Matemática Discreta Tema 4. Grafos

Martín González Dios

22 de diciembre de 2024

Un grafo **G = (V, E)** consistente en V, un conjunto no vacío de vértices o nodos y E, un conjunto de aristas.

1. Tipos de grafos

1.1. Grafo Simple

Es un grafo que no tiene bucles (aristas que conectan un vértice consigo mismo) ni aristas múltiples (dos o más aristas que conectan el mismo par de vértices). En un grafo simple, cada par de vértices está conectado por a lo sumo una arista.

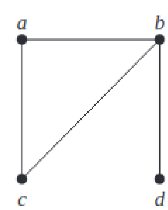


Figura 1: Grafo simple

1.2. Mutligrafo

Es un tipo de grafo que **permite múltiples aristas entre el mismo par de vértices**. Es decir, puede haber dos o más aristas que conecten los mismos vértices. (Existen varios caminos para ir de un nodo a otro)

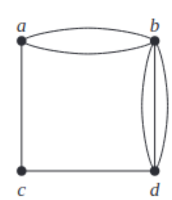


Figura 2: Multigrafo

1.3. Grafo ponderado

Es un grafo en el que **cada arista tiene un peso o costo asociado**. Este peso puede representar distancias, costos, tiempos, etc.

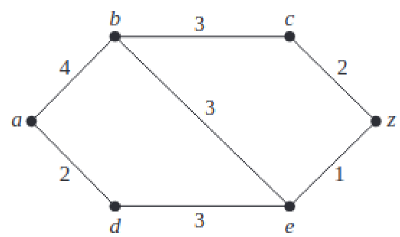


Figura 3: Grafo ponderado

1.4. Grafo dirigido

En un grafo dirigido, **las aristas tienen una dirección**, lo que significa que van de un vértice a otro y no se puede recorrer en sentido contrario.

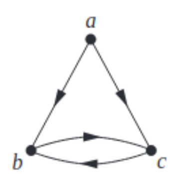
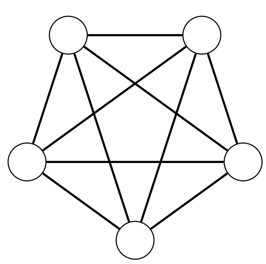


Figura 4: Grafo dirigido

1.5. Grafo completo

Es un grafo simple que cada par de vértices están conectados por una arista. El número de aristas del grafo completo K_n es:

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$



K_5

2. Grado de un vértice

El grado de un vértice en un grafo es una medida que indica **cuántas aristas están conectadas a ese vértice**. Se denomina como $\delta(vertice)$ = grado. Dependiendo del tipo de grafo, el grado se puede definir de la siguiente manera:

- Grafo no dirigido: en un grafo no dirigido, el grado de un vértice es simplemente el número de aristas que inciden en él. Por ejemplo, si un vértice tiene tres aristas conectadas, su grado es 3.
- Grafo dirigido: En un grafo dirigido, se distingue entre dos tipos de grado: 1. **Grado de entrada**: es el número de aristas que llegan al vértice (es decir, que apuntan hacia él). 2. **Grado de salida**: es el número de aristas que salen del vértice (es decir, que apuntan desde él). 3. El **grado total** de un vértice en un grafo dirigido se puede considerar como la suma del grado de entrada y el grado de salida.

Dado un grafo G = (V, E), siendo V los vértices y E las aristas:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E|$$

3. Representación de un grafo

Los grafos se pueden representar mediante una matriz de adyacencia. A continuación, se presenta un ejemplo.

Ejemplo

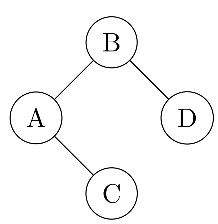
Consideremos un grafo con los siguientes vértices y aristas:

- Vértices: A, B, C, D
- Aristas: $(A, B), (A, C), (B, D)$

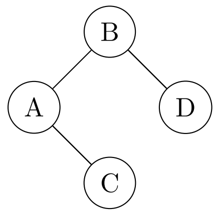
La matriz de adyacencia para este grafo es:

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	1	0	0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



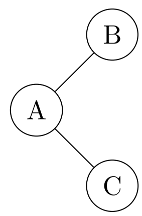
4. Subgrafo



(Grafo de referencia para ejemplos en subgrafos)

Un **subgrafo** H de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo que se forma a partir de un subconjunto de los vértices $V' \subseteq V$ y un subconjunto de las aristas $E' \subseteq E$ tales que cada arista en E' conecta dos vértices en V'. Formalmente, se puede definir como:

$$H = (V', E') \quad \text{donde} \quad V' \subseteq V \quad \text{y} \quad E' \subseteq E \text{ y } E' \text{ contiene solo aristas entre vértices en } V'.$$

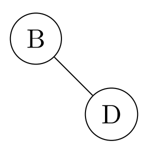


4.1. Subgrafo propio

Un **subgrafo propio** de un grafo G es un subgrafo H que no es igual a G en términos de sus vértices y aristas. Es decir, H es un subgrafo propio de G si:

$$H \neq G.$$

Esto implica que V' es un subconjunto propio de V (es decir, $V' \neq V$) o E' es un subconjunto propio de E (es decir, $E' \neq E$).

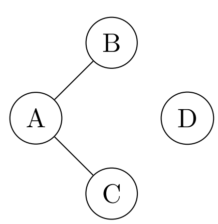


4.2. Subgrafo generador

Un **subgrafo generador** de un grafo G es un subgrafo que contiene todos los vértices de G pero puede tener un subconjunto de las aristas. En otras palabras, un subgrafo generador H de G es tal que:

$$V' = V \quad \text{y} \quad E' \subseteq E.$$

Esto significa que H incluye todos los vértices de G y puede incluir algunas o todas las aristas de G.



5. Formar de recorrer un grafo

Un **camino** es una secuencia de vértices en un grafo donde cada par de vértices consecutivos está conectado por una arista. Formalmente, un camino se puede definir como una secuencia de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que existe una arista entre v_i y v_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Tipos de camino:

1. **Camino Simple:** un camino es simple si no repite ningún vértice. Es decir, todos los vértices en el camino son distintos.
2. **Camino Cerrado:** un camino es cerrado si el primer y el último vértice son el mismo. En otras palabras, forma un ciclo.
3. **Camino Abierto:** un camino es abierto si el primer y el último vértice son diferentes. Este es el tipo más común de camino.

6. Isomorfismo de grafos

Dos grafos $G = (V_G, E_G)$ y $H = (V_H, E_H)$ se dicen **isomorfos** si existe una biyección $f : V_G \to V_H$ tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V_G$, se cumple que:

$$\{u, v\} \in E_G \iff \{f(u), f(v)\} \in E_H.$$

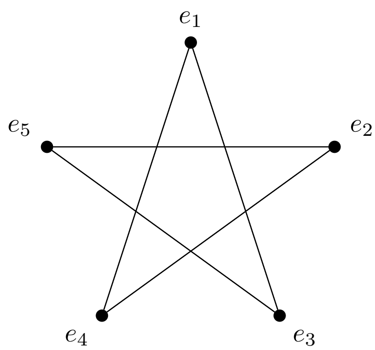
Esto significa que hay una correspondencia uno a uno entre los vértices de los dos grafos que preserva la estructura de las aristas.

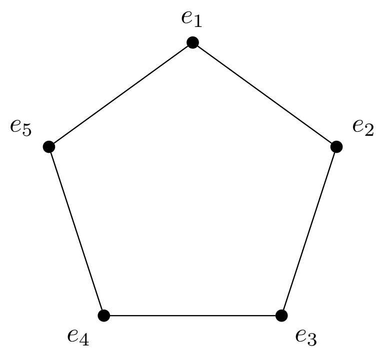
La manera de **comprobar si dos grafos son isomorfos** es ir comparándolos vértice a vértice y comprobar que cada vértice se conecta con el correspondiente en el otro grafo, además de comprobar que el grado de los grafos sea el mismo.

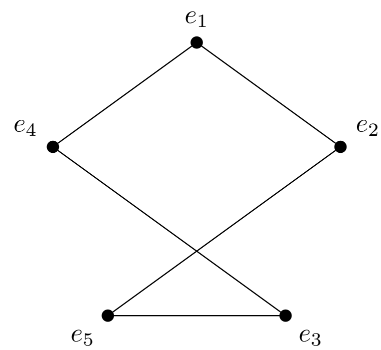
6.1. Propiedades del Isomorfismo

1. **Preservación de la Conectividad**: si dos grafos son isomorfos, tienen la misma conectividad. Es decir, si hay un camino entre dos vértices en un grafo, habrá un camino correspondiente entre los vértices isomorfos en el otro grafo.
2. **Número de Vértices y Aristas**: dos grafos isomorfos deben tener el **mismo número de vértices y el mismo número de aristas**.
3. **Grados de los Vértices**: si G y H son isomorfos, entonces para cada vértice v en G, el grado de v (número de aristas incidentes) debe ser igual al grado del vértice correspondiente $f(v)$ en H.
4. **Ciclos y Componentes Conexas**: los ciclos y componentes conexas en un grafo se preservan en su grafo isomorfo.

6.2. Ejemplo de Isomorfismo







	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1			1	1	
2				1	1
3	1				1
4	1	1			
5		1	1		

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1			1
2	1		1		
3		1		1	
4			1		1
5	1			1	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1		1	
2	1				1
3				1	1
4	1		1		
5		1	1		

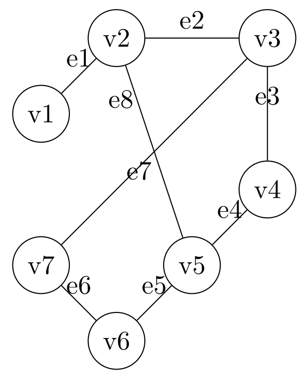
7. Matriz de incidencia

La **matriz de incidencia** es una representación matricial de un grafo que relaciona sus vértices con sus aristas. Para un grafo G con n vértices y m aristas, la matriz de incidencia M es una matriz de tamaño $n \times m$ donde:

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } i \text{ está adyacente con la arista } j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

7.1. Ejemplo de Matriz de Incidencia

Consideremos el siguiente grafo G:



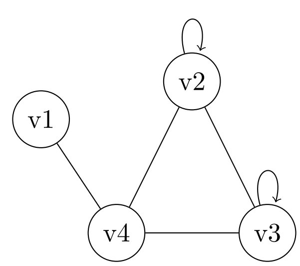
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo las columnas las aristas de $e1$ a $e8$ y las filas los vértices de $v1$ a $v7$.

8. Conectividad de un grafo

El número de caminos de longitud k que hay entre un vértice v_i y el vértice v_j es la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia A^k.

Ejemplo: ¿Caminos de longitud 3 entre $v4$ y $v1$ del siguiente grafo?



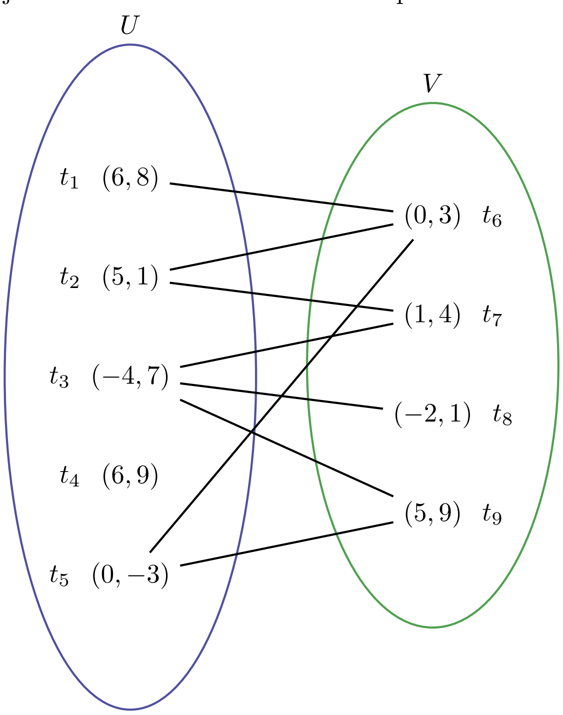
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 & 7 \\ 2 & 8 & 8 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^3(4, 1) = 3$. **Existen 3 caminos posibles**.

9. Grafo bipartito

Se considera grafo bipartito si tiene una partición de dos conjuntos de vértices, V_1 y V_2. Cada conjunto está unido vértice a vértice por una arista.



Ejemplo de grafo bipartito.

9.1. Características de los grafos bipartitos

Grafo bipartito G $= (V_1 \cup V_2, E)$, con $V_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ y $V_2 = \{w_1, ..., w_n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) + \sum_{i=1}^{m} gr(w_i) = |E|$$

La suma de los grados de los 2 conjuntos da el total de las aristas.

Un grafo G es **bipartito si G no tiene ciclos de longitud impar**.

Para determinar si un grafo es bipartito basta con ir coloreando los vértices, cuando sean adyacentes se cambia de color.

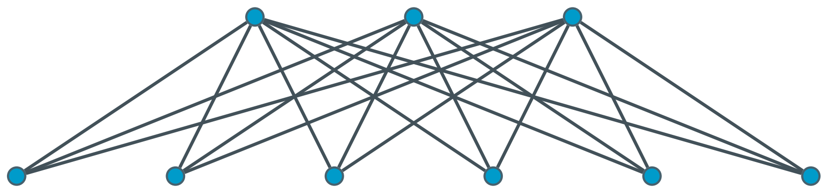
9.2. Grafo bipartito completo

Si cada uno de los vértices de un subconjunto de la partición es **vecino de todos los vértices del otro subconjunto**. El grafo bipartito completo se designa como $K_{n,m}$.
G($V_1 \cup V_2$, E). $|V_1|$ = n, $|V_2|$ = m.

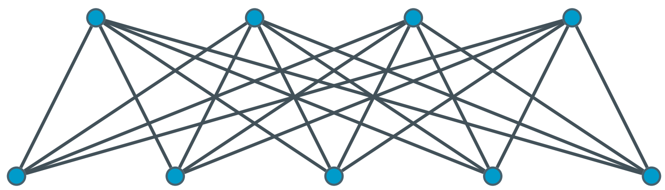
Propiedades del grafo bipartito:

$$|E| = n \cdot m$$

Todo grafo bipartito es isomorfo a un subgrafo de un grafo completo $K_{n,m}$.



$K_{3,6}$



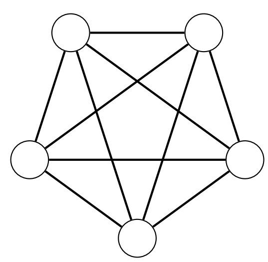
$K_{4,5}$

10. Grafo plano

Un grafo es plano si se puede dibujar en el plano sin que **ninguna de sus aristas se cruce**.

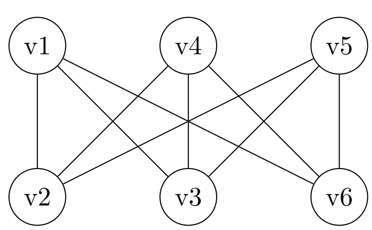
10.1. Propiedades

1. Sea un grafo **conexo, sin bucles y plano** G = (V, E), con $|V| \geq 3$, **entonces** $|E| \leq 3|V| - 6$.
   K_5 no es plano $(10 \leq 3 \cdot 5 - 6)$



K_5

2. Sea un grafo **conexo, bipartito y plano** G = (V, E) con $|V| \geq 3$, **entonces** $|E| \leq 2|V| - 4$.
   $K_{3,3}$ no es plano $(9 \nleq 2 \cdot 6 - 4)$



$K_{3,3}$

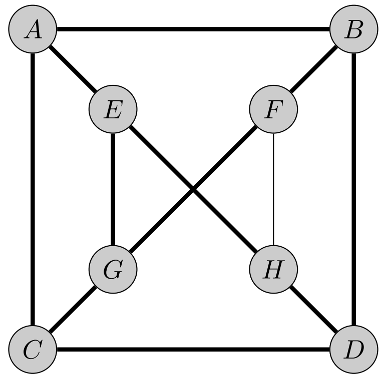
11. Teorema de Kuratowski

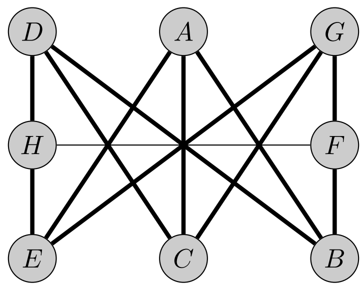
El Teorema de Kuratowski establece que un grafo es plano si, y solo si, no contiene ningún subgrafo que sea homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

11.1. Definiciones

- Un **grafo plano** es aquel que puede ser dibujado en el plano sin que sus aristas se crucen.
- Dos grafos son **homeomorfos** si se pueden obtener uno del otro mediante sucesivas subdivisiones de sus aristas. Esto significa que se pueden agregar vértices en las aristas sin cambiar la estructura fundamental del grafo.
- K_5 es el grafo completo de cinco vértices, donde cada par de vértices está conectado por una arista.
- $K_{3,3}$ es un grafo bipartito completo que tiene dos conjuntos de tres vértices, donde cada vértice de un conjunto está conectado a todos los vértices del otro conjunto.

11.2. Ejemplo





Identificación de la homeomorfía con $K_{3,3}$:

- **El grafo de arriba:**
  - Contiene ocho vértices: A, B, C, D, E, F, G, H.
  - Las conexiones entre los vértices forman un grafo que, al observarlo, tiene una estructura similar a $K_{3,3}$, pero con subdivisiones. Una *subdivisión* ocurre cuando los arcos de un grafo son reemplazados por caminos de longitud mayor a 1.
- **El grafo $K_{3,3}$ (el de abajo):**
  - Es un grafo bipartito completo con dos conjuntos de vértices $\{A, C, E\}$ y $\{B, F, G\}$, donde cada vértice de un conjunto está conectado con todos los vértices del otro conjunto.
- **Relación entre ambos grafos:**
  - En el grafo de arriba, los vértices A, B, C, D están conectados a través de E, F, G, H. Si consideramos a E, F, G, H como subdivisiones de los arcos en $K_{3,3}$, el grafo se transforma en una representación equivalente (*homeomorfa*) de $K_{3,3}$.

Conclusión de no planitud:

- $K_{3,3}$ no es un grafo plano: No puede dibujarse en el plano sin que sus aristas se crucen, ya que requiere al menos un cruce de aristas según el teorema de Euler para grafos planos y la restricción de los grafos bipartitos.
- Como el grafo de arriba es **homeomorfo** a $K_{3,3}$, también es no plano.

Visualización de la equivalencia:

- Si eliminamos las subdivisiones del grafo superior, obtenemos una estructura idéntica al grafo $K_{3,3}$.
- Esto confirma que el grafo superior tiene un cruce inevitable de aristas, lo que lo hace no plano.

Por lo tanto, el grafo de arriba no es plano porque contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, cumpliendo con el teorema de Kuratowski.

12. Teorema de Whitney

El Teorema de Whitney establece que un grafo es plano si, y solo si, no contiene ningún subgrafo que sea contraíble a K_5 o $K_{3,3}$.

Una **contracción** de un grafo es el resultado de eliminar una arista y fusionar los dos vértices que estaban conectados por esa arista en un solo vértice. Esto puede ser representado formalmente como sigue: si $e = (u, v)$ es una arista en un grafo G, la contracción de e produce un nuevo grafo G' donde u y v son reemplazados por un nuevo vértice w, y todas las aristas que conectaban u o v a otros vértices ahora conectan w a esos vértices.

12.1. Implicaciones del Teorema

El teorema implica que si un grafo contiene un subgrafo que puede ser reducido a K_5 o $K_{3,3}$ mediante contracciones, entonces el grafo no puede ser dibujado en el plano sin cruces. Por lo tanto, para determinar si un grafo es plano, es suficiente buscar estos subgrafos.

13. Grafo euleriano

Un **grafo euleriano** es un tipo de grafo que contiene un ciclo que visita cada arista exactamente una vez. Este ciclo se conoce como *circuito euleriano*. Si un grafo tiene un circuito euleriano, se dice que es un grafo euleriano. Además, si un grafo tiene un camino que visita cada arista exactamente una vez, se denomina *camino euleriano*.

Para que un grafo sea euleriano, debe cumplir con ciertas condiciones. El **Teorema de Euler** establece las siguientes condiciones necesarias y suficientes:

- Un grafo conexo (es decir, hay un camino entre cualquier par de vértices) tiene un **circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen un grado par**.
- Un grafo conexo tiene un **camino euleriano si y solo si exactamente cero o dos de sus vértices tienen un grado impar**.

Esto significa que, para encontrar un circuito euleriano, todos los vértices del grafo deben tener un número par de aristas incidentes. Por otro lado, si solo dos vértices tienen un grado impar, se puede encontrar un camino euleriano que comienza en uno de esos vértices y termina en el otro.

14. Grafo hamiltoniano

Un **grafo hamiltoniano** es un tipo de grafo que contiene un ciclo que visita cada vértice exactamente una vez. Este ciclo se conoce como *circuito hamiltoniano*. Si un grafo tiene un circuito hamiltoniano, se dice que es un grafo hamiltoniano. Además, si un grafo tiene un camino que visita cada vértice exactamente una vez, se denomina *camino hamiltoniano*.

A diferencia de los grafos eulerianos, no existe un criterio simple y general para determinar si un grafo es hamiltoniano. Sin embargo, hay varios teoremas y condiciones que pueden ayudar a identificar grafos hamiltonianos.

14.1. Teorema de Dirac

Uno de los resultados más conocidos en la teoría de grafos hamiltonianos es el **Teorema de Dirac**, que establece que:

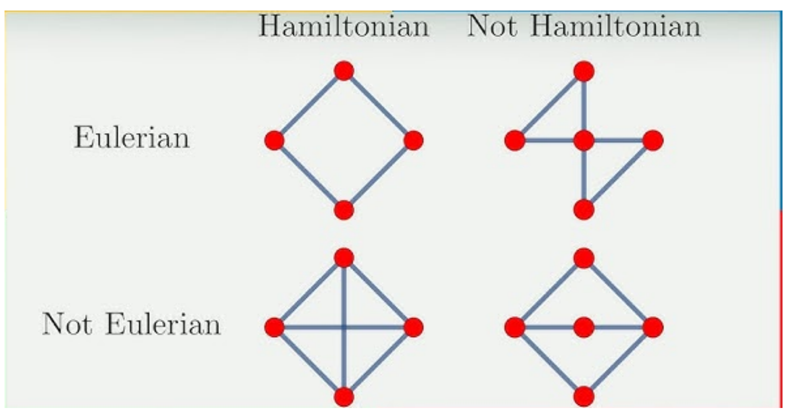
> Si un grafo G tiene n vértices (con $n \geq 3$) y cada vértice tiene un grado de al menos $\frac{n}{2}$, entonces G contiene un circuito hamiltoniano.

14.2. Teorema de Ore

Otro resultado importante es el **Teorema de Ore**, que dice que:

> Si un grafo G tiene n vértices (con $n \geq 3$) y para cada par de vértices no adyacentes u y v, se cumple que $gr(u) + gr(v) \geq n$, entonces G contiene un circuito hamiltoniano.

15. Comparación entre grafos eulerianos y hamiltonianos



16. Coloración de grafos

El problema de la coloración de grafos consiste en asignar un color a cada vértice de un grafo de manera que dos vértices adyacentes no compartan el mismo color. El mínimo número de colores necesarios para realizar esta tarea se denomina el **número cromático** del grafo y se denota por $\chi(G)$.

16.1. Propiedades fundamentales

- **Teorema de los cuatro colores:** Todo grafo plano se puede colorear con **a lo sumo 4 colores**.
- Para un grafo simple G, se cumple que:

$$1 \leq \chi(G) \leq |V|, \tag{1}$$

  donde $|V|$ es el número de vértices del grafo.
- Para un grafo completo K_n, el número cromático es igual a n:

$$\chi(K_n) = n.$$

- Para cualquier grafo G, el número cromático está acotado por:

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G), \tag{2}$$

  donde $\Delta(G)$ es el **grado máximo** de los vértices del grafo.

16.2. Grafos bipartitos y ciclos

- Un grafo es **2-colorable** si y solo si es **bipartito**.
- Si G es un ciclo C_n, entonces:
  - $\chi(C_n) = 2$ si el ciclo tiene longitud par.
  - $\chi(C_n) = 3$ si el ciclo tiene longitud impar.

16.3. Teorema de Brooks

Teorema de Brooks: Sea G un grafo conexo. Si G no es un grafo completo y no contiene ciclos de longitud impar, entonces:

$$\chi(G) \leq \Delta(G). \tag{3}$$

16.4. Algoritmo voraz para colorear un grafo

Un método sencillo para colorear un grafo es el **algoritmo voraz**, que sigue estos pasos:

1. Numerar los vértices del grafo.
2. Colorear el primer vértice con el primer color.
3. Colorear el segundo vértice con el primer color disponible que no sea usado por sus vecinos.
4. Repetir este proceso para los siguientes vértices, coloreando cada uno con el primer color disponible.

Nota: Este algoritmo puede no encontrar la coloración óptima, pero asegura que se usen a lo sumo $|V|$ colores, donde $|V|$ es el número de vértices del grafo.

17. Grafo ponderado

Un grafo $G = (V, E)$ se denomina **ponderado** si existe una función de peso definida como:

$$w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad e \mapsto w(e), \tag{4}$$

donde $w(e)$ representa el peso del eje e.

17.1. Propiedades de los árboles en grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo, se cumplen las siguientes propiedades equivalentes:

- G es un **árbol** $\iff$ cada par de vértices distintos está conectado por un único camino.
- G es **conexo** y cada eje es un **eje de separación** (o puente).
- G es **conexo** y $|V| = |E| + 1$.
- G no contiene circuitos y $|V| = |E| + 1$.

17.2. Árboles generadores

Sea G un grafo conexo. Un **árbol generador** (también llamado *recubridor* o *spanning tree*) es un subgrafo T de G que:

- Es un árbol.
- Conecta todos los vértices del grafo.

Un árbol generador se dice **minimal** si su peso es el mínimo posible entre todos los árboles generadores de G.

17.3. Algoritmo de Kruskal

El algoritmo de **Kruskal** es un método voraz para encontrar un árbol generador minimal. Su procedimiento es el siguiente:

1. Inicializar un contador $i = 1$ y seleccionar el eje de peso mínimo e_1 del grafo.
2. Mientras $1 \leq i \leq |V| - 2$:
   a) Tomar el eje e_{i+1} de peso mínimo entre los ejes restantes del grafo que no formen un circuito con los ejes $e_1, e_2, \ldots, e_i$.
   b) Incrementar i.
3. Repetir el paso anterior hasta que no se puedan seleccionar más ejes.

17.4. Algoritmo de Prim

El algoritmo de **Prim** es otro método voraz para encontrar un árbol generador minimal. Su procedimiento es el siguiente:

1. Seleccionar un vértice cualquiera v como punto de inicio. Inicializar $T_0 = \{v\}$ (primer árbol).
2. Considerar el conjunto de ejes que inciden en alguno de los vértices del árbol T_i construido hasta el momento. Seleccionar el eje de peso mínimo que no forme un circuito con los ejes del árbol y añadirlo al árbol.
3. Repetir el paso anterior hasta que no se puedan añadir más ejes.

18. El Algoritmo de Hierholzer

El algoritmo de Hierholzer es un método eficiente para **encontrar un ciclo Euleriano en un grafo conexo donde todos los vértices tienen un grado par**. Se aplica principalmente en **grafos no dirigidos**, aunque también puede adaptarse para grafos dirigidos.

18.1. Descripción del Algoritmo

El algoritmo de Hierholzer sigue estos pasos:

1. Selecciona un vértice inicial arbitrario del grafo.
2. Construye un ciclo inicial siguiendo aristas no utilizadas hasta regresar al vértice de inicio.
3. Si aún quedan aristas no utilizadas, selecciona un vértice en el ciclo actual que tenga aristas no utilizadas y construye un subciclo desde este vértice.
4. Fusiona el subciclo con el ciclo original.
5. Repite los pasos 3 y 4 hasta que todas las aristas hayan sido utilizadas.

18.2. Ejemplo

Consideremos el siguiente grafo no dirigido con los vértices y aristas:

- Vértices: $\{A, B, C, D\}$
- Aristas: $\{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

El grafo es conexo y todos los vértices tienen un grado par, por lo que cumple las condiciones para tener un ciclo Euleriano. Aplicamos el algoritmo:

1. Seleccionamos A como vértice inicial.
2. Construimos un ciclo inicial: $A \to B \to C \to A$.
3. El vértice B tiene una arista no utilizada ($B \to D$). Construimos un subciclo desde B: $B \to D \to C \to B$.
4. Fusionamos el subciclo con el ciclo original: $A \to B \to D \to C \to B \to C \to A$.

Por lo tanto, el ciclo Euleriano encontrado es $A \to B \to D \to C \to B \to C \to A$.

18.3. Complejidad

El algoritmo de Hierholzer tiene una complejidad temporal de $O(E)$, donde E es el número de aristas del grafo. Esto se debe a que cada arista se recorre exactamente una vez.