Matemática Discreta Tema 3. Recursividad

Martín González Dios

17 de diciembre de 2024

1. Recursividad

Recursividad: Una recursión consiste en definir un objeto en términos de sí mismo.

Sucesiones: Una sucesión es una aplicación definida como:

$$N \to S$$

donde N es el conjunto de los números naturales y S es un conjunto cualquiera.

Ejemplo de sucesión:

- $N \to S = \{7, 17, 27, 37, \dots\}$
- $0 \to S_0 = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ (Sucesión de Fibonacci)
- $1 \to S_1 = \{1, 10, 100, 1000, \dots\}$ (Sucesión geométrica)

Definición recursiva de una sucesión específica: Una definición recursiva consta de dos partes:

1. Uno o más **términos iniciales**.
2. Una **regla** para determinar los siguientes términos.

Esta regla se denomina **relación de recurrencia**.

1.1. Relación de recurrencia

Una relación de recurrencia para una sucesión $\{a_n\}$ es una ecuación que expresa a_n en términos de uno o más términos anteriores de la sucesión $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Ejemplos de relaciones de recurrencia:

- $a_n = 10 \cdot a_{n-1}$ *(Ejemplo de progresión geométrica)*
- $a_n = 4 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ *(Relación lineal homogénea de orden 2)*
- $a_n = n \cdot a_{n-1}$ *(Ejemplo donde el coeficiente no es constante)*
- Torres de Hanoi: $H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1$ *(No homogénea)*
- $a_n = 2^n \cdot n^1 + 3 \cdot a_{n-2}$ *(No lineal)*

Ejemplo detallado: Sucesión de Fibonacci La sucesión de Fibonacci es una sucesión definida recursivamente como:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2$$

Los primeros términos de la sucesión son:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Explicación:

- Los **términos iniciales** son $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.
- La **regla recursiva** es $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
- Cada término se calcula sumando los dos términos anteriores.

Ejemplo adicional: Torres de Hanoi La relación de recurrencia para el problema de las Torres de Hanoi es:

$$H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1, \quad H_1 = 1$$

Resolviendo la recurrencia, obtenemos:

$$H_n = 2^n - 1$$

Interpretación: Este resultado indica el número mínimo de movimientos necesarios para resolver el problema de n discos.

1.2. Clasificación de las relaciones de recurrencia

- **Lineal homogénea**: Los coeficientes son constantes. Ejemplo: $a_n = 4 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$.
- **No homogénea**: Incluye términos independientes. Ejemplo: $H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1$.
- **No lineal**: La relación no es lineal. Ejemplo: $a_n = 2^n \cdot n^1 + 3 \cdot a_{n-2}$.

2. Teorema para la Solución de Relaciones de Recurrencia Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes (RRLHCC) con raíces características distintas

Sea una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes (RRLHCC) de orden k:

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k}, \quad \text{con } C_k \neq 0,$$

y sea $r_1, r_2, \ldots, r_k$ el conjunto de raíces reales y distintas de la ecuación característica asociada. Entonces, la solución general para la recurrencia es de la forma:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son constantes reales que dependen de las condiciones iniciales.

2.1. Demostración breve

Cualquier solución de la ecuación de recurrencia se puede expresar como una combinación lineal de potencias de las raíces de la ecuación característica:

$$r^n = C_1 r^{n-1} + C_2 r^{n-2} + \cdots + C_k r^{n-k}.$$

De esta forma, obtenemos la ecuación característica de grado k:

$$r^k - C_1 r^{k-1} - C_2 r^{k-2} - \cdots - C_k = 0.$$

2.2. Ejemplo: relación de recurrencia de Fibonacci

Consideremos la relación de recurrencia de Fibonacci:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

con condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

La ecuación característica asociada es:

$$r^2 = r + 1 \quad \Longrightarrow \quad r^2 - r - 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, las raíces son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, la solución general de la relación de recurrencia es:

$$a_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

donde α_1 y α_2 son constantes que se determinan usando las condiciones iniciales.

2.3. Determinación de las constantes

Usando $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad a_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 1.$$

De la primera ecuación, $\alpha_2 = -\alpha_1$. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\alpha_1 r_1 - \alpha_1 r_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 (r_1 - r_2) = 1.$$

Como $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$, se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Finalmente, la solución explícita es:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

2.4. Verificación con los primero términos

Calculamos los primeros términos de la sucesión usando la fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Para $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - 1) = 0.$$

Para $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1.$$

Para $n = 2$:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = 1.$$

Para $n = 3$:

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right) = 2.$$

Y así sucesivamente, obteniendo la sucesión de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

3. Teorema para la Solución de Relaciones de Recurrencia Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes (RRLHCC) con raíces características que pueden ser iguales

Sea una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes (RRLHCC) de orden k:

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k}, \quad \text{con } C_k \neq 0,$$

y sea $r_1, r_2, \ldots, r_k$ el conjunto de raíces (reales o complejas) de la ecuación característica asociada, con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_s$, respectivamente. Entonces, la solución general para la recurrencia es de la forma:

$$a_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_{m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \cdots + (\gamma_0 + \gamma_1 n + \cdots + \gamma_{m_s-1} n^{m_s-1}) r_s^n,$$

donde los coeficientes α_i, β_i, γ_i, etc., se determinan a partir de las condiciones iniciales.

3.1. Ejemplo 1: relación de recurrencia con raíces múltiples

Consideremos la relación de recurrencia:

$$a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2} - 37a_{n-3} + 86a_{n-4} - 76a_{n-5} + 24a_{n-6}.$$

La **ecuación característica** asociada es:

$$r^6 - 5r^5 + r^4 - 37r^3 + 86r^2 - 76r + 24 = 0.$$

Factorizando, obtenemos:

$$r^6 - 5r^5 + r^4 - 37r^3 + 86r^2 - 76r + 24 = (r-2)^3 (r-1)^2 (r+1).$$

Las **raíces** son:

$$r_1 = 2 \quad (\text{multiplicidad } 3), \quad r_2 = 1 \quad (\text{multiplicidad } 2), \quad r_3 = -1 \quad (\text{multiplicidad } 1).$$

La **solución general** de la relación de recurrencia es:

$$a_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2) 2^n + (\beta_0 + \beta_1 n) 1^n + \gamma_0 (-1)^n,$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$ se determinan usando las condiciones iniciales.

3.2. Ejemplo 2: relación de recurrencia con raíz doble

Consideremos ahora una RRLHCC de orden 2:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},$$

con condiciones iniciales $a_0 = 2$ y $a_1 = 8$.

La **ecuación característica** asociada es:

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

que se puede reescribir como:

$$(r-2)^2 = 0.$$

La única **raíz** es $r = 2$, con multiplicidad 2.

La **solución general** de la relación de recurrencia es:

$$a_n = (\alpha + \beta n)2^n.$$

Usamos las condiciones iniciales para **determinar** α y β (**constantes**):

$$a_0 = \alpha \cdot 2^0 = \alpha = 2,$$

$$a_1 = (\alpha + \beta \cdot 1)2^1 = (2+\beta) \cdot 2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad 2 + \beta = 4 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$a_n = (2 + 2n)2^n.$$

Calculamos los primeros términos de la sucesión usando la fórmula:

$$a_n = (2 + 2n)2^n.$$

Para $n = 0$:

$$a_0 = (2 + 2 \cdot 0) \cdot 2^0 = 2.$$

Para $n = 1$:

$$a_1 = (2 + 2 \cdot 1) \cdot 2^1 = 8.$$

Para $n = 2$:

$$a_2 = (2 + 2 \cdot 2) \cdot 2^2 = 24.$$

Por lo tanto, la sucesión es: $2, 8, 24, \ldots$.

4. Teorema de solución para las RRLNHCC (Relaciones de Recurrencia Lineales No Homogéneas con Coeficientes Constantes)

4.1. Teorema general

Sea una RRLNHCC de la forma:

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} + L(n),$$

donde $L(n)$ representa la parte no homogénea, C_i son coeficientes constantes y k es el orden de la recurrencia.

La solución general de la RRLNHCC es la suma de dos partes:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

donde:

- $a_n^{(h)}$ es la solución de la parte homogénea asociada.
- $a_n^{(p)}$ es una solución particular de la parte no homogénea $L(n)$.

Estrategia para resolver la recurrencia:

1. Resolver la **parte homogénea**: $a_n^{(h)}$.
   - Determinar la **ecuación característica**.
   - Encontrar las raíces de la ecuación característica.
   - Construir la solución general de la parte homogénea según las raíces (simples o múltiples).
2. Determinar una **solución particular** $a_n^{(p)}$ de la parte no homogénea $L(n)$.
3. Combinar ambas partes: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$.

4.2. Ejemplo resuelto

Considere la recurrencia no homogénea:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1.$$

Paso 1: Parte homogénea La ecuación homogénea asociada es:

$$a_n^{(h)} = 2a_{n-1}^{(h)}.$$

La ecuación característica es:

$$r - 2 = 0 \implies r = 2.$$

Por lo tanto, la solución general de la parte homogénea es:

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 2^n,$$

donde α es una constante a determinar.

Paso 2: Solución particular de la parte no homogénea La parte no homogénea es $L(n) = 1$. Probaremos con una solución particular constante de la forma:

$$a_n^{(p)} = A.$$

Sustituyendo en la recurrencia:

$$A = 2A + 1.$$

Resolviendo para A:

$$A = -1.$$

Por lo tanto, una solución particular es:

$$a_n^{(p)} = -1.$$

Paso 3: Solución general La solución general de la recurrencia es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha \cdot 2^n - 1.$$

Paso 4: Determinar la constante α Usando la condición inicial $a_1 = 1$:

$$a_1 = \alpha \cdot 2^1 - 1 = 1.$$

Resolviendo para α:

$$2\alpha - 1 = 1 \implies 2\alpha = 2 \implies \alpha = 1.$$

Solución final: La solución de la recurrencia es:

$$a_n = 2^n - 1.$$

Verificación: Calculamos algunos términos para verificar la solución:

- $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ (condición inicial).
- $a_2 = 2^2 - 1 = 3$.
- $a_3 = 2^3 - 1 = 7$.
- $a_4 = 2^4 - 1 = 15$.

Por lo tanto, la solución coincide con la recurrencia dada.

Solución final: $a_n = 2^n - 1$.

5. Soluciones particulares de RRLNHCC (Relaciones de Recurrencia Lineales No Homogéneas con Coeficientes Constantes)

Dada una relación de recurrencia no homogénea con coeficientes constantes (RRLNHCC) de la forma:

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} + L(n),$$

donde la parte no homogénea $L(n)$ es de la forma:

$$L(n) = (p_0 + p_1 n + \cdots + p_t n^t) s^n,$$

con p_i y s constantes.

5.1. Teorema: Soluciones particulares de RRLNHCC

La solución particular $a_n^{(p)}$ depende de si s es raíz o no de la ecuación característica asociada a la parte homogénea.

1. **Caso 1: s no es raíz de la ecuación característica.** En este caso, la solución particular se toma de la forma:

   $$a_n^{(p)} = (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_t n^t) s^n,$$

   donde β_i son constantes a determinar.

2. **Caso 2: s es raíz de la ecuación característica con multiplicidad m.** En este caso, la solución particular se modifica multiplicando por n^m:

   $$a_n^{(p)} = (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_t n^t) s^n n^m.$$

5.2. Ejemplo resuelto

Consideremos la relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + n,$$

con condición inicial $a_1 = 1$.

Paso 1: Parte homogénea La parte homogénea de la recurrencia es:

$$a_n^{(h)} = a_{n-1}^{(h)}.$$

La ecuación característica es:

$$r - 1 = 0 \implies r = 1.$$

Como la raíz $r = 1$ es única, la solución de la parte homogénea es de la forma:

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 1^n = \alpha.$$

Paso 2: Parte no homogénea La parte no homogénea $L(n)$ es:

$$L(n) = n.$$

Observamos que $s = 1$ y que $s = 1$ **es raíz de la ecuación característica** con multiplicidad 1. Por lo tanto, la solución particular debe ser de la forma:

$$a_n^{(p)} = (\beta_0 + \beta_1 n) \cdot 1^n \cdot n^1.$$

Simplificando:

$$a_n^{(p)} = \beta_0 n + \beta_1 n^2.$$

Paso 3: Determinar las constantes β_0 y β_1 Sustituimos $a_n^{(p)} = \beta_0 n + \beta_1 n^2$ en la recurrencia original $a_n = a_{n-1} + n$:

$$\beta_0 n + \beta_1 n^2 = \beta_0(n-1) + \beta_1(n-1)^2 + n.$$

Desarrollamos el lado derecho:

$$\beta_0(n-1) + \beta_1(n-1)^2 + n = \beta_0 n - \beta_0 + \beta_1(n^2 - 2n + 1) + n.$$

Simplificamos los términos:

$$\beta_0 n + \beta_1 n^2 = \beta_1 n^2 + (\beta_0 - 2\beta_1 + 1)n + (-\beta_0 + \beta_1).$$

Igualando coeficientes del mismo grado en n:

- Coeficiente de n^2: $\beta_1 = \beta_1 \implies$ (se cumple).
- Coeficiente de n: $\beta_0 - 2\beta_1 + 1 = \beta_0$.
- Término constante: $-\beta_0 + \beta_1 = 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$-\beta_0 + \beta_1 = 0 \implies \beta_1 = \beta_0.$$

$$\beta_0 - 2\beta_1 + 1 = \beta_0 \implies -2\beta_1 + 1 = 0 \implies \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\beta_0 = \frac{1}{2}$ y $\beta_1 = \frac{1}{2}$. La solución particular es:

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Paso 4: Solución general La solución general de la recurrencia es la suma de la parte homogénea y la parte no homogénea:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha + \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right).$$

Paso 5: Determinar la constante α Usando la condición inicial $a_1 = 1$:

$$a_1 = \alpha + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1)^2 = 1.$$

Simplificando:

$$\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies \alpha = 0.$$

Solución final: La solución de la recurrencia es:

$$a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Verificación: Calculamos algunos términos:

- $a_1 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1)^2 = 1$ (condición inicial).
- $a_2 = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(2)^2 = 1 + 2 = 3$.
- $a_3 = \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{2}(3)^2 = 1{,}5 + 4{,}5 = 6$.

Por lo tanto, la solución coincide con la recurrencia dada.

Solución final: $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.