Planche d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1.1. — *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.*
Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soit $p \in [0,1]$. On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. (a) Rappeler la définition de la convergence presque sûre.
   (b) En utilisant un résultat célèbre, montrer que $\frac{1}{n}S_n$ converge presque sûrement vers $2p-1$.
3. (a) Démontrer que si $p > \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $+\infty$. De même, démontrer que si $p < \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $-\infty$.
   (b) Le même argument permet-il de dire quelque chose lorsque p vaut $\frac{1}{2}$?
4. Supposons $p \neq \frac{1}{2}$. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \forall x \in \mathbb{Z},\, \exists n \geqslant 1,\, \forall m \geqslant n,\, S_m(\omega) \neq x\}\,.$$

   Montrer que A est bien un événement, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathscr{F}$. Le décrire par une phrase en français et établir que sa probabilité vaut 1.

Exercice 1.2. — *Passages en zéro.*
Conservons les notations de l'exercice 1.1. On introduit Z la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui compte combien de fois la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ passe en zéro :

$$Z(\omega) := \operatorname{Card}\left(\{n \geqslant 1 \,:\, S_n(\omega) = 0\}\right).$$

Pour tout $i \geqslant 1$, on introduit l'événement $A_i := \{S_i = 0\} := \{\omega \in \Omega \,:\, S_i(\omega) = 0\}$.

1. Pour tout $i \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(A_i)$.
2. Expliquer pourquoi $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}$.
3. Déterminer, pour chaque valeur de p, si l'espérance de Z est finie ou infinie.
4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) > 0$?
   (b) Si $p = \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z = \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z = \infty) > 0$?

Exercice 1.3. — *Produits aléatoires.*
Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $n \geqslant 1$. On pose $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Que vaut $\mathbf{E}[Y_n]$?
2. Montrer que $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(Y_n \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.

Exercice 1.4. — *Le quantificateur "pour presque tout".*
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pensons chaque A_i comme défini par une certaine condition dépendant de ω, qu'on note $\mathcal{P}_i(\omega)$ et qui peut être tantôt vraie tantôt fausse. On a ainsi $A_i = \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega)\}$.

Étant donné une propriété $\mathcal{P}(\omega)$ telle que $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}$ soit mesurable, on définit "pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" comme signifiant $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}) = 1$. Cela est raisonnable. En effet, "pour *tout* ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" est équivalent à $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\} = \Omega$.

1. On suppose que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{F}$ et que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Montrer que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
2. On suppose que I est dénombrable et que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Démontrer que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, par exemple de loi uniforme sur $[0, 1]$. Prenons dans cette question $I = \mathbb{R}$ et, pour $i \in I$, posons $\mathcal{P}_i(\omega) =$ "$X(\omega) \neq i$". Est-il vrai que, pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Quelle leçon tirer de tout cela ?

Exercice 1.5. — *Toute loi se réalise.*

1. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans E et de loi μ.
2. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se donne un espace mesurable $(E_i, \mathcal{E}_i)$ et une mesure de probabilité μ_i sur cet espace mesurable. Construire des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aléatoire X_i soit de loi μ_i.

Exercice 1.6. — *Lemmes de Borel–Cantelli.*
Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements. On s'intéresse à quatre conditions :

(I) presque sûrement, il existe un rang à partir duquel les A_n n'ont pas lieu,

(II) il existe un rang tel que presque sûrement, après ce rang, les A_n n'aient pas lieu,

(III) il existe un rang tel qu'après ce rang, presque sûrement les A_n n'aient pas lieu.

1. (a) Réécrire ces conditions sans utiliser "presque sûrement", en écrivant plutôt que certaines probabilités sont égales à 1.
   (b) Montrer que (I) implique (II).
   (c) Montrer que (II) équivaut à (III).
   (d) Montrer que (I) équivaut à : $\mathbf{P}(\forall n \geqslant k,\, A_n \text{ n'a pas lieu}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.
   (e) On se donne X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$ (pourquoi un tel X existe-t-il ?). On pose $A_n := \{X \geqslant n\}$. Montrer que cette construction fournit un contre-exemple à (II) $\implies$ (I).
   (f) *(bonus)* On pose T le rang aléatoire à partir duquel aucun des A_n n'a lieu, en posant $T(\omega) = \infty$ lorsque ce rang n'est pas défini. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$T(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k,\, \omega \notin A_n\}.$$

Montrer que (I) équivaut à "T est fini presque sûrement" et que (II) équivaut à $\|T\|_\infty < \infty$.

2. Démontrer le lemme de Borel–Cantelli.
Indication : $\mathbb{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k)$.
3. Pour chaque $n \geqslant 1$, on lance un dé équilibré à n faces, numérotées de 1 à n, et on pose A_n l'événement "le $n^{\text{ème}}$ dé tombe sur la face 1". Montrer que cette situation vérifie (I) mais pas (II).
4. Rappeler l'énoncé du lemme de Borel–Cantelli indépendant. Montrer que cet énoncé devient faux si on enlève l'hypothèse d'indépendance.
Indication : On pourra s'inspirer de la question 1e.

Exercice 1.7. — *Une condition suffisante pour la convergence presque sûre.*
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty,$$
alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$.
2. Appliquer la question 1 pour démontrer que, dans le contexte de l'exercice 1.3, on a la convergence $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.
3. On suppose désormais que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et on s'intéresse à la réciproque du résultat précédent.
   (a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} c$, où c est une constante. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
   $$\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - c| > \varepsilon\big) < \infty.$$
   (b) On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, pour une certaine variable aléatoire X. Démontrer qu'il existe une constante c à laquelle X est égale presque sûrement.
   (c) En déduire que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, alors on a
   $$\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty.$$

Exercice 1.8. — *Convergences de variables aléatoires.*
Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est susceptible de réaliser ?

1. $\mathbf{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$;
2. $\mathbf{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$;

3. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$;
4. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$;
5. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$, $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$.

Exercice 1.9. — *En extrayant, on peut rendre presque sûre la convergence en probabilité.* Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Montrer qu'il existe une extractrice déterministe φ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Étant donnée une telle extractrice, montrer que la sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement.

Exercice 1.10. — *Ratatiner X_n en le multipliant par un petit réel déterministe a_n.*

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathbf{P}(|X| \geqslant k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $a_n X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.

Exercice 1.11. — *Récurrence de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 1.1. On suppose en outre que $p = \frac{1}{2}$, et on cherche à montrer que presque sûrement, on a $\liminf S_n = -\infty$ et $\limsup S_n = +\infty$.

1. Pour $K \geqslant 1$ fixé et $n \geqslant 1$, on pose $A_n := \big\{X_{nK+1} = \cdots = X_{nK+n} = +1\big\}$. Montrer que pour tout K, presque sûrement, une infinité de A_n est réalisée.
2. En déduire que pour tout K, on a $\mathbf{P}\big(\forall n \geqslant 1,\ -K/2 < S_n < K/2\big) = 0$, puis que $\mathbf{P}\big(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}\big) = 1$.
3. Expliquer pourquoi $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = \mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big)$. En déduire que $\mathbf{P}(\liminf S_n = -\infty) = \mathbf{P}(\limsup S_n = +\infty) \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que l'événement $\{\limsup S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue de la suite (X_n). On rappelle que cette tribu est par définition $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} \sigma(X_i \,:\, i \geqslant k)$.
5. Utiliser la loi du 0–1 de Kolmogorov pour conclure que $\mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big) = 1$ et $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = 1$.
6. En déduire que pour presque tout ω, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la trajectoire $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ passe une infinité de fois par la valeur x.

Exercice 1.12. — *Démonstration de la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbf{L}^4$.*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

1. On suppose pour l'instant que $\mathbf{E}[X_1] = 0$.
   (a) Montrer que les espérances $\mathbf{E}[X_1^3 X_2]$, $\mathbf{E}[X_1^2 X_2 X_3]$ et $\mathbf{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$ sont bien définies et donner leur valeur.
   (b) Calculer $\mathbf{E}[Z_n^4]$.
   (c) Montrer que la variable $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n^4$ est intégrable et en déduire que Z_n converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse $\mathbf{E}[X_1] = 0$, déduire de la question précédente que Z_n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[X_1]$.

Indications pour l'exercice 1.1.

1. Utiliser les propriétés de l'espérance et de la variance pour se ramener au calcul pour X_1.
2. (a) Cela revient à dire que, presque sûrement, on a convergence.
   (b) Penser à la loi forte des grands nombres.
3. (a) Utiliser la question 2b.
   (b) Soit $(s_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que $\frac{1}{n}s_n$ converge vers 0. Est-ce que ces informations permettent de déterminer si oui ou non $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$?
4. Pour montrer que A est un événement, l'écrire à l'aide d'intersections et d'unions dénombrables. La formulation en français s'intéresse à combien de fois chaque élément de $\mathbb{Z}$ est visitée par $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$. Pour démontrer que $\mathbf{P}(A) = 1$, utiliser la question 3a.

Indications pour l'exercice 1.2.

1. Le nombre $S_i(\omega)$ est nul si et seulement si, dans la somme qui le définit, il y a exactement autant de $+1$ que de -1.
2. Que compte $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}$? Par exemple, que se passe-t-il si ω appartient à A_2 et A_6 mais à aucun des autres A_i ?
3. Utiliser les deux questions précédentes.
4. (a) Pour une variable aléatoire réelle Y, les conditions $\mathbf{E}(Y) < \infty$ et $\mathbf{P}(Y = \infty) > 0$ sont-elles compatibles ?
   (b) Les conditions $\mathbf{E}(Y) = \infty$ et $\mathbf{P}(Y = \infty) = 0$ sont-elles compatibles ?

Indications pour l'exercice 1.3.

1. Utiliser les propriétés usuelles de l'espérance pour se ramener au calcul de $\mathbf{E}[X_1]$.
2. Rappelez-vous l'expression de $\mathbf{E}[f(X)]$ lorsque X est à densité. Cela permet d'exprimer l'espérance $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}]$ comme une intégrale. Par changement de variable $y = \sqrt{x}$, on ramène le calcul de cette intégrale à des formules classiques sur les gaussiennes. Enfin, la valeur de $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$ se déduit de celle de $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}]$ comme à la question 1.
3. Utiliser la question précédente et une célèbre inégalité de la théorie des probabilités.

Indications pour l'exercice 1.4.

1. N'y a-t-il pas un événement de probabilité 1 inclus dans A_i ?
2. Appliquer la sous-additivité dénombrable aux complémentaires des A_i.
3. Écrire les choses posément. Par exemple, quel est l'ensemble
$$\{\omega \in \Omega \ : \ \forall i \in I, \ X(\omega) \neq i\} \ ?$$
Quant à la leçon à tirer, elle concerne les manipulations qu'on a le droit ou non de faire avec le quantificateur "pour presque tout".

Indications pour l'exercice 1.5.

1. Tout d'abord, on doit choisir un certain $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. L'exercice nous donne E et $\mathscr{E}$ donc posons $\Omega := E$ et $\mathscr{F} := \mathscr{E}$. Que pourrait-on bien poser pour $\mathbf{P}$? Ensuite, il conviendra de choisir une fonction mesurable appropriée X de Ω vers E. Gardant en tête que $\Omega = E$, quelle est la seule fonction naturelle qui vous vienne en tête ? Ne pas chercher quelque chose de compliqué.
2. Se donner des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$, c'est pareil que se donner une variable aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs $E_1 \times \cdots \times E_n$. Dire que les X_i sont indépendantes et chacune de loi μ_i, cela revient à dire quoi sur la loi de X ? Ne peut-on pas ainsi se ramener à la question 1 ?

Indications pour l'exercice 1.6.

1. Pour la question 1c, utiliser l'exercice 1.4. Concernant la question 1d, on rappelle que si (B_k) est une suite croissante d'événements, alors $\mathbf{P}(B_k)$ converge vers $\mathbf{P}(\bigcup_i B_i)$. Pour l'existence de X, il suffit par exemple de prendre une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ et de rappeler que de telles variables aléatoires existent, d'après l'exercice 1.5. Pour la question bonus, ne pas prendre peur et écrire posément les définitions.
2. On a $\mathbf{P}(\limsup A_i) \leqslant P(\bigcup_{i \geqslant n} A_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Une autre démonstration est possible : $\mathbf{E}\left[\sum_i \mathbf{1}_{A_i}\right] = \sum_i \mathbf{P}(A_i) < \infty$ donc presque sûrement, seul un nombre (aléatoire mais) fini des A_i a lieu.
3. Appliquer le lemme de Borel–Cantelli. Par ailleurs constater que même si vous prenez n gigantesque, la probabilité que le prochain dé fasse 1 est peut-être très petite mais jamais nulle.
4. Reprendre la question 1e avec une variable aléatoire pour laquelle $\mathbf{P}(X \geqslant n)$ converge suffisamment vite vers 0.

Indications pour l'exercice 1.7.

1. Par Borel–Cantelli, les $\Omega_\varepsilon = \liminf\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\}$ ont probabilité 1. On remarque ensuite que $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ pour tout ω de l'événement $\bigcap_{n \geqslant 1} \Omega_{1/n}$, qui est de probabilité 1.
2. Application directe.
3. (a) Utiliser le lemme de Borel–Cantelli indépendant.
   (b) Utiliser la loi du 0–1 de Kolmogorov. On pourra aussi redémontrer puis employer le résultat suivant : si une variable aléatoire réelle X vérifie
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X \leqslant t) \in \{0, 1\},$$
   alors il existe une constante c telle que $X = c$ presque sûrement. Ce résultat peut se redémontrer en étudiant la fonction de répartition de X.
   (c) Application immédiate des questions précédentes.

Indications pour l'exercice 1.8.

1. La suite (X_n) converge vers 1 dans $\mathbf{L}^\infty$. Que peut-on déduire sur les autres modes de convergence ?
2. On a une convergence presque sûre (utiliser Borel–Cantelli) et dans tous les $\mathbf{L}^p$ vers 0, sauf pour $p = \infty$.
3. On a une convergence vers 0 presque sûrement (et donc en probabilité et en loi), mais pas dans $\mathbf{L}^1$, ni dans aucun $\mathbf{L}^p$, $p \geqslant 1$.
4. On a convergence vers 0 dans $\mathbf{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$, et donc en probabilité et en loi. Concernant la convergence presque sûre, on ne peut rien déduire. Si on rajoute que les (X_n) sont indépendantes, on n'a pas convergence presque sûre, par Borel–Cantelli. Si en revanche, on fixe U de loi uniforme sur $[0, 1]$ et que l'on définit $X_n := \mathbf{1}_{U \leqslant 1/n}$, les X_n ont bien la loi de l'énoncé et convergent presque sûrement vers 0.
5. On a convergence presque sûre vers 0, et convergence $\mathbf{L}^p$ si et seulement si $p < 3/2$.

Indications pour l'exercice 1.9. On définit $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(n+1) = \max(\varphi(n)+1, k_n)$, où k_n est tel que pour tout $i \geqslant k_n$, on ait $\mathbf{P}(|X_i - X| > \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n^2}$. On conclut en employant le lemme de Borel–Cantelli.

Indications pour l'exercice 1.10.

1. Quand on a une suite décroissante d'événements A_n, la probabilité de A_n converge vers $\mathbf{P}(\bigcap_k A_k)$.
2. Pour chaque n, on peut trouver k_n tel que $\mathbf{P}(|X_n| \leqslant k_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Montrer que poser $a_n = \frac{1}{nk_n}$ convient.

Indications pour l'exercice 1.11.

1. Cela peut se démontrer par Borel–Cantelli indépendant.
2. Le premier point découle de

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \{-K/2 < S_n < K/2\} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n^c$$

et le deuxième de

$$\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{S_n \geqslant K/2\} \text{ et } \{\limsup_n S_n = -\infty\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{S_n \leqslant -K/2\}.$$

3. Pour la première partie de la question, utiliser le fait que $p = \frac{1}{2}$ pour trouver un lien entre $(-S_n)_{n \geqslant 1}$ et $(S_n)_{n \geqslant 1}$. Quant à la seconde partie de la question, elle recourt à la question précédente.
4. On peut écrire $\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \{\limsup_n S_{n+k} - S_k = +\infty\}$, or $S_{n+k} - S_k$ est mesurable pour la tribu $\sigma(X_i \,:\, i \geqslant k)$.
5. Appliquer la loi du 0–1 et l'une des question précédentes.
6. Découle de la question 5 et du fait que la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et fait des sauts de ± 1.

Indications pour l'exercice 1.12.

1. On trouve

$$\mathbf{E}(Z_n^4) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_i^4) + \frac{1}{n^4}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\mathbf{E}(X_i^2X_j^2) = \frac{1}{n^3}\mathbf{E}(X_1^4) + \frac{n-1}{2n^3}\mathbf{E}(X_1^2)^2.$$

   Par conséquent, $\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{E}(Z_n^4)$ converge, donc par Fubini $\sum_{n\geqslant 1} Z_n^4$ est intégrable, donc presque sûrement finie, donc $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(X_n - \mathbf{E}X_1)_{n\in\mathbf{N}}$.