

RAPPORT DE STAGE

19/05/2025 - 04/07/2025

TELECOM PARIS

Enveloppes convexes aléatoires, lois max-stables



Martin DUFFAUD

Sous la direction de Laurent DECREUSEFOND

Table des matières

1	Introduction : Méthode de Stein et loi d'extremum généralisée	1
2	Premières propriétés de la fonction de support r_K	1
3	Convexe-stabilité	3
4	Étude des espaces α-convexe-stable	5
4.1	Sommets d'un espace α -convexe-stable	5
4.1.1	Cas d'un nombre fini de paramètres	5
4.1.2	Cas dénombrable	6
4.1.3	Un Théorème de convergence presque sûre vers la boule unité	7
4.2	Recherche des points de non dérivabilité de r_{K_α} et du nombre de sommets de K_α	8
4.3	Périmètre et aire d'un espace α -convexe-stable	9
4.3.1	Loi du périmètre de K_α	9
4.3.2	Loi de l'aire de K_α	10
4.4	Compléments sur la loi de $r_{K_\alpha}(0)$	12
4.4.1	Processus de Poisson aminci	12
4.4.2	Le Gumbel Trick	13
5	Conclusion	14
6	Bibliographie	15
7	Appendice : Étude des espaces α-stable	16
8	Annexe 1 : Preuves	17
9	Annexe 2 : Phénomène de Gibbs	21
10	Annexe 3 : Code Python	22

💡 Les résultats encadrés en bleu ne sont pas présent dans la littérature et ont été établis pendant le stage. Les preuves de ces résultats (lorsqu’elles ne sont pas esquissées) sont présentes en Annexe 1.

1 Introduction : Méthode de Stein et loi d’extremum généralisée

Les phénomènes extrêmes, qu’il s’agisse de catastrophes naturelles, de pertes financières massives ou d’anomalies dans des réseaux, nécessitent une modélisation probabiliste robuste afin d’évaluer les risques associés. La théorie des valeurs extrêmes (Extreme Value Theory, EVT) fournit un cadre pertinent pour l’étude de tels événements rares. Elle repose sur le théorème de Fisher–Tippett–Gnedenko (voir [FT28]), qui identifie les seules lois possibles comme limites de maxima normalisés de variables indépendantes et identiquement distribuées : les lois de Fréchet, Gumbel et Weibull.

Dans ce contexte, une méthode remarquable pour évaluer la convergence d’une distribution empirique vers une de ses lois extrêmes a vu le jour : la méthode de Stein. Initialement élaboré par Stein lui-même pour étudier la convergence vers la loi-normale, cette méthode a par la suite été généralisée pour d’autres lois classiques. Son approche repose sur la construction d’un opérateur de Stein, souvent vu comme le générateur d’un semi-groupe de Markov, caractérisant la loi limite. L’un des atouts majeurs de cette méthode est sa capacité à fournir des bornes quantitatives précises sur la distance entre deux distributions, en particulier dans des contextes où d’autres méthodes se révèlent inopérantes.

En particulier, L’étude des cônes convexes permet d’étendre la méthode de Stein à des contextes non nécessairement euclidiens (voir [Cos24]). Ces structures offrent un cadre algébrique naturel, que l’on détaillera dans le cadre des convexes compacts, et dans lequel des distributions stables peuvent émerger comme limites de sommes généralisées. En exploitant la stabilité de ces distributions sur les cônes convexes, on peut construire des semi-groupes de Markov adaptés, dont les générateurs servent ensuite d’opérateurs de Stein. Cela permet d’obtenir des taux de convergence précis dans des espaces complexes — par exemple, celui des convexes compacts — où les méthodes classiques ne s’appliquent pas.

Ainsi, le but de ce stage a été d’étudier les propriétés des espaces convexes compacts de variables aléatoires, afin d’entamer le balisage d’un domaine des mathématiques encore peu exploré, et que l’on espère utile en lien avec la méthode de Stein, axe de recherche majeur de Laurent Decreusefond. En particulier, on se concentrera sur les espaces convexe-stables -c’est à dire dont la fonction de support suit une loi d’extremum généralisée- pour lesquels on tentera de mieux caractériser la fonction de support, et d’identifier des propriétés géométriques pertinentes.

2 Premières propriétés de la fonction de support r_K

On note $C_0(\mathcal{K})$ l’ensemble des parties convexes compacts de \mathbb{R}^2 contenant 0.

DÉFINITION 1. Si $K \in C_0(\mathcal{K})$, sa fonction de support est définie par

$$r_K : u \in \mathbb{S}^1 \mapsto \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle$$

L’étude de r_K est utile pour le cadre probabiliste que l’on adoptera dans un second temps. Voyons quelques propriétés élémentaires la concernant. Dans la suite, on travaillera dans \mathbb{R}^2 car ce sera le point de vue adopté plus tard, mais tous les résultats restent vrais en dimension finie quelconque. Cette Section reprend essentiellement le chapitre 4.4 de [Mat75].

PROPOSITION 1. Soit K un convexe compact de \mathbb{R}^2 contenant 0. On a

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^1} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u \rangle \leq r_K(u)\}$$

Géométriquement, cela revient à écrire qu'étant donné n'importe quelle direction $u \in \mathbb{S}^1$, K est situé en dessous de la droite affine passant par $r_K(u)u$ et dirigée par un vecteur normal à u .

PROPOSITION 2. Si $K \in C_0(\mathcal{K})$, r_K est continue et positive sur \mathbb{S}^1 .

REMARQUE 1. On peut également montrer que r_K est dérivable à droite et à gauche en tout point de \mathbb{S}^1 (voir [Hen18]).

Ainsi, on peut relever r_K en une fonction $\overline{r_K} : \theta \mapsto r_K(e^{i\theta})$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ continue et 2π -périodique. On confondra par abus ces deux fonctions dans la suite.

De plus, on peut définir une application (injective par la Proposition 1) $r : K \in C_0(\mathcal{K}) \mapsto r_K \in C^0(\mathbb{S}^1)$. De plus, on peut munir $C_0(\mathcal{K})$ d'une structure d'espace vectoriel normé. On note $\mathcal{R} = \text{Im}(r)$.

DÉFINITION 2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^2$, on définit l'addition de Minkowski de A et B par

$$A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

Il est alors clair que l'ensemble $C_0(\mathcal{K})$ muni de $+$ et de la multiplication externe par un scalaire réel positif est un cône convexe, de neutre pour l'addition $\{0\}$. Comme \mathbb{R}^2 est un espace de Banach, on peut munir $C_0(\mathcal{K})$ d'une structure d'espace complet (voir [Edg08] p.72)

DÉFINITION 3 (**Distance de Hausdorff**). Pour $A, B \subset \mathbb{R}^2$, on définit la distance de Hausdorff entre A et B par :

$$\rho(A, B) := \max \left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right)$$

PROPOSITION 3. ρ est une distance sur $C_0(\mathcal{K})$ qui fait de $(C_0(\mathcal{K}), \rho)$ un espace complet.

REMARQUE 2. On a les relations $r_{\lambda K} = \lambda r_K$ et $r_{K+K'} = r_K + r_{K'}$, pour $K, K' \in C_0(\mathcal{K})$ et $\lambda \geq 0$. \mathcal{R} est un cône convexe.

De plus, on a que la condition

$$\sup_{u \in \mathbb{S}^1} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \leq \varepsilon$$

est équivalente à $K \subset K' + \varepsilon B(0, 1)$ et $K' \subset K + \varepsilon B(0, 1)$, c'est-à-dire par définition $\rho(K, K') \leq \varepsilon$, ce qui conduit à la correspondance suivante.

THÉORÈME 1. Si on munit $C^0(\mathbb{S}^1)$ de la norme infini, r un homéomorphisme (bijection continue de réciproque continue).

Autrement dit, $C_0(\mathcal{K})$ peut être identifié au cône convexe \mathcal{R} .

Plus encore, si on connaît les sommets du convexe K , on peut en déduire une formule explicite de r_K à partir de ceux-ci (voir [Mat75], p. 89 et 90) :

PROPOSITION 4. Le cône \mathcal{R} est max-stable, c'est-à-dire que $f, g \in \mathcal{R}$ implique $f \vee g \in \mathcal{R}$. De plus, si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles convexes compacts contenus dans un compact fixe, les fonctions de support r_{K_i} sont uniformément bornées, et $\sup\{r_{K_i}, i \in I\}$ est la fonction de support de l'enveloppe convexe fermée $C(\bigcup_{i \in I} K_i) \in C_0(\mathcal{K})$.

COROLLAIRE 1. Une fonction r sur S^1 appartient à \mathcal{R} si et seulement si, en notant \cdot^+ la partie positive, elle admet la représentation :

$$r(u) = \sup (\lambda_i \langle u, u_i \rangle^+ \mid i \in I), \quad u \in S_0,$$

pour une famille dénombrable $(\lambda_i, u_i)_{i \in I}$ dans $\mathbb{R}_+ \times S^1$.

Ainsi, les éléments de \mathcal{R} sont caractérisés par un nombre dénombrable de coefficients non négatifs et d'éléments de S^1 (ou, par analogie, d'éléments de $[0, 2\pi]$).

3 Convexe-stabilité

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Dorénavant, les ensembles considérés sont des ensembles de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans \mathbb{R}^2 . L'étude précédente sur les convexes compacts contenant 0 subsiste bien évidemment. On note $C_0(\mathcal{K}_\Omega)$ cet espace. Dans toute la suite, on verra les éléments de \mathcal{R} comme des fonctions de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{R}_+ .

DÉFINITION 4. Une loi μ est dite α -stable (avec $\alpha > 0$) si étant donnés $a, b, c > 0, d \in \mathbb{R}$ sujets à $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$ et X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ , on a :

$$aX_2 + bX_3 \stackrel{\text{loi}}{=} cX_1 + d$$

Elle est α -max-stable si on a avec les mêmes notations :

$$aX_2 \vee bX_3 \stackrel{\text{loi}}{=} cX_1 + d$$

On va définir la notion de stabilité pour les convexes aléatoires, on a donc d'abord besoin de savoir à quoi on fait référence quand on parle de loi d'un convexe.

DÉFINITION 5. Soient $K, J \in C_0(\mathcal{K}_\Omega)$. On dit que K et J ont même loi (noté $K \stackrel{\text{loi}}{=} J$) lorsque les variables aléatoires r_K et r_J ont même loi.

Dans la suite, on va se concentrer sur certaines lois qui vérifient des relations de stabilité : les lois max-stables, ou *extreme-value distributions* en anglais. On rappelle que l'opération \vee sur les réels désigne le maximum.

DÉFINITION 6. On dira que K est α -convexe-stable si sous les mêmes hypothèses on a :

$$C(aK' \cup bK'') \stackrel{\text{loi}}{=} K \iff ar_{K'} \vee br_{K''} \stackrel{\text{loi}}{=} r_K$$

Ainsi, étant donné un espace α -stable K , (resp. convexe-stable) on a que ponctuellement, r_K est α -stable (respectivement max-stable). Un exemple de loi max-stable est la loi de Fréchet :

DÉFINITION 7. La loi de Fréchet de paramètre $\alpha > 0, \sigma > 0, m \in \mathbb{R}$ et notée $\mathcal{F}(\alpha, \sigma, m)$ est la loi ayant comme fonction de répartition :

$$\Phi_{\alpha, \sigma, m} : x \mapsto e^{-\left(\frac{\sigma}{x-m}\right)^\alpha} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(x-m)$$

REMARQUE 3. α est appelé paramètre de forme, σ paramètre d'échelle et m paramètre de position (du minimum). Cette loi a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

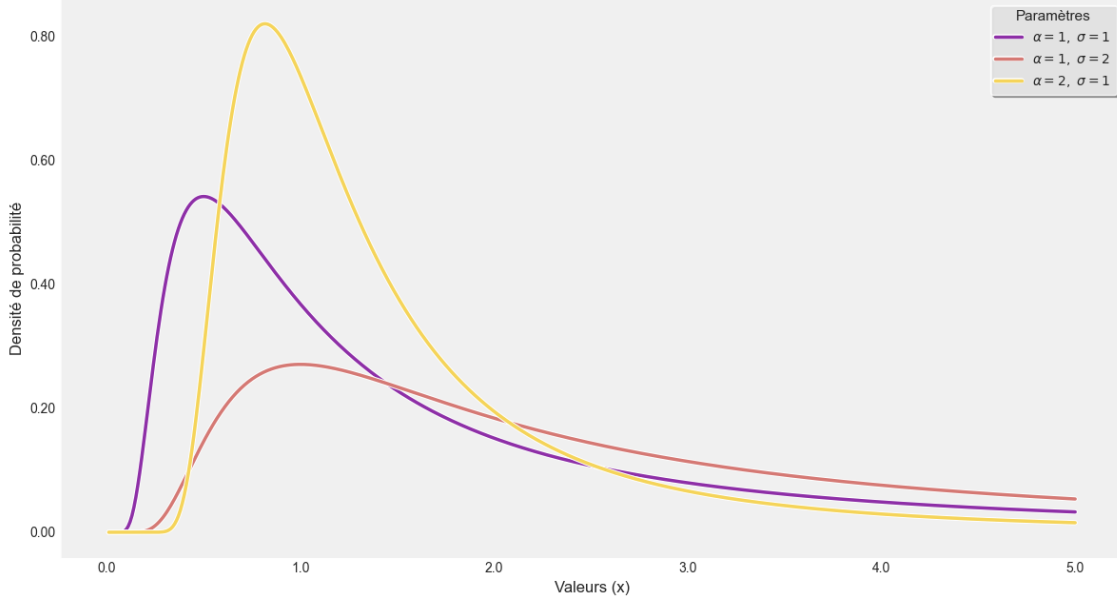


FIGURE 1 – Allure de la densité d’une loi de Fréchet pour différentes valeurs de α et σ ($m = 0$)

PROPOSITION 5. On a, en notant Γ la fonction Gamma d’Euler, pour $\alpha > 0, m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$:

- $\mathbb{E}[\mathcal{F}(\alpha, \sigma, m)] = m + \sigma\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$ si $\alpha > 1$, et $+\infty$ sinon.
- $\mathbb{V}(\mathcal{F}(\alpha, \sigma, m)) = \sigma^2(\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})^2)$ si $\alpha > 2$, et $+\infty$ sinon.

En fait on peut montrer que lorsque $\alpha > 0$, seules les lois de Fréchet de paramètre de forme α vérifient la relation de max-stabilité (2) (Voir la partie 1 de [Cos24]).

PROPOSITION 6 (**Fisher-Tippett-Gnedenko, cas strictement positif**). Soit $\alpha > 0$. Les lois $\mathcal{F}(\alpha, \sigma, m)$, avec $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sont les seules lois α -max-stable : si X_1, X_2, X_3 sont i.i.d. de loi $\mathcal{F}_{\alpha, \sigma}$, alors pour $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\lambda^{1/\alpha} X_2 \vee (1 - \lambda)^{1/\alpha} X_3 \stackrel{\text{loi}}{=} X_1$$

D’autres cas sont envisageables. Si $\alpha = 0$, on est dans le cas de la loi de Gumbel, et si $\alpha < 0$, de la loi de Weibull (voir toujours [Cos24]). On ne développera pas ces cas là.

Ainsi, r_K suit ponctuellement une loi de Fréchet de paramètre de forme α . Au regard de la Section 4.4.2 de [Mol17] (p.437 à 439) et des pages 89 et 90 de [Mat75], on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 7 (**Série de LePage des espaces aléatoires convexe-stables**). Soit $K \in C_0(\mathcal{K}_\Omega)$ et $\alpha > 0$. K est α -convexe-stable s’il existe un ensemble dénombrable I et des constantes $m \geq 0$ et $\sigma > 0$, tel que

$$\forall u \in \mathbb{S}^1, r_K(u) = m + \sigma \bigvee_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$$

où les Γ_i sont les instants de sauts d’un processus de Poisson d’intensité 1, indépendants des U_i qui sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur \mathbb{S}^1 .

A priori, pour les lois de Fréchet, on autorise que m soit négatif. Cependant dans le cadre des espaces aléatoires convexes compacts, la positivité de r_K impose que m soit positif dans cette Proposition. En effet, si on supposait que $m > 0$ alors r_K ne pourrait pas définir une fonction de support, puisque celle-ci ne serait alors pas positive et contredirait la Proposition 2 (les propriétés des Γ_i et des U_i assure que quel que soit u dans la sphère unité, on peut faire s’approcher la quantité $\bigvee_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$ autant qu’on veut de 0, rendant

incompatible le fait que m puisse être négatif dans la définition de r_K). Même si la question est passionnante, l'idée n'est pas de montrer que toutes les lois max-stables interviennent dans les espaces convexe-stables, on se focalise sur certaines d'entre-elles, qui sont données dans la Proposition 7.

REMARQUE 4. Au regard de la Proposition 4, on observe que si pour $u \in \mathbb{S}^1$ on a $r_K(u) = \sup_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$, alors K est l'enveloppe convexe des $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$. En effet, en posant $K_i := [0, \Gamma_i^{-1/\alpha}]$, on a $r_{K_i} : u \mapsto \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$. Et ainsi, $r_{\bigcup_{i \in I} K_i}$ coïncide avec r_K et on conclut par la correspondance donnée par le Théorème 1.

REMARQUE 5. Pour $m \in \mathbb{R}$, on a $r_{m\mathbb{B}} = |m| r_{\mathbb{B}} = |m|$, en notant \mathbb{B} la boule unité de \mathbb{R}^2 .

REMARQUE 6. Pour les convexes α -stable, on a un équivalent de ce résultat avec l'opération $+$ plutôt que \vee (voir Proposition 1.4.1 de [ST94]).

4 Étude des espaces α -convexe-stable

4.1 Sommets d'un espace α -convexe-stable

Étant donné $K \in C_0(\mathcal{K}_\Omega)$ α -convexe-stable, la partie précédente a permis d'établir que $K = C\left(\bigcup_{i \in I} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i]\right)$ où les Γ_i sont les instants de sauts d'un processus de Poisson d'intensité 1, et les U_i suivent une loi uniforme sur la sphère \mathbb{S}^1 , où I désigne un ensemble dénombrable, et que ainsi, on a

$$\forall u \in \mathbb{S}^1, r_K(u) = \bigvee_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$$

où les Γ_i sont les instants de sauts d'un processus de Poisson d'intensité 1, indépendants des U_i qui sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur \mathbb{S}^1 .

4.1.1 Cas d'un nombre fini de paramètres

Voyons un premier cas élémentaire, qui même s'il ne correspond rigoureusement à aucun espace α -convexe-stable s'avère très utile. On se place dans le cas $K = C\left(\bigcup_{i=1}^n [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i]\right)$, où n est un entier. On se donne $I \subset \{1, \dots, n\}$ minimal telle que $C\left(\bigcup_{i \in I} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i]\right) = K$. **Autrement dit I met en évidence rien que les sommets et tous les sommets du convexe K** , c'est-à-dire que pour $J \subsetneq I$, on a que $C\left(\bigcup_{j \in J} [0, \Gamma_j^{-1/\alpha} U_j]\right) \subsetneq K$. Remarquons que I est aléatoire, au même titre que les sommets du convexe.

On se place dans cette configuration. Si on prend $i \in I$, on a en posant $K_i := [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i]$, que $r_{K_i}(\theta) = \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle e^{i\theta}, U_i \rangle_+$, on appelle cela une branche. Notons $U_i = e^{i\Theta}$. On a donc ponctuellement que, pour $\omega \in \Omega$:

$$r_{K_i(\omega)}(\theta) = \Gamma_i^{-1/\alpha} \cos(\Theta(\omega) - \theta)^+$$

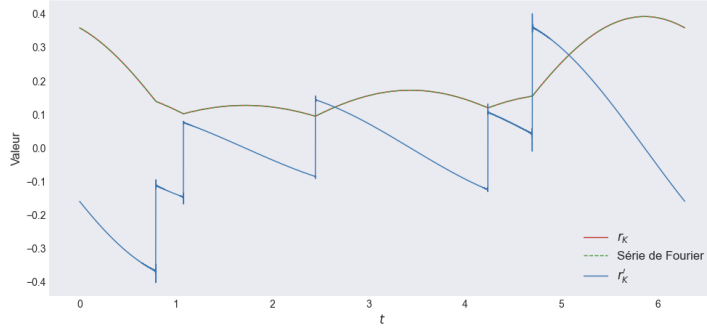
Ainsi, r'_{K_i} existe sauf en $\Theta + \frac{\pi}{2}$ et en $\Theta + \frac{3\pi}{2}$ (modulo 2π , pour respecter la définition de r_{K_i} , mais peu importe). Elle est continue en dehors de ces deux points et admet une limite à gauche et à droite partout (ce qui fait écho à la Remarque 1). r_{K_i} a donc deux points de non dérivabilité, c'est à dire autant qu'elle a de sommets. En se replaçant dans K , on a que $r_K = \bigvee_{i \in I} r_{K_i}$ est continue et dérivable sur $[0, 2\pi]$ privé d'un ensemble fini de points, car c'est un sup sur un nombre fini des r_{K_i} dont on vient de faire l'analyse. Après quelques simulations, on s'aperçoit que le nombre de sommets de K est relié égal au nombre de points de non dérivabilité de r_K (voir [BH08]).

THÉORÈME 2. Soit K un polygone convexe à n sommets. Alors r'_K a n points de discontinuités $0 \leq$

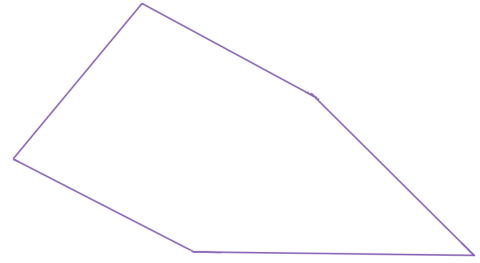
$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 2\pi$ et en prime, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, il existe a, b, r_1, \dots, r_n des réels tels que :

$$r_K = a \cos(\theta) + b \sin(\theta) + \sum_{k=1}^n r_k \sin((\theta - \lambda_k)^+)$$

Ainsi, pour connaître le nombre de sommets de K , il suffit de regarder les points de non définition de r'_K (numériquement on regarde son développement en série de Fourier puisque c'est une fonction 2π -périodique et que l'on connaît le développement en série de Fourier de r_K). Comme r'_K admet une limite à droite et à gauche en tout point, on regarde les sauts dans le graphe de r'_K . Pour dessiner un tirage pour K on prend juste l'enveloppe convexe des $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$.



(A) Exemple de tirage pour $r_{K(\omega)}$ et $r'_{K(\omega)}$ (5 points critiques)



(B) Convexe $K(\omega)$ associé, on a bien 5 sommets

FIGURE 2 – Illustration du Théorème 2

4.1.2 Cas dénombrable

Montrons que l'on peut toujours, à chaque tirage, se ramener au cas précédent. Pour ce faire, il est utile dans le cas où à priori on a un nombre non fini de paramètres d'utiliser les propriétés des Γ_i . La notion de processus de Poisson est donc cruciale.

PROPOSITION 8. *On considère le nuage de point inclus dans $[0, +\infty[$ décrit par un processus de Poisson d'intensité 1. Si Γ_k désigne la variable aléatoire qui caractérise l'abscisse du k -ème point du nuage observé dans le demi-plan \mathbb{R}_+^* , alors en posant $\Gamma_0 = 0$, les $\Gamma_{k+1} - \Gamma_k$ sont i.i.d. de loi $\text{Exp}(1)$*

Ainsi, on a pour $N \in \mathbb{N}$ que $\Gamma_N = \Delta_1 + \dots + \Delta_N$ où les Δ_i sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Voici deux derniers résultats qui sera utile à la résolution du Théorème 3.

LEMME 1. *Si Γ_α et Γ_β sont deux lois Gammas indépendantes de paramètres respectifs α et β , alors :*

$$\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$$

Ce résultat découle d'un simple changement de variable. Par ailleurs, grâce à la Proposition 8, la loi des grands nombres appliqués aux Γ_i donne le résultat suivant.

LEMME 2. *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel quel pour $i \geq n_0$, on a :*

$$\frac{i}{2} \leq \Gamma_i \leq 2i$$

THÉORÈME 3. Comme I est dénombrable on prend $I = \mathbb{N}^*$, on a :

- Pour tout $u \in \mathbb{S}^1$, le supremum $r_K(u)$ est atteint, presque sûrement, sur un ensemble fini d'indices i .
- Plus encore, il existe un entier aléatoire N telle que, presque sûrement,

$$r_K(u) = \sup_{1 \leq i \leq N} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+ \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{S}^1.$$

REMARQUE 7. L'entier aléatoire N dépend uniquement de α . Et si en particulier on le définit comme le plus petit entier tel que $r_K = \sup_{1 \leq i \leq N} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle \cdot, U_i \rangle_+$ on note N_α cet entier.

Une illustration du Théorème 3 se trouve à la page suivante : la décroissance du poids $\Gamma_i^{-1/\alpha}$ se lit dans le fait que pour N assez grand et $i > N$, les $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$ sont inclus dans la composante connexe des N premiers $\Gamma_k^{-1/\alpha} U_k$. Dans la Figure 3, on a choisi de ne prendre en compte que les 100 premiers termes, on voit dans l'exemple qu'au bout du 19e termes, on a déjà l'enveloppe convexe finale. Ainsi, on va pouvoir réaliser des simulations réalistes en se limitant à un nombre fini N de potentiels sommets. Un choix judicieux pour N n'est pas difficile au vu de la décroissance rapide des $\Gamma_i^{-1/\alpha}$. De plus, grâce au Théorème 3, on peut se ramener à l'étude réalisée dans la Section 4.1.1 pour conclure que connaître la loi du nombre de sommets de K revient donc à connaître l'ensemble des points où r'_K n'est pas définie, ce qui conduira dans la Section 3.2 à essayer dans un premier temps d'identifier les points critiques au regard des coefficients de la décomposition en série de Fourier de r'_K .

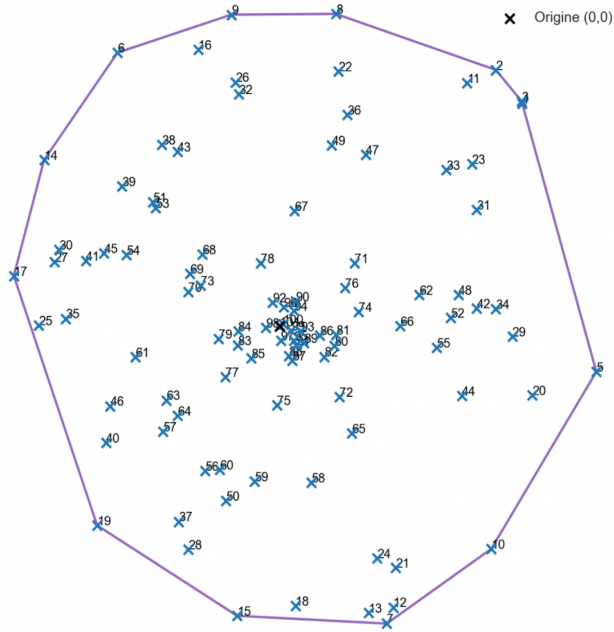


FIGURE 3 – Exemple de tirage pour K où on a numéroté les $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$ pour les 100 premières valeurs de i .

4.1.3 Un Théorème de convergence presque sûre vers la boule unité

Dans la suite, on notera K_α lorsque l'on considère un α -convexe stable pour lequel la loi de sa fonction de support est donnée dans la Proposition 7 avec $m = 0$ et $\sigma = 1$, quels que soit $\alpha > 0$. On précisera également N_α et $N_{\alpha,u}$ pour reprendre les notations du Théorème 3.

LEMME 3. $N_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$ presque sûrement.

THÉORÈME 4. Soit $(K_\alpha)_{\alpha>0}$ une famille d'éléments de $C_0(K_\Omega)$. On suppose que pour $\alpha > 0$, K_α a pour fonction de support $r_{K_\alpha} = \bigoplus_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle \cdot, U_i \rangle$ ($m = 0$ et $\sigma = 1$ dans la Proposition 8). Alors

$$K_\alpha \xrightarrow[\alpha \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{B}$$

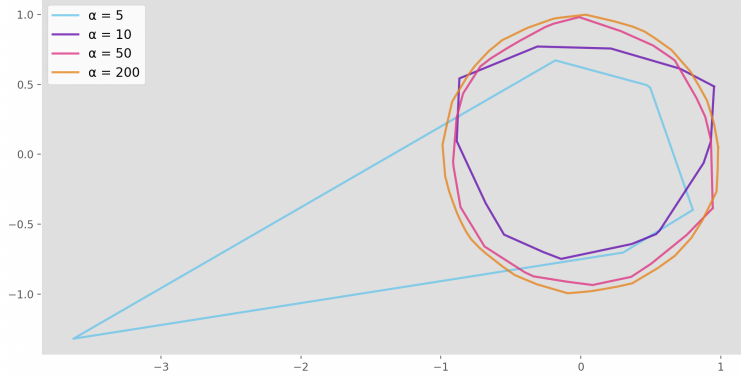


FIGURE 4 – Illustration du Théorème 4, représentations d'un tirage de la loi de K_α pour différentes valeurs de α

Étendons désormais les résultats de la Section 4.1. au cas $K_{\alpha,\sigma,m}$ (c'est-à-dire suivant la formule plus générale de la fonction de support donnée dans la Proposition 7). Pour ce qui est du nombre de sommets, le facteur σ qui caractérise l'homothétie (d'où son nom paramètre d'échelle), et donc n'a pas d'importance. Il y a une petite adaptation à faire si $m > 0$. Dans ce cas $K_{\alpha,\sigma,m}$ a un nombre infini de sommets, mais un nombre fini de points extrémaux, et ce nombre est le même que le nombre de sommet de K_α (d'ailleurs les sommets de K_α sont exactement ses points extrémaux car il n'a qu'un nombre fini de sommets). En fait, on a $r_{K_{\alpha,\sigma,m}} = m + \sigma r_{K_\alpha}$ et $K_{\alpha,\sigma,m} = m\mathbb{B} + \sigma K_\alpha$. Ainsi, pour ce qui est des résultats du Théorème 4, le fait que $K_{\alpha,\sigma,m} = m\mathbb{B} + \sigma K_\alpha$ fournit un résultat de convergence similaire.

4.2 Recherche des points de non dérivabilité de r_{K_α} et du nombre de sommets de K_α

La fonction r_{K_α} est 2π -périodique, dérivable en dehors d'un nombre presque sûrement fini de points, et de dérivée r'_{K_α} continue. On peut donc écrire formellement sa décomposition en série de Fourier :

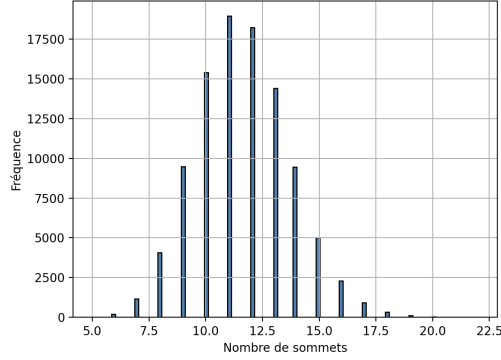
$$\widetilde{r_{K_\alpha}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \quad \text{et} \quad \widetilde{r'_{K_\alpha}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n e^{int}$$

Dans un premier temps, l'idée a été de caractériser les points de non dérivabilité de r_{K_α} , pour en déduire le nombre de sommets de K_α au regard de la partie précédente. Une première étape consista à étudier le phénomène de Gibbs, qui manifeste un saut en valeur absolue entre r'_{K_α} et $\widetilde{r'_{K_\alpha}}$ au niveau de ses points de discontinuité (voir Annexe 2). On a pu établir une méthode permettant de calculer numériquement le nombre de points de non dérivabilité de r_{K_α} et donc le nombre de sommets de K_α . Cependant, l'étude précédente fournit en fait une construction explicite des tirages pour K_α , qui consiste à tirer un nombre fini assez grand de $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$ et d'en prendre l'enveloppe convexe. Ainsi, on a pu, grâce à des algorithmes Python plus efficaces et plus précis, calculer le nombre de sommets pour chaque tirage. Avec ces deux méthodes on obtient des résultats similaires, mais la deuxième a la vertu d'être moins coûteuse en calcul ce qui a permis de réaliser un grand nombre de simulations.

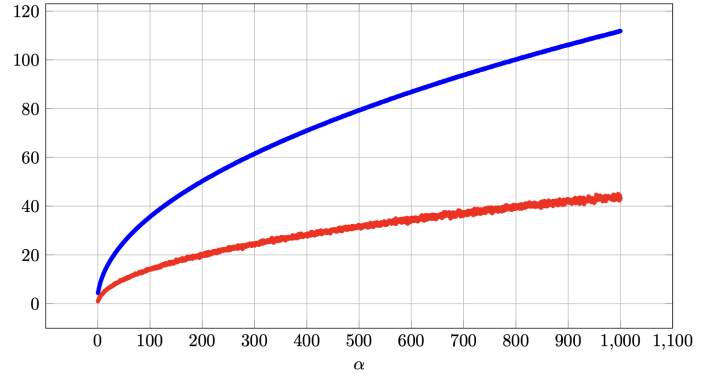
Si on veut donner une formule explicite pour le nombre de sommets de K_α , noté R_α , on peut écrire que :

$$R_\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{(r_K > r_{K^{(i)}})} = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \mathbf{1}_{(r_K > r_{K^{(i)}})}$$

Où on a posé $K^{(i)} = C(\cup_{j \neq i} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i])$ pour tout i .



(A) Histogramme de répartition des valeurs de R_α pour $\alpha = 10$ après 100 000 tirages



(B) Évolution de l'espérance et de la variance de R_α

FIGURE 5 – Quelques observations sur la loi de R_α

La figure ci-dessus suggère que $\mathbb{E}[R_\alpha] \simeq a\sqrt{\alpha} + b$ et $\mathbb{V}(R_\alpha) \simeq c\sqrt{\alpha} + d$. Cela laisse présager d'après l'inégalité de Markov que $\frac{R_\alpha}{\mathbb{E}[R_\alpha]} \xrightarrow[\alpha \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$. Ainsi, R_α tend à être déterministe et grand.

La complexité de R_α ne nous a pas permis d'en déterminer la loi exacte. L'intuition nous a mené à penser qu'il suivait une loi de Poisson. Une statistique R sur 100 000 tirages assure en tout cas que la loi de Poisson est la plus proche parmi les lois discrètes classiques. Cependant un test du χ^2 se révèle négatif, laissant cette question encore ouverte.

4.3 Périmètre et aire d'un espace α -convexe-stable

4.3.1 Loi du périmètre de K_α

Le périmètre d'un convexe est donnée à partir de sa fonction de support (voir 1.4. [Hen18])

PROPOSITION 9. Si on note $\mathcal{L}(\partial C)$ le périmètre d'un convexe quelconque C , alors :

$$\mathcal{L}(\partial C) = \int_0^{2\pi} r_C(\theta) d\theta$$

En particulier dans notre cadre d'étude, comme une rotation d'angle θ sur les U_i n'a pas d'influence sur la loi ni l'indépendance, on a que les $r_{K_\alpha}(\theta)$ ont tous la même loi. Ainsi, $\mathbb{E}[\mathcal{L}(\partial K_\alpha)] = 2\pi \mathbb{E}[r_{K_\alpha}(0)]$ par Fubini-Tonelli (r_{K_α} est positive).

De plus, $r_{K_\alpha}(0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos(\Theta_n)^+$. Déterminons sa loi.

PROPOSITION 10. $r_K(0)$ suit une loi $\mathcal{F}\left(\alpha, \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}, 0\right)$.

$$\text{COROLLAIRE 2. } \mathbb{E}[\mathcal{L}(\partial K_\alpha)] = 2\pi \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^\alpha d\theta \right)^{1/\alpha} \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$$

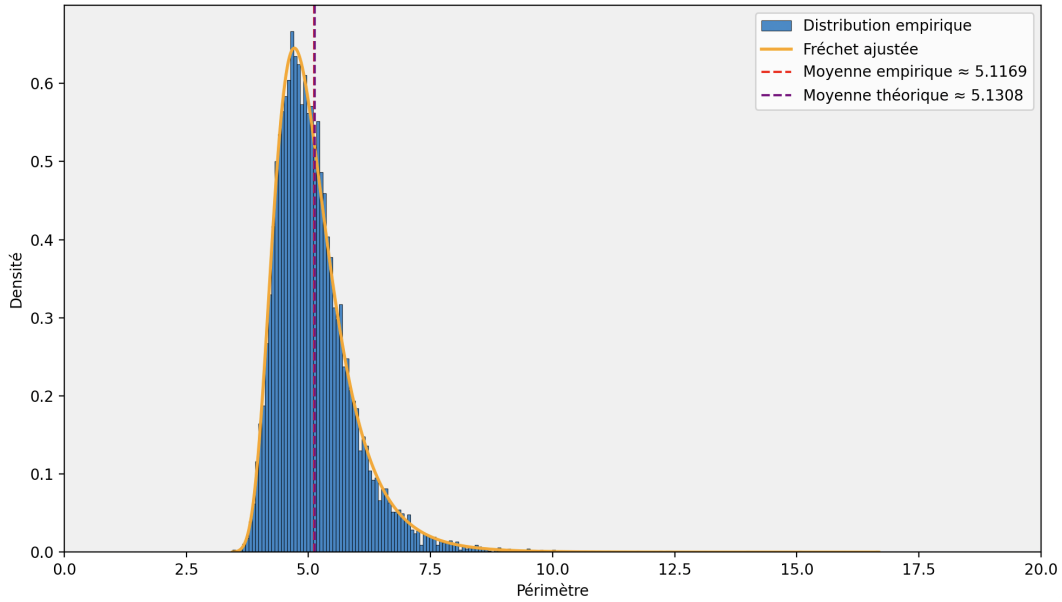


FIGURE 6 – Distribution du périmètre de K_5
La moyenne du périmètre coïncide avec la valeur théorique (ligne pointillée vertical)

Avec 10 000 tirages, l'écart entre l'espérance théorique et empirique est de l'ordre de 10^{-2} , et donc conforme à la loi des grands nombres. De plus, l'allure de la distribution laisse penser qu'il s'agit d'une loi de Fréchet. Un test de Kolmogorov-Smirnov appuie cette conjecture. En effet sur 10 000 tirages, la statistique $D = 0.0078$ (écart maximale entre les fonctions de répartitions empiriques et conjecturées) est très proche de 0, et la p -value = 0.5695 > 0.05 indique qu'il n'y a pas de raisons de rejeter le test. Cependant, la distribution n'a pas les mêmes paramètres que $2\pi r_K(0)$, en l'occurrence, la paramètre de forme pour le périmètre de K_5 est plus grand que $\alpha = 5$ (environ 13). Donc on peut déjà écarter l'hypothèse selon laquelle le périmètre et $2\pi r_K(0)$ ont même loi (malgré le fait que les lois associées ont la même espérance).

4.3.2 Loi de l'aire de K_α

Pour les espaces strictement convexes, c'est-à-dire dont la fonction de support est de classe C^1 et la dérivée seconde définie à droite et à gauche en tout point, il est possible de donner explicitement une formule de l'aire en fonction de la fonction de support (voir 1.4. [Hen18]).

PROPOSITION 11. *Si C est un espace strictement convexe, alors en notant $\mathcal{A}(C)$ l'aire de C , on a :*

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_C(\theta)(r_C(\theta) + r_C''(\theta))d\theta$$

Cependant, dans notre cadre d'étude, on a vu que la fonction de support n'était jamais C^1 , et donc on ne peut pas appliquer une telle formule et en déduire des propriétés pour l'aire de K_α . Cependant, une petite analyse numérique laisse penser, comme pour le périmètre, que l'on a affaire à une loi de Fréchet.

On peut étudier l'évolution des paramètres de la loi de Fréchet obtenue lorsque α varie. Pour l'aire et le périmètre, on obtient des résultats similaires :

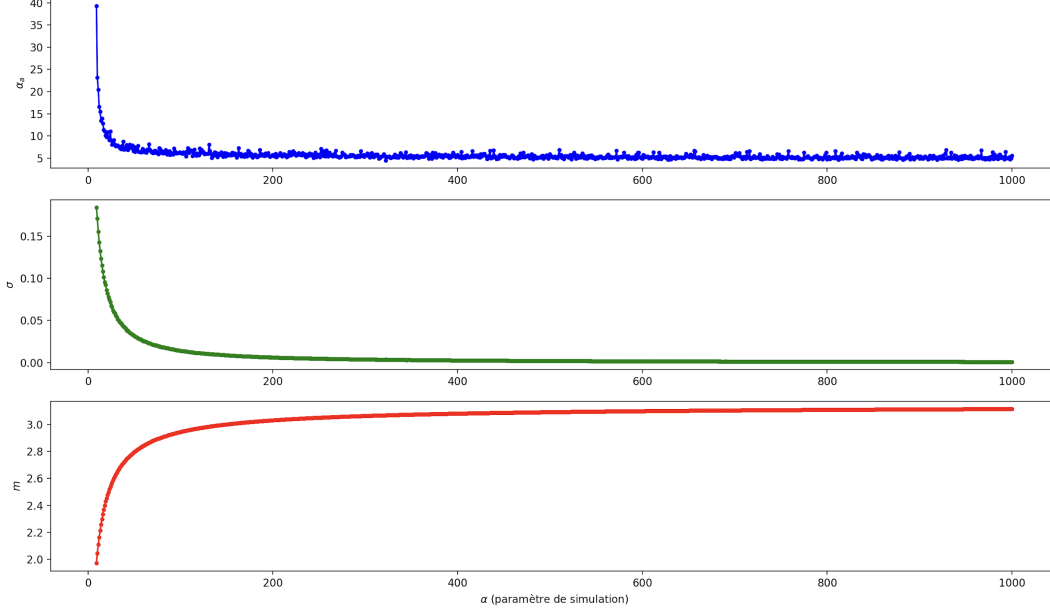


FIGURE 7 – Évolution des paramètres de forme, d'échelle et de position de la loi de Fréchet empirique pour l'aire

REMARQUE 8. On retrouve le résultat du Théorème 4 : les lois du périmètres et de l'aire tendent vers une loi constante égale au paramètre de position m (le paramètre d'échelle de la Loi de Fréchet estimée σ tend vers 0) et on retrouve numériquement que le paramètre de position m tend respectivement vers 2π pour le périmètre et π pour l'aire (ce qui correspond bien au périmètre et à l'aire de la boule unité \mathbb{B}).

Dans [Gro93], une formule de l'aire qui ne nécessite pas la stricte convexité est donnée en fonction de la fonction de support.

PROPOSITION 12. Soit $K \in C_0(\mathcal{K})$ et r_K sa fonction de support. On pose :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_K(\theta) d\theta$ et $b_0 = 0$.
- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r_K(x) \cos(kx) dx$ et $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r_K(x) \sin(kx) dx$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\mathcal{A}(K) = \pi a_0^2 - \frac{1}{2} \pi \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2)$$

En particulier, on retrouve le cas strictement convexe en développant le terme $r_C(r_C + r_C'')$ dans la Proposition 11, puisque en notant pour $k \in \mathbb{Z}$ a_k'', b_k'' les coefficients de Fourier de r_C'' , on a $a_k'' = -k^2 a_k$ et $b_k'' = -k^2 b_k$, ce qui n'est pas le cas si r_C n'est pas C^1 . Dans ce cas, une intégration par partie donne, en notant $k_1 < \dots < k_r$ les r points de discontinuités dans $[0, 2\pi[$ de r_C :

$$a_k'' + ib_k'' = -k^2(a_k + ib_k) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^r \Delta_j e^{-ink_j}$$

Où on a posé $\Delta_j = \lim_{x \rightarrow k_j^-} r_K'(x) - \lim_{x \rightarrow k_j^+} r_K'(x)$.

4.4 Compléments sur la loi de $r_{K_\alpha}(0)$

4.4.1 Processus de Poisson aminci

On a vu que $r_{K_\alpha}(0)$ (et ainsi tous les $r_{K_\alpha}(\theta)$) suivait une loi $\mathcal{F}\left(\alpha, \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}, 0\right)$. On va essayer d'approcher asymptotiquement cette loi en utilisant les propriétés des processus de Poissons. Pour ce faire, on découpe $[0, 2\pi]$ en N intervalles de mêmes tailles, $[0, \frac{2\pi}{N}]$, ..., $[\frac{2\pi(N-1)}{N}, 2\pi]$. Ses segments sont d'intersection presque sûrement vide, ainsi, en écrivant

$$\begin{aligned} r_{K_\alpha}(0) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos(\Theta_n)^+ \\ &= \sup_{j=0}^{N-1} \left(\sup_{n | \Theta_n \in [\frac{2j\pi}{N}, \frac{2(j+1)\pi}{N}]} \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos(\Theta_n)^+ \right) \\ &= \sup_{j=0}^{N-1} \left(\sup_{n | \Theta_n \in [\frac{2j\pi}{N}, \frac{2(j+1)\pi}{N}]} \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos\left(\frac{2j\pi}{N}\right)^+ \right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

En vertu des propriétés de régularités de la fonction cosinus.

En particulier, la borne supérieure $\sup_{n | \Theta_n \in [\frac{2j\pi}{N}, \frac{2(j+1)\pi}{N}]} \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos\left(\frac{2j\pi}{N}\right)^+$ à j fixé est atteinte pour le plus petit

instant n tel que $\Theta_n \in [\frac{2j\pi}{N}, \frac{2(j+1)\pi}{N}]$. Notons n_j cet indice. En utilisant les propriétés du processus de Poisson de sauts $(\Gamma_n, e^{i\Theta_n})_n$, comme le découpage de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+$ donne lieu à des rectangles $[\frac{2j\pi}{N}, \frac{2(j+1)\pi}{N}] \times \mathbb{R}_+$ d'intersections vide presque sûrement pour la mesure $\frac{d\theta}{2\pi} dx$ associée au processus, on a que Γ_{n_j} est le premier instant de saut d'un processus de Poisson d'intensité $1/N$, donc suit une loi exponentielle de paramètre $1/N$. On adapte facilement ce résultat par translation à $r_{K_\alpha}(\theta)$.

PROPOSITION 13.

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \sup_{j=0}^{N-1} \Gamma_{n_j}^{-1/\alpha} \cos\left(\frac{2j\pi}{N} - \theta\right)^+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} r_K(\theta)$$

Une illustration de ce résultat se trouve ci dessous. En réalisant 10 000 tirages et en prenant $N = 10000$ dans la Proposition 12, un test de Kolmogorov-Smirnov donne $D = 0.0063$ et une p-value de 0.8160.

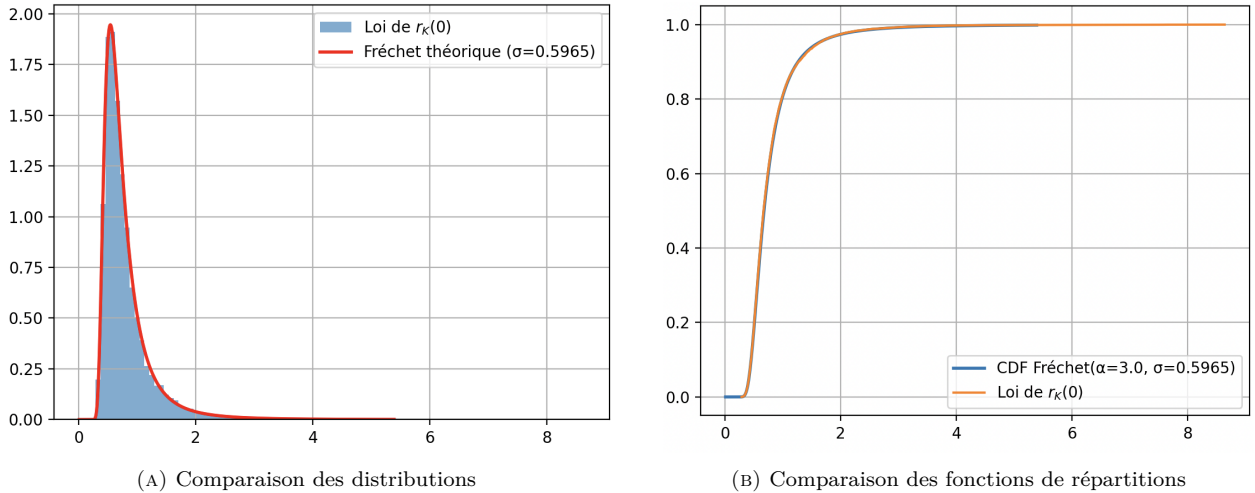


FIGURE 8 – Illustration de la Proposition 12, $\alpha = 3$

4.4.2 Le Gumbel Trick

Comme la Loi de Fréchet, il existe d'autres lois α -max-stables, mais pour des α non positifs. Si $\alpha = 0$, la Loi de Gumbel est la seule loi α -max-stable (voir Partie 1.3. de [Cos24]).

DÉFINITION 8. La distribution de Gumbel $\mathcal{G}(\mu, \sigma)$ avec paramètre de localisation $\mu \in \mathbb{R}$ et paramètre d'échelle $\sigma > 0$ a pour fonction de répartition :

$$\Psi_{\mu, \sigma}(x) = \exp \left(-\exp \left(-\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROPOSITION 14. Si $F \sim \mathcal{F}(1, 1, 0)$, $\alpha, \sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ alors

- $\log F \sim \mathcal{G}(0, 1)$
- $m + \sigma F^{1/\alpha} \sim \mathcal{F}(\alpha, \sigma, m)$

Par ailleurs, si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, -\frac{1}{\sigma} \log U \sim \mathcal{Exp}(\sigma)$
- $-\frac{1}{\log U} \sim \mathcal{F}(1, 1, 0)$

Ainsi, on va pouvoir étendre la notion de *Gumbel Trick* à la loi de Fréchet. Rappelons d'abord ce résultat, utile en Apprentissage Statistique (voir [Bac19]). Dans la suite, on note γ la constante d'Euler-Mascheroni.

PROPOSITION 15. Soient n variables indépendantes G_i suivant des distributions de Gumbel avec paramètres $(\mu_i, 1)$, pour $i = \{1, \dots, n\}$. Alors, en posant $x_i = \mu_i + \gamma$ pour tout i , on a :

- Le maximum $Z = \max\{G_1, \dots, G_n\}$ suit une distribution de Gumbel avec paramètre $(\log(\sum_{k=1}^n \exp(x_k)) - \gamma, 1)$.
- Le minimiseur $i^* = \arg \max_{i \in \{1, \dots, n\}} G_i$ (en cas d'égalité, le choix est arbitraire) suit une distribution multinomiale de paramètre π avec $\pi_i = \frac{\exp(x_i)}{\exp(x_1) + \dots + \exp(x_n)}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
- De plus, i^* et Z sont indépendants.

Pour adapter ce résultat au cas de n variables aléatoires $(W_i)_{i=1}^n$ de loi de Fréchet de paramètres $(\alpha, \sigma_i, 0)_{i=1}^n$, il s'agit de remarquer que pour tout i , on a que $W_i = \sigma_i F_i^{1/\alpha}$ avec $F_i \sim \mathcal{F}(1, 1, 0)$ et donc que $W_i = \sigma_i e^{G_i/\alpha}$ où $G_i := \log(F_i) \sim \mathcal{G}(0, 1)$. Autrement dit, $W_i = \left(e^{\alpha \log(\sigma_i) + G_i} \right)^{1/\alpha}$ et $\tilde{G}_i := \alpha \log(\sigma_i) + G_i \sim \mathcal{G}(\alpha \log(\sigma_i), 1)$. Comme la fonction $x \mapsto \exp(x/\alpha)$ est croissante, on en tire le *Fréchet Trick* :

PROPOSITION 16. Soient N variables indépendantes W_i suivant des distributions de Fréchet avec paramètres $(\alpha, \sigma_i, 0)_{i=0}^{N-1}$, pour $i = [0, N-1]$. Alors, en posant $x_i = \alpha \log(\sigma_i) + \gamma$ pour tout i , on a :

- Le maximum $M := \max\{W_0, \dots, W_{N-1}\}$ suit une distribution $\mathcal{F} \left(\alpha, \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^\alpha \right)^{1/\alpha}, 0 \right)$
- Le minimiseur $i^* = \arg \max_{i \in \{0, \dots, N-1\}} W_i$ (en cas d'égalité, le choix est arbitraire) suit une distribution multinomiale de paramètre π avec $\pi_i = \frac{\exp(x_i)}{\exp(x_0) + \dots + \exp(x_{N-1})} = \frac{\sigma_i^\alpha}{\sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^\alpha}$, pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$.
- De plus, i^* et M sont indépendants.

Pour faire le lien avec la section précédente 4.4.1, on avait dans ce cas N variables aléatoires W_j définies par :

$$W_j = \Gamma_{n_i}^{-1/\alpha} \cos \left(\frac{2j\pi}{N} \right)^+ \sim \mathcal{F} \left(\alpha, N^{-1/\alpha} \cos \left(\frac{2j\pi}{N} \right), 0 \right)$$

Les π_j valent ici $\pi_j = \frac{\cos^+\left(\frac{2j\pi}{N}\right)^{1/\alpha}}{\sum_{k=0}^{N-1} \cos^+\left(\frac{2k\pi}{N}\right)^{1/\alpha}}$.

5 Conclusion

En conclusion, après avoir passé en revue une partie de la littérature existante sur les corps convexes, les ensembles aléatoires et les lois max-stables, ce stage a permis d'établir des résultats supplémentaires sur les espaces convexe-stables. Ainsi, on a vu comment les propriétés des processus de Poisson permettaient d'obtenir une version simplifiée de la fonction de support d'un espace convexe-stable, et on a pu établir plusieurs résultats de convergence presque sûre, mettant en jeu le paramètre de forme α et dernièrement des processus de Poisson amincis.

Pour ce qui est de l'aire et du périmètre, des résultats existent afin de calculer le périmètre et l'aire d'un convexe compact en fonction de sa fonction de support. Cependant, même si pour le périmètre cette formule a permis d'établir la valeur moyenne du périmètre d'un convexe stable en fonction de son paramètre de forme α , les connaissances actuelles sur la fonction de support et la loi de Fréchet ne nous ont pas permis d'en dire davantage, du fait que la somme de variables aléatoires de Fréchet ne suit pas nécessairement une loi de Fréchet. Pourtant, les conjectures semblent être sans appel et nous incitent à montrer qu'effectivement le périmètre et l'aire d'un convexe-stable suivent une loi de Fréchet. Une prochaine étape est donc de comprendre comment les $r_K(\theta)$, qui suivent la même loi mais sont *a priori* loin d'être indépendants, sont corrélés entre eux, et comment leur somme peut suivre une loi de Fréchet. Pour les lois stables classiques, la stabilité par somme plutôt que par maximum permet d'en dire davantage sur le périmètre (voir Appendice). Cependant, ce cadre d'étude est plus restrictif de manière générale, notamment sur le paramètre de forme, et ne nous intéresse pas car ne traite pas de la théorie des valeurs extrêmes.

Concernant la loi du nombre de sommets d'un convexe-stable, une piste de réflexion est l'étude des algorithmes qui permettent de dénombrer et d'identifier, étant donné un nombre dénombrable de points bornés dans \mathbb{R}^2 , ceux qui sont des sommets effectifs de l'enveloppe convexe qui en résulte. Ici encore, on s'est heurté aux mêmes obstacles que pour l'aire et le périmètre, puisque des intégrales mettant en jeu la fonction de support apparaissent.

J'espère par ce travail, avoir pu fournir quelques pistes de réflexion et idées utiles dans les travaux sur ce domaine passionnant qui n'a pas encore livré tous ses secrets. Je souhaiterais remercier Laurent Decreusefond pour sa patience, sa bonne humeur et son accompagnement durant ce stage dont je garderai un agréable souvenir. Merci également à l'équipe INFRES de Télécom Paris pour leur accueil chaleureux.

6 Bibliographie

Références

- [Amr08] M. EL AMRANI. Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Ellipses, 2008.
- [Bac19] F. BACH. The Gumbel Trick. Accessed : 2025-06-30. 2019. URL : <https://francisbach.com/the-gumbel-trick/>.
- [BH08] T. BAYEN et J.-B. HIRIART-URRUTY. Convex Objects of Constant Width (2D/3D). Rapp. tech. Université Paul Sabatier, Institut de mathématiques, 2008.
- [Cos24] B. COSTACÈQUE. “Stein’s Method for Extreme Value Distributions”. PhD thesis. Institut Polytechnique de Paris, 2024.
- [Edg08] G. A. EDGAR. Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer, 2008.
- [Fin03] S. R. FINCH. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003.
- [FT28] R. A. FISHER et L. H. C. TIPPETT. “Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample”. In : Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 24.2 (1928), p. 180-190. DOI : [10.1017/S0305004100015681](https://doi.org/10.1017/S0305004100015681).
- [Gro93] H. GROEMER. “Fourier series and spherical harmonics in convexity”. In : Handbook of Convex Geometry. North Holland, 1993, Section 4.8.
- [Hen18] E. HENRY. “Objets convexes de largeur constante et Théorème de Blaschke-Lebesgue”. Master’s thesis. Université de Bourgogne, 2018.
- [Mat75] G. MATHERON. Random Sets And Integral Geometry. John Wiley et Sons, 1975.
- [Mol17] I. MOLCHANOV. Theory of Random Sets. Springer London, 2017.
- [ST94] G. SAMORODNITSKY et M. S. TAQQU. Stable Non-Gaussian Random Processes. New York, London : Chapman et Hall, 1994.

7 Appendice : Étude des espaces α -stable

DÉFINITION 9. Une loi μ est dite α -stable (avec $\alpha > 0$) si étant donnés $a, b, c > 0, d \in \mathbb{R}$ sujets à $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$ et X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ , on a :

$$aX_2 + bX_3 \stackrel{\text{loi}}{=} cX_1 + d$$

On en déduit alors, similairement aux lois max-stables, la notion de convexes α -stables, pour lesquels la fonction support admet un développement en série de LePage donnée par la formule de la Proposition 7 où on a remplacé le \vee par l'addition usuelle $+$.

Soit $\alpha \in]0, 2]$. Étant donné $C \in C_0(\mathcal{K}_\Omega)$ α -stable, la partie précédente a permis d'établir qu'il existe $(\Gamma_i)_{i \in I}$ une suite d'instantes de sauts d'un processus de Poisson d'intensité 1, et $(U_i)_{i \in I}$ suivent une loi uniforme sur la sphère \mathbb{S}^1 , où I désigne un ensemble dénombrable, et $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ tels qu'on a :

$$\forall u \in \mathbb{S}^1, r_C(u) = m + \sigma \sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$$

où les Γ_i sont les instantes de sauts d'un processus de Poisson d'intensité 1, indépendants des U_i qui sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur \mathbb{S}^1 .

Dans la suite, on prend $\sigma = 1$ et $m = 0$. Et on notera C_α pour parler d'un élément de $C_0(\mathcal{K}_\Omega)$ qui est α -stable de fonction support donnée par $u \mapsto \sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$.

Pour les espaces convexe-stables, la Proposition 4 assurait que K était l'enveloppe convexe de $\Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$ car on avait une borne supérieure dans la définition de r_K , ce n'est pas le cas ici. On n'a donc pas accès aux nombres de sommets des convexes α -stables, puisque l'on sait seulement par le Théorème 1 que $C = \sum_{i \in I} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i]$ ce qui n'est pas très éclairant.

De plus, contrairement aux lois max-stables, notre champ d'étude est très restreint concernant le domaine qu'on étudie. Et même si on essaie de s'intéresser au cas où $\alpha > 2$, on n'observe pas de résultats de convergence comme c'est le cas pour les espaces convexe-stables (comme le Théorème 4). En vertu de la loi des grands nombres, la série $\sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$ diverge presque sûrement, pour n'importe quel $u \in \mathbb{S}^1$, donc il n'y a rien à dire.

Cependant, certains résultats peuvent être établis sur le périmètre. En effet, si $\alpha \in]0, 1[$, on a convergence normale de la série $\sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$ donc

$$\mathcal{L}(\partial C) = 2\pi \int_0^{2\pi} r_C(\theta) d\theta = 2\pi \sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \Theta_i)^+ d\theta = 4\pi \sum_{i \in I} \Gamma_i^{-1/\alpha}$$

Qui suit bien une loi α -stable car les $Z_i = 4\pi$ sont indépendants identiquement distribués et indépendants des Γ_i .

8 Annexe 1 : Preuves

Preuve du Théorème 3. Soit $u \in \mathbb{S}^1$. On note $r_{K_i}(u) = \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle_+$ pour tout i . Par Cauchy-Schwarz, on a $\langle u, U_i \rangle_+ \leq 1$ donc $r_{K_i}(u) \leq \Gamma_i^{-1/\alpha}$.

Or par la loi des grands nombres (les X_i sont i.i.d., intégrables, d'espérance 1) on a :

$$\frac{\Gamma_i}{i} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{p.s.}$$

Donc en particulier pour N assez grand, on a $\frac{\Gamma_i}{i} \geq \frac{1}{2}$ pour $i \geq N$, donc

$$0 \leq r_{K_i}(u) \leq \left(\frac{2}{i}\right)^{1/\alpha} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{p.s.}$$

Donc $r_K(u)$ est presque sûrement un maximum sur les N_u premiers r_{K_i} pour N_u assez grand.

Montrons qu'on peut choisir N_u indépendamment de u .

Posons E_i l'évènement sur lequel le point $X_i = \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i$ est un sommet de $C(\cup_{j=1}^i K_j) = C(X_1, \dots, X_i)$, c'est-à-dire l'ensemble des $w \in \Omega$ tel qu'il existe $u_w \in \mathbb{S}^1$ sujet à (\star) :

$$\Gamma_i(\omega)^{-1/\alpha} \langle u_w, U_i(\omega) \rangle^+ \geq \Gamma_j(\omega)^{-1/\alpha} \langle u_w, U_j(\omega) \rangle^+, \quad \forall 1 \leq j \leq i$$

Montrons en utilisant le Lemme de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(\limsup E_i) = 0$.

On se place dans E_i , $i \geq 2$. Soit $u = e^{i\theta} : \omega \mapsto u_\omega$ une direction aléatoire convenant. Remarquons que l'on peut en fait prendre $u = U_i$ (point où la quantité $\langle u, U_i \rangle^+$ est maximale).

La condition (\star) devient :

$$\Gamma_i^{-1/\alpha} \geq \Gamma_j^{-1/\alpha} \cos(\Theta_j - \Theta_i), \quad \forall 1 \leq j \leq i \quad (\star)$$

Où on a $U_j = e^{i\Theta_j}$ avec Θ_j uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Comme $\left(\frac{\Gamma_j}{\Gamma_i}\right)^{1/\alpha} \in [0, 1]$ par la Proposition 12 ($j \leq i$), on peut définir $\phi_j = \arccos\left(\left(\frac{\Gamma_j}{\Gamma_i}\right)^{1/\alpha}\right) > 0$.

Ainsi, (\star) implique que pour $j \leq i$ $|\Theta_j - \Theta_i| \geq \phi_j$.

En conditionnant par rapport à ϕ_j et θ_i , on en tire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_i | \phi_j, \Theta_i) &\leq \mathbb{P}(|\Theta_j - \Theta_i| \geq \phi_j, \forall 1 \leq j \leq i-1 | \Theta_i, \phi_j) \\ &= \mathbb{P}(|\Theta_j - \Theta_i| \geq \phi_j, \forall 1 \leq j \leq i-1 | \Theta_i, \phi_j) \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(|\Theta_j - \Theta_i| \geq \phi_j | \phi_j) \quad (\text{Les } U_j, j \neq i \text{ sont indépendants de } U_i) \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(|\Theta_j| \geq \phi_j | \phi_j) \quad (\text{la loi de } U_j \text{ est invariante par rotation}) \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{\phi_j}{\pi}\right) \quad (U_j \text{ est uniforme sur la sphère}) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{i-1} \phi_j\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \phi_j\right) \quad (\text{les } \phi_j \text{ sont positifs et } \lfloor i/2 \rfloor \leq i-1) \end{aligned}$$

Or, pour $j \leq \lfloor i/2 \rfloor$, on a $\phi_j \geq \phi_{\lfloor i/2 \rfloor}$ d'où finalement,

$$\mathbb{P}(E_i | \phi_j, \Theta_i) \leq \exp \left(-\frac{\lfloor i/2 \rfloor}{\pi} \phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \right)$$

De plus, $\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \rightarrow \arccos((1/2)^{1/\alpha}) =: m \in [0, 1]$ par la loi des grands nombres. Donc pour i assez grand, $\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \geq \frac{m}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_i) &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\lfloor i/2 \rfloor}{\pi} \phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\lfloor i/2 \rfloor}{\pi} \phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \right) (\mathbf{1}_{\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} \geq m/2} + \mathbf{1}_{\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} < m/2}) \right] \\ &\leq \exp \left(-\frac{\lfloor i/2 \rfloor}{\pi} \frac{m}{2} \right) + \mathbb{P}(\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} < m/2) \end{aligned}$$

Le terme $\exp \left(-\frac{\lfloor i/2 \rfloor}{\pi} \frac{m}{2} \right)$ est bien sûr sommable, regardons le second terme.

On a $\mathbb{P}(\phi_{\lfloor i/2 \rfloor} < m/2) = \mathbb{P}\left(\frac{\Gamma_{\lfloor i/2 \rfloor}}{\Gamma_i} > \cos(m/2)^\alpha\right)$. Or, par le Lemme 1 (Γ_i peut être vue comme $\Gamma_{\lfloor i/2 \rfloor} + \widetilde{\Gamma_{\lfloor i/2 \rfloor}}$ indépendantes de loi Gamma de paramètre $\lfloor i/2 \rfloor$) et la définition de la loi Beta($\lfloor \frac{i}{2} \rfloor, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$) on a (on omet le symbole $\lfloor \cdot \rfloor$, peut importe asymptotiquement) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\Gamma_{\lfloor i/2 \rfloor}}{\Gamma_i} > \cos(m/2)^\alpha\right) &= \frac{i!}{((i/2)!)^2} \int_{m/2}^1 t^{i/2-1} (1-t)^{i/2-1} dt \\ &\leq \frac{(i-1)!}{((i/2-1)!)^2} \left(\frac{m}{2}\right)^{i/2-1} \left(\frac{1-m}{2}\right)^{i/2} \end{aligned}$$

Or, $\frac{i!}{((i/2)!)^2} \left(\frac{m}{2}\right)^{i/2-1} \left(\frac{1-m}{2}\right)^{i/2} \sim \frac{2}{m} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} 2^{i-1} \left(\frac{m(1-m)}{4}\right)^{i/2}$ qui est sommable.

Par le Lemme de Borel–Cantelli, presque sûrement seuls un nombre fini de E_i se réalisent. Autrement dit, il existe un entier N (aléatoire) tel que pour tout $i > N$, X_i n'est plus extrême. Ainsi, tous les sommets de l'enveloppe convexe de $\{X_i\}_i$ (qui n'est autre que K) sont contenus dans $\{X_1, \dots, X_N\}$.

En conséquence, pour tout $u \in \mathbb{S}^1$, $r_K(u)$ est atteint parmi les $1 \leq i \leq N$, ce qui conclut la preuve. \square

Preuve du Lemme 3. Soit $A > 0$ un entier. On veut montrer que pour α assez grand, $N_\alpha > A$, c'est-à-dire qu'il existe un u dans la sphère tel que $N_{\alpha,u} > A$ intervient avec probabilité strictement positive.

Soit $u \in \mathbb{S}^1$. Comme déjà vu, on a pour n_0 assez grand et $i \geq n_0$ que $\Gamma_i \leq 2i$ presque sûrement (on utilise le Lemme 2). Supposons quitte à prendre n_0 plus grand que $n_0 > A$.

On a donc

$$\Gamma_{n_0}^{-1/\alpha} \geq (2n_0)^{-1/\alpha} \quad \text{p.s.}$$

Si α est assez grand, on a que $(2n_0)^{-1/\alpha} > \frac{1}{2}$ (car $(2n_0)^{-1/\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 1$). On suppose dorénavant que c'est le cas. Ainsi,

$$\Gamma_{n_0}^{-1/\alpha} \geq \frac{1}{2}$$

Or, $\mathbb{P}((\Gamma_{n_0} \leq 2n_0) \cap (\langle u, U_j \rangle \leq \frac{1}{4}, j \in \{1, \dots, A\}) \cap (\langle u, U_{n_0} \rangle > \frac{1}{2}) \cap (\Gamma_i \geq 1)) > 0$ car les U_j sont indépendants de loi uniforme sur la sphère, les Γ_i sont indépendants et indépendants des U_j et de loi exponentielle

de paramètre 1. On se place ainsi sur l'évènement de probabilité non nulle $(\Gamma_{n_0} \leq 2n_0) \cap (\langle u, U_j \rangle \leq \frac{1}{4}, j \in \{1, \dots, A\}) \cap (\langle u, U_{n_0} \rangle > \frac{1}{2}) \cap (\Gamma_i \geq 1)$.

Sur cet évènement, on a pour tout $i \in \{1, \dots, A\}$ que

$$\Gamma_{n_0}^{-1/\alpha} \langle u, U_{n_0} \rangle^+ > \frac{1}{4} \geq \langle u, U_i \rangle^+ \geq \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle^+$$

Donc sur cet évènement de probabilité non nulle, on a $r_K(u) > \bigvee_{1 \leq i \leq A} r_{K_i}(u)$, donc $N_{\alpha, u} > A$. \square

Preuve du Théorème 4. On sait que $r_{K_\alpha}(u) = \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle^+$ par le Théorème 3.

De plus, on a que $1 = \sup_{i \geq 1} \langle u, U_i \rangle^+$.

Pour montrer cela, on utilise la Proposition 4 et le Corollaire 1, puisque $\mathbb{B} = C(\overline{\cup_i [0, U_i]})$. En effet, comme les U_i sont indépendants de loi uniforme sur la sphère, on a, pour une direction $x = re^{i\theta} \in \mathbb{B}$ donnée et $\varepsilon > 0$, que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{i \geq 0} \{d(x, [0, U_i]) < \varepsilon\}) &= 1 - \mathbb{P}(\cap_{i \geq 0} \{d(x, [0, U_i]) > \varepsilon\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \geq 0} \left\{U_i \notin \left\{\frac{r}{\sqrt{r^2 + \eta^2}} + i \frac{\eta}{\sqrt{r^2 + \eta^2}}, \eta \in [-\varepsilon, \varepsilon]\right\}\right\}\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(U_1 \notin \left\{\frac{r}{\sqrt{r^2 + \eta^2}} + i \frac{\eta}{\sqrt{r^2 + \eta^2}}, \eta \in [-\varepsilon, \varepsilon]\right\}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par le Théorème de Pythagore.

De même, on montre par la correspondance du Théorème 1 et des arguments similaires que $C(\cup_{i=1}^N [0, U_i]) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{B} = C(\overline{\cup_i [0, U_i]})$ pour la distance de Hausdorff. Ainsi,

$$\begin{aligned} |r_{K_\alpha}(u) - 1| &\leq \left| \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle^+ - \sup_{i \geq 1} \langle u, U_i \rangle^+ \right| \\ &\leq \left| \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle u, U_i \rangle^+ - \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \langle u, U_i \rangle^+ \right| + \left| \sup_{1 \leq i} \langle u, U_i \rangle^+ - \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \langle u, U_i \rangle^+ \right| \\ &\leq \|r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i])} - r_{C(\cup_{i \geq N_\alpha} [0, U_i])}\|_\infty + \|r_{\mathbb{B}} - r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, U_i])}\|_\infty \end{aligned}$$

Par passage à la borne supérieure à gauche, on se retrouve finalement avec :

$$\|r_{K_\alpha} - 1\|_\infty \leq \|r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i])} - r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, U_i])}\|_\infty + \|r_{\mathbb{B}} - r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, U_i])}\|_\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la correspondance du Théorème 1 (vu plus haut), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, $\|r_{\mathbb{B}} - r_{C(\cup_{i \leq N} [0, U_i])}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On fixe α assez grand tel que $N_\alpha > N_0$ (on utilise le Lemme 3, $N_\alpha \rightarrow +\infty$). Enfin, pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} \|r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, \Gamma_i^{-1/\alpha} U_i])} - r_{C(\cup_{i \leq N_\alpha} [0, U_i])}\|_\infty &= \left\| \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \Gamma_i^{-1/\alpha} \langle U_i \rangle^+ - \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} \langle U_i \rangle^+ \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| \langle U_i \rangle^+ \right\|_\infty \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| \end{aligned}$$

En utilisant successivement l'inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz.

Or il existe $N > 2$ tel que pour $i \geq N$ (par le Lemme 2) :

$$\frac{i}{2} \leq \Gamma_i$$

Ainsi, en prenant α assez grand pour que $N_\alpha > N$, on a pour $i \in [N+1, N_\alpha]$:

$$0 \leq |\Gamma_i^{-1/\alpha} - 1| = 1 - \Gamma_i^{-1/\alpha} \leq 1 - (2i)^{-1/\alpha} \leq 1 - (2N)^{-1/\alpha}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq N_\alpha} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| \vee \sup_{N < i \leq N_\alpha} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq N} |1 - \Gamma_i^{-1/\alpha}| \vee \left(1 - (2N)^{-1/\alpha}\right) \end{aligned}$$

Et quand α tend vers $+\infty$, ce terme tend vers 0 (borne supérieure sur un nombre fini de termes qui tendent vers 0).

□

Preuve de la Proposition 10. Soit $x \geq 0$.

On fait comme à la Proposition 8, sauf qu'ici, on est en présence d'un processus de Poisson de mesure d'intensité $\nu(t, \theta) = dt \frac{d\theta}{2\pi}$ sur l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ (car les Γ_i sont les instants de sauts d'un processus de Poisson d'intensité dt et les U_i sont uniforme sur la sphère).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_K(0) \leq x) &= \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n^{-1/\alpha} \cos(\Theta_i)^+ \leq x) \\ &= \exp(-\nu(\{t^{-1/\alpha} \cos(\theta)^+ > x\})) \\ &= \exp\left(-\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{t < \left(\frac{\cos(\theta)^+}{x}\right)^\alpha} dt \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta)^+}{x}\right)^\alpha \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-1}{x^\alpha} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^+)^\alpha \frac{d\theta}{2\pi}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-1}{\pi x^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^\alpha d\theta\right) \end{aligned}$$

Donc $r_K(0)$ suit une loi de Fréchet de paramètres $\alpha, \sigma = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}$ et $m = 0$.

□

9 Annexe 2 : Phénomène de Gibbs

DÉFINITION 10. Soit f une fonction L^2 sur $[-\pi, \pi]$. On définit, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N(f) = f * D_N : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt$$

Avec

$$D_N : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

REMARQUE 9. En développant l'expression de D_N , on peut voir $S_N(f)$ comme la N -ème somme partielle de Fourier de f :

$$S_N(f) : x \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}$$

Où $c_k(f)$ est le k -ème coefficient de Fourier de f :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Un autre outil remarquable pour traiter des fonctions 2π -périodique est le noyau de Féjer, permettant d'avoir accès aux sommes partielles de Féjer de f

DÉFINITION 11. Soit f une fonction L^2 sur $[-\pi, \pi]$. On définit, pour $N \in \mathbb{N}$ la somme de Féjer d'ordre N de f par :

$$f * F_N : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(x-t) dt \text{ avec } F_N = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n+1} D_k$$

En particulier, la transformation avec Féjer a le bon goût d'être une très bonne approximation uniforme de f quand N tend vers l'infini. *A contrario*, on a uniquement la convergence simple en général si on utilise le noyau de Dirichlet (Voir [Amr08]). En particulier, les discontinuités au niveau des points critiques de r'_K se lisent au niveau de la convergence de $S_N(r'_K)$ vers r'_K , c'est ce que l'on appelle le phénomène de Gibbs (voir [Fin03], p. 248).

THÉORÈME 5 (**Gibbs-Wilbraham**). Soit c un point critique de r'_K . On pose :

$$\delta := \lim_{x \rightarrow c^+} r'_K(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} r'_K(x)$$

$$\mu := \frac{1}{2} (\lim_{x \rightarrow c^+} r'_K(x) + \lim_{x \rightarrow c^-} r'_K(x))$$

On a, en notant x_n le premier maximum local de $S_n(r'_K)$ à droite de c et y_n le premier minimum local de $S_n(r'_K)$ à gauche de c , on a :

$$S_n(r'_K)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu + \frac{\delta}{\pi} G$$

$$S_n(r'_K)(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu - \frac{\delta}{\pi} G$$

Où G est la constante de **Gibbs-Wilbraham** :

$$G = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\theta} d\theta \simeq \frac{\pi}{2} 1.1789$$

REMARQUE 10. Asymptotiquement, regarder la quantité $\frac{S_n(r'_K)(x_n) - f(c^+)}{\delta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{G}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 0.08949$ revient à s'intéresser à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \rightarrow c^-} \left| \frac{S_n(r'_K)(x) - f(c^-)}{\delta} \right|$$

Ainsi, au niveau des points de discontinuité de r'_K , on observe un saut sur les coefficients de Fourier de l'ordre de 9%, ce qui permet de détecter numériquement les points critiques de r'_K .

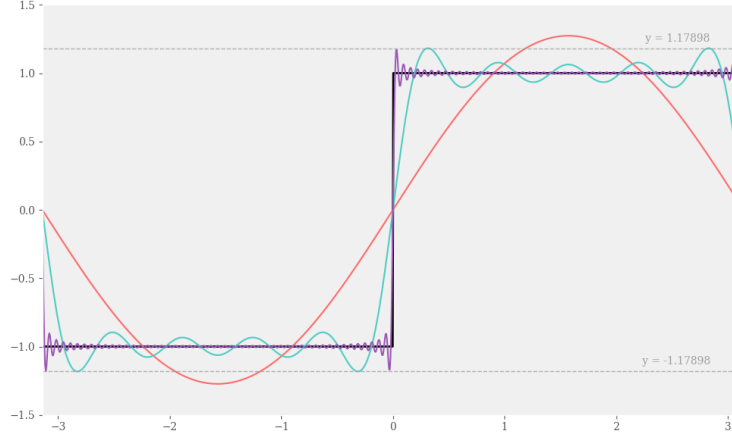


FIGURE 9 – Illustration du Théorème 5 avec $f = \mathbf{1}_{]0,\pi[} - \mathbf{1}_{]-\pi,0[}$
Mise en évidence du saut évoqué à la remarque précédente lorsque $S_N(f)$ se rapproche de f

Dans le cas de r'_K , on fait la différence en valeur absolue entre $r'_K * D_N$ et $r'_K * F_N$ pour N assez grand. Les pics observés mettent en évidence le phénomène de Gibbs.

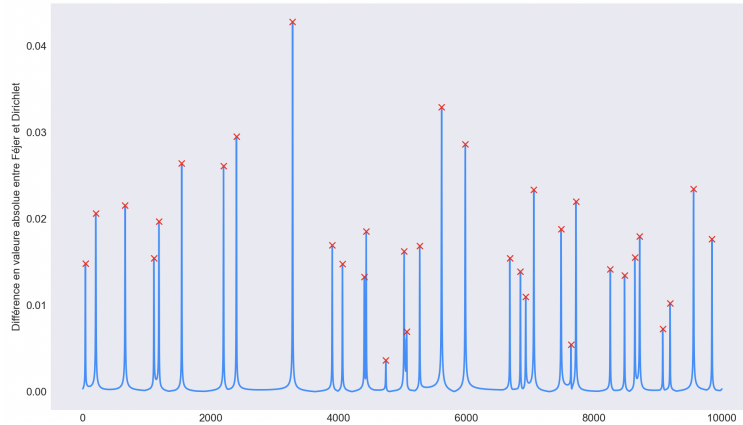


FIGURE 10 – Exemple avec $\alpha = 100$, $N = 5000$

10 Annexe 3 : Code Python

Le code Python des figures de ce rapport est disponible à l'adresse <https://github.com/martinduffaud/StageTP2025>.