Planche d'exercices n° 1

Exercice 1.1 — *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.*

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soit $p \in [0,1]$. On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. (a) Rappeler la définition de la convergence presque sûre.
   (b) En utilisant un résultat célèbre, montrer que $\frac{1}{n}S_n$ converge presque sûrement vers $2p-1$.
3. (a) Démontrer que si $p > \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $+\infty$. De même, démontrer que si $p < \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $-\infty$.
   (b) Le même argument permet-il de dire quelque chose lorsque p vaut $\frac{1}{2}$?
4. Supposons $p \neq \frac{1}{2}$. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \forall x \in \mathbb{Z},\, \exists n \geqslant 1,\, \forall m \geqslant n,\, S_m(\omega) \neq x\}\,.$$

   Montrer que A est bien un événement, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathscr{F}$. Le décrire par une phrase en français et établir que sa probabilité vaut 1.

Exercice 1.2 — *Passages en zéro.*

Conservons les notations de l'exercice 1. On introduit Z la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui compte combien de fois la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ passe en zéro :

$$Z(\omega) := \mathrm{Card}\left(\{n \geqslant 1 \,:\, S_n(\omega) = 0\}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on introduit l'événement $A_n := \{S_n = 0\} := \{\omega \in \Omega \,:\, S_n(\omega) = 0\}$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(A_n)$.
2. Expliquer pourquoi $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$.
3. Déterminer, pour chaque valeur de p, si l'espérance de Z est finie ou infinie.
4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) > 0$?
   (b) Si $p = \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z = \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z = \infty) > 0$?

Exercice 1.3 — *Produits aléatoires.*

Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $n \geqslant 1$. On pose $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Que vaut $\mathbf{E}[Y_n]$?
2. Montrer que $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(Y_n \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.

Exercice 1.4 — *Le quantificateur "pour presque tout".*

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pensons chaque A_i comme défini par une certaine condition dépendant de ω, qu'on note $\mathcal{P}_i(\omega)$ et qui peut être tantôt vraie tantôt fausse. On a ainsi $A_i = \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega)\}$.

Étant donné une propriété $\mathcal{P}(\omega)$ telle que $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}$ soit mesurable, on définit "pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" comme signifiant $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}) = 1$. Cela est raisonnable. En effet, "pour *tout* ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" est équivalent à $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\} = \Omega$.

1. On suppose que $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{F}$ et que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Montrer que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
2. On suppose que I est dénombrable et que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Démontrer que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, par exemple de loi uniforme sur $[0, 1]$. Prenons dans cette question $I = \mathbb{R}$ et, pour $i \in I$, posons $\mathcal{P}_i(\omega) =$ "$X(\omega) \neq i$". Est-il vrai que, pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Quelle leçon tirer de tout cela ?

Exercice 1.5 — *Toute loi se réalise.*

1. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans E et de loi μ.
2. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se donne un espace mesurable $(E_i, \mathcal{E}_i)$ et une mesure de probabilité μ_i sur cet espace mesurable. Construire des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aléatoire X_i soit de loi μ_i.

Exercice 1.6 — *Lemmes de Borel–Cantelli.*

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements. On s'intéresse à trois conditions :

(I) presque sûrement, il existe un rang à partir duquel les A_n n'ont pas lieu,

(II) il existe un rang tel que presque sûrement, après ce rang, les A_n n'aient pas lieu,

(III) il existe un rang tel qu'après ce rang, presque sûrement les A_n n'aient pas lieu.

1. (a) Réécrire ces conditions sans utiliser "presque sûrement", en écrivant plutôt que certaines probabilités sont égales à 1.
   (b) Montrer que (II) implique (I).
   (c) Montrer que (II) équivaut à (III).
   (d) Montrer que (I) équivaut à : $\mathbf{P}(\forall n \geqslant k,\ A_n \text{ n'a pas lieu}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.
   (e) On se donne X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$ (pourquoi un tel X existe-t-il ?). On pose $A_n := \{X \geqslant n\}$. Montrer que cette construction fournit un contre-exemple à (I) $\implies$ (II).
   (f) *(bonus)* On pose T le rang aléatoire à partir duquel aucun des A_n n'a lieu, en posant $T(\omega) = \infty$ lorsque ce rang n'est pas défini. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
   $$T(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k,\ \omega \notin A_n\}.$$

Montrer que (I) équivaut à “T est fini presque sûrement” et que (II) équivaut à $\|T\|_\infty < \infty$.

2. Démontrer le lemme de Borel–Cantelli.
Indication : $\mathbf{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathbf{P}(A_k)$.
3. Pour chaque $n \geqslant 1$, on lance un dé équilibré à n faces, numérotées de 1 à n^2, et on pose A_n l'événement “le $n^{\text{ème}}$ dé tombe sur la face 1”. Montrer que cette situation vérifie (I) mais pas (II).
4. Rappeler l'énoncé du lemme de Borel–Cantelli indépendant. Montrer que cet énoncé devient faux si on enlève l'hypothèse d'indépendance.
Indication : On pourra s'inspirer de la question 1e.

Exercice 1.7 — *Une condition suffisante pour la convergence presque sûre.*
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty,$$
alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$.
2. Appliquer la question 1 pour démontrer que, dans le contexte de l'exercice 3, on a la convergence $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.
3. On suppose désormais que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et on s'intéresse à la réciproque du résultat précédent.
   (a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} c$, où c est une constante. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - c| > \varepsilon\big) < \infty$.
   (b) On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, pour une certaine variable aléatoire X. Démontrer qu'il existe une constante c à laquelle X est égale presque sûrement.
   (c) En déduire que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, alors on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty$. *On rappelle que la réciproque que nous venons d'établir utilise l'hypothèse additionnelle d'indépendance des X_n.*

Exercice 1.8 — *Convergences de variables aléatoires.*
Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est susceptible de réaliser ?

1. $\mathbf{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$;
2. $\mathbf{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$;
3. $\mathbf{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$;
4. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$;
5. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$, $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$.

Exercice 1.9 — *En extrayant, on peut rendre presque sûre la convergence en probabilité.*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Montrer qu'il existe une extractrice déterministe φ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Étant donnée une telle extractrice, montrer que la sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement.

Exercice 1.10 — *Ratatiner X_n en le multipliant par un petit réel déterministe a_n.*

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathbf{P}(|X| \geqslant k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $a_n X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.

Exercice 1.11 — *Récurrence de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 1. On suppose en outre que $p = \frac{1}{2}$, et on cherche à montrer que presque sûrement, on a $\liminf S_n = -\infty$ et $\limsup S_n = +\infty$.

1. Pour $K \geqslant 1$ fixé et $\ell \geqslant 0$, on pose $A_\ell := \big\{X_{\ell K+1} = \cdots = X_{\ell K+K} = +1\big\}$. Montrer que pour tout K, presque sûrement, une infinité de A_ℓ est réalisée.
2. En déduire que pour tout K, on a $\mathbf{P}\big(\forall n \geqslant 1, -K/2 < S_n < K/2) = 0$, puis que $\mathbf{P}\big(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}\big) = 1$.
3. Expliquer pourquoi $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = \mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big)$. En déduire que $\mathbf{P}\left(\liminf S_n = -\infty\right) = \mathbf{P}\left(\limsup S_n = +\infty\right) \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que l'événement $\{\limsup S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue de la suite (X_n). On rappelle que cette tribu est par définition $\bigcap_{k\geqslant 1} \sigma(X_i : i \geqslant k)$.
5. Utiliser la loi du 0–1 de Kolmogorov pour conclure que $\mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big) = 1$ et $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = 1$.
6. En déduire que pour presque tout ω, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la trajectoire $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ passe une infinité de fois par la valeur x.

Exercice 1.12 — *Démonstration de la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbf{L}^4$.*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

1. On suppose pour l'instant que $\mathbf{E}[X_1] = 0$.
   (a) Montrer que les espérances $\mathbf{E}[X_1^3 X_2]$, $\mathbf{E}[X_1^2 X_2 X_3]$ et $\mathbf{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$ sont bien définies et donner leur valeur.
   (b) Calculer $\mathbf{E}[Z_n^4]$.
   (c) Montrer que la variable $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n^4$ est intégrable et en déduire que Z_n converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse $\mathbf{E}[X_1] = 0$, déduire de la question précédente que Z_n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[X_1]$.

Planche d'exercices n° 2

Exercice 2.1 — *Somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes.*

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_1 + X_2 \mid X_1]$.
2. Étant donnés des entiers k et n vérifiant $n \geqslant k \geqslant 0$, calculer $\mathbf{P}(X_1 + X_2 = n)$ et $\mathbf{P}(X_1 = k \text{ et } X_1 + X_2 = n)$.
3. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$, puis en calculer l'espérance. Qu'observe-t-on ?

Exercice 2.2 — *Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.*

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose ces variables aléatoires indépendantes, de même loi et d'espérance μ. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la famille $(X_i)_{i\geqslant 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Lorsque $N(\omega) = 0$, on pose par convention $S(\omega) = 0$.

1. Quel lien y a-t-il entre S et la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}_{N\geqslant i}$?
2. Pourquoi est-il incorrect d'écrire $\mathbf{E}[S] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}[X_i]$?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}[S\mathbf{1}_{N=n}]$. En déduire $\mathbf{E}[S \mid N]$, puis $\mathbf{E}[S]$.
4. Pour $r \in [0, 1]$, calculer $\mathbf{E}[r^S \mid N]$ en fonction de $\varphi_{X_1}(r) = \mathbf{E}[r^{X_1}]$. En déduire la fonction génératrice de S en fonction de celle de X_1 et de celle de N.

Exercice 2.3 — *Tribu engendrée par une partition.*

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, c'est-à-dire une famille de parties non-vides A_i qui sont disjointes et vérifient $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$. On suppose dans cette question que I est dénombrable. Montrer que la tribu sur Ω engendrée par cette partition est
$$\sigma(A_i : i \in I) = \Big\{ \bigcup_{j\in J} A_j : J \subset I \Big\}.$$
En déduire que dans le cas où I est fini de cardinal n, cette tribu a exactement 2^n éléments.
2. Posons $\Omega = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ et $A_i = \{i\}$. On veut démontrer que dans ce cas, on a
$$\sigma(A_i : i \in I) \neq \Big\{ \bigcup_{j\in J} A_j : J \subset I \Big\}.$$
   (a) Montrer que $\Big\{ \bigcup_{j\in J} A_j : J \subset I \Big\}$ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que $\sigma(A_i : i \in I)$ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui sont soit dénombrable, soit de complémentaire dénombrable.

(c) Donner une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni dénombrable, ni de complémentaire dénombrable.

(d) Conclure. Pourquoi cela ne contredit-il pas la question 1 ?

Exercice 2.4 — *Sujet d'examen (deuxième session, juin 2023).*
On munit l'ensemble

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell\}$$

de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de probabilité uniforme. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω, définies comme suit :

ω	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	ℓ
$X(\omega)$	0	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4
$Y(\omega)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathbf{E}[X \mid Y](\omega)$												

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Combien d'éléments a la tribu $\sigma(Y)$? Et la tribu $\sigma(X, Y)$?
4. Calculer $\mathbf{E}[X \mid Y]$ et remplir la dernière ligne du tableau. *Seul le résultat est demandé.*

Exercice 2.5 — *Somme finie implique support dénombrable.*
On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements disjoints qui sont chacun de probabilité non nulle. Montrer que I est nécessairement dénombrable.
Indication : montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il ne peut pas y avoir strictement plus de n indices $i \in I$ vérifiant $\mathbf{P}(A_i) \geqslant 1/n$.

Exercice 2.6 — *Égalités et inégalités.*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Montrer que l'inégalité $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] \leqslant \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ a lieu presque sûrement si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] \leqslant \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A]$.
2. Montrer que l'égalité $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ a lieu presque sûrement si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A]$.

Exercice 2.7 — *Variance conditionnelle.*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose qu'on a $\mathbf{E}[X^2] < \infty$. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On introduit

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G}) := \mathbf{E}[X^2 \mid \mathscr{G}] - \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]^2.$$

1. Que vaut $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ lorsqu'on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$? Et quand $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$?
2. Montrer que si X est $\mathscr{G}$-mesurable, alors $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ est nulle presque sûrement. Démontrer que cela est toujours vrai si on suppose seulement qu'il existe une variable aléatoire Y qui est $\mathscr{G}$-mesurable et telle que $X = Y$ presque sûrement.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ est nulle presque sûrement. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire Y qui est $\mathscr{G}$-mesurable et telle que $X = Y$ presque sûrement.
4. Démontrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})] + \mathrm{Var}(\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}])$.
5. Soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux sous-tribus de $\mathscr{F}$ vérifiant $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$. Établir que l'inégalité suivante a lieu presque sûrement :

$$\mathbf{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{H}] \leqslant \mathrm{Var}(X \mid \mathscr{H}).$$

6. Essayer de comprendre intuitivement, en termes “d'information”, ce que signifient certains résultats établis aux questions précédentes. Vous paraissent-ils plutôt naturels ou contre-intuitifs ?

Exercice 2.8 — *Un cousin de l'exercice 5.*

Montrer que toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ est de la forme $\sigma(X)$, pour une variable aléatoire X bien choisie.

Exercice 2.9 — *Envoyons chaque ω sur l'étiquette de son bloc.*

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω par des éléments de $\mathscr{F}$. Soit

$$Z : (\Omega, \mathscr{F}) \to (I, \mathscr{P}(I))$$

la fonction qui, pour tout $i \in I$, est constante égale à i sur le bloc A_i.

Montrer que $\sigma(Z) = \sigma(A_i : i \in I)$.

Exercice 2.10 — *Du bon usage de la symétrie autour des espérances conditionnelles.*

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On suppose que X est intégrable et que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\mathbf{E}[X \mid Y] = h(Y)$ presque sûrement. Soit (X', Y') un couple de variables aléatoires ayant même loi que (X, Y). Montrer que $\mathbf{E}[X' \mid Y'] = h(Y')$ p.s.
2. Soient m et n deux entiers vérifiant $n \geqslant m \geqslant 1$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $S_k := X_1 + \cdots + X_k$.
   (a) Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbf{E}[X_i \mid S_n] = \mathbf{E}[X_1 \mid S_n]$ presque sûrement.
   (b) En déduire que $\mathbf{E}[S_m \mid S_n] = \frac{m}{n} S_n$ presque sûrement.

Exercice 2.11 — *Deux points de vue sur une même chose.*

Soient Ω, E et R trois ensembles. Soit $Z : \Omega \to E$ une fonction. Pour tout $e \in Z(\Omega)$, on pose $A_e = Z^{-1}(\{e\})$. On définit ainsi une partition $(A_e : e \in Z(\Omega))$ de Ω.

Soit maintenant $Y : \Omega \to R$ une fonction. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une fonction $h : E \to R$ telle que $Y = h \circ Z$,
2. pour tout $e \in Z(\Omega)$, la fonction Y est constante sur A_e.

Planche d'exercices n° 3

Exercice 3.1 — *Gaussienne conditionnée par une somme ou une différence.*
Soient $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. Posons $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Montrer que (S, D) est gaussien centré et déterminer la matrice de covariance.
2. Déterminer $\mathbf{E}[X \mid S]$ et $\mathbf{E}[X \mid D]$.

Exercice 3.2 — *Partiel 2016.*
Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. On pose $Z = X + 2Y$. Montrer qu'il existe un unique a tel que $X = aZ + W$ avec W indépendant de Z. En déduire l'expression de $\mathbf{E}[X \mid Z]$ et $\mathbf{E}[X^2 \mid Z]$.

Exercice 3.3 — *Espérance conditionnelle sur l'ordre statistique.*
Soient U_1, U_2 i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et posons $M := \max\{U_1, U_2\}$, $m := \min\{U_1, U_2\}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Le but de cet exercice est de calculer $\mathbf{E}[f(m) \mid M]$.

1. Montrer qu'il existe une fonction mesurable φ telle que, pour toute g mesurable bornée, on ait
$$\mathbf{E}\big[g(M)f(m)\big] = \mathbf{E}\big[g(M)\varphi(M)\big]. \tag{3.1}$$
2. Établir
$$\mathbf{E}\big[g(M)f(m)\big] = 2\int_0^1 g(x)\left(\int_0^x f(y)\,dy\right)\mathrm{d}x,$$
$$\mathbf{E}\big[g(M)\varphi(M)\big)] = \int_0^1 g(x)\,\big(2x\,\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$
3. En déduire que l'on peut choisir $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$ (pour $x > 0$) et conclure :
$$\mathbf{E}\big[f(m) \mid M\big] = \frac{1}{M}\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{p.s.}$$

Exercice 3.4 — *Indépendance et conditionnement.*
Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On définit $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$. Calculer $\mathbf{E}[X \mid Z]$ et $\mathbf{E}[Y \mid Z]$. Puis, démontrer ou réfuter l'assertion suivante : « Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors les variables aléatoires $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]$ et $\mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ sont indépendantes ».

Exercice 3.5 — *Convergence en probabilités vers* 0 *et conditionnement.*
Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives et $(\mathscr{F}_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On suppose que
$$\mathbf{E}[X_i \mid \mathscr{F}_i] \xrightarrow[i\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

1. Montrer que $(X_i)_{i\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse en général.

Exercice 3.6 — *Un théorème de convergence à rebours.*
Soit $(\mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire vérifiant $\mathscr{G}_n \supseteq \mathscr{G}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. On suppose que $\mathscr{G}_0 = \mathscr{F}$. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbf{P}) := \mathbf{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On veut démontrer que si l'on pose $\mathscr{G}_\infty := \bigcap_{n\geqslant 0} \mathscr{G}_n$, alors la convergence suivante a lieu dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_n] = \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_\infty].$$

On rappelle qu'une intersection arbitraire de tribus est toujours une tribu, donc $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_\infty]$ est bien définie. Pour établir ce résultat, on procède comme suit :

1. Rappelez-vous que l'application

$$\langle Y, Z\rangle := \mathbf{E}[YZ], \quad \mathbf{L}^2(\mathbf{P}) \times \mathbf{L}^2(\mathbf{P}) \to \mathbb{R},$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$, et que la norme associée est la norme usuelle de $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$. L'espace $(\mathbf{L}^2(\mathbf{P}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments orthogonaux dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$, c'est-à-dire vérifiant $\langle X_n, X_m\rangle = 0$ dès que $n \neq m$. Montrer que si

$$\sum_{n\geqslant 0} \langle X_n, X_n\rangle < \infty,$$

   alors la suite de sommes partielles $\sum_{k=1}^n X_k$, $n \geqslant 1$, converge dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$ vers un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$. *Indication : montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.*
3. Montrer que les variables aléatoires

$$\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_n] - \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_{n+1}], \quad n \geqslant 0,$$

   sont orthogonales dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$.
4. Montrer que la suite

$$\sum_{k=0}^{n} \big(\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_k] - \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_{k+1}]\big), \qquad n \geqslant 0,$$

   converge quand $n \to \infty$ vers un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$. En déduire que la suite de variables aléatoires $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_n]$ converge dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$, et vérifier que sa limite est $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}_\infty]$. *Indication : pour ce dernier point, utiliser le résultat de la question 2.*

Exercices bonus

Exercice 3.7 — *Interprétation de la covariance.*
Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$.

1. Montrer que $|\rho| \leqslant 1$ et calculer $\mathbf{E}(X \mid Y)$.
2. On pose $U = X - \rho Y$, $V = \sqrt{1-\rho^2}\, Y$. Quelles sont les lois de U et de V ? Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{E}[U^2V^2]$, $\mathbf{E}[UV^3]$, $\mathbf{E}[V^4]$. En déduire $\mathbf{E}[X^2Y^2]$.

Exercice 3.8 — *Coordonnées polaires et gaussiennes.*
Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où $\rho \in]-1, 1[$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. À quelle condition les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. On introduit les coordonnées polaires (R, Φ) du couple (X_1, X_2) : $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ est définie par

$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin\Phi = \frac{X_2}{R} \text{ si } R > 0, \quad \Phi = 0 \text{ si } R = 0.$$

   Déterminer la densité du couple (R, Φ), puis celle de Φ.
3. Déterminer la densité de R lorsque $\rho = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires R et Φ dans ce cas ?

Exercice 3.9 — *Conditionnement et densités.*

1. Considérons un couple de variables aléatoires (U, X) de densité jointe

$$f_{(U,X)}(u, x) := \mathbf{1}_{[0,1]}(u)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, ue^{-ux}.$$

   Montrer que pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a presque sûrement

$$\mathbf{E}[g(X) \mid U] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, Ue^{-Ux} \mathbf{1}_{R_+}(x)\, \mathrm{d}x.$$

   On dit que, conditionnellement à U, la variable X suit la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(U)$.

On rappelle que la loi gamma de paramètre $(c, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, notée $\Gamma(2, \theta)$, admet pour densité

$$\frac{\theta^c}{\Gamma(c)}\, x^{c-1} e^{-\theta x}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2. Soient X, Y deux variables exponentielles indépendantes de paramètre θ, et posons $W := X + Y$. Calculer la densité jointe $f_{(X,X+Y)}$ et en déduire que $X+Y$ suit la loi $\Gamma(2,\theta)$.
3. Montrer que, pour toute fonction mesurable et bornée g, on a presque

$$\mathbf{E}[g(X) \mid W] = \frac{1}{W} \int_0^W g(u)\,\mathrm{d}u \text{ p.s.}$$

On dit que, conditionnellement à W, la variable X est uniformément distribuée sur $[0, W]$.

Exercice 3.10 — *Un critère d'indépendance.*

Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Pour $A \in \mathscr{F}$, on note $\mathbf{P}(A \mid \mathscr{G}) := \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mid \mathscr{G}]$.

1. Montrer que deux tribus $\mathscr{G}, \mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $B \in \mathscr{H}$, on a $\mathbf{P}(B \mid \mathscr{G}) = \mathbf{P}(B)$.
Indication : montrer que lorsque cette condition est satisfaite, pour tout $A \in \mathscr{H}$ et $B \in \mathscr{G}$, on a $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
2. Montrer que lorsque cette condition est satisfaite, pour toute variable aléatoire X mesurable par rapport à $\mathscr{H}$, bornée ou positive, on a $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbf{E}[X]$. En particulier, deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes si et seulement si, pour toute fonction mesurable bornée $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{E}[h(X) \mid Y] = \mathbf{E}[h(X)].$$

3. Montrer que la condition $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbf{E}[X]$ n'implique en général pas que X est indépendant de $\mathscr{G}$.

Exercice 3.11 — *Problème de l'embarquement dans l'avion.*

Cent passagers font la queue pour monter à bord d'un avion de 100 places. La première personne, Mortdecai, a perdu sa carte d'embarquement et choisit son siège au hasard. Chaque passager suivant prend son siège attribué si celui-ci est libre et choisit sinon un siège libre totalement au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager s'asseye effectivement à sa place attitrée ?

Exercice 3.12 — *Strong ratio theorem pour $\mathbb{Z}$.*

Soit μ une loi de support $\mathbb{Z}$. Dans le même espace de probabilités, on considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. de loi μ et on pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On fixe $(s_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{Z}$ telle que

$$\mathbf{P}(S_n = s_n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Le but de cet exercice est de montrer le strong ratio theorem : pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\frac{\mathbf{P}(S_{n-1} = s_n - b)}{\mathbf{P}(S_n = s_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Dans la suite, on fixe la suite (s_n) et $b \in \mathbb{Z}$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $N_n := \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : \ X_i = b\})$. Établir que :

$$\mathbf{E}\big(\tfrac{N_n}{n} \mid S_n = s_n\big) = \mathbf{P}(X_1 = b)\frac{\mathbf{P}(S_{n-1} = s_n - b)}{\mathbf{P}(S_n = s_n)}$$

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon > 1$ tel que :

$$\mathbf{P}\big(\big|\tfrac{N_n}{n} - \mathbf{P}(X_1 = b)\big| > \varepsilon\big) \leqslant \exp(-c_\varepsilon n),$$

pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$.

3. Déduire le strong ratio theorem.

Ce résultat est particulièrement utile pour l'étude des limites locales d'objets combinatoires aléatoires, et il joue un rôle actif même dans la recherche actuelle (voir par exemple les notes de cours de Saint-Flour de Nicolas Curien pour des applications aux cartes aléatoires). La méthode de démonstration que nous présentons est due à Jacques Neveu. Le résultat peut être étendu sans difficulté aux lois apériodiques ainsi qu'à $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geqslant 1$. On peut également remplacer S_{n-1} par S_{n-k} pour un $k \geqslant 0$ fixé.

Exercice 3.13 — *Biais par la taille.*

On considère une population avec un très grand nombre n de ménages. On modélise la taille des ménages par des variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi $\mathbf{P}(X_1 = k) = p_k$ et d'espérance

$$m = \mathbf{E}[X_1] = \sum_{k\geqslant 1} k p_k < \infty.$$

On note T_n la taille du ménage d'un individu choisi uniformément au hasard dans la population.

1. Justifier que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{T_n=k} \mid X_1, \ldots, X_n] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i} \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\{X_i=k\}}.$$

2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{P}(T_n = k) \ \longrightarrow \ \tfrac{k}{m} p_k \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Exercice 3.14 — *Plus petit événement mesurable et positivité.*

Soit $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}$ une tribu et X une variable aléatoire positive. Montrer que l'événement

$$\{\mathbf{E}[X \mid \mathcal{A}] > 0\}$$

est, à événement négligeable près, le plus petit événement $\mathcal{A}$-mesurable contenant l'événement $\{X > 0\}$.

Exercice 3.15 — *Une identité symétrique.*

Soit X, Y deux variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que X et Y sont intégrables et que $\mathbf{E}[X \mid Y] = Y$ et $\mathbf{E}[Y \mid X] = X$ p.s. Montrer que $X = Y$ p.s.

Planche d'exercices n° 4

Exercice 4.1. Montrer que toute filtration est de la forme $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, pour des variables aléatoires X_i bien choisies.

Exercice 4.2. Soient $(\Omega,\, \mathscr{F},\, (\mathscr{F}_n),\, \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré, T et S deux temps d'arrêt, $\mathscr{F}_T$ et $\mathscr{F}_S$ les tribus respectives des événements antérieurs à T et S. Montrer que :

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbf{N}$), alors $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_p$,
3. T est $\mathscr{F}_T$-mesurable,
4. Si $S \leq T$, $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$,
5. $\mathscr{F}_{S \wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$,
6. $T + S$ est $\mathscr{F}_{S \vee T}$-mesurable,
7. $\{S < T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$.

Exercice 4.3. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[0,\, 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,\, 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1;\; X_n > X_0\},$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geq 0}$.
2. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Exercice 4.4. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $\mathrm{E}(M_n^2) < +\infty$.

1) Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. On pose $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ le processus croissant $(A_n)_{n\geq 0}$ intervenant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n\geq 0}$. Ce processus s'appelle le *crochet* de M.

2) Montrer que

$$\mathrm{E}((M_{n+p} - M_n)^2) = \mathrm{E}(M_{n+p}^2) - \mathrm{E}(M_n^2) = \mathrm{E}(\langle M\rangle_{n+p}) - \mathrm{E}(\langle M_n\rangle)$$

Exercice 4.5. a) Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale telle que $\mathrm{E}(X_n)$ est constante. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_n$-martingale si et seulement si il existe $c \in \mathbf{R}$ telle que pour tout temps d'arrêt borné τ de $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ on a $\mathrm{E}(X_\tau) = c$.

Exercice 4.6. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = +1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $\mu = \mathrm{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var} X_1$. On pose, $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $S_n - n\mu$ et $M_n := (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. On définit $\psi(x) = pe^x + (1-p)e^{-x}$, pour $x \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $e^{\theta S_n}/\psi(\theta)^n$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4.7. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ de carré intégrable.

a) Montrer que pour $m < n$ on a $\mathrm{E}(X_m X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m^2$

b) Montrer que $\mathrm{E}(X_n Y_n) - \mathrm{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$.

Exercice 4.8. Montrer que le carré d'une sous-martingale n'est pas nécessairement une sous-martingale.

Exercice 4.9. Montrer que lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

Exercice 4.10. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbf{P}(X_1 = +1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On fixe un entier $N \geq 1$, et pour $x \in \{0, \ldots, N\}$, on considère la marche aléatoire issue de x: $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$ $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que S_n et $M_n := S_n^2 - n$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On considère le temps $T := \inf\{n\,;\, S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
3. Pour $m \geq 0$, on introduit l'événement $A_m = \{X_{mN+1} = \cdots = X_{(m+1)N} = +1\}$. Montrer que pour $q \geq 1$, $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$, et en déduire une majoration de $\mathbf{P}(T > qN)$. Montrer que $\mathrm{E}[T] = \sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(T > j) < +\infty$ et que $T < +\infty$ p.s.
4. Calculer $\mathrm{E}[S_T]$ et en déduire que $\mathbf{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$.
5. Calculer $\mathrm{E}[M_T]$ et en déduire $\mathrm{E}[T]$.

Exercice 4.11. Soit $(X_n, n \geq 0)$, une suite de variables réelles, indépendantes, centrées et de carrés intégrables : $\mathrm{E}[X_n] = 0$ et $\sigma_n^2 = \mathrm{E}[X_n^2] < \infty$. On pose $S_n = X_0 + \cdots + X_n$ et on définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ par $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\tau = \inf\{n\,;\, |S_n| \geq x\}$ est un temps d'arrêt.
3. En utilisant τ, montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \ \geq x\Big) \leq x^{-2}\ \mathrm{Var}(S_n)\ ,$$

   valable pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4.12. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite i.i.d. telle que

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Montrer la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Exercice 4.13. Soient les trois affirmations suivantes :

(i) une surmartingale $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas tendre presque sûrement vers $+\infty$ car une telle surmartingale serait minorée et par conséquent convergerait vers une variable aléatoire finie.

(ii) une surmartingale $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas tendre presque sûrement vers $+\infty$ car la suite $(\mathrm{E}(X_n))_{n\geq 0}$ est décroissante, et si $\underline{\lim}_n X_n = \lim_n X_n = +\infty$ p.s on aurait par Fatou :

$$+\infty = \mathrm{E}[\underline{\lim}_n X_n] \leq \underline{\lim}_n \mathrm{E}[X_n] \leq \mathrm{E}[X_0] < +\infty.$$

(iii) Une surmartingale peut tendre presque sûrement vers $+\infty$.

Y a-t-il une affirmation juste ?

Exercice 4.14. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0,1]$ et posons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0,1]$ p.s. et que

$$\mathrm{P}\Big(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\Big) = 1 - X_n \qquad \mathrm{P}\Big(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\Big) = X_n$$

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z.

2) Montrer que $\mathrm{E}((X_{n+1}-X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_n(1-X_n))$.

3) Calculer $\mathrm{E}(Z(1-Z))$. Quelle est la loi de Z?

Exercice 4.15. Soient X une variable aléatoire de carré intégrable et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration sur Ω. On pose $X_n = \mathrm{E}(X/\mathcal{F}_n)$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z.

2) Montrer que $X_n = \mathrm{E}(Z/\mathcal{F}_n)$ (on dit que la martingale est *fermée*).

3) On considère $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_n$, et on suppose que X est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Montrer que $X = Z$ p.s.

Exercice 4.16. (Une preuve de la loi $0-1$ de Kolmogorov par les martingales) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On définit

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1,\dots,Y_n) \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$$
$$\mathcal{F}^n = \sigma(Y_n, Y_{n+1},\dots) \qquad \mathcal{F}^\infty = \bigcap_n \mathcal{F}^n.$$

1) Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. En utilisant la martingale $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A)$, montrer que $\mathrm{P}(A) = 0$ ou 1.

2) Montrer que, si X est une v.a.r. $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, $X = a$ p.s.

Exercice 4.17. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. Soient a un entier > 0 et λ un réel tel que $0 < \lambda < \pi/(2a)$. On définit $\tau = \inf\{n \geq 0, |S_n| = a\}$ (avec la convention $\tau = +\infty$ si l'ensemble est vide) le temps de sortie de $]-a, a[$.

a) Montrer que $X_n = (\cos\lambda)^{-n}\cos(\lambda S_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.

b) Montrer que

$$1 = \mathrm{E}(X_{n\wedge\tau} \geq \cos(\lambda a)\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-n\wedge\tau})$$

c) En déduire que $\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$.

e) Montrer que la martingale $(X_{n\wedge\tau})_{n\geq 0}$ est fermée.

f) Que vaut $\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau})$? Est-ce que τ est intégrable? Est-ce que $\tau \in L^2$?

Exercice 4.18. Soit $(Y_n,\, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \cdots Y_n$.

1. Montrer que X_n, resp. $\sqrt{X_n}$, est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale, resp. surmartingale.

2. Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(\sqrt{Y_k})$ converge dans $\mathbf{R}_+$. On note ℓ sa limite.

3. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle fermée ?

4. On suppose $\ell > 0$. Montrer que $\sqrt{X_n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2$. En déduire que (X_n) est fermée.

5. Application

   Soient p et q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même loi q.

   On suppose que, pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$ (notations : $p(x) := p(\{x\})$ et $q(x) := q(\{x\})$, $x \in E$). On pose

   $$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$

   À partir de ce qui précède, montrer que $X_n \to 0$ p.s.

Exercice 4.19. Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q, \qquad \mathbf{P}(Y_1 = 1) = p, \qquad \text{avec } p + q = 1,\ 0 < p < q < 1.$$

On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$.

1. Montrer que (Z_n) est une martingale positive. Montrer que $Z_n \to 0$ p.s.
2. On pose, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0\,;\, X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k \wedge n})$ et la décomposition
$$Z_{T_k \wedge n} = Z_{T_k \wedge n} 1\{T_k < \infty\} + Z_{T_k \wedge n} 1\{T_k = \infty\}\,,$$
montrer que
$$\mathbf{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$
3. En déduire que $\sup_{n \geq 0} X_n$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - p/q$, et ainsi que
$$\mathrm{E}(\sup_{n \geq 0} X_n) = \frac{p}{q - p}.$$

Exercice 4.20. Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité filtré et ν une mesure finie sur $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, P domine ν sur $\mathcal{F}_n$ et on note X_n la densité de Radon-Nikodym: X_n est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$\nu(A) = \int_A X_n d\mathrm{P}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ (en particulier $X_n \geq 0$).
a) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale intégrable.
b) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge vers une variable intégrable X.
c) Montrer que si P domine ν sur $\mathcal{F}_\infty$, X est la densité de Radon-Nikodym correspondante.
d) On suppose que les deux mesures ν, P sont étrangères sur $\mathcal{F}_\infty$: il existe donc $S \in \mathcal{F}_\infty$ tel que $\mathrm{P}(S) = 1$ et $\nu(S) = 0$. Montrer qu'alors $X = 0$, p.s.

Exercice 4.21. (Identité de Wald) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi. On pose $m = \mathrm{E}(Y_1)$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Soit τ un temps d'arrêt intégrable.
1) On pose $X_n = S_n - nm$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.
2) Montrer que, pour tout n, $\mathrm{E}(S_{n \wedge \tau}) = m\mathrm{E}(n \wedge \tau)$.
3) Montrer que $\S_\tau$ est intégrable et que $\mathrm{E}(S_\tau) = m\mathrm{E}(\tau)$. (considérer d'abord le cas $Y_n \geq 0$).
4) Supposons $\mathrm{P}(Y_n = -1) = \mathrm{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$, pour tout n et $\tau = \inf\{n; S_n \geq a\}$, où a est un entier ≥ 1. Montrer que τ n'est pas intégrable.

Exercice 4.22. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale intégrable et soit ν un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathrm{P}(\nu < +\infty) = 1, \qquad \mathrm{E}(|X_\nu|) < +\infty \qquad \int_{\{\nu > n\}} |X_n| \, d\mathrm{P} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

1) Montrer que

$$\int_{\{\nu > n\}} |X_\nu| \, d\mathrm{P} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

2) Montrer que $\mathrm{E}(|X_{\nu\wedge n} - X_\nu|) \to 0$.

3) En déduire que $\mathrm{E}(X_\nu) = \mathrm{E}(X_0)$.

Exercice 4.23. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale intégrable. On suppose qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{E}(|X_n - X_{n-1}|/\mathcal{F}_{n-1}) \leq M \qquad \text{p.s.}$$

1) Montrer que, si $(V_n)_{n\geq 1}$ est un processus positif tel que V_n soit $\mathcal{F}_{n-1}$–mesurable, on a

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n |X_n - X_{n-1}|\Big) \leq M\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\Big)$$

2) Soit ν un temps d'arrêt *intégrable* (pas nécessairement borné).

2a) Montrer que $\mathrm{E}(\nu) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}\{\nu \geq n\}$.

2b) Déduire de 1) que $\mathrm{E}(\sum_{n\geq 1} 1_{\{\nu \geq n\}} |X_n - X_{n-1}|) < +\infty$.

2c) Que vaut $\sum_{n\geq 1} 1_{\{\nu\geq n\}}(X_n - X_{n-1})$? En déduire que X_ν est intégrable.

3) Montrer que $(X_{\nu\wedge p})_{p\geq 0}$ tend vers X_ν dans L^1 lorsque $p \to +\infty$

4)

4a) Montrer que si $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$, alors $A \cap \{\nu_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_{\nu_1 \wedge k}$.

4b) En déduire que , si $\nu_1 \leq \nu_2$ sont deux temps d'arrêt avec ν_2 intégrable, on a

$$\mathrm{E}(X_{\nu_2} \mid \mathcal{F}_{\nu_1}) \leq X_{\nu_1}$$

Exercice 4.24. À l'instant 1, une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne à l'instant 2, et ainsi de suite suivant le même procédé.

On note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{n+1}$ le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale qui converge p.s. vers une v.a. U et que l'on a, pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n^k) = \mathrm{E}(U^k)$.

2) On fixe $k \geq 1$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)...(Y_n+k-1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)}$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale. Quelle est sa limite? En déduire la valeur de $\mathrm{E}(U^k)$.

3) Soit X une v.a. réelle à valeurs dans un intervalle borné p.s. Montrer que sa fonction caractéristique se développe en série de puissances

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k \tag{4.1}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

4) Quelle est la loi de U?

Exercice 4.25. On a une population de taille fixée $N \in \mathbf{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et on pose $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. On a alors $\mathbf{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathscr{F}_n) = \binom{N}{i} (\frac{X_n}{N})^i (1 - \frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \cdots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n, \, n \geq 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathrm{E}(X_\infty)$ et $\mathrm{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 4.26. Soient $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$ et X une v.a. à valeurs $[0,1]$, de loi uniforme. On pose, notant $[x]$ la partie entière du réel x,

$$X_n = \frac{[2^n X]}{2^n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n(f(X_n + \tfrac{1}{2^n}) - f(X_n))$$

a) Etudier la convergence de $(X_n)_{n\geq 0}$.
b) Montrer l'égalité de tribus

$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X)$$

c) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_k)_{k\leq n}$. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée.
On note Z_∞ sa limite p.s. et dans L^1.
d) Montrer qu'il existe g telle que $Z_\infty = g(X)$.
e) Calculer la loi conditionnelle de X sachant X_n et montrer que p.s.,

$$Z_n = \int_{X_n}^{X_n+\frac{1}{2^n}} g(u)du$$

f) Déduire que pour tout $k, n,) \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f(\tfrac{k}{2^n} + \tfrac{1}{2^n}) - f(\tfrac{k}{2^n}) = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} g(u)du$$

et conclure que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(u)du \tag{4.2}$$

g) Conclure que toute fonction Lipschitzienne est primitive (au sens général) d'une fonction mesurable bornée.

Exercice 4.27. Soit $(X_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables telles que $\mathrm{E}[X_n] = 0$, pour tout $n \geq 0$. On fixe $p \geq 1$, on pose $X_0^{(p)} = X_1^{(p)} = \cdots = X_{p-1}^{(p)} = 0$ et pour tout $n \geq p$, on pose

$$X_n^{(p)} = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}\ .$$

Montrer que $(X_n^{(p)},\, n \geq 0)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)$, donnée par $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ si $n \geq 1$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Exercice 4.28. 1. Soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ de loi commune : $\mathbf{P}(Y_n = -1) = \mathbf{P}(Y_n = 1) = 1/2$ et indépendantes.

Planche d'exercices n° 4

Exercice 4.1. Montrer que toute filtration est de la forme $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, pour des variables aléatoires X_i bien choisies.

Indications ou Correction : *Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, remarquer que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu rendant mesurable la variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ avec $Y(\omega) = \omega$. Généraliser alors cette remarque en prenant de même X_i à valeurs dans $(\Omega, \mathcal{F}_i)$.* □

Exercice 4.2. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré, T et S deux temps d'arrêt, $\mathscr{F}_T$ et $\mathscr{F}_S$ les tribus respectives des événements antérieurs à T et S. Montrer que :

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbf{N}$), alors $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_p$,
3. T est $\mathscr{F}_T$-mesurable,
4. Si $S \leq T$, $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$,
5. $\mathscr{F}_{S \wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$,
6. $T + S$ est $\mathscr{F}_{S \vee T}$-mesurable,
7. $\{S < T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$.

Indications ou Correction :
(i)Soit $n \in \mathbf{N}$. Il s'agit de montrer que $(S \wedge T \leq n), (S \vee T \leq n)$ et $(S + T \leq n)$ sont des éléments de $\mathcal{F}_n$.

$$(S \wedge T \leq n) = (S \wedge T > n)^c = [(S > n) \cap (T > n)]^c = \\ = (S > n)^c \cup (T > n)^c = (S \leq n) \cup (T \leq n)$$

Or, S et T étant des temps d'arrêt, $(S \leq n)$ et $(T \leq n)$ sont deux éléments de $\mathcal{F}_n$ et $(S \wedge T \leq n) \in \mathcal{F}_n$.

De même, $(S \vee T \leq n) = (S \leq n) \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$.
Enfin,

$$(S + T \leq n) = \bigcup_{k=0}^{n} (S \leq k) \cap (T \leq n - k)$$

Or, pour $0 \leq k \leq n$, $(S \leq k) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $(T \leq n - k) \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$ donc $(S + T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ ce qui termine la démonstration.
(ii) Supposons que $S = p$ p.s.
L'événement $(S \leq n)$ est alors $\emptyset$ si $p > n$ et Ω si $p \leq n$.
Par conséquent, puisque $\emptyset \in \mathcal{F}_n$, on peut écrire

$$\mathcal{F}_S = \{A \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{F}_n, \text{ pour tout } n \geq p\} = \bigcap_{n \geq p} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_p$$

(iii) Soit $A \in \mathcal{F}_S$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $(T \leq n) \subset (S \leq n)$, on peut écrire $A \cap (T \leq n) = A \cap (S \leq n) \cap (T \leq n)$.
Mais, $A \cap (S \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ (T est un temps d'arrêt) donc $A \cap (S \leq n) \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $A \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$.
On a donc $A \in \mathcal{F}_T$.
(iv) Soit $n \in \mathbf{N}$.
On a

$$(S < T) \cap (S \leq n) = \bigcup_{k=0}^{n} (S = k) \cap (T > k)$$

Mais, pour $0 \leq l \leq n$,

$$(S = k) = (S \leq k) \cap (S \leq k - 1)^c \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$$

et

$$(T > k) = (T \leq k)^c \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$$

De ce fait, $(S < T) \cap (S \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $(S < T) \in \mathcal{F}_S$.
On a de même,

$$(S < T) \cap (T \leq n) = \bigcup_{k=0}^{n} (T = k) \cap (S < k)$$

et comme pour $0 \leq k \leq n$, $(T = k) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $(S < k) = (S \leq k - 1) \in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_n$, on a aussi $(S < T) \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $(S < T) \in \mathcal{F}_T$.
Enfin,

$$(S = T) = (S < T)^c \cap (T < S)^c \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$$

puisque $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_T$ sont deux tribus.

$\square$

Exercice 4.3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[0,\ 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,\ 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n > X_0\},$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Indications ou Correction : *:*

1- Remarquer que $(T > n)$ s'exprime à l'aide des variables $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

2 - Calculer $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T > n-1) - \mathrm{P}(T > n)$ puis, en conditionnant par X_0, montrer que

$$P(T > n) = E(E(1_{X_1 \leq X_0, X_2 \leq X_0, \ldots, X_n \leq X_0}/X_0)) = E(X_0^n) = 1/n + 1.$$

.

□

Exercice 4.4. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $\mathrm{E}(M_n^2) < +\infty$.

1) Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. On pose $(\langle M \rangle_n)_{n\geq 0}$ le processus croissant $(A_n)_{n\geq 0}$ intervenant dans la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n\geq 0}$. Ce processus s'appelle le *crochet* de M.

2) Montrer que

$$\mathrm{E}((M_{n+p} - M_n)^2) = \mathrm{E}(M_{n+p}^2) - \mathrm{E}(M_n^2) = \mathrm{E}(\langle M \rangle_{n+p}) - \mathrm{E}(\langle M_n \rangle)$$

Indications ou Correction :

1- Utiliser l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $x \mapsto x^2$.

2 - Remarquer que $E(M_n M_{n+p}) = E(M_n^2)$.

□

Exercice 4.5. a) Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale telle que $\mathrm{E}(X_n)$ est constante. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_n$-martingale si et seulement si il existe $c \in \mathbf{R}$ telle que pour tout temps d'arrêt borné τ de $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ on a $\mathrm{E}(X_\tau) = c$.

Indications ou Correction :

a) Si X est une surmartingale on a pour $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$$

Donc la v.a. $U_n = X_n - \mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ est ≥ 0 mais d'après l'hypothèse sa moyenne est nulle car

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}(X_n)$$

On en tire que $U_n = 0$ p.s. et donc $\mathrm{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ p.s.

b) Si X est une martingale la propriété est une conséquence du Théorème d'arrêt: $\mathrm{E}[X_\tau]$ est égal à $\mathrm{E}[X_0]$ pour tout temps d'arrêt borné τ.

Inversement pour montrer la propriété de martingale il faut prouver que pour tout $A \in \mathcal{F}_n$

$$\mathrm{E}[M_{n+1} 1_A] = \mathrm{E}[M_n 1_A]$$

L'idée est de trouver deux temps d'arrêt bornés τ_1, τ_2 tels que la relation $\mathrm{E}[X_{\tau_1}] = \mathrm{E}[X_{\tau_2}]$ entraine la relation de martingale précédente. On choisit, pour $A \in \mathcal{F}_n$, $\tau_1(\omega) = n$ si $\omega \in A$ et $n+1$ si $\omega \in A^C$.

et $\tau_2 \equiv n+1$; τ_1 est un temps d'arrêt: en effet $\{\tau_1 \leq k\} = \emptyset$ si $k \leq n-1$ et A si $k = n$ et Ω si $k \geq n+1$.

et donc $\{\tau_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ dans tous les cas de figure. Or $X_{\tau_1} = X_n 1_A + X_{n+1} 1_{A^C}$ et la relation $\mathrm{E}[X_{\tau_1}] = \mathrm{E}[X_{n+1}]$ donne

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X_n 1_A] + \mathrm{E}[X_{n+1} 1_{A^C}] = \mathrm{E}[X_{\tau_1}] = \mathrm{E}[X_{n+1}] = \\ = \mathrm{E}[X_{n+1} 1_A] + \mathrm{E}[X_{n+1} 1_{A^C}]\end{aligned}$$

d'où par soustraction on déduit la relation de martingale recherchée.

$\square$

Exercice 4.6. Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = +1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1-p$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $\mu = \mathrm{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var} X_1$. On pose, $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $S_n - n\mu$ et $M_n := (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geq 0}$.

2. Montrer que $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geq 0}$.

3. On définit $\psi(x) = pe^x + (1-p)e^{-x}$, pour $x \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $e^{\theta S_n}/\psi(\theta)^n$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geq 0}$.

Indications ou Correction : *Les calculs se font sans difficulté particulière en écrivant que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et en utilisant des propriétés de l'espérance conditionnelle : la linéarité, le fait que $\mathrm{E}(XY/\mathcal{F}) = X\mathrm{E}(Y/\mathcal{F})$ si X est $\mathcal{F}$-mesurable et $\mathrm{E}(Z/\mathcal{F}) = \mathrm{E}(Z)$ si Z est indépendante de $\mathcal{F}$.* $\square$

Exercice 4.7. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ de carré intégrable.

a) Montrer que pour $m < n$ on a $\mathrm{E}(X_m X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m^2$

b) Montrer que $\mathrm{E}(X_n Y_n) - \mathrm{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$.

Indications ou Correction :

a) Puisque X_m est $\mathcal{F}_n$-mesurable ($m \leq n$) on a

$$\mathrm{E}(X_n X_m \mid \mathcal{F}_m) - X_m^2 = \mathrm{E}(X_n X_m - X_m^2 \mid \mathcal{F}_m) = X_m \underbrace{\mathrm{E}(X_n - X_m \mid \mathcal{F}_m)}_{=0} = 0.$$

b) Puisque $X_{k-1} = E(X_k/\mathcal{F}_{k-1})$ et $Y_{k-1} = E(Y_k/\mathcal{F}_{k-1})$, on a

$$\mathrm{E}(X_k Y_{k-1}) = \mathrm{E}(X_{k-1} Y_{k-1})$$
$$\mathrm{E}(X_{k-1} Y_k) = \mathrm{E}(X_{k-1} Y_{k-1})$$

d'où

$$\mathrm{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})) = \mathrm{E}(X_k Y_k) - \mathrm{E}(X_{k-1} Y_{k-1})$$

et on trouve la relation cherchée en faisant la somme.

□

Exercice 4.8. Montrer que le carré d'une sous-martingale n'est pas nécessairement une sous-martingale.

Indications ou Correction : *Un exemple débile mais très parlant est de considérer la suite (déterministe !) $X_n = n-1$ pour $n \geq 0$. C'est une sous-martingale puisqu'elle est croissante. Mais $(X_n^2)_{n\geq 0}$ est la suite $1, 0, 1, 2, \ldots$ n'est pas croissante...* □

Exercice 4.9. Montrer que lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

Indications ou Correction : *Définir $\tau = \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$ et montrer que pour tout $k > 0$ on a $\mathrm{E}(X_{\tau+k} 1_{\tau<+\infty}) = 0$.* □

Exercice 4.10. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbf{P}(X_1 = +1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On fixe un entier $N \geq 1$, et pour $x \in \{0, \ldots, N\}$, on considère la marche aléatoire issue de x: $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$ $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que S_n et $M_n := S_n^2 - n$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. On considère le temps $T := \inf\{n\,;\, S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.

3. Pour $m \geq 0$, on introduit l'événement $A_m = \{X_{mN+1} = \cdots = X_{(m+1)N} = +1\}$. Montrer que pour $q \geq 1$, $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$, et en déduire une majoration de $\mathbf{P}(T > qN)$. Montrer que $\mathrm{E}[T] = \sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(T > j) < +\infty$ et que $T < +\infty$ p.s.

4. Calculer $\mathrm{E}[S_T]$ et en déduire que $\mathbf{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$.

5. Calculer $\mathrm{E}[M_T]$ et en déduire $\mathrm{E}[T]$.

Indications ou Correction :
Pour 3), remarquer que si A_m est vérifié pour $0 \leq m \leq q-1$, $S_{(m+1)N} = S_{mN} + N$ donc soit S_{mN} est compris entre 0 et N et S_k passe nécessairement par N pour un k entre $mN+1$ et $mN+N$, soit S_{mN} est inférieur à -1 ou supérieur à $N+1$ et donc S_k est passé auparavant par 0 ou N puisque $0 \leq x \leq N$. Dans tous les cas, $T \leq mN$.
La relation sur $E(T)$ est classique. Pour conclure, remarquer que pour $mN+1 \leq j \leq mN+N$, on a $P(T > j) \leq P(T > mN+1)$ et découper la série en tranches de N indices consécutifs.

□

Exercice 4.11. Soit $(X_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables réelles, indépendantes, centrées et de carrés intégrables : $\mathrm{E}[X_n] = 0$ et $\sigma_n^2 = \mathrm{E}[X_n^2] < \infty$. On pose $S_n = X_0 + \cdots + X_n$ et on définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ par $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que $\tau = \inf\{n\,;\, |S_n| \geq x\}$ est un temps d'arrêt.

3. En utilisant τ, montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \; \geq x \Big) \leq x^{-2} \;\mathrm{Var}(S_n) \;,$$

valable pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

Indications ou Correction : *Pour 3), remarquer que $(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \geq x) = (\tau \leq n)$. Calculer alors $\mathrm{E}(S_n^2 1_{\tau\leq n})$ en décomposant τ sur ses différentes valeurs entre 0 et n et utiliser le fait que $(\tau = k)$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable.* □

Exercice 4.12. Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite i.i.d. telle que

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Montrer la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Indications ou Correction : *Poser* $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{X_n}{n}$ *et remarquer que* $(S_k)_{k\geq 1}$ *est une martingale. Calculer* $E(S_k^2)$ *et montrer que cette martingale est bornée dans* L^2.$\square$

Exercice 4.13. Soient les trois affirmations suivantes :

(i) une surmartingale $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas tendre presque sûrement vers $+\infty$ car une telle surmartingale serait minorée et par conséquent convergerait vers une variable aléatoire finie.

(ii) une surmartingale $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas tendre presque sûrement vers $+\infty$ car la suite $(\mathrm{E}(X_n))_{n\geq 0}$ est décroissante, et si $\underline{\lim}_n X_n = \lim_n X_n = +\infty$ p.s on aurait par Fatou :

$$+\infty = \mathrm{E}[\underline{\lim}_n X_n] \leq \underline{\lim}_n \mathrm{E}[X_n] \leq \mathrm{E}[X_0] < +\infty.$$

(iii) Une surmartingale peut tendre presque sûrement vers $+\infty$.

Y a-t-il une affirmation juste ?

Indications ou Correction : *Seule la troisième affirmation est juste. Pour construire un exemple, remarquer que si* $Z_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ *où la suite* $(X_k)_{k\geq 0}$ *est composée de variables indépendantes,* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *est une sur-martingale si* $E(X_i) \leq 0$. *Choisir alors chaque* X_i *prenant les deux valeurs 1 et -*i^2 *avec des probabilités ajustées pour que* $\mathrm{E}(X_i) \leq 0$ *et que* $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_i = -i) < +\infty$. *Appliquer alors Borel-Cantelli et conclure.* $\square$

Exercice 4.14. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0,1]$ et posons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0,1]$ p.s. et que

$$\mathrm{P}\Big(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\Big) = 1 - X_n \qquad \mathrm{P}\Big(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\Big) = X_n$$

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z.

2) Montrer que $\mathrm{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_n(1 - X_n))$.

3) Calculer $\mathrm{E}(Z(1 - Z))$. Quelle est la loi de Z?

Indications ou Correction : *1) On a* $\mathrm{P}(X_{n+1} = a/X_n = x)$ *égal à* $(1 - x)$ *si* $a = x/2$ *et* x *si* $a = (1 - x)/2$ *et donc* $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid X_n) = X_n$. *La martingale* $(X_n)_{n\geq 0}$*, étant positive, elle converge p.s. vers une v.a.* Z. *Comme elle est aussi bornée la convergence a lieu dans* L^p *pour tout* $p > 0$.

2) Bien sûr on va utiliser la formule

$$\mathrm{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \mathrm{E}(\mathrm{E}((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n)) \tag{4.1}$$

Or
$$\mathrm{E}((X_{n+1}-X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}X_n + X_n^2 \mid \mathcal{F}_n) \tag{4.2}$$
On a
$$\mathrm{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) = \left(\frac{X_n}{2}\right)^2(1+3X_n) + \left(\frac{1+X_n}{2}\right)^2 X_n = \frac{X_n}{4}(1+3X_n)$$
On remplace dans (4.2), en se rappelant que $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid X_n) = X_n$*:*
$$\mathrm{E}((X_{n+1}-X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) = \frac{X_n}{4}(1+3X_n) - 2X_n^2 + X_n^2 = \frac{1}{4}X_n(1-X_n)$$
3) Comme $X_n \to_{n\to\infty} Z$ *p.s. on a*
$$(X_{n+1}-X_n)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \textit{et} \qquad X_n(1-X_n) \underset{n\to\infty}{\to} Z(1-Z).$$
S'agissant de v.a. bornées la convergence a lieu aussi dans L^1*. Donc*
$$\mathrm{E}(X_n(1-X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{E}(Z(1-Z))$$
$$\mathrm{E}((X_{n+1}-X_n)^2) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
Mais grâce à 2)
$$\mathrm{E}((X_{n+1}-X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathrm{E}(X_n(1-X_n))$$
d'où on déduit $\mathrm{E}(Z(1-Z)) = 0$*. Il s'ensuit que* Z *ne peut prendre que les valeurs 1 et 0: elle est donc de Bernoulli. Il n'y a plus qu'à calculer* $p = \mathrm{P}(Z=1)$*. Mais*
$$p = \mathrm{P}(Z=1) = \mathrm{E}(Z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X_0) = a$$

□

Exercice 4.15. Soient X une variable aléatoire de carré intégrable et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration sur Ω. On pose $X_n = \mathrm{E}(X/\mathcal{F}_n)$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z.

2) Montrer que $X_n = \mathrm{E}(Z/\mathcal{F}_n)$ (on dit que la martingale est *fermée*).

3) On considère $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_n$, et on suppose que X est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Montrer que $X = Z$ p.s.

Indications ou Correction :

1) Utiliser l'inégalité de Jensen pour montrer que $\mathrm{E}(X_n^2) \leq \mathrm{E}(X^2)$*.*

2) Remarquer que $\mathrm{E}(X_{n+p}/\mathcal{F}_n) = X_n$ *et faire tendre* p *vers l'infini.*

3) Utiliser un théorème de classe monotone pour montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$*,* $\mathrm{E}(X1_A) = \mathrm{E}(Z1_A)$*.*

□

Exercice 4.16. (Une preuve de la loi $0-1$ de Kolmogorov par les martingales) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On définit

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$$
$$\mathcal{F}^n = \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots) \qquad \mathcal{F}^\infty = \bigcap_n \mathcal{F}^n.$$

1) Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. En utilisant la martingale $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A)$, montrer que $\mathrm{P}(A) = 0$ ou 1.
2) Montrer que, si X est une v.a.r. $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, $X = a$ p.s.

Indications ou Correction : *1) Comme $A \in \mathcal{F}^\infty$, alors $A \in \mathcal{F}^{n+1}$ pour tout n; donc A est indépendant de $\mathcal{F}_n$ et $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A) = \mathrm{E}(1_A) = \mathrm{P}(A)$. Par ailleurs (Théorème* **??***), $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A) \to \mathrm{E}^{\mathcal{F}_\infty}(1_A) = 1_A$ (puisque $\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$!). Donc $\mathrm{P}(A)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.*

2) Soit $F(t) = \mathrm{P}(X \leq t)$ la fonction de répartition de X. On sait que F croît de 0 à 1 mais, grâce à 1), $F(t)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. Donc $F(t) = 1_{[a,+\infty[}$ et $X = a$ p.s. □

Exercice 4.17. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, \dots$ On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Soient a un entier > 0 et λ un réel tel que $0 < \lambda < \pi/(2a)$. On définit $\tau = \inf\{n \geq 0, |S_n| = a\}$ (avec la convention $\tau = +\infty$ si l'ensemble est vide) le temps de sortie de $]-a, a[$.

a) Montrer que $X_n = (\cos\lambda)^{-n}\cos(\lambda S_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.
b) Montrer que
$$1 = \mathrm{E}(X_{n\wedge\tau} \geq \cos(\lambda a)\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-n\wedge\tau})$$
c) En déduire que $\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$.
e) Montrer que la martingale $(X_{n\wedge\tau})_{n\geq 0}$ converge dans L^1.
f) Que vaut $\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau})$? Est-ce que τ est intégrable? Est-ce que $\tau \in L^2$?

Indications ou Correction :

a) Comme Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\mathrm{E}(\sin(\lambda Y_{n+1})) = 0$ et $\mathrm{E}(\cos(\lambda Y_{n+1})) = \cos\lambda$, on a

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = (\cos\lambda)^{-(n+1)}\mathrm{E}(\cos(\lambda(S_n + Z_n)) =$$
$$= (\cos\lambda)^{-(n+1)}\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}\big(\cos(\lambda S_n)\cos(\lambda Y_{n+1}) - \sin(\lambda S_n)\sin(\lambda Y_{n+1})\big) =$$
$$= (\cos\lambda)^{-(n+1)}\cos(\lambda S_n)\cos(\lambda Y_{n+1}) = (\cos\lambda)^{-n}\cos(\lambda S_n) = X_n$$

b) $n\wedge\tau$ étant un temps d'arrêt borné on a $\mathrm{E}(X_{n\wedge\tau}) = \mathrm{E}(X_0) = 1$. Par ailleurs

$$\mathrm{E}(X_{n\wedge\tau}) = \mathrm{E}\big((\cos\lambda)^{-n\wedge\tau}\cos(\lambda S_{n\wedge\tau})\big) \geq \cos(\lambda a)\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-n\wedge\tau}), \tag{4.3}$$

car $|S_{n\wedge\tau}| \leq a$ et $\lambda S_{n\wedge\tau} \in [-\lambda a, \lambda a] \subset [-\pi/2, \pi/2]$.

c) Si $n \to \infty$, *alors* $(\cos\lambda)^{-n\wedge\tau} \nearrow (\cos\lambda)^{-\tau}$, *et par le théorème de convergence monotone on peut passer à la limite dans l'inégalité prouvée dans b); on obtient donc que la v.a.* $(\cos\lambda)^{-\tau}$ *est intégrable. Ceci étant vrai pour des valeurs de* λ *pour lesquelles* $\cos\lambda < 1$, *on a* $\mathrm{P}(\tau = +\infty) = 0$. *On peut donc passer à la limite:*

$$X_{n\wedge\tau} = (\cos\lambda)^{-n\wedge\tau}\cos(\lambda S_{n\wedge\tau}) \to (\cos\lambda)^{-\tau}\cos(\lambda a) = X_\tau \tag{4.4}$$

Comme de plus

$$|X_{n\wedge\tau}| = |\cos\lambda)^{-n\wedge\tau}\cos(\lambda S_{n\wedge\tau})| \leq (\cos\lambda)^{-\tau}$$

on peut appliquer le théorème de Lebesgue:

$$\mathrm{E}(|X_{n\wedge\tau} - X_\tau|) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

D'où la convergence dans L^1.

d) On a, par passage à la limite sous l'espérance,

$$1 = \mathrm{E}(X_\tau) = \cos(\lambda a)\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau})$$

et donc $\mathrm{E}((\cos\lambda)^{-\tau}) = (\cos\lambda a)^{-1}$. *Si* $0 < \lambda < \pi/(2a)$, *alors* $\rho = (cos\lambda)^{-1} > 1$ *On vient de démontrer que pour un tel nombre* ρ *on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \mathrm{P}\{\tau = k\} < +\infty$$

Comme pour k *grand on a* $\rho^k > k$, *ceci entraine que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}\{\tau = k\}$ *est sommable, et donc* τ *est intégrable. On a également* $\rho^k > k^p$ *pour* k *grand et* p *arbitraire fixé. Donc* $\tau \in L^p$ *pour tout* $p > 0$. *Alternativement on aurait pu remarquer que si on pose* $\eta = \log\rho > 0$, *alors*

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\eta\tau}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\eta k}\,\mathrm{P}\{\tau = k\} < +\infty$$

et donc τ *a une transformée de Laplace qui est finie dans un voisinage de l'origine, ce qui entraine que tous ses moments sont finis.*

$\square$

Exercice 4.18. Soit $(Y_n,\, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \cdots Y_n$.

1. Montrer que X_n, resp. $\sqrt{X_n}$, est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale, resp. surmartingale. Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(\sqrt{Y_k})$ converge dans $\mathbf{R}_+$. On note ℓ sa limite.

2. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. Montrer que (X_n) ne converge pas dans L^1.

3. On suppose $\ell > 0$. Montrer que $\sqrt{X_n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2$. En déduire que (X_n) converge dans L^1.

4. <u>Application</u>
Soient p et q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même loi q.
On suppose que, pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$ (notations : $p(x) := p(\{x\})$ et $q(x) := q(\{x\})$, $x \in E$). On pose

$$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$

À partir de ce qui précède, montrer que $X_n \to 0$ p.s.

Indications ou Correction :

1) On a, puisque Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et $\mathrm{E}(Y_{n+1}) = 1$,

$$\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(Y_1 \dots Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Y_1 \dots Y_n \mathrm{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

$(X_n)_{n\geq 0}$ est donc une martingale; $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ est une surmartingale puisque la fonction $x \to \sqrt{x}$ est concave.

2) On a

$$\mathrm{E}(\sqrt{X_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{Y_n}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Mais la surmartingale positive $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. $Z \geq 0$. Par le Lemme de Fatou

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt{X_n}\Big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(\sqrt{X_n}) = 0.$$

Donc $Z = 0$ et $X_n \to_{n\to\infty} 0$ p.s. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ était régulière la convergence aurait lieu aussi dans L^1 et donc on devrait avoir $\mathrm{E}(X_n) \to_{n\to\infty} 0$, en contradiction avec le fait que $\mathrm{E}(X_n) = 1$ pour tout n.

3) De l'hypothèse $\prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(\sqrt{Y_k}) > 0$ *on tire facilement que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* m_0 *tel que* $1-\varepsilon \leq \prod_{k=m_0}^{\infty} \mathrm{E}(\sqrt{Y_k}) \leq 1$ *(rappelons que* $\mathrm{E}(\sqrt{Y_k}) \leq 1$*). Aussi, si* $n \geq m$ *on a* $\sqrt{X_n X_m} = Y_1 \dots Y_m \sqrt{Y_{m+1} \dots Y_n}$*, d'où*

$$\mathrm{E}(\sqrt{X_n X_m}) = \mathrm{E}(\sqrt{Y_{m+1}}) \dots \mathrm{E}(\sqrt{Y_n})$$

Donc

$$\mathrm{E}\big[(\sqrt{X_n} - \sqrt{X_m})^2\big] = \mathrm{E}(X_n + X_m - 2\sqrt{X_n X_m}) =$$
$$= 2 - 2\mathrm{E}(Y_1 \dots Y_m \sqrt{Y_{m+1} \dots Y_n}) = 2\Big(1 - \prod_{k=m+1}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{Y_k})\Big) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

et la suite $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ *est de Cauchy dans* L^2*. Elle est donc convergente dans* L^2*. Étudions la convergence* L^1 *de* $(X_n)_{n\geq 0}$*:*

$$\|X_n - X_m\|_1 = \mathrm{E}(|X_n - X_m|) = \mathrm{E}(|\sqrt{X_n} - \sqrt{X_m}|(\sqrt{X_n} + \sqrt{X_m})) \leq$$
$$\leq \|\sqrt{X_n} - \sqrt{X_m}\|_2 \underbrace{\|\sqrt{X_n} + \sqrt{X_m}\|_2}_{\leq 2}.$$

Donc la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ *est de Cauchy dans* L^1*, ce qui implique que c'est une martingale régulière.*

$\square$

Exercice 4.19. Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q, \qquad \mathbf{P}(Y_1 = 1) = p, \qquad \text{avec } p+q = 1,\ 0 < p < q < 1.$$

On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$.

1. Montrer que (Z_n) est une martingale positive. Montrer que $Z_n \to 0$ p.s.

2. On pose, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0\,;\ X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k \wedge n})$ et la décomposition

$$Z_{T_k\wedge n} = Z_{T_k\wedge n} 1\{T_k < \infty\} + Z_{T_k\wedge n} 1\{T_k = \infty\}\,,$$

montrer que

$$\mathbf{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3. En déduire que $\sup_{n\geq 0} X_n$ suit une loi géométrique de paramètre $1-p/q$, et ainsi que
$$\mathrm{E}(\sup_{n\geq 0} X_n) = \frac{p}{q-p}.$$

Indications ou Correction : *a) Notons que* $Z_{n+1} = Z_n(\frac{q}{p})^{U_{n+1}}$. *Comme* U_{n+1} *et* $\mathcal{F}_n$ *sont indépendantes et* Z_n *est* $\mathcal{F}_n$ *mesurable, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_{n+1}\mid\mathcal{F}_n) &= Z_n\mathrm{E}((\tfrac{q}{p})^{U_{n+1}})\\ &= Z_n[\tfrac{q}{p}\mathrm{P}(U_{n+1}=1)+\tfrac{p}{q}\mathrm{P}(U_{n+1}=-1)] = Z_n[\tfrac{q}{p}.p+\tfrac{p}{q}.q] = Z_n\end{aligned}$$

$(Z_n)_{n\geq 0}$ *est donc une martingale évidemment positive.*

b) Notons d'abord que l'inégalité est triviale (et sans intérêt) si $p>q$. *Supposons donc* $p<q$. *L'inégalité maximale pour la martingale positive* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *s'écrit, pour* $\alpha>0$,
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\leq n\leq N} Z_n \geq \alpha\Big) \leq \frac{1}{\alpha}\mathrm{E}(Z_0) = \frac{1}{\alpha}$$
soit encore
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\leq n\leq N}\Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_n} \geq \alpha\Big) \leq \frac{1}{\alpha} \tag{4.5}$$
Notons que, puisque $\frac{q}{p}>1$,
$$\sup_{0\leq n\leq N}\Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_n} = \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\sup_{0\leq n\leq N} S_n}$$
et donc (4.5) s'eécrit
$$\mathrm{P}\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{\sup_{0\leq n\leq N} S_n} \geq \alpha\Big) \leq \frac{1}{\alpha}$$
soit
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\leq n\leq N} S_n \geq \frac{\ln\alpha}{\ln(\frac{q}{p})}\Big) \leq \frac{1}{\alpha} \tag{4.6}$$
En choisissant $\alpha = (\frac{q}{p})^k$, *pour* $k\in\mathbf{N}$, *(4.6) devient*
$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\leq n\leq N} S_n \geq k\Big) \leq \Big(\frac{q}{p}\Big)^k \tag{4.7}$$
Comme $1_{\{\sup_{0\leq n\leq N} S_n\geq k\}} \to 1_{\{\sup_{n\geq 0} S_n\geq k\}}$ *quand* $N\to+\infty$, *et que cette suite positive est uniformément majorée par 1, le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans (4.7) et d'obtenir* $\mathrm{P}(\sup_{n\geq 0} S_n\geq k) \leq (\frac{p}{q})^k$.

On sait de plus que pour une variable $X\geq 0$, *on a*
$$\mathrm{E}(X) \leq \sum_{k\geq 0}\mathrm{P}(X\geq k+1).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{n\geq 0} S_n\Big) \leq \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}\Big(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k+1\Big) \leq \sum_{k\geq 0}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{k+1} = \frac{\frac{p}{q}}{1-\frac{p}{q}} = \frac{p}{q-p}$$

$\square$

Exercice 4.20. Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité filtré et ν une mesure finie sur $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, P domine ν sur $\mathcal{F}_n$ et on note X_n la densité de Radon-Nikodym: X_n est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$\nu(A) = \int_A X_n d\mathrm{P}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ (en particulier $X_n \geq 0$).

a) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale intégrable.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers une variable intégrable X.

c) Montrer que si P domine ν sur $\mathcal{F}_\infty$, X est la densité de Radon-Nikodym correspondante.

d) On suppose que les deux mesures ν, P sont étrangères sur $\mathcal{F}_\infty$: il existe donc $S \in \mathcal{F}_\infty$ tel que $\mathrm{P}(S) = 1$ et $\nu(S) = 0$. Montrer qu'alors $X = 0$, p.s.

Indications ou Correction :

a) Puisque $\Omega \in \mathcal{F}_n$

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega X_n d\mathrm{P} = \mathrm{E}(X_n)$$

et $\nu(\Omega)$ *étant fini par hypothèse,* X_n*, qui est* ≥ 0*, est intégrable par rapport à* P.

Par ailleurs, soient $n < p$ *et* $A \in \mathcal{F}_n$*: on a donc* $\nu(A) = \mathrm{E}(X_n 1_A)$. *De plus, puisque* 1_A *est aussi une variable* $\mathcal{F}_p$*-mesurable,* $\mathrm{E}(X_p 1_A) = \nu(A)$ *d'où l'on tire* $\mathrm{E}(X_p 1_A) = \mathrm{E}(X_n 1_A)$*, pour tout* $A \in \mathcal{F}_n$ *soit encore* $X_n = \mathrm{E}(X_p \mid \mathcal{F}_n)$. $(X_n)_{n\geq 0}$ *est bien une martingale intégrable.*

b) $(X_n)_{n\geq 0}$ *étant une martingale positive elle converge p.s. vers une variable aléatoire* ≥ 0, X. *Notons que* X *est intégrable car, d'après le lemme de Fatou,*

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n\Big) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \nu(\Omega) < \infty$$

c) Supposons que P *domine* ν *sur* $\mathcal{F}_\infty$. *Ceci implique par le Théorème de Radon-Nikodym qu'il existe une variable aléatoire* Y, $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable, telle que*

$$\nu(A) = \mathrm{E}(Y 1_A) \qquad \textit{pour tout} \quad A \in \mathcal{F}_\infty \tag{4.8}$$

Si $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ *on a donc*

$$\mathrm{E}(X_n 1_A) = \mathrm{E}(Y 1_A) \tag{4.9}$$

Ceci signifie que $X_n = \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$. On a alors $X_n = \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \to_{p.s.} \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{F}_\infty) = Y$; donc $X = Y$ P-p.s.

*d) Posons $Y_n = \mathrm{E}(1_S \mid \mathcal{F}_n)$. $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive et bornée ($Y_n \leq 1$) qui converge p.s. vers 1_S, puisque $S \in \mathcal{F}_\infty$ (on applique toujours le théorème **??**). On a alors*

$$0 = \nu(S) = \int 1_S \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int Y_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n X_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \mathrm{E}(1_S \mid \mathcal{F}_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(1_S X) = \mathrm{E}(1_S X) = \mathrm{E}(X)$$

où la dernière égalité vient du fait que $1_S = 1$ P-p.s.; X étant une variable positive de moyenne nulle par rapport à P on déduit que $X = 0$ P-p.s.

□

Exercice 4.21. (Identité de Wald) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi. On pose $m = \mathrm{E}(Y_1)$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Soit τ un temps d'arrêt intégrable.

1) On pose $X_n = S_n - nm$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2) Montrer que, pour tout n, $\mathrm{E}(S_{n\wedge\tau}) = m\mathrm{E}(n \wedge \tau)$.

3) Montrer que $\mathrm{E}(S_\tau)$ est intégrable et que $\mathrm{E}(S_\tau) = \mathrm{E}(\tau)$. (considérer d'abord le cas $Y_n \geq 0$).

4) Supposons $\mathrm{P}(Y_n = -1) = \mathrm{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$, pour tout n et $\tau = \inf\{n; S_n \geq a\}$, où a est un entier ≥ 1. Montrer que τ n'est pas intégrable.

Indications ou Correction :

1) Puisque Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(Y_{n+1}) = \mathrm{E}(Y_{n+1}) = m$ p.s. On a alors $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(X_{n+1} - X_n) = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_n}(Y_{n+1}) - m = 0$ p.s.

2) $(X_{n\wedge\nu})_{n\geq 1}$ étant une martingale grâce à A1), on a $\mathrm{E}(X_{n\wedge\nu}) = \mathrm{E}(X_0)$, c'est-à-dire $\mathrm{E}(S_{n\wedge\nu}) = m\mathrm{E}(n \wedge \nu)$.

3) Supposons les $Y_n \geq 0$. Alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$, et donc aussi $(S_{n\wedge\nu})_{n\geq 0}$, est positive et croissante, d'où $\mathrm{E}(S_{n\wedge\nu}) \uparrow \mathrm{E}(S_\nu)$ et, pour les mêmes raisons $\mathrm{E}(n \wedge \nu) \uparrow \mathrm{E}(\nu)$. Ce qui implique que $\mathrm{E}(S_\nu) = m\mathrm{E}(\nu) < +\infty$. Pour traiter le cas général, il suffit de poser

$$Y_n^{(1)} = Y_n^+, \quad S_n^{(1)} = Y_1^{(1)} + \cdots + Y_n^{(1)}$$
$$Y_n^{(2)} = Y_n^-, \quad S_n^{(2)} = Y_1^{(2)} + \cdots + Y_n^{(2)}$$

Si $m_1 = \mathrm{E}(Y_n^{(1)}), m_2 = \mathrm{E}(Y_n^{(1)})$ (donc $m = m_1 - m_2$) alors on vient de voir que

$$\mathrm{E}(S_\nu^{(1)}) = m_1\mathrm{E}(\nu), \qquad \mathrm{E}(S_\nu^{(2)}) = m_2\mathrm{E}(\nu)$$

et donc par soustraction, toutes les quantités apparaissant dans l'expression étant finies,

$$\mathrm{E}(S_\nu) = \mathrm{E}(S_\nu^{(1)}) - \mathrm{E}(S_\nu^{(2)}) = (m_1 - m_2)\mathrm{E}(\nu) = m\mathrm{E}(\nu)$$

4) Comme le processus $(S_n)_{n\geq 1}$ peut se déplacer sur $\mathbf{Z}$ d'un pas vers la gauche ou la droite seulement, il est clair que $S_\tau = a$ p.s. On aurait donc $\mathrm{E}(S_\tau) = a$, alors que, si τ était intégrable d'après 3) on devrait avoir

$$\mathrm{E}(S_\tau) = \mathrm{E}(\tau)\mathrm{E}(Y_1) = 0.$$

$\square$

Exercice 4.22. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale intégrable et soit ν un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathrm{P}(\nu < +\infty) = 1, \qquad \mathrm{E}(|X_\nu|) < +\infty \qquad \int_{\{\nu > n\}} |X_n| \, d\mathrm{P} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

1) Montrer que

$$\int_{\{\nu > n\}} |X_\nu| \, d\mathrm{P} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

2) Montrer que $\mathrm{E}(|X_{\nu\wedge n} - X_\nu|) \to 0$.
3) En déduire que $\mathrm{E}(X_\nu) = \mathrm{E}(X_0)$.

Indications ou Correction :

1) Puisque $\nu < +\infty$ on a $|X_\nu| 1_{\{\nu > n\}} \to 0$ p.s. pour $n \to \infty$; comme la v.a. $|X_\nu|$ est supposée intégrable et clairement $|X_\nu| 1_{\{\nu > n\}} \leq |X_\nu|$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue, lequel donne $\mathrm{E}(|X_\nu| 1_{\{\nu > n\}}) \to 0$.

2)

$$\mathrm{E}(|X_{\nu\wedge n} - X_\nu|) = \mathrm{E}(|X_n - X_\nu| 1_{\{\nu > n\}}) \leq \mathrm{E}(|X_n| 1_{\{\nu > n\}}) + \mathrm{E}(|X_\nu| 1_{\{\nu > n\}})$$

et le terme de droite tend à 0 pour $n \to \infty$ grace aux hypothèses et à 1).

3) Comme $\nu \wedge n$ est un temps d'arrêt borné, par le théorème d'arrêt on sait que $\mathrm{E}(X_{\nu\wedge n}) = \mathrm{E}(X_0)$. Donc

$$|\mathrm{E}(X_\nu) - \mathrm{E}(X_0)| = |\mathrm{E}(X_\nu) - \mathrm{E}(X_{\nu\wedge n})| \leq \mathrm{E}(|X_\nu) - \mathrm{E}(X_{\nu\wedge n}|)$$

et ce dernier terme tend vers 0 pour $n \to \infty$ grâce à 2).

$\square$

Exercice 4.23. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale intégrable. On suppose qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{E}(|X_n - X_{n-1}| / \mathcal{F}_{n-1}) \leq M \qquad \text{p.s.}$$

1) Montrer que, si $(V_n)_{n\geq 1}$ est un processus positif tel que V_n soit $\mathcal{F}_{n-1}$–mesurable, on a

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n |X_n - X_{n-1}|\Big) \leq M\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\Big)$$

2) Soit ν un temps d'arrêt *intégrable* (pas nécessairement borné).

2a) Montrer que $\mathrm{E}(\nu) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}\{\nu \geq n\}$.

2b) Déduire de 1) que $\mathrm{E}(\sum_{n\geq 1} 1_{\{\nu\geq n\}}|X_n - X_{n-1}|) < +\infty$.

2c) Que vaut $\sum_{n\geq 1} 1_{\{\nu\geq n\}}(X_n - X_{n-1})$? En déduire que X_ν est intégrable.

3) Montrer que $(X_{\nu\wedge p})_{p\geq 0}$ tend vers X_ν dans L^1 lorsque $p \to +\infty$

4)

4a) Montrer que si $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$, alors $A \cap \{\nu_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_{\nu_1\wedge k}$.

4b) En déduire que , si $\nu_1 \leq \nu_2$ sont deux temps d'arrêt avec ν_2 intégrable, on a

$$\mathrm{E}(X_{\nu_2} \mid \mathcal{F}_{\nu_1}) \leq X_{\nu_1}$$

Indications ou Correction :

1) On a

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n|X_n - X_{n-1}|\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(V_n \mathrm{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(|X_n - X_{n-1}|)) \leq$$

$$\leq M\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\Big)$$

2a) Comme $\{\nu \geq n\} = \{\nu \leq n-1\}^C \in \mathcal{F}_{n-1}$, on peut appliquer 1) à $V_n = 1_{\{\nu\geq n\}}$, ce qui donne

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\nu\geq n\}}|X_n - X_{n-1}|\Big) \leq M\mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\nu\geq n\}}\Big) = M\mathrm{E}(\nu)$$

2b) Si $\nu(\omega) = p$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\nu\geq n\}}(X_n - X_{n-1}) = \sum_{n=1}^{p}(X_n - X_{n-1}) = X_p - X_0.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\nu\geq n\}}(X_n - X_{n-1}) = X_\nu - X_0.$$

3) On peut écrire

$$X_\nu - X_{\nu\wedge p} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(X_n - X_{n-1})$$

avec $V_n = 1_{\{\nu \geq n\}} - 1_{\{\nu\wedge p \geq n\}} = 1_{\{\nu \wedge p < n \leq \nu\}}$. *On vérifie immédiatement que* V_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurable et donc, d'après 1) (ici* $M = 1$*),*

$$\mathrm{E}(|X_\nu - X_{\nu\wedge p}|) \leq \mathrm{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\Big) = \mathrm{E}(\nu - \nu \wedge p) \underset{n\to\infty}{\to} = 0$$

(par le théorème de convergence dominèe).

4) Si $n \geq p$ *le théorème d'arret donne*

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2\wedge n}) \leq X_{\nu_1\wedge p}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite en n *et* p*. Comme* $X_{\nu_2\wedge n} \to_{n\to\infty} X_{\nu_2}$ *dans* L^1*, on sait que ceci entraine*

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2\wedge n}) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2}) \qquad \text{dans } L^1$$

On doit maintenant passer à la limite en p *dans la relation*

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2}) \leq X_{\nu_1\wedge p}$$

Il est clair que $X_{\nu_1\wedge p} \to_{n\to\infty} X_{\nu_1}$ *p.s.; il reste à prouver que*

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2}) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1}}(X_{\nu_2}),$$

ce qui est assez intuitif, mais qui demande un peu d'attention sur le plan formel. On peut remarquer que $(\mathrm{E}^{\mathcal{F}_{\nu_1\wedge p}}(X_{\nu_2}))_{n\geq 0}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$*, où* $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\nu_1\wedge n}$*. Elle converge donc p.s. et dans* L^1 *vers* $\mathrm{E}^{\mathcal{G}_\infty}(X_{\nu_2})$*, où*

$$\mathcal{G}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{n\wedge n}\Big)$$

Il nous reste donc à prouver que $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_{\nu_1}$*. L'inclusion* $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_{\nu_2}$ *est évidente. Inversement soit* $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$*. Alors par définition* $A \cap \{\nu_1 \leq p\}$*. Mais on a même* $A \cap \{\nu_1 \leq p\} \in \mathcal{F}_{\nu_1\wedge n}$ *car*

$$A \cap \{\nu_1 \leq p\} \cap \{\nu_1 \wedge p \leq p\} = A \cap \{\nu_1 \leq p\} \in \mathcal{F}_{\nu_1\wedge n}$$

Mais p.s. on a $1_A = \lim_{p\to\infty} \uparrow 1_{A\cap\{\nu_1\leq p\}}$*, et* A *est donc bien* $\mathcal{G}_\infty$*-mesurable,* 1_A *étant la limite croissante d'une suite de v.a.* $\mathcal{G}_\infty$*-mesurables.*

□

Exercice 4.24. À l'instant 1, une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne à l'instant 2, et ainsi de suite suivant le même procédé.

On note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{n+1}$ le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale qui converge p.s. vers une v.a. U et que l'on a, pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n^k) = \mathrm{E}(U^k)$.

2) On fixe $k \geq 1$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)...(Y_n+k-1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)}$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale. Quelle est sa limite? En déduire la valeur de $\mathrm{E}(U^k)$.

3) Soit X une v.a. réelle à valeurs dans un intervalle borné p.s. Montrer que sa fonction caractéristique se développe en série de puissances

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k \tag{4.10}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

4) Quelle est la loi de U?

Indications ou Correction :

1) On a $\mathrm{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ *et* $\mathrm{P}(Y_{n+1} = Y_n \mid \mathcal{F}_n) = 1 - X_n$*, d'où,*

$$\mathrm{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = (Y_n+1)X_n + Y_n(1-X_n) = X_n + Y_n = (n+2)X_n$$

et donc on a p.s.

$$\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{n+2}\mathrm{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ *étant une martingale bornée (et d'ailleurs aussi positive!), elle converge p.s. vers une v.a.* U *mais, comme* $0 \leq X_n \leq 1$*, on peut pour tout* k*, appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n^k) = \mathrm{E}(U^k)$.

2) On a p.s.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathrm{E}(Z_{n+1}1_{\{Y_{n+1}=Y_n\}} \mid \mathcal{F}_n) + \mathrm{E}(Z_{n+1}1_{\{Y_{n+1}=Y_n+1\}} \mid \mathcal{F}_n) = \\
&= \frac{n+1-Y_n}{n+1}\,\frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)} + \\
&\qquad + \frac{Y_n}{n+1}\,\frac{(Y_n+1)(Y_n+2)\dots(Y_n+k-1)}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)} = \\
&= \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)[Y_n(n+1-Y_n)+(Y_n+k)Y_n]}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)} = \\
&= \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+1)(n+3)\dots(n+k)} = Z_n.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{Y_n}{n+2} \to_{n\to\infty} U$ *p.s., pour tout* r *fixé,* $\frac{Y_n+r}{n+r+2} \to U$ *p.s. et donc* $Z_n \to U^k$ *p.s. et, puisque* $0 \le Z_n \le 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Z_n) \to \mathrm{E}(U)$. $(Z_n)_{n\ge 1}$ *étant une martingale on a donc*

$$\mathrm{E}(Z_n) = \mathrm{E}(Z_1) = \frac{1}{k+1} = \mathrm{E}(U^k).$$

3) On sait que

$$\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k = \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \tau^{n+1}$$

où τ *est un réel compris entre* 0 *et* t*. Or*

$$|\varphi^{(n+1)}(\tau)| = |i^{n+1}\mathrm{E}(X^{n+1}\,\mathrm{e}^{i\tau X})| \le \mathrm{E}(|X^{n+1}|] \le M^{n+1}$$

où M *est tel que* $|X| \le M$ *p.s. Donc*

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k\right| \le \frac{|tM|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Le terme de droite convergeant vers 0 *pour* $n \to \infty$*, ceci termine la preuve de 3)*

4) Notons maintenant φ *la fonction caractéristique de* U*. On a* $\varphi^{(k)}(0) = i^k\mathrm{E}(U^k) = \frac{i^k}{k+1}$ *et on peut appliquer (4.10), car* $0 \le U \le 1$ *p.s.; donc*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{(k+1)!} = \frac{e^{it}-1}{it} = \int_0^1 e^{itx}\,dx$$

ce qui montre que U *suit la loi uniforme sur* $[0,1]$.

$\square$

Exercice 4.25. On a une population de taille fixée $N \in \mathbf{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et on pose $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. On a alors $\mathbf{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathscr{F}_n) = \binom{N}{i} (\frac{X_n}{N})^i (1 - \frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \cdots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n,\, n \ge 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathrm{E}(X_\infty)$ et $\mathrm{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Indications ou Correction : *Remarquer que X_n et M_n sont deux martingales positives qui convergent p.s. De plus X_n et $X_n(N - X_n)$ sont des suites bornés. Appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir les relations sur X_∞.* $\square$

Exercice 4.26. Soient $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$ et X une v.a. à valeurs $[0,1]$, de loi uniforme. On pose, notant $[x]$ la partie entière du réel x,

$$X_n = \frac{[2^n X]}{2^n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n(f(X_n + \tfrac{1}{2^n}) - f(X_n))$$

a) Etudier la convergence de $(X_n)_{n\geq 0}$.
b) Montrer l'égalité de tribus

$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X)$$

c) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_k)_{k\leq n}$. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée.
On note Z_∞ sa limite p.s. et dans L^1.
d) Montrer qu'il existe g telle que $Z_\infty = g(X)$.
e) Calculer la loi conditionnelle de X sachant X_n et montrer que p.s.,

$$Z_n = \int_{X_n}^{X_n + \frac{1}{2^n}} g(u)du$$

f) Déduire que pour tout $k, n,) \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f(\tfrac{k}{2^n} + \tfrac{1}{2^n}) - f(\tfrac{k}{2^n}) = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} g(u)du$$

et conclure que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(u)du \tag{4.11}$$

g) Conclure que toute fonction Lipschitzienne est primitive (au sens général) d'une fonction mesurable bornée.

Indications ou Correction : *a) Posons $X_n = 2^{-n}[2^n X]$. On a, par définition de la partie entière,*

$$X = \frac{2^n X}{2^n} \leq X_n \leq \frac{2^n X + 1}{2^n} = X + \frac{1}{2^n}$$

De ce fait, $X_n \to X$.

b) Comme X est la limite de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ et que pour tout $k \geq 0$ fixé, $(X_n)_{n\geq k}$ est une suite de variables $\sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$ mesurables, on en déduit que X est $\sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$-mesurable. Ceci étant vrai pour tout k, X est mesurable par rapport à $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$.

Inversement, chacune des v.a. X_n est évidemment $\sigma(X)$ mesurable puisqu'exprimée comme fonction de X. De ce fait, $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \subset \sigma(X)$ et on a donc l'inclusion $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \subset \sigma(X)$ d'où l'égalité de tribus cherchée.

Notons aussi que si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, alors $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ puisque la connaissance de l'approximation dyadique d'ordre n d'un réel détermine toutes les approximations dyadiques d'ordres inférieurs.

c) Soit $0 \leq k \leq 2^n$. Si $X_n = k2^{-n}$, c'est dire que $[2^n X] = k$ et donc que $k \leq 2^n X < k+1$.

Ceci entraine que $2k \leq 2^{n+1}X < 2k+2$ et donc $[2^{n+1}X]$ peut prendre l'une des deux valeurs $2k$ ou $2k+1$; donc soit $X_{n+1} = k2^{-n} = X_n$ soit $X_{n+1} = (2k+1)2^{-(n+1)} = X_n + 2^{-(n+1)}$.

En somme pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$ on a

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X_{n+1} = \frac{k}{2^n} \mid X_n = \frac{k}{2^n}) = \frac{\mathrm{P}(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{2k+1}{2^{n+1}})}{\mathrm{P}(X_n = k2^{-n})} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = \frac{2k+1}{2^{n+1}} \mid X_n = \frac{k}{2^n}) = \frac{\mathrm{P}(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq X < \frac{k+1}{2^n})}{\mathrm{P}(X_n = k2^{-n})} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{4.12}$$

d'où on obtient, en faisant les moyennes par rapport aux lois conditionnelles,

$$\begin{cases} \mathrm{E}(f(X_{n+1} \mid X_n) = \frac{1}{2}(f(X_n) + f(X_n + \frac{1}{2^{n+1}})) \\ \\ \mathrm{E}(f(X_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \mid X_n) = \frac{1}{2}(f(X_n + \frac{1}{2^{n+1}}) + f(X_n + \frac{2}{2^{n+1}})) \end{cases} \tag{4.13}$$

Nous pouvons maintenant déterminer $\mathrm{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(Z_{n+1} \mid X_n)$.

$$\mathrm{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 2^{(n+1)} \cdot \frac{1}{2}(f(X_n + \frac{1}{2^n}) - f(X_n) = Z_n$$

$(Z_n)_{n\geq 0}$ est donc une martingale, évidemment bornée puisque $\mid f(X_n + \frac{1}{2^n}) - f(X_n) \mid \leq L2^{-n}$, d'où $\mid Z_n \mid \leq L$. A ce titre, $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 qui converge p.s. et dans L^1.

d) Notons que Z_n est une variable $\sigma(X_n)$ mesurable (comme fonction de X_n) et donc $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ mesurable.

La limite $Z_\infty = \lim Z_n$ est donc $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ mesurable et ceci pour tout n. Vu l'égalité des tribus prouvée en b), Z_∞ est $\sigma(X)$-mesurable et donc il existe g borélienne telle que $Z_\infty = g(X)$.

e) Calculons alors la loi de X sachant X_n. Soit $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Si $X_n = k2^{-n}$, c'est que $[2^n X] = k$ et donc $k2^{-n} \leq X \leq (k+1)2^{-n}$. On a donc pour $k2^{-n} \leq a <$

$b \leq (k+1)2^{-n}$,

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b \mid X_n = \tfrac{k}{2^n}) = \frac{\mathrm{P}(a \leq X \leq b)}{\mathrm{P}(X_n = \frac{k}{2^n})} = \frac{\mathrm{P}(a \leq X \leq b)}{\mathrm{P}(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n})} = \\ = 2^n(b-a)$$

C'est dire que la loi conditionnelle de X sachant X_n est une loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$. La martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ étant régulière et fermée à droite par Z_∞, on a alors

$$Z_n = \mathrm{E}(Z_\infty \mid \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(g(X) \mid \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(g(X) \mid \sigma(X_n)) = \\ = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du \tag{4.14}$$

f) L'événement $\{X_n = \frac{k}{2^n}\}$, pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$ a probabilité positive car

$$\mathrm{P}(X_n = \tfrac{k}{2^n}) = \mathrm{P}(\tfrac{k}{2^n} \leq X < \tfrac{k+1}{2^n}) = \frac{1}{2^n} > 0,$$

et pour $\omega \in \{X_n = \frac{k}{2^n}\}$ l'égalité (4.14) dévient

$$f(\tfrac{k+1}{2^n}) - f(\tfrac{k}{2^n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du$$

et donc, en sommant,

$$f(\tfrac{k+1}{2^n}) - f(0) = \int_0^{(k+1)2^{-n}} g(u)du$$

Utilisant le fait que les dyadiques sont denses dans $[0,1]$ et que f est continue, on obtient alors que la (4.11) est vraie pour tout $x \in [0,1]$.

□

Exercice 4.27. Soit $(X_n,\ n \geq 0)$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables telles que $\mathrm{E}[X_n] = 0$, pour tout $n \geq 0$. On fixe $p \geq 1$, on pose $X_0^{(p)} = X_1^{(p)} = \cdots = X_{p-1}^{(p)} = 0$ et pour tout $n \geq p$, on pose

$$X_n^{(p)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}\ .$$

Montrer que $(X_n^{(p)},\ n \geq 0)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)$, donnée par $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ si $n \geq 1$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Indications ou Correction : *Remarquer que les produits qui apparaissent dans la somme définissant $X_{n+1}^{(p)}$ sont soit les ceux qui apparaissent dans $X_n^{(p)}$, soient ont un X_{n+1} comme dernier facteur. Montrer alors grâce à l'indépendance que dans ce dernier cas l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_n$ est nulle.* □

Exercice 4.28. 1. Soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ de loi commune : $\mathbf{P}(Y_n = -1) = \mathbf{P}(Y_n = 1) = 1/2$ et indépendantes.

On pose $X_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$.

On pose

$$M_0 = 0 \text{ et, pour } n \geq 1,\ M_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(X_{k-1}) Y_k$$

où $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $= -1$ si $x < 0$, $= 0$ si $x = 0$.

(a) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale (M_n^2).

(b) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale $(|X_n|,\ n \geq 0)$?

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, M_n est $\sigma(|X_1|, \cdots, |X_n|)$-mesurable.

Indications ou Correction :

a) Remarquer que $\operatorname{sgn}(X_k)^2 = 1_{X_k \neq 0}$. *On en déduit que le processus croissant associé à* M_n^2 *est* $\sum_{k=0}^{n-1} 1_{X_k \neq 0}$.

b) On a $E(|X_k| / \mathcal{F}_{k-1}) = E(|x + Y_k|)$ *avec* $x = X_{k-1}$. *Donc*

$$E(|X_k| / \mathcal{F}_{k-1}) - |X_{k-1}| = \frac{1}{2}|X_{k-1} + 1| + \frac{1}{2}|X_{k-1} - 1| - |X_{k-1}| = 1_{X_{k-1} = 0}$$

en utilisant le fait que X_{k-1} *est entier. De ce fait,*

$$|X_n| = M_n + \sum_{k=0}^{n-1} 1_{X_k = 0}.$$

c) Remarquer que $1_{X_k = 0} = 1_{|X_k| = 0}$.

□

Exercice 4.29. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit η_k une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \varepsilon_k^2)$, avec $\varepsilon_k > 0$. On suppose que X, η_0, η_1, $\cdots$ sont indépendantes. On définit $Y_k = X + \eta_k$, $k \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$.

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire X avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience k donne comme résultat $Y_k = X + \eta_k$, où η_k est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après n expériences, la meilleure prévision possible sur X est

$$X_n := \mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}(X \mid Y_0, \cdots, Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de X quand n tend vers l'infini, et notamment si X_n converge vers X.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et que X_n converge p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers une variable aléatoire X_∞. Quelle est la relation entre X et X_∞ ?

2. Montrer que $\sup_n \mathrm{E}(X_n^2) < \infty$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^2$; b) $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^1$; c) X est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable.

3. Calculer $\mathrm{E}(Y_iY_j)$, $\mathrm{E}(Y_i^2)$ et $\mathrm{E}(XY_i)$ pour $i, j \geq 0$, $i \neq j$. Montrer que pour tous $n \geq 0$ et $i = 0, \cdots, n$, on a $\mathrm{E}(Z_nY_i) = 0$, où
$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} Y_j.$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ la variable Z_n est indépendante de $\{Y_0, \cdots, Y_n\}$ et en déduire que $X_n = X - Z_n$.

5. Calculer $\mathrm{E}((X - X_n)^2)$ et montrer que $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^2$ si et seulement si $\sum_{i=0}^\infty \varepsilon_i^{-2} = \infty$.

6. Discuter le cas $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$, notamment les liens avec la loi des grands nombres.

Indications ou Correction :

1- La convergence est un résultat du cours. On sait de plus que $\mathrm{E}(X/\mathcal{F}_n) \to \mathrm{E}(X/\mathcal{F}_\infty)$.

2 - Pour c $\Rightarrow$ a, on sait que la martingale converge dans L^2 vers $\mathrm{E}(X/\mathcal{F}_\infty)$.

4 - Utiliser le fait que le vecteur $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ est un vecteur gaussien.

5 - Calculer $\mathrm{E}(Z_n^2)$ en remplaçant Y_j par $X + \eta_j$ et en utilisant l'indépendance des variables centrées. Pour faciliter les calculs il sera intéressant de noter $\alpha_n = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}$.

$\square$

Planche d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Matrices de transition et modélisation

Exercice 5.1 — *À partir de v.a. i.i.d.*

Soit K un entier strictement positif. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{1,\dots,K\}$ indépendantes et de même loi. Nous noterons α leur loi, i.e. pour tout $1 \leqslant k \leqslant K$, $\mathbb{P}(U_n = k) = \alpha_k$. Nous supposerons de plus que $\alpha_k > 0$ pour tout $k \in \{1,\dots,K\}$. Montrer que les processus suivants sont des chaînes de Markov dans des espaces d'états que vous donnerez et calculer leur matrice de transition. Nous noterons $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0,\dots,U_n)$ pour tout entier n.

Une indication générale : pour chaque processus (X_n) ci-dessous, écrivez le processus sous la forme $X_{n+1} = h(X_n, U_{n+1})$.

1. le processus (U_n) lui-même ;
2. le processus $M_n = \max(U_0, U_1 \dots, U_n)$;
3. le processus $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$;
4. le processus $N_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{U_k=1}$;
5. le processus $Z_n = (S_n, N_n)$.

Exercice 5.2 — *Un peu de modélisation.*

Modéliser par une chaîne de Markov (i.e. proposer un espace d'états, une filtration et une matrice de transition) les processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivants :

1. Tous les jours en automne, au goûter, Camille mange un fruit qui est, soit une pomme, soit une poire, soit une figue. Après avoir mangé une pomme, Camille mange toujours une figue ; après une figue, Camille mange au hasard soit une poire soit une une figue ; après une poire, Camille mange l'un des trois fruits au hasard. Modéliser.
2. On dispose de N boules, numérotées de 1 à N, qui sont placées dans deux urnes différentes : à chaque pas de temps, on choisit uniformément un numéro de boule au hasard et on transfère la boule correspondantes dans l'autre urne. On s'intéresse aux nombres de boules dans chaque urne. Cette chaîne de Markov porte le nom d'*urnes d'Ehrenfest*.
3. On considère une population de taille N où chaque individu est porteur d'un gène qui peut être présent sous deux formes différentes 1 et 2. À chaque génération, tous les individus sont remplacés par N enfants répartis de la manière suivante : le parent de chaque enfant est choisi uniformément parmi les N individus de la génération précédente, indépendamment des autres enfants. Ensuite, chaque enfant hérite la version du gène de son parent. On s'intéresse au nombre d'individus avec les gènes 1 et 2 dans chaque génération.

Exercice 5.3 — *Commençons les calculs avec seulement deux états.*

Soient p et q dans $[0,1]$. Une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2\}$ a toujours une matrice de transition de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. Décrire la chaîne dans le cas particulier où p et q sont tous les deux dans $\{0,1\}$.

On supposera par la suite que (p,q) est différent de $(1,1)$ et de $(0,0)$.

2. Calculer M^n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ pour tout $i, j \in \{1,2\}$.
3. Un virus peut exister sous N formes différentes. À chaque instant, avec probabilité $1-a$, il reste sous la forme où il est, ou avec la probabilité respective a, il mute sous une forme différente, uniformement choisie parmi les autres $N-1$ formes. Quelle est la probabilité que la forme du virus au temps n soit la même qu'au temps 0 ?
   Suggestion : réduire le problème à l'analyse d'une chaîne de Markov à deux états.

Exercice 5.4 — *« Lost in translation ».*

Nous (ré)introduisons les opérateurs de translations θ_k sur $E^{\mathbb{N}}$ définis, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(\theta_k(u))_n = u_{k+n}$.

1. Nous considérons ici $E = \mathbb{N}$. Pour toutes les fonctions $f_i : E^{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}$ données ci-dessous, trouver les fonctions $\tilde{f}_i$ sur $E^{\mathbb{N}}$ associées telles que $f_i(u) = \tilde{f}_i(\theta_k(u))$ pour l'entier k donné :
   (a) $f_1(u) = u_{17}$ et $k = 5$
   (b) $f_2(u) = \inf\{m \geqslant 42; u_m = x\}$ et $k = 11$ et $x \in \mathbb{N}$,
   (c) $f_3(u) = \inf\{m \geqslant 3; u_m = u_{m+4}\}$ et $k = 2$.
2. Pour toutes les fonctions $g_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ et $\tau_i : D \subset E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ données ci-dessous, exprimer simplement les fonctions $h_i : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ définies par $h_i(u) = g_i(\theta_{\tau_i(u)}(u))$:
   (a) $g_1(u) = u_1$ et $\tau_1(u) = 3$
   (b) $g_2(u) = u_4$ et $\tau_2(u) = u_1$ dans le cas $E = D = \mathbb{N}$
   (c) $g_3(u) = u_0$ et $\tau_3(u) = \inf\{m \in \mathbb{N}; u_m = x\}$ avec D qui contient les suites qui passent par x au moins une fois
   (d) $g_4(u) = \tau_3$ et $\tau_4 = \tau_3$ avec $E = \mathbb{N}$ et D qui contient les suites qui passent une infinité de fois par x. *Faire une phrase suffit.* Calculer, pour $x = 4$ et $E = \mathbb{N}$,

$$h_4(0,1,2,3,4,5,4,3,2,1,0,1,2,3,4,5,4,3,2,\ldots)$$

Exercice 5.5 — *Le toboggan.*

À une probabilité quelconque $(p_i)_{i\geqslant 1}$ sur $\{1,\, 2,\, \cdots\}$ on associe une chaîne de Markov $(X_n,\, n \geqslant 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi initiale δ_0 et de matrice de transition Q définie par

$$Q(0,i) = p_{i+1}\,, \quad Q(i+1,i) = 1\,, \quad i \geqslant 0\,.$$

On pose $S = \inf\{n \geqslant 1; X_n = 0\}$, avec la convention $\inf \varnothing = \infty$ (premier temps de retour à l'origine). Quelle est la loi de S ?

Exercice 5.6 — *Du bon usage de la propriété de Markov forte.*

On travaille avec les variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de l'espace canonique correspondant à un ensemble dénombrable E. Sous la probabilité $\mathbf{P}_\mu$, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à de loi initiale μ et de matrice de transition Q.

1. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbf{P}_\mu(T<\infty)=1$. Que peut-on dire de la suite $(X_{T+n},\, n\geqslant 0)$?
2. Soit $S=\tilde{S}((X_n)_{n\geqslant 0})$ (bien comprendre la différence entre S et $\tilde{S}$) un temps d'arrêt tel que, pour tout $x\in E$, $\mathbf{P}_x(S<\infty)=1$. On pose $S_0=0$ et pour $n\geqslant 0$,
$$S_{n+1}=S_n+\tilde{S}((X_{S_n+k})_{k\geqslant 0}).$$
   (a) Montrer que, pour tout $x\in E$, les S_n sont $\mathbf{P}_x$-p.s. finis.
   (b) Montrer que la suite $(X_{S_n},\, n\geqslant 0)$ associée à la filtration $(\mathscr{F}_{S_n},\, n\geqslant 0)$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par
$$Q_S(x,y)=\mathbf{P}_x(X_S=y).$$
3. **Cas particulier important :** nous supposerons désormais que, pour tout $e\in E$, $Q(e,e)<1$ et nous posons :
$$\tilde{S}((x_n)_{n\geqslant 0})=\inf\{n\geqslant 1; x_n\neq x_0\}$$
   (a) Montrer que, pour tout $x\in E$, $S_1<\infty$, $\mathbf{P}_x$-presque sûrement.
   (b) Déterminer la loi jointe de (S_1, X_{S_1}).
   (c) Montrer, en utilisant les résultats précédents que $(X_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont vous déterminerez la matrice de transition Q' à partir de Q. Que vaut $Q'(x,x)$ pour $x\in E$?
   (d) (difficile) Montrer que, conditionnellement à la chaîne (X_{S_n}), les S_m sont indépendants et donner leurs lois respectives.

Exercice 5.7 — *Record battu !*

Dans cet exercice, on considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une famille de probabilités $\mathbf{P}_\mu$ telles que sous $\mathbf{P}_\mu$, X_0 suive la loi μ et la suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ et indépendante de X_0 : $\mathbf{P}\left(X_1=y\right)=p^{y-1}(1-p)$. On pose $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,\dots,X_n)$.

On introduit le temps d'arrêt $\mathscr{T}$ défini sur l'espace canonique par
$$\tilde{T}((X_k)_{k\geqslant 0}):=\inf\{k\geqslant 1 : X_k>X_0\},$$
avec la convention $\inf\varnothing=+\infty$. La fonction $\tilde{T}$ permet de définir les temps des records successifs de la suite (X_n) par $\tau_0=0$ et
$$\tau_{n+1}:=\tau_n+\tilde{T}((X_{\tau_n+k})_{k\geqslant 0})=\inf\{k>\tau_n : X_k>X_{\tau_n}\}.$$

1. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de matrice de transition
$$Q(x,y)=p^{y-1}\,(1-p),\qquad x,y\in\mathbb{N}^*.$$
et de loi d'entrée la loi de X_0.

2. Soit x, y et m trois entiers strictement positifs. Calculer
$$\mathbf{P}_x\left(X_1 \leqslant x,\, \cdots,\, X_{m-1} \leqslant x,\, X_m > y\right).$$
3. Calculer $\mathbf{P}_x(\tau_1 = m,\ X_m > y)$ en séparant les cas $y \leqslant x$ et $x < y$. Montrer que, sous $\mathbf{P}_x$, τ_1 est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que X_{τ_1} a la même loi que $x + X_1$. Le couple (τ_1, X_{τ_1}) est-il indépendant sous $\mathbf{P}_x$?
4. Montrer que $\pi(x) = p^{x-1}(1-p),\ x \in \mathbb{N}^*$, est la seule mesure de probabilité invariante pour Q. Montrer que $\mathbf{P}_\pi(\tau_1 < \infty) = 1$ et $\mathbf{E}_\pi(\tau_1) = \infty$.
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, τ_n est fini $\mathbf{P}_x$-presque-sûrement.
6. On note alors $Z_k := X_{\tau_k}$, les records successifs. Montrer que $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dans $\mathbb{N}^*$ sous $\mathbf{P}_x$. Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
7. Calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{k+1} - Z_k)$ sachant $\mathscr{F}_{\tau_k}$. Montrer que la suite $(Z_k - Z_{k-1},\, n \geqslant 1)$ est i.i.d. sous $\mathbf{P}_x$.
8. Calculer la limite $\mathbf{P}_x$-presque sûre de Z_k/k, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

Récurrence, transience, irréductibilité

Exercice 5.8 — *« Hâtez-vous lentement ; et, sans perdre courage, Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage : Polissez-le sans cesse et le repolissez ; Ajoutez quelquefois, et souvent effacez. » (Nicolas Boileau)*

Dans les chaînes de Markov déjà rencontrées, exercez-vous à établir les classes d'états et décider si elles sont ouvertes ou fermées.

Exercice 5.9 — *Quel labyrinthe !*

Soit $E = \{1, \dots, 10\}$. On considère la matrice de transition suivante, où chaque . représente un zéro et chaque $*$ un nombre strictement positif. Quelles sont les classes ouvertes ? Les classes fermées ? Quelles états sont récurrents ? Transients ? En travail préalable à toutes ces questions, vous pourrez dessiner le graphe des transitions entre états.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .&.&.&.&.&.&*&.&*&. \\ .&*&.&*&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&*&.&.&*&.&. \\ .&*&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&*&*&*&*&.&.&.&.&* \\ *&.&.&.&*&.&.&.&.&. \\ *&.&.&.&.&.&.&.&*&. \\ .&.&*&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&*&.&*&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&* \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.1}$$

Exercice 5.10 — *« C'est quand qu'on arrive ? »*
On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geqslant 0)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ? Déterminer les états x tels que $G(x, x) = \infty$, où G est la fonction de Green. Déterminer également si $G(x, y) = 0$.
2. Montrer que G satisfait la formule $G = I + QG$, où I est la matrice identité. En déduire la valeur de G et donc les valeurs de $\mathbf{E}_x(N_y)$ pour tous $x, y \in E$, où N_y est le nombre de visite de X à y.
3. On s'intéresse à présent au temps de première visite en 1 (i.e., $T_{\{1\}} = \inf\{n \geqslant 0; X_n = 1\}$) en fonction du point de départ. On introduit alors $v(x) = \mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$. Montrer que
$$v(x) = 1 + (Qv)(x), \quad x \in \{2, 3\}, \qquad v(1) = 0.$$
En déduire la valeur de $\mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$ pour tout $x \in E$.
4. Que peut-on dire de $\mathbf{E}_x(T_{\{3\}})$ où $T_{\{3\}}$ est le temps de première visite de $\{3\}$?
5. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.
6. Soit $T_{\{1,2\}}$ le premier temps de visite de X à l'ensemble $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $T_{\{1,2\}}$ sous $\mathbf{P}_3$? Remarquer que $\mathbf{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbf{E}_3(N_3)$. Quelle en est la raison ?

Exercice 5.11 — *Autour de la fonction de Green.*
Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q. Soient $x, y, z \in E$. Prouver que si y transient, alors, en notant $T_y = \inf\{n \geqslant 0, X_n = y\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}} \sum_{n \geqslant T_y} \mathbf{1}_{\{X_n=z\}}\Big) &= \mathbf{P}_x(T_y < \infty) G(y, z) \\ &= \frac{G(x, y)}{G(y, y)} G(y, z), \end{aligned}$$

où l'x en indice signifie qu'on prend pour loi initiale la masse de Dirac en x, c'est-à-dire $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Exercice 5.12 — *.vokraM ed enîahc etrua enU*
Soit $Q := (Q(x, y), x, y \in E)$ une matrice de transition sur un espace d'états dénombrable E et soit π une mesure de probabilité invariante telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Soit $Q^* := (Q^*(x, y), x, y \in E)$ définie par

$$Q^*(x, y) := \frac{Q(y, x)\pi(y)}{\pi(x)}, \qquad x, y \in E.$$

1. Montrer que Q^* est une matrice de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q^*. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Q^* = Q$.

2. Soit $(X_n,\, n \geqslant 0)$ une chaîne de Markov avec matrice de transition Q et telle que X_0 soit de loi π. Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé et $X_n^* := X_{N-n}$. Calculer $\mathbf{P}(X_0^* = x_0, \cdots, X_N^* = x_N)$ et en déduire que $(X_n^*,\, n \in [0,\, N])$ est, sous $\mathbf{P}$, une chaîne de Markov avec loi initiale π et matrice de transition Q^*.
3. Soit maintenant $p \in]0,1[$ et Q la matrice de transition sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ donnée par
$$Q(x,y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1-p)\mathbf{1}_{\{y=0\}}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$
Calculer une mesure de probabilité invariante π et dire si elle est unique. Calculer Q^* et vérifier que dans ce cas
$$Q^*(x,y) = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y)\mathbf{1}_{\{x=0\}}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$
Dessiner les trajectoires typiques de X et X^* dans ce cas.

Exercice 5.13 — *Redémarrages aléatoires.*

On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition $Q := (Q(i,\, j),\, i,\, j \in \mathbb{N})$ définie par
$$Q(i,0) = q_i \text{ et } Q(i,i+1) = p_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\,,$$
où, pour tout i, $p_i + q_i = 1$, $p_i > 0, q_i > 0$.

1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. À quelle condition sur les p_i existe-t-il une mesure invariante ? Dans ce cas prouver que la chaîne est récurrente.
3. Sous quelle condition sur les p_i la chaîne est-elle récurrente positive ?

Exercice 5.14 — *Tailles de blocs.*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0,\, 1\}$ avec $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. On s'intéresse aux blocs de 3 zéros consécutifs sans compter 2 fois 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent. Lorsqu'il y a 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent, on compte seulement le premier. Par exemple, une suite d'exactement quatre (resp. cinq) zéros consécutifs ne compte que pour un seul bloc ; en revanche, une suite d'exactement six (resp. sept, resp huit) zéros consécutifs compte pour deux blocs de trois zéros.

On note N_n le nombre de blocs comptés entre les instants 1 et n. On veut calculer la limite de la fréquence empirique de ces blocs, i.e., la limite p.s. de N_n/n.

Pour ce faire on utilise une chaîne de Markov auxiliaire $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$ à 4 états $0, 1, 2, 3$, d'état initial $Y_0 = 0$ (appelé « état de repos ») qui mémorise le nombre de zéros consécutifs et retombe à l'état de repos lorsqu'on a compté 3 zéros consécutifs. Par exemple : si
$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, \cdots) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \cdots),$$
alors
$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, \cdots) = (1, 0, 1, 2, 3, 1, 0, \cdots)$$

et $N_7 = 1 = \sum_{k=1}^{7} \mathbf{1}_{\{Y_k=3\}}$. La matrice de transition Q de la chaîne Y est donnée par

$$\begin{aligned} Q(0,0) &= Q(0,1) = \frac{1}{2}, \qquad Q(1,0) = Q(1,2) = \frac{1}{2} \\ Q(2,0) &= Q(2,3) = \frac{1}{2}, \qquad Q(3,0) = Q(3,1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

et 0 pour les autres valeurs.

1. Justifier rigoureusement la matrice Q précédente.
2. Vérifier que la chaîne Y est irréductible récurrente positive. Calculer sa probabilité invariante.
3. En déduire la limite p.s. de N_n/n.
4. Défi : étudier de la même manière les blocs de k zéros consécutifs sans recouvrement pour tout $k \geqslant 2$.

Convergence vers la loi stationnaire

Exercice 5.15 — *Échauffement à trois états.*

On considère une chaîne de Markov (X_n) dans $E = \{1,2,3\}$ avec matrice de transition $Q := (Q(x,\, y),\, x,\, y \in E)$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à x, $\mathbf{E}_x(S_x)$.
4. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités de transition $[Q^n](x,y)$, quand $n \to \infty$?

Exercice 5.16 — *Produit de 2 chaînes indépendantes.*

Soient $X = (X_n)$ et $Y = (Y_n)$ deux chaînes de Markov indépendantes d'espaces d'états E et F, de matrice de transition Q et R respectivement. La chaîne produit est par définition la chaîne $Z = (Z_n)$ où $Z_n = (X_n, Y_n)$. On vérifie sans peine que la chaîne Z est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$S\big((x,y),(x',y')\big) = Q(x,x')R(y,y'), \quad x,x' \in E,\ y,y' \in F.$$

1. Exprimer les coefficients de S^n en fonction des coefficients de Q^n et R^n.
2. Montrer que si X et Y sont irréductibles de période 1, alors la chaîne $Z = (Z_n)$ est irréductible de période 1.
3. Donner un contre-exemple pour lequel X et Y sont irréductibles de période 2 et pour lequel Z n'est pas irréductible.

4. Supposons que Q et R admettent des probabilités invariantes respectives ρ et σ. Trouver une probabilité invariante π pour la chaîne produit.
5. On considère un damier à 16 cases (numérotées successivement de 1 à 16 de gauche à droite, de haut en bas ; les cases sont de couleur noire ou blanche alternée) sur lequel se déplacent indépendamment l'une de l'autre deux souris ; chaque souris passe d'une case à l'une des k cases voisines avec la probabilité $1/k$ (les déplacements diagonaux sont proscrits).

   Quel est l'intervalle de temps moyen séparant deux rencontres successives sur la case 7 ?

Exercice 5.17 — *L'abus d'alcool est mauvais pour la santé.*

Serge aime beaucoup le vin. Après avoir trop bu, il s'endort et fait le rêve suivant : au départ il a une somme d'argent $x \in \mathbb{N}$ (en Euros) ; à chaque minute il boit un verre de vin, qui lui coûte un Euro ; chaque fois qu'il épuise son capital, il trouve un porte monnaie qui contient un nombre entier et aléatoire de pièces d'un Euro, et il recommence instantanément à acheter du vin et boire. Le rêve continue de la même façon indéfiniment.

On modélise le capital X_n à disposition de Serge à chaque minute $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$, avec matrice de transition $P := (p(x, y),\, x,\, y \in \mathbb{N})$ définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} f(y+1) & \text{si } x = 0,\ y \geqslant 0, \\ 1 & \text{si } x > 0,\ y = x-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où f est une probabilité sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$, $f : \mathbb{N}^* \to]0,1[$, $\sum_n f(n) = 1$, avec $f(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{N}^*$. Sous $\mathbf{P}_x$, (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ avec probabilité de transition P et état initial déterministe $X_0 = x \in \mathbb{N}$. Si au temps i le capital de Serge est $y > 0$, au temps $i+1$ le capital sera $y-1$. Si au temps i le capital de Serge est nul, il trouve une quantité $y \geqslant 1$ de pièces avec probabilité $f(y)$, et il en dépense instantanément une, ainsi que son capital au temps $i+1$ sera $y-1$ avec probabilité $f(y)$. Soient $S_0 := 0$, $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$, les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov (X_n) ?
2. Montrer que $\mathbf{P}_0(S_1 = n) = f(n)$, $n \geqslant 1$. En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires.
3. Montrer que la mesure sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\lambda(x) := \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), \qquad x \in \mathbb{N},$$

   est invariante pour P et que toute mesure invariante est un multiple de λ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive. Montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité invariante si et seulement si

$$m := \sum_n n\, f(n) < \infty.$$

   On suppose la condition $m < \infty$ satisfaite dans la suite.

5. Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x(X_n = y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.
6. Définir $u(n) := \mathbf{P}_0(X_n = 0)$. Montrer que $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z\leqslant n}\{X_0 = X_n = 0,\ S_1 = z\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = [f * u](n), \qquad n \geqslant 1.$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geqslant 1$. Montrer que $(t_i)_{i\geqslant 1}$ est, sous $\mathbf{P}_0$, une suite i.i.d. et calculer $\mathbf{P}_0(t_i = n)$, pour $n \geqslant 1$.
8. Montrer que $\mathbf{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution de f itérée i fois, pour $i \geqslant 1$.
9. Montrer que $\{X_n = 0\} = \bigcup_{i\geqslant 0}\{S_i = n\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \geqslant 1.$$

10. Montrer le *Théorème du renouvellement* : si u est définie par la formule précédente, alors

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = \frac{1}{m}.$$

Compléments

Exercice 5.18 — *Manipulations formelles.*

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux chaînes de Markov (pour une même filtration $(\mathcal{F}_n)$) dans des ensembles dénombrables E et F respectivement, de loi initiale μ et ν et de matrice de transition P et Q. Nous noterons leurs filtrations canoniques $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$. Nous supposerons les deux chaînes indépendantes.

1. Soit $p \geqslant 1$ un entier fixé et soit $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Montrer que $(X_{pn+r})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov pour une filtration que vous préciserez. Déterminer également sa matrice de transition et sa loi d'entrée. Deux chaînes $(X_{pn+r_1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_{pn+r_2})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r_1 \neq r_2$ sont-elles indépendantes ?
2. Montrer que $((X_n, X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov à valeurs dans $E \times E$, dont vous donnerez la loi initiale et la matrice de transition. Vous préciserez également la filtration.
3. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé. Montrer que $((X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}))_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov à valeurs dans E^{k+1}, dont vous donnerez la loi initiale et la matrice de transition. Vous préciserez également la filtration.
4. Montrer que $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov à valeurs dans $E \times F$, dont vous donnerez la loi initiale et la matrice de transition.
5. Soit $h : E \to E$ une fonction mesurable *bijective*. Montrer que $(h(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov à valeurs dans E, dont vous donnerez la loi initiale et la matrice de transition. Si h n'est pas bijective, construire un exemple où cela reste vrai et un contre-exemple où cela devient faux.

Exercice 5.19 — *Révision générale !*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un ensemble E fini de matrice de transition P. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

1. Soit $\mathcal{V}_E$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de E dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{V}_E \to \mathcal{V}_E$ tel que, pour toute fonction $h \in \mathcal{V}_E$, le processus

$$M_n^{(f)} = h(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} (Ah)(X_k)$$

   est une $(\mathcal{F}_n^X)$-martingale.
2. On considère un sous-ensemble F de E et deux fonctions $f : F \to \mathbb{R}$ et $g : F^c \to \mathbb{R}$ définies respectivement sur F et son complémentaire. On note $T_F = \min\{n \geqslant 0, X_n \in F\}$ le premier temps d'atteinte de F pour la chaîne (X_n). Supposons que, pour tout $x \in E$, $\mathbf{E}_x[T_F] < \infty$.

   On considère la fonction $u : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left[f(X_{T_F}) + \sum_{k=0}^{T_F - 1} g(X_k) \right]$$

(a) Montrer que u est bien définie.

(b) Montrer que

$$u(x) = f(x) \text{ pour } x \in F,$$
$$(I - P)u(x) = g(x) \text{ pour } x \in F^c.$$

de deux manières différentes : soit par la propriété de Markov faible, soit par la martingale de la question précédente pour une fonction h bien choisie.

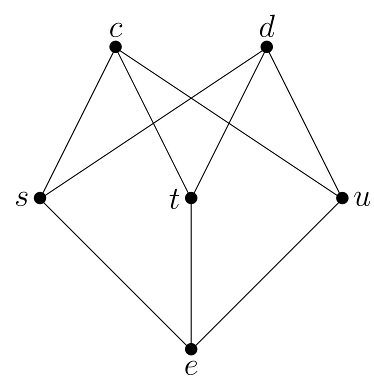
3. Nous considérons le système linéaire suivant sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ pour un entier positif N fixé et un réel α fixé :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \qquad \text{pour } 1 \leqslant n \leqslant N-1$$
$$u(0) = u(1) = 1$$

Représenter (et justifier rigoureusement) une solution u de ce système comme une espérance sur un processus que vous décrivez explicitement. *Bonus : si vous avez des compétences numériques, programmez ce processus pour $N = 50$, estimez les espérances sur 10^6 échantillons et comparez à la solution théorique.*

Exercice 5.20 — *Examen 2017.*

On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{e, s, t, u, c, d\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
2. Déterminer toutes les mesure de probabilités invariantes de cette chaîne de Markov.
3. Entre deux visites en t, combien de fois la chaîne de Markov passe-t-elle, en moyenne, en c ?
4. Partant de u, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en u ?
5. Partant de e, quelle proportion du temps la chaîne passe-t-elle, asymptotiquement, dans le sous-ensemble $\{c, d\}$ de E ?
6. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à atteindre d ?

Exercice 5.21 — *Deuxième session 2017.*

Un professeur anglais possède un nombre entier $N \geqslant 1$ de parapluies anglais, répartis entre son bureau anglais et son domicile anglais. Il se rend à son bureau anglais à pied le matin et rentre chez lui à pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un à sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'à chaque trajet du professeur il pleut avec une probabilité anglaise $p \in]0,1[$, indépendamment des trajets précédents.

1. Écrire la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{0, ..., N\}$ qui modélise convenablement ce problème, l'entier k correspondant à la situation où il y a k parapluies à l'endroit où se trouve le professeur.
2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
3. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne.
4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? Vérifier que pour $p = \frac{1}{2}$, cette proportion vaut $\frac{1}{4N+2}$.
5. Quelle est la période de la chaîne de Markov que nous sommes en train d'étudier ?

Indications pour l'exercice 5.1.

Il s'agit dans tout l'exercice d'écrire les processus sous forme d'une « récurrence avec indépendance ».

1. Pour toute fonction $g : \{1, \ldots, K\} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}\left[g(U_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] = \mathbf{E}\left[g(U_{n+1})|=\right] \sum_{k=1}^{K} \alpha_k g(k)$$

   et donc c'est une chaîne de Markov avec $Q(u, v) = \alpha_v$ (ne dépend pas de u). La loi initiale est α (loi de U_0).

2. Écrire $M_{n+1} = \max(M_n, U_{n+1})$ et appliquer la proposition 5.4 du cours. Pour toute $g : \{1, \ldots, K\} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}\left[g(M_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] = \mathbf{E}\left[g(\max(M_n, U_{n+1}))|\mathcal{F}_n\right]$$

   avec U_{n+1} indépendant de $\mathcal{F}_n$ et M_n mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$. On aboutit après calcul à

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \cdots + \alpha_{K-1} & \alpha K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. L'espace d'états est à présent $\mathbb{N}$. Écrire $S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$ et reproduire l'approche précédente.

4. L'espace d'états est à nouveau $\mathbb{N}$. Écrire $N_{n+1} = N_n + \mathbf{1}_{U_{n+1}=1}$ et reproduire l'approche précédente.

5. Combiner les deux questions précédentes et appliquer encore et encore (c'est que le début) la proposition 5.4.

Indications pour l'exercice 5.2.

Dans les deux cas, il s'agit de lister les transitions possibles qui mènent d'un état X_n aux états suivants et pondérer les indicatrices avec les bonnes probabilités.

1. Il est implicitement supposé que les choix sont indépendants les uns des autres. Nous avons ainsi

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{pomme} \\ \text{figue} \\ \text{poire} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pomme} & \text{figue} & \text{poire} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. On prend pour X_n le nombre de boules dans la première urne. Pour avoir la valeur k au temps $n+1$, il fallait avoir $k+1$ ou $k-1$ boules au temps n :

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=k}\middle|\mathscr{F}_n\right] = \frac{1}{k+1}\mathbf{1}_{X_n=k+1} + \frac{1}{N-k+1}\mathbf{1}_{X_n=k-1} = P(X_n, k) \tag{5.2}$$

3. Faire le lien avec l'un des exercices de martingales...

Indications pour l'exercice 5.3. 1. Ce sont des suites déterministes qu'on détermine à partir du point de départ. Le faire.

2. Soit par diagonalisation de M (indice : les valeurs propres sont 1 et $1-p-q \in]-1,1[$). Soit en exploitant la récurrence $M^2 = \alpha M + \beta I$. La limite est donnée par le terme dominant associé à la valeur propre 1.

3. On prend l'espace d'état $\{1,2\}$ avec 1 qui correspond à l'état « même forme qu'au départ » et 2 à « forme différente de la forme initiale ». On regarde ensuite $(M^n)_{1,1}$.

Indications pour l'exercice 5.4.
Il s'agit ici d'appliquer l'opérateur de translation pas à pas et rigoureusement.

1. Pour toute décomposition $n = p + q$, on a $u_n = u_{p+q} = (\theta_p(u))_q = (\theta_q(u))_p$ et de bien choisir la décomposition.
   (a) $u_{17} = u_{5+12}$. On a alors $\tilde{f}_1(u) = u_0$. Le terme u_1 devient le terme d'ordre 0 de la suite translatée de 1.et on procède de la même manière
   (b) Les éléments de $\{m \geqslant 42; u_m = x\}$ sont les entiers $m = 11 + n$ avec $n \geqslant 31$ tels que $u_m = (\theta_{11}(u))_n = x$. Leur infimum est donc égal $11 + \inf\{n \geqslant 31; (\theta_{11}(u))_n = x\}$. On a ainsi
   $$\tilde{f}_2(u) = 11 + \inf\{n \geqslant 31; u_n = x\}$$
   (c) On procède de la même manière qu'à la question précédente.
2. (a) $h_1(u) = (\theta_3(u))_1 = u_4$
   (b) $h_2(u) = (\theta_{u_1}(u))_4 = u_{u_1+4}$ (oui, oui, cela est bien défini)
   (c) On regarde la suite au premier temps où elle touche x.
   (d) On regarde le temps pour toucher x *après avoir touché x une première fois* : c'est la durée entre les deux premiers passages successifs en x. Ici, $h_4(...) = 2$

Indications pour l'exercice 5.5.
Il s'agit de comprendre quelles trajectoires participent à l'événement $\{S = n\}$ pour chaque n. Observer qu'après le premier saut (de 0 vers k disons) la trajectoire est déterministe.

Indications pour l'exercice 5.6.
Il s'agit de bien comprendre au préalable l'exercice « Lost in translation ». Ici, S est un temps d'arrêt, i.e. une fonction mesurable $\Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors que $\tilde{S}$ est une fonction $E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sur l'espace canonique. Puisque X est une fonction $\Omega \to E^{\mathbb{N}}$ vers l'espace canonique, la composition $\tilde{S} \circ X$ donne bien un temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

1. Elle est bien définie à un négligeable près car on évite $T = +\infty$ (qui —rappelons-le— est une valeur possible pour un temps d'arrêt).
2. (a) Par récurrence. Une somme de termes positifs est finie si et seulement tous ses termes le sont.

(b) Appliquer *rigoureusement* la propriété de Markov forte. Allez, on le fait une fois proprement complètement pour la Grandeur des chaînes de Markov. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Il s'agit de calculer $\mathbf{E}\left[g(X_{S_{n+1}})\middle|\mathcal{F}_{S_n}\right]$. On a

$$X_{S_{n+1}} = X_{S_n+\tilde{S}((X_{S_n+k})_{k\geqslant 0})} = X_{S_n+\tilde{S}((\theta_{S_n}(X))_{k\geqslant 0}} = (\theta_{S_n}(X))_{\tilde{S}((\theta_{S_n}(X))_{k\geqslant 0}}$$

Posons $G : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $G(u) = g(\pi_{\tilde{S}(u)}(u))$ où $\pi_k(u) = u_k$. Nous avons alors

$$\mathbf{E}\left[g(X_{S_{n+1}})\middle|\mathcal{F}_{S_n}\right] = \mathbf{E}\left[G(\theta_{S_n}(X))\mathbf{1}_{S_n<\infty}|\mathcal{F}_{S_n}\right] = h(X_{S_n})\mathbf{1}_{S_n<\infty} = h(X_{S_n})$$

avec

$$h(x) = \mathbf{E}_x\left[G(X)\right] = \mathbf{E}_x\left[g(\pi_{\tilde{S}(X)}(X)\right] = \mathbf{E}_x\left[g(X_S)\right] = \sum_{u\in E} \mathbf{P}_x\left(X_S = u\right) g(u)$$

(c) i. Montrer, en étudiant les trajectoires entre 0 et S_1, que S_1 suit une loi géométrique dont le paramètre est relié à $Q(x,x)$.

ii. Etudier les trajectoires entre 0 et S_1 et regarder où elles mènent.

iii. Application de la question 2.

iv. Que peut-il se passer entre deux S_n consécutifs où la chaîne passe de u à v ?

Indications pour l'exercice 5.7. 1. Il s'agit de simplifier $\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\middle|\mathscr{F}_n\right]$ pour tout $u \in \mathbb{N}^*$ et de reconnaître la définition d'une chaîne de Markov.

2. Utiliser l'indépendance des v.a.
3. Utiliser la question précédente.
4. Calcul de πQ. Ensuite, décomposer $\mathbf{P}_\pi(A)$ et $\mathbf{E}_\pi[U]$ sur les probabilités $\mathbf{P}_x(A)$ et $\mathbf{E}_x[U]$ en utilisant la propriété de Markov faible au temps 0.
5. Cf. exercice 1.6
6. Cf. exercice 1.6
7. Utiliser la définition d'une chaîne de Markov pour la fonction $f(Z_{k+1} - Z_k)\mathbf{1}_{Z_k=u}$ pour chaque $u \in \mathbb{N}^*$ puis resommer proprement sur u.
8. Identifier une somme de v.a. i.i.d et intégrables

Indications pour l'exercice 5.8.
Par exemple, dessiner tranquillement des graphes.

Indications pour l'exercice 5.9.
Faire un beau dessin de graphe. Ici, les classes sont $\{1,7,9\}$, $\{10\}$ (on ne repart pas), $\{6\}$ (on n'y entre pas), $\{2,4,8\}$ et $\{3,5,8\}$.

Indications pour l'exercice 5.10. 1. Dessiner un beau graphe avec des flèches et se promener dessus.

2. Appliquer proprement la propriété de Markov faible à $\mathbf{E}_x[N_y]$. Résoudre le système qui ressemble à un système linéaire mais n'en est pas un car on travaille dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ au lieu de $\mathbb{R}$.
3. Appliquer proprement la propriété de Markov faible. Puis commencer à résoudre le système dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
4. Continuer la résolution du système et/ou interpréter les communications entre états.
5. Utiliser la définition d'une mesure invariante.
6. Etudier les trajectoires partant de 3.

Indications pour l'exercice 5.11.

Appliquer proprement la propriété de Markov forte. Puis considérer des z particuliers.

Indications pour l'exercice 5.12. 1. Vérifier les axiomes.

2. Manipuler les lois des v.a. $(X_0, \ldots, X_N)$, faire apparaître des termes téléscopiques et renuméroter les indices de temps.
3. Résoudre $\pi Q = \pi$ et classifier les états.

Indications pour l'exercice 5.13.

Cet exercice contient de nombreuses subtilités sur les calculs de mesures invariantes et la distinction entre mesure et loi invariantes. Faites attention.

1. Construire des trajectoires de probabilités non-nulles entre les différents états.
2. Étudier *avec soin* le système $\pi Q = \pi$ en travaillant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On obtient tout d'abord $\pi(j) = \pi(0)p_0 \ldots p_{j-1}$ pour tout $j > 0$. Puis, on étudie $\pi(0) = \sum_{i \geqslant 0} q_i \pi(i)$ en contrôlant rigoureusement les sommes téléscopiques pour aboutir à la condition $\prod_{i=0}^n p_i \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   Étudier la récurrence de l'état 0 en étudiant les trajectoires qui partent de 0 et reviennent à 0. On retrouve la condition ci-dessus.
3. On peut étudier de la même manière l'espérance du temps de retour en 0. On remarque que la même condition correspond à l'existence d'une loi invariante (par normalisation du π obtenu précédemment).

Indications pour l'exercice 5.14. 1. Écrire $Y_{n+1} = \varphi(Y_n, X_{n+1})$ pour une fonction φ idoine. Calculer ensuite $\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{Y_{n+1}=u} \middle| \mathscr{F}_n\right]$ pour tout $u \in \{0,1,2,3\}$.

2. Classifier les états et observer que l'espace d'état est fini.
3. Le théorème ergodique conviendrait-il donc ? ? ?
4. Ce défi doit rester un défi.

Indications pour l'exercice 5.15.

Que dire de plus ?

Indications pour l'exercice 5.16. 1. Montrer par récurrence que $(S^n)((x,y),(x',y')) = (Q^n)(x,x')(R^n)(y,y')$.

2. Ce n'est pas trivial et la période 1 est essentielle. En effet, les trajectoires qui mènent de x à x' par Q et de y à y' par R ne sont pas forcément de la même longueur. Utiliser la définition de la période pour allonger ces trajectoires à des trajectoires de même longueur.
3. Prendre des espaces à deux états pour chaque chaîne et des déplacements déterministes.
4. Multipliez...
5. Faites attention à la réductibilité ici (cases noires et blanches), etc. Il est question ici de mesure invariante pour obtenir l'inverse du temps moyen.

Indications pour l'exercice 5.17. 1. Pour obtenir l'irréductibilité, montrer qu'on peut de n'importe quel état y à 0 et y revenir avec probabilité non-nulle.

2. Étudier les trajectoires. Étudier la finitude de S_1.
3. Calcul. Utiliser l'unicité ensuite.
4. Étudier plus finement S_1. Normaliser λ.
5. Étudier l'apériodicité. Utiliser la convergence vers la loi invariante.
6. Partitionner selon l'instant du premier retour en zéro qui se situe nécessairement entre 1 et n.
7. « Devenez plus fort avec la propriété de Markov forte ». Faire un beau raisonnement par récurrence pour factoriser $\mathbf{E}_x\left[\prod_{k=1} f_k(t_k)\right]$ pour des fonctions f_k mesurables bornées arbitraires.
8. Utiliser $S_i = t_1 + \ldots + t_i$ et remarquer que c'est une somme de v.a. indépendantes (et de même loi déjà calculée).
9. Partitionner selon le nombre de retours en 0 avant le temps n.
10. Convergence vers la loi invariante.

Compléments

Indications pour l'exercice 5.18.

La principale difficulté est d'établir des formules intuitives en passant par des conditionnements loin d'être triviaux.

1. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Posons $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{np+r}$. Il suffit d'imbriquer p espérances conditionnelles pour ramener $X_{p(n+1)+r}$ à X_{pn+r}

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[g(X_{p(n+1)+r})\middle|\mathcal{G}_n\right] &= \mathbf{E}\left[g(X_{pn+r+p})|\mathcal{F}_{np+r}\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[g(X_{pn+r+p})|\mathcal{F}_{pn+r+p-1}\right]|\mathcal{F}_{np+r}\right] = \mathbf{E}\left[(Pf)(X_{pn+r+p-1})|\mathcal{F}_{np+r}\right] \quad = \ldots\\ &= (P^p g)(X_{pn+r})\end{aligned}$$

La matrice de transition est $P' = P^p$ et la loi d'entrée μP^r. La filtration est $(\mathcal{G}_n)$.

Pas d'indépendance entre $(X_{np+r_1})_n$ et $(X_{np+r_2})_n$: construire un exemple avec $E = \{0, 1\}$ et des changements d'état déterministes.

2. On pose ici $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{n+1}$. Pour tout $(u_1, u_2) \in E^2$, on a

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{(X_{n+1},X_{n+2})=(u_1,u_2)}\middle|\mathcal{H}_n\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u_1}\mathbf{1}_{X_{n+2}=u_2}\middle|\mathcal{F}_{n+1}\right] = \mathbf{1}_{X_{n+1}=u_1}P(X_{n+1}, u_2)$$

   On obtient $P'((v_1, v_2), (u_1, u_2) = \mathbf{1}_{u_1=v_2}P(v_2, u_2)$.
3. Généraliser l'approche précédente.
4. Soit $(u, v) \in E \times F$. Soit $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, Y_0, \dots, X_n, Y_n)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\mathbf{1}_{Y_{n+1}=v}\middle|\mathcal{G}_n\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\mathbf{1}_{Y_{n+1}=v}\middle|\sigma(\mathcal{G}_n \cup \sigma(X))\right]\middle|\mathcal{G}_n\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{Y_{n+1}=v}\middle|\sigma(\mathcal{F}_n^Y \cup \sigma(X))\right]\middle|\mathcal{G}_n\right]\end{aligned}$$

   Il s'agit alors d'appliquer la proposition 3.4 de grossissement de la sous-tribu pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\mathbf{1}_{Y_{n+1}=v}\middle|\mathcal{G}_n\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}Q(Y_n, v)\middle|\mathcal{G}_n\right]\\ &= Q(Y_n, v)\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{X_{n+1}=u}\middle|\sigma(\mathcal{F}_n^X \cup \mathcal{F}_n^Y)\right] = Q(Y_n, v)Q(X_n, u)\end{aligned}$$

   avec à nouveau la proposition 3.4.
5. Utiliser la bijection réciproque pour assurer les mesurabilités nécessaires. Obtenir $P'(u, v) = P(h^{-1}(u), h^{-1}(v))$. Pour le contre-exemple, faire simple sur un espace à petit nombre d'états (2 ne suffit pas).

Indications pour l'exercice 5.19.

1. On part de

$$\mathbf{E}\left[f(X_{n+1})\middle|\mathcal{F}_n^X\right] = (Pf)_{X_n} = f(X_n) + ((P - I)f)(X_n).$$

   On compense alors les termes pour obtenir une martingale. Il suffit alors de prendre $A = Q - I$ (et on vérifie qu'il envoie bien $\mathcal{V}_E$ dans $\mathcal{V}_E$.
2. (a) On déduit de $\mathbf{E}_x[T_F] < \infty$ que T_F est fini $\mathbf{P}_x$-p.s. donc X_{T_F} est bien défini presque partout. De plus, E est fini donc f et g sont bornées. La v.a. dans l'espérance est donc majorées par $C_0 + C_1 T_F$ avec T_F intégrable par hypothèse.
   (b) Première méthode : on sépare $\{T_F = 0\}$ (qui correspond à $x \in F$) et $\{T_F \geqslant 1\}$ (qui correspond à $x \in F^c$) et on applique la propriété de Markov faible au temps 1 à ce second cas.
   Deuxième méthode : considérer la martingale arrêtée $M^{(h)}_{n\wedge T_F}$ pour h telle que $h(x) = f(x)$ si $x \in F$ et $h(x) = \tilde{g}(x)$ pour $x \notin F$ avec $(I - P)\tilde{g} = g$ (est-ce bien défini ?)
   (c) Considérer $E = \{0, 1, \dots, N\}$, $F = \{0, N\}$ et une marche aléatoire.

Indications pour l'exercice 5.20.

Nous rappeloons qu'à chaque étape, la marche saute (indépendamment des sauts précédents) sur un point voisin choisi uniformément parmi tous les voisins possibles.

1. Classifier les états.
2. Écrire la matrice de transition Q à six états et résoudre $\pi Q = \pi$. On peut accélérer le calcul en observant qu'on doit avoir $\pi(c) = \pi(d)$ et $\pi(s) = \pi(t) = \pi(u)$.

3. Penser aux propriétés des fonctions de Green (voir exercice précédent dans cette feuille) ou encore aux représentations des mesures invariantes en termes d'excursions.
4. Relier ce temps moyen à la loi invariante.
5. Formaliser la question de telle sorte à utiliser le théorème ergodique.
6. 'Ecrire un système d'équations à partir de la propriété de Markov faible (cf. un exercice ci-dessus).

Indications pour l'exercice 5.21. 1. Il s'agit de bien comprendre l'énoncé. Le temps n est le numéro du trajet considéré (ce n'est pas le nombre de jours car il y a deux trajets par jour). S'il y a k parapluies à l'endroit où il est, les autres $k' = N - k$ parapluies sont à l'endroit où il va.

S'il y a $k \geqslant 1$ parapluies à l'endroit où il est et qu'il pleut (resp. qu'il ne pleut pas), il y a ensuite $N-k+1$ (resp. $N-k$) parapluies à l'endroit où il arrive. Appelons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de parapluies à l'endroit où il est après le n-ème trajet et appelons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les v.a. i.i.d. de Bernoulli qui indiquent s'il pleut lors du n-ème trajet. Les (X_n) sont à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, N\}$ et on a $X_{n+1} = \mathbf{1}_{X_n \neq 0}(N - X_n + U_{n+1}) + \mathbf{1}_{X_n=0}N$

On obtient alors la matrice de transition Q donnée par

$$\begin{aligned} Q(k, N-k) &= 1-p \qquad\qquad Q(k, N-k+1) = p \qquad\qquad \text{si } k > 0 \\ Q(0, N) &= 1 \end{aligned}$$

et tous les autres coefficients sont nuls.

2. Partant de N, en considérant une suite de trajet où alternativement il pleut et ne pleut pas, on obtient une trajectoire

$$(N, 1, N-1, 2, N-2, 3, N-3, \ldots, N-1, 1, 0, N)$$

qui part de N et revient à N en passant par tous les états. Irréductibilité ! Espace d'état fini...

3. Unique loi invariante ici. Résoudre $\pi Q = \pi$. Ici, cela correspond à :

$$\begin{aligned} \pi(0) &= \pi(N)(1-p) \\ \pi(k) &= \pi(N-k)(1-p) + \pi(N-k+1)p \qquad\qquad \text{pour } 0 < k < N \\ \pi(N) &= \pi(0) + \pi(1)p \end{aligned}$$

Si vous ne voyez pas comment résoudre ce système, traitez à la main les cas $N = 1$, $N = 2$ et $N = 3$ et inférez la solution générale que vous vérifierez ensuite.

4. Pour marcher sous la pluie, il faut que $X_n = 0$ (pas de parapluie disponible) et qu'il pleuve lors du trajet suivant. Le théorème ergodique donne ainsi une proportion asymptotique égale à $p\pi_0$.
5. Partant de N, on a la trajectoire de longueur 2 donnée par $(N, 1, N)$ (il pleut et il pleut à nouveau : on prend un parapluie et on le rapporte ensuite) donc la période de l'état N divise 2. Elle vaut donc 1 ou 2.

Si $N = 2p$ (pair), alors la trajectoire (p, p) (autant de parapluie aux deux endroits et il ne pleut pas) est de longueur 1 donc la chaîne est apériodique. Si $N = 2p + 1$, alors la trajectoire $(p + 1, p + 1)$ ($p + 1$ au lieu de départ et p au lieu d'arrivée et il pleut) est de longueur 1 donc la chaîne est apériodique.