodných proměnných $U = \frac{X}{Y}$ a $V = X - Y$ b) rozhodněte zda X a Y jsou nezávislé. [E[U]=29/20, E[V]=3/10, Var(U)=409/400, Var(V)=151/100, nejsou]

Příklad 23: Náhodné proměnné X a Y mají sdruženou pravděpodobnostní funkci zadanou v následující tabulce:

		Y	
		0	1
X	-1	0,2	0,3
	0	0,1	0,2
	1	0,1	0,1

Určete konstantu c tak, aby náhodné proměnné $Z = X + cY$ a Y byly nekorelované. Budou potom Z a Y dokonce nezávislé? [1/12, ne]

Příklad 24: Náhodné proměnné X a Y mají sdruženou pravděpodobnostní funkci zadanou v následující tabulce:

		Y	
		0	1
X	-1	7/30	1/10
	0	4/30	2/10
	1	1/30	3/10

Jsou X a Y nezávislé? Jsou X^2 a Y^2 nezávislé? [ne,ano]

Příklad 30: Ve vyšetřované skupině pacientů 1,5% trpí nemocí A, 2,5% nemocí B. Z pacientů, kteří nemají nemoc A, má 2,03% nemoc B. Spočítejte korelační koeficient nemocí A a B. [0,24]

Příklad M1: Dva hráči hází mincí. První hráč hází dvakrát, ale pokud hodí rub (R) v prvním hodu, pak přestane házet a druhý hod už neprovede. Druhý hráč hází normálně dvakrát mincí. Nechť X je počet hozených líců (L) prvním hráčem a Y počet líců hozených druhým hráčem. Spočítejte a) $P(Y < X)$ b) střední hodnotu X c) střední hodnotu Y d) korelační koeficient X a Y. [1/8,3/4,1,0]

Příklad M2: Sdružená pravděpodobnostní funkce proměnných X a Y je dána následující tabulkou:

		X		
		0	1	2
Y	0	1/18	2/18	3/18
	1	2/18	3/18	2/18
	2	3/18	2/18	0

Spočítejte korelační koeficient náhodných proměnných X a Y. [-0,46]

7 Statistika

Příklad 1: V n=15 vzorcích mléka jsme změřili tučnost mléka v procentech s těmito výsledky: 3,84 4,06 3,67 3,97 4,16 3,98 3,76 4,02 3,82 3,71 3,94 4,04

4,07 3,61 4,01. Vypočítejte aritmetický průměr a rozptyl tučnosti mléka. [3,91; 0,0254]
Příklad 3: Je dána tabulka četností nějaké proměnné:

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
$f(x_i)$	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočítejte aritmetický průměr a rozptyl. [15,344; 7,394]
Příklad 40: Předpokládáme, že výška chlapců ve věku 9,5 až 10 roků má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a známým rozptylem $\sigma^2 = 39,112$. Změřili jsme výšku $n = 15$ chlapců a vypočítali jsme výběrový průměr $\bar{x}_n = 139,13$. Určete a) 99%-ní dvojstranný konfidenční interval pro μ b) 95% jednostranný konfidenční interval (dolní odhad) pro μ. [$\mu \in [134,97; 143,29]$, $\mu \in [136,474; \infty]$]
Příklad 41: Provedli jsme $n = 32$ analýz pro ověření koncetrace chemické látky v roztoku. Předpokládáme, že koncentrace má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ je neznámý parametr a $\sigma^2 = 7,4$. Výsledky analýzy jsou v tabulce četností (Příklad 3):

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
$f(x_i)$	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Určete 99%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ. [$\mu \in [14,11; 16,58]$]
Příklad 42: Ze základního souboru s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ kde $\sigma^2 = 0,06$, jsme učinili výběr s následujícími realizacemi: 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Najděte 95%-ní dvojstranný interval spolehlivosti (konfidenční interval) pro neznámou střední hodnotu. [$\mu \in [1,22; 1,58]$]
Příklad 43: Měřili jsme průměr váčkové hřídele na $n = 250$ součástkách. Předpokládejme, že sledovaný znak má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé. Z výsledků měření jsme vypočítali výběrový průměr a výběrový rozptyl $\bar{x} = 995,6$, $s^2 = 134,70$. Určete 95%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro parametr μ. [$\mu \in [994,15; 997,05]$]
Příklad 44: Sledovali jsme spotřebu oleje pro nátěrové hmoty, přičemž jsme předpokládali, že spotřeba má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé. Na $n = 12$ vzorcích jsme zjistilli spotřebu a vypočítali výběrový průměr a výběrový rozptyl $\bar{x} = 14,306$, $s^2 = 0,327$. Najděte 95%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ. [$\mu \in [13,94; 14,67]$]
Příklad 53: Na každém z dvou vzorků výfukových plynů jsme provedli 4-krát analýzu na výpočet obsahu olova. Metoda analýzy má přesnost $\sigma = 0.12\%$. Na základě výsledků analýzy jsme vypočítali výběrové průměry $\bar{x_1} = 36,82\%$, $\bar{x_2} = 36,45\%$. Určete 99%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro neznámý rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$. [$\mu_1 - \mu_2 \in [0,15; 0,59]$]
Příklad 54: Sledovali jsme účinek dvou protikorozních látek. První látku jsme použili v $n_1 = 20$ případech a druhou v $n_2 = 25$ případech. Po stanovené době jsme zjistili stupeň poškození s výsledky: $\bar{x_1} = 82,4$, $s_1^2 = 12$, $\bar{x_2} = 80,0$, $s_2^2 = 10$. Určete 95%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro neznámý rozdíl

parametrů $\mu_1 - \mu_2$, když předpokládáme, že sledovaný stupeň poškození má v obou případech normální rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, kde μ_1, μ_2, σ^2 jsou neznámé. [$\mu_1 - \mu_2 \in [0,401; 4,399]$]

Příklad M1: Změřili jsme n=50 pražským občanům IQ. Vypočítali jsme průměr a vyšel nám 92. Rovněž jsme změřili IQ 30 ostravským občanům a průměr byl tentokrát 90. Předokládáme, že rozptyl IQ je v populaci Ostravy a Prahy stejný a roven 50. Spočítejte 95%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot IQ v Ostravě a v Praze ($\mu_{Praha} - \mu_{Ostrava}$). Můžu zamítnout hypotézu, že se střední hodnoty rovnají? [(-1,2;5.2),ne]

Příklad 50: Měřili jsme vnitřní průměr na $n = 100$ strojních součástek, přičemž předpokládáme, že vnitřní průměr má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámými parametry. Na základě výsledků měření jsme vypočítali výběrový rozptyl $s^2 = 134,7$. Vypočítejte a) 99%-ní dvojstranný interval pro σ^2 a σ, b) 95%-ní pravostranný interval pro σ^2. [$[87,045 \leq \sigma^2 \leq 198,147], [9,33 \leq \sigma \leq 14,07], [108,24 \leq \sigma^2 < \infty]$]

Příklad 51: Ověřovali jsme koncentraci chemické látky v roztoku za předpokladu, že tato koncentrace má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámými parapetry. Provedli jsme $n = 32$ analýz s těmito výsledky:
17, 12, 15, 16, 11, 17, 18, 9, 15, 12, 16, 11, 16, 17, 18, 12,
14, 20, 21, 17, 18, 14, 15, 20, 14, 15, 16, 15, 15, 14, 15, 16.
Určete a) 90%-ní dvojstranný interval spolehlivosti pro σ^2 a σ, b) 90%-ní pravostranný interval spolehlivosti pro σ^2 a σ. [$[5,094 \leq \sigma^2 \leq 11,876], [2,26 \leq \sigma \leq 3,45], [5,536 \leq \sigma^2 < \infty], [2,35 \leq \sigma < \infty]$]

8 Testování statistických hypotéz

Příklad 4: Automat vyrábí šrouby o délce $m_0 = 40$mm. Vzali jsme z výroby 36 šroubů pro kontrolu. Výrobu považujeme za nekvalitní, pokud aritmetický průměr délek překročí 40, 1 mm. Podle výsledků předcházejících měření můžeme předpokládat, že uvažovaný rozměr šroubů má normální rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1\text{mm}^2$. Vyřešte následující úlohy:
a) Najděte pravděpodobnost chyb 1. a 2. druhu při alternativní hypotéze $H_1 : m = 40,3$mm.
b) Spočítejte sílu testu pro alternativní hypotézu, když $m = 40,1;\ 40,2;\ 40,3;\ 40,4;\ 40,5$
c) Kolik šroubů bychom minimálně museli vybrat pro testovací měření, aby pro dané hypotézy H_0 a H_1 nepřekročily pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu hodnoty $\alpha = 0,1$ a $\beta = 0,1$. [a) $\alpha = 0,274$, $\beta = 0,115$,
b) $1 - \beta = (0,5; 0,726; 0,885; 0,964; 0,992)$, c) $n = 73$]

Příklad 5: Jaké je minimální množství šroubů, které musím vzít pro test v předcházejícím příkladu (Příklad 4), aby pro hypotézy $H_0 : m = 40$mm, $H_1 : m = 40,3$mm nepřekročily pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu hodnoty $\alpha = 0,05$ a $\beta = 0,05$? [n=121]

Příklad 6: Řešte Příklad 4 (a,b) v případě, kdy kritický obor je $\{X \leq 39,9\} \vee \{X \geq 40,1\}$ a hypotézy a rozsah výběru zůstanou stejné. [a) $\alpha = 0,548$, $\beta =$

$0,107$,
b) $1-\beta = (0,615; 0,762; 0,893; 0,965; 0,992)$]
Příklad 7: V pytlíku se nachází hmatem nerozlišitelné kuličky bílé a černé barvy. Předpokládáme, že počet černých a bílých kuliček je stejný. Tyto hypotéza se přijímá, pokud při náhodném vybrání 50 kuliček (s vracením) je počet černých kuliček v rozmezí od 20 do 30. Vypočítejte za a) pravděpodobnost chyby 1. druhu, b) pravděpodobnost chyby 2. druhu, pokud alternativní hypotéza je, že pravděpodobnost výběru černé kuličky je 1/3. [11,9; 19,6]
Příklad 8: Střední doba bezporuchovosti určitého typu přístrojů má být nejméně 1000 hodin. Přitom z předcházejících měření víme, že směrodatná odchylka doby bezporuchovosti je $\sigma = 100$. Z velké skupiny takových přístrojů jsme náhodně vybrali 25 kusů. Aritmetický průměr doby bezporuchovosti pro tento výběr je 970 hodin. Můžeme předpokládat, že celá skupina přístrojů nezodpovídá požadavku na střední dobu bezporuchovosti? Volte: a) $\alpha = 0,1$ b) $\alpha = 0,001$. Nápověda (spočítejte p-hodnotu a jednostranné konfidenční intervaly (odhady shora)) [Ano, Ne, (p-hodnota=0,067)]
Příklad 9: Řešte, předchozí úlohu za podmínky, že směrodatná odchylka doby bezporuchovosti není známá, ale odhaduje se z výběru (z dat) pomocí $S_n = 115$ hodin. [Ne, Ne, p-hodnota=0,102]
Příklad 10: Najděte sílu testu z příkladu 8a pro alternativní hypotézu střední doby bezporuchovosti 950 hodin. Jaký musí být rozsah výběru (n), aby za těchto podmínek pravděpodobnost chyby 2. druhu nebyla větší než 0.1? [0,89; 27]
Příklad 11: Tvrdíme, že kuličky, vyrobené automatickým strojem mají střední hodnotu průměru $d_0 = 10$ mm. Použitím jednostranného testu při $\alpha = 0,05$ otestujte uvedenou nulovou hypotézu, když ve výběru 16 kuliček je aritmetický průměr jejich průměrů 10,3 mm, přičemž a) rozptyl je znám a rovná se $\sigma^2 = 1$ mm^2, b) výběrový odhad rozptylu je $S_n^2 = 1,21$ mm^2. [nulovou hypotézu nezamítáme (p-hodnota=0,115), nulovou hypotézu nezamítáme (p-hodnota=0,146)]
Příklad 14: Předpokládáme, že přidáním speciálního přípravku je možné snížit tvrdost vody. Odhad tvrdosti vody před a po přidání tohoto přípravku ze 40 respektive 50 vzorků dává aritmetický průměr (ve stupních tvrdosti) rovnajících se 4,0 respektive 3,8 stupně. Rozptyl měření předpokládáme v obou případech 0,25 stupně^2. Potvrzují tyto výsledky očekávaný efekt? Volte $\alpha = 0,05$. [Ano, p-hodnota=0,0297]
Příklad 33: Na zkoušce z nějakého předmětu zadá zkoušející studentovi pouze 1 otázku z jedné ze tří částí zkoušené látky. Ze 120 studentů dostalo 43 otázku z 1. části, 52 z 2. a 25 z 3. části. Můžeme na základě výsledků přijmout hypotézu, že student na zkoušce dostane otázku s libovolné části s pravděpodobností 1/3? Volte α =0,05. [Ne, p-hodnota=0,008871]
Příklad 34: Generátorem náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení na množině čísel 0 až 9 se vygenerovalo 250 čísel uvedených v následující tabulce.

Číslo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Četnost	27	18	23	31	21	23	28	25	22	32

Ověřte pomocí χ^2, zda jde skutečně o náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení. Volte α =0,1. [Ano, p-hodnota=0,6163]

9 Testování na datech v R