

## Planche d'exercices n° 1

**Exercice 1.1.** — *Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ .*

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Soit  $p \in [0, 1]$ . On suppose que, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour  $n \geq 1$ , on note  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Pour tout  $n \geq 1$ , calculer l'espérance et la variance de  $S_n$ .
2. (a) Rappeler la définition de la convergence presque sûre.  
(b) En utilisant un résultat célèbre, montrer que  $\frac{1}{n}S_n$  converge presque sûrement vers  $2p - 1$ .
3. (a) Démontrer que si  $p > \frac{1}{2}$ , alors  $S_n$  tend presque sûrement vers  $+\infty$ . De même, démontrer que si  $p < \frac{1}{2}$ , alors  $S_n$  tend presque sûrement vers  $-\infty$ .  
(b) Le même argument permet-il de dire quelque chose lorsque  $p$  vaut  $\frac{1}{2}$  ?
4. Supposons  $p \neq \frac{1}{2}$ . On pose

$$A := \{\omega \in \Omega : \forall x \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 1, \forall m \geq n, S_m(\omega) \neq x\}.$$

Montrer que  $A$  est bien un événement, c'est-à-dire qu'il appartient à  $\mathcal{F}$ . Le décrire par une phrase en français et établir que sa probabilité vaut 1.

**Exercice 1.2.** — *Passages en zéro.*

Conservons les notations de l'exercice 1.1. On introduit  $Z$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui compte combien de fois la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  passe en zéro :

$$Z(\omega) := \text{Card}(\{n \geq 1 : S_n(\omega) = 0\}).$$

Pour tout  $i \geq 1$ , on introduit l'événement  $A_i := \{S_i = 0\} := \{\omega \in \Omega : S_i(\omega) = 0\}$ .

1. Pour tout  $i \geq 1$ , calculer  $\mathbf{P}(A_i)$ .
2. Expliquer pourquoi  $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}$ .
3. Déterminer, pour chaque valeur de  $p$ , si l'espérance de  $Z$  est finie ou infinie.
4. (a) Si  $p \neq \frac{1}{2}$ , peut-on en déduire que  $\mathbf{P}(Z \neq \infty) = 1$  ? Que  $\mathbf{P}(Z \neq \infty) > 0$  ?  
(b) Si  $p = \frac{1}{2}$ , peut-on en déduire que  $\mathbf{P}(Z = \infty) = 1$  ? Que  $\mathbf{P}(Z = \infty) > 0$  ?

**Exercice 1.3.** — *Produits aléatoires.*

Soient  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Soit  $n \geq 1$ . On pose  $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$ .

1. Que vaut  $\mathbf{E}[Y_n]$  ?
2. Montrer que  $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$ . En déduire la valeur de  $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$ .
3. Montrer que, pour tout  $t > 0$ , on a  $\mathbf{P}(Y_n \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$ .

**Exercice 1.4.** — *Le quantificateur “pour presque tout”.*

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements. Pensons chaque  $A_i$  comme défini par une certaine condition dépendant de  $\omega$ , qu'on note  $\mathcal{P}_i(\omega)$  et qui peut être tantôt vraie tantôt fausse. On a ainsi  $A_i = \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega)\}$ .

Étant donné une propriété  $\mathcal{P}(\omega)$  telle que  $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}$  soit mesurable, on définit “pour presque tout  $\omega$ , on a  $\mathcal{P}(\omega)$ ” comme signifiant  $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}) = 1$ . Cela est raisonnable. En effet, “pour tout  $\omega$ , on a  $\mathcal{P}(\omega)$ ” est équivalent à  $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\} = \Omega$ .

1. On suppose que  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$  et que pour presque tout  $\omega$ , pour tout  $i \in I$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ . Montrer que pour tout  $i \in I$ , pour presque tout  $\omega$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ .
2. On suppose que  $I$  est dénombrable et que pour tout  $i \in I$ , pour presque tout  $\omega$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ . Démontrer que pour presque tout  $\omega$ , pour tout  $i \in I$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle à densité, par exemple de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Prenons dans cette question  $I = \mathbb{R}$  et, pour  $i \in I$ , posons  $\mathcal{P}_i(\omega) = “X(\omega) \neq i”$ . Est-il vrai que, pour tout  $i \in I$ , pour presque tout  $\omega$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ ? Que pour presque tout  $\omega$ , pour tout  $i \in I$ , on a  $\mathcal{P}_i(\omega)$ ? Quelle leçon tirer de tout cela?

**Exercice 1.5.** — *Toute loi se réalise.*

1. Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ . Démontrer qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $E$  et de loi  $\mu$ .
2. Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on se donne un espace mesurable  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  et une mesure de probabilité  $\mu_i$  sur cet espace mesurable. Construire des variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  telles que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la variable aléatoire  $X_i$  soit de loi  $\mu_i$ .

**Exercice 1.6.** — *Lemmes de Borel–Cantelli.*

Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  une suite d'événements. On s'intéresse à quatre conditions :

- (I) presque sûrement, il existe un rang à partir duquel les  $A_n$  n'ont pas lieu,
  - (II) il existe un rang tel que presque sûrement, après ce rang, les  $A_n$  n'aient pas lieu,
  - (III) il existe un rang tel qu'après ce rang, presque sûrement les  $A_n$  n'aient pas lieu.
1. (a) Réécrire ces conditions sans utiliser “presque sûrement”, en écrivant plutôt que certaines probabilités sont égales à 1.  
 (b) Montrer que (I) implique (II).  
 (c) Montrer que (II) équivaut à (III).  
 (d) Montrer que (I) équivaut à :  $\mathbf{P}(\forall n \geq k, A_n \text{ n'a pas lieu}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ .  
 (e) On se donne  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\mathbf{P}(X \geq n) > 0$  (pourquoi un tel  $X$  existe-t-il?). On pose  $A_n := \{X \geq n\}$ . Montrer que cette construction fournit un contre-exemple à (II)  $\implies$  (I).  
 (f) (*bonus*) On pose  $T$  le rang aléatoire à partir duquel aucun des  $A_n$  n'a lieu, en posant  $T(\omega) = \infty$  lorsque ce rang n'est pas défini. Autrement dit, pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$T(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k, \omega \notin A_n\}.$$

Montrer que (I) équivaut à “ $T$  est fini presque sûrement” et que (II) équivaut à  $\|T\|_\infty < \infty$ .

2. Démontrer le lemme de Borel–Cantelli.

*Indication :*  $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$ .

3. Pour chaque  $n \geq 1$ , on lance un dé équilibré à  $n$  faces, numérotées de 1 à  $n$ , et on pose  $A_n$  l'événement “le  $n^{\text{ème}}$  dé tombe sur la face 1”. Montrer que cette situation vérifie (I) mais pas (II).
4. Rappeler l'énoncé du lemme de Borel–Cantelli indépendant. Montrer que cet énoncé devient faux si on enlève l'hypothèse d'indépendance.

*Indication :* On pourra s'inspirer de la question 1e.

**Exercice 1.7.** — Une condition suffisante pour la convergence presque sûre.

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty,$$

alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ .

2. Appliquer la question 1 pour démontrer que, dans le contexte de l'exercice 1.3, on a la convergence  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$ .
3. On suppose désormais que les variables aléatoires  $X_n$  sont indépendantes et on s'intéresse à la réciproque du résultat précédent.

- (a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} c$ , où  $c$  est une constante. Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(|X_n - c| > \varepsilon) < \infty.$$

- (b) On suppose que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ , pour une certaine variable aléatoire  $X$ . Démontrer qu'il existe une constante  $c$  à laquelle  $X$  est égale presque sûrement.
- (c) En déduire que si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ , alors on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$

**Exercice 1.8.** — Convergences de variables aléatoires.

Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \geq 1}$  est susceptible de réaliser ?

1.  $\mathbf{P}(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = \mathbf{P}(X_n = 1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  ;
2.  $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{2^n}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$  ;

3.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$  ;
4.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$  ;
5.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$ .

**Exercice 1.9.** — *En extrayant, on peut rendre presque sûre la convergence en probabilité.*  
 Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire  $X$ . Montrer qu'il existe une extractrice déterministe  $\varphi$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}$ . Étant donnée une telle extractrice, montrer que la sous-suite  $(X_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$  converge presque sûrement.

**Exercice 1.10.** — *Ratatiner  $X_n$  en le multipliant par un petit réel déterministe  $a_n$ .*

1. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Montrer que  $\mathbf{P}(|X| \geq k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .
2. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles. Montrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs telle que  $a_n X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$ .

**Exercice 1.11.** — *Réurrence de la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ .*

On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 1.1. On suppose en outre que  $p = \frac{1}{2}$ , et on cherche à montrer que presque sûrement, on a

$$\liminf S_n = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup S_n = +\infty.$$

1. Pour  $K \geq 1$ , on considère les événements

$$A_n = \{X_{nK+1} = \cdots = X_{nK+n} = +1\} \quad n \geq 1.$$

Montrer que pour tout  $K$ , presque sûrement, une infinité de  $A_n$  est réalisé.

2. En déduire que pour tout  $K$ , on a  $\mathbf{P}(\forall n \geq 1, -K/2 < S_n < K/2) = 0$ , puis que

$$\mathbf{P}(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}) = 1.$$

3. Montrer que l'événement  $\{\limsup S_n = +\infty\}$  appartient à la tribu queue de la suite  $(X_n)$ . On rappelle que cette tribu est par définition  $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \sigma(X_i : i \geq k)$ .
4. Utiliser la loi du 0-1 de Kolmogorov pour conclure que  $\mathbf{P}(\limsup S_n = +\infty) = 1$  et  $\mathbf{P}(\liminf S_n = -\infty) = 1$ .
5. En déduire que pour presque tout  $\omega$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , la trajectoire  $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$  passe une infinité de fois par la valeur  $x$ .

**Exercice 1.12.** — *Démonstration de la loi forte des grands nombres dans le cas  $\mathbf{L}^4$ .*

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées vérifiant  $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ .

1. On suppose pour l'instant que  $\mathbf{E}[X_1] = 0$ .
  - (a) Montrer que les espérances  $\mathbf{E}[X_1^3 X_2]$ ,  $\mathbf{E}[X_1^2 X_2 X_3]$  et  $\mathbf{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$  sont bien définies et donner leur valeur.
  - (b) Calculer  $\mathbf{E}[Z_n^4]$ .
  - (c) Montrer que la variable  $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n^4$  est intégrable et en déduire que  $Z_n$  converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse  $\mathbf{E}[X_1] = 0$ , déduire de la question précédente que  $Z_n$  converge presque sûrement vers  $\mathbf{E}[X_1]$ .