Master de mathématiques
MU4MA011

Probabilités approfondies

Fascicule d'exercices

Année 2024–2025

Cours : Thierry Lévy

Travaux dirigés : David García-Zelada, Sébastien Martineau,
Laurent Mazliak et Pierre Tarrago

Chapitre 0

Rappels de probabilités

Espaces de probabilité et variables aléatoires

Exercice 0.1. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, avec $0 < p < 1$. Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 0.2. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

1. Montrer que $\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.
2. Montrer que $\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$.
3. On pose $p_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que
$$\mathbf{P}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k \, .$$
4. On considère n personnes qui participent à un *père Noël secret*. Les n noms (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des étiquettes et chaque personne tire au hasard une étiquette (et la garde) — le nom écrit sur cette étiquette est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note $p(n)$ la probabilité qu'au moins une personne tire une étiquette avec son propre nom. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n\to\infty} p(n)$.

Exercice 0.3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n suivant les probabilités :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = 1/n, \qquad k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 0.4. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$ et, pour tous $m, n \geq 1$, $\mathbf{P}(T \geq m + n \,|\, T \geq n) = \mathbf{P}(T \geq m)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 0.5.

1. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans E et de loi μ.
2. Soit $n \geq 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on se donne un espace mesurable $(E_i, \mathscr{E}_i)$ et une mesure de probabilité μ_i sur cet espace mesurable. Construire des variables aléatoires *indépendantes* $X_1, \dots, X_n$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire X_i soit de loi μ_i.

Exercice 0.6. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. On considère ε et X des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur cet espace. On suppose que ε a pour loi : $\mathbf{P}(\varepsilon = -1) = \mathbf{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$.

1. Montrer que εX et ε sont indépendantes si et seulement si la loi de X est symétrique (c'est-à-dire, X a la même loi que $-X$).
2. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et une variable aléatoire Y telle que :
   (a) Y est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$-mesurable,
   (b) Y est indépendante de $\mathscr{B}$,
   (c) Y n'est pas $\mathscr{A}$-mesurable.
3. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et une variable aléatoire Z telle que :
   (a) Z est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$-mesurable,
   (b) Z est indépendante de $\mathscr{B}$,
   (c) Z est indépendante de $\mathscr{A}$.

Exercice 0.7. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, r\}$ et de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1 = i) = p_i$, $1 \leq i \leq r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j = i\}}$.

1. Déterminer la loi de Z_1. À quelle condition les variables aléatoires Z_i et Z_j ont-elles même loi ?
2. Calculer la covariance de Z_1 et Z_2. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 0.8. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi gamma de paramètre $a > 0$ si X admet la densité

$$\frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad \text{où } \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx.$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi gamma de paramètre a. Calculer explicitement les moments $\mathbf{E}(U^n)$, $n \in \mathbf{N}$.
2. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma de paramètres respectifs a et b. Montrer que les variables aléatoires $U/(U+V)$ et $U+V$ sont indépendantes et expliciter les lois de $U/(U+V)$ et $U+V$.

Exercice 0.9. Soient X_1, X_2, $\cdots$, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

1. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$.
2. Montrer que la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet pour densité
$$f_{S_n}(s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{\{s_n > 0\}}.$$
3. Déterminer la fonction caractéristique de S_n.
4. Calculer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}\,(S_n)$.

Convergences de suites de variables aléatoires

Exercice 0.10. Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ est susceptible de réaliser ?

1. $\mathbf{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$;
2. $\mathbf{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$;
3. $\mathbf{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$;
4. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$;
5. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$, $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$;
6. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n$, où les X_n sont supposées indépendantes ; dans ce cas, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (p_n) pour que
   (a) (X_n) converge p.s. ;
   (b) (X_n) converge dans $\mathbf{L}^1$;
   (c) (X_n) converge en loi, c'est-à-dire $\mathbf{E}(f(X_n)) \to \mathbf{E}(f(X))$ quand $n \to \infty$ pour toute application continue bornée $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Exercice 0.11. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \to X$ p.s. quand $n \to \infty$.
2. On suppose que $X_n \to X$ p.s. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$
3. Conclure.

Exercice 0.12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Montrer qu'il existe une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}$. Soit $(X_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ une telle sous-suite : montrer qu'elle converge presque sûrement.

Exercice 0.13. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

1. Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Montrer que la suite (X_{n^2}) converge presque sûrement.

Exercice 0.14. — *Pas de convergence en probabilité pour la moyenne de Cesàro*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, la fonction de répartition de X_n étant donnée par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x \geq 0.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 mais pas la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 0.15. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

1. Montrer que, presque sûrement, Y_n converge, vers une limite que l'on notera Y.
2. Si $p = 1/2$, donner la loi de Y.

   Indication : utiliser la convergence de la fonction de répartition.

Exercice 0.16. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $\mathbf{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$.

1. Montrer que S_n converge dans $\mathbf{L}^2$ vers une variable aléatoire S.

   Indication : on pourra utiliser le fait que $\mathbf{L}^2$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge.
2. En déduire que $\mathbf{E}[S] = 0$ et $\mathrm{Var}(S - S_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_k)$ pour tout n.
3. Montrer que si on a de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} n \,\mathrm{Var}(X_n) < +\infty$, alors la convergence a lieu presque sûrement.

Exercice 0.17.
1. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U. Soit d'autre part Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, ayant donc comme densité $\exp(-x)1_{\mathbf{R}_+}(x)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = n\min\{U_1, \ldots, U_n\}$. Montrer que Z_n converge en loi vers Y.
2. Soit maintenant X une variable aléatoire à valeurs dans $[0,\infty[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que X. Montrer que
   (a) Si $\mathbf{P}(X > x) = o(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$ alors

   $$Z_n = \frac{1}{n}\max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

   converge en loi vers 0.

(b) Si $\mathbf{P}(X > x) \sim \alpha/x^\lambda$ lorsque $x \to +\infty$, avec $\alpha, \lambda > 0$ alors

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/\lambda}} \max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

converge vers une variable aléatoire Y de loi de Fréchet, c'est-à-dire dont la fonction de répartition est donnée par $\mathbf{P}(Y \leq t) = \exp(-\alpha t^{-\lambda}) 1_{\mathbf{R}_+}(t)$.

Exercice 0.18. — *Lemme de Slutsky*

1. En utilisant des fonctions caractéristiques, montrer que si (X_n) converge en loi vers X, et si (Y_n) converge en loi vers une constante c, alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers le couple (X, c).
2. Trouver des suites de variables aléatoires telles que (X_n) converge en loi vers X, (Y_n) converge en loi vers Y (une variable aléatoire non constante) mais où le couple (X_n, Y_n) ne converge pas en loi.

Exercice 0.19. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives intégrables convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X intégrable. On suppose de plus que $\mathbf{E}(X_n) \to \mathbf{E}(X)$ quand $n \to \infty$. Montrer que la suite (X_n) converge vers X dans $\mathbf{L}^1$.

Exercice 0.20. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$.

1. Que vaut $\mathbf{E}[Y_n]$?
2. Montrer que $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}(Y_n \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.
4. En déduire que Y_n converge presque sûrement vers 0.

Exercice 0.21. Soit $1 \leq p < q < \infty$. En utilisant la fonction convexe $x \mapsto x^{q/p}$ ou la fonction concave $x \mapsto x^{p/q}$, montrer que pour toute variable aléatoire réelle X, on a $(\mathbf{E}|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbf{E}|X|^q)^{1/q}$.

En déduire l'inclusion $\mathbf{L}^q \subset \mathbf{L}^p$. Montrer que si une suite de variable aléatoires converge dans $\mathbf{L}^q$, alors elle converge aussi dans $\mathbf{L}^p$.

Autour de la marche aléatoire simple sur Z

Dans les exercices qui suivent, $(X_n,\, n \geq 1)$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$.

Exercice 0.22. 1. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbf{P}(S_n = 0)$.

2. Étudier $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?
3. Si $p \neq 1/2$, retrouver cette conclusion en utilisant la loi des grands nombres.

Exercice 0.23. On suppose que $p = 1/2$, et on cherche à montrer que presque sûrement, on a $\limsup S_n = +\infty$ <u>et</u> $\liminf S_n = -\infty$.

1. Pour $K \geq 1$, on considère les événements

$$A_n = \big\{X_{nK+1} = \cdots = X_{(n+1)K} = +1\big\} \qquad n \geq 1\,.$$

Montrer que pour tout K, $\mathbf{P}$-p.s. A_n est réalisé infiniment souvent.

2. En déduire que pour tout K, $\mathbf{P}\big(-K/2 < S_n < K/2 \text{ pour tout } n \geq 1\big) = 0$, puis que

$$\mathbf{P}\big(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}\big) = 1.$$

3. Montrer que l'événement $\{\limsup S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue de la suite (X_n), définie par $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \sigma(X_{n+k}, k \geq 0)$, et utiliser la loi du $0-1$ de Kolmogorov pour conclure que $\mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big) = 1$.

Exercice 0.24. On suppose de nouveau dans cette question que $p = 1/2$, et on pose $M_n = \max_{0\leq i\leq n} S_i$.

1. Soit $k \in \mathbf{Z}$, et $y \geq k$, $y \geq 1$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n = k, M_n \geq y) = \mathbf{P}(S_n = 2y - k)$.
Indication : on pourra introduire le temps $\tau = \inf\{i; S_i = y\}$, et utiliser un argument dit de réflexion (faire un dessin).
2. En déduire que $\mathbf{P}(M_n \geq y) = 2\mathbf{P}(S_n \geq y) - \mathbf{P}(S_n = y)$ pour tout $y \geq 1$.
3. On pose $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$. Montrer que pour tout $y \geq 1$, $\mathbf{P}(M_\infty \leq y) = 0$.
On admettra qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathbf{P}(S_n = y) \leq C/\sqrt{n}$ pour tout $n, y \geq 1$ (pas si dur, mais calculatoire).
4. En déduire que $\mathbf{P}(M_\infty = +\infty) = 1$.

Exercice 0.25. On prend $p = 1/2$ de nouveau. On note $T_0 = \inf\{n \geq 1; S_n = 0\}$, et $f_n = \mathbf{P}(T_0 = n)$, $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$. En particulier, $u_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots + f_n u_0\,.$$

2. On considère les fonction génératrices $F(s) = \sum_{n\geq 1} f_n s^n$ et $U(s) = \sum_{n\geq 0} u_n s^n$ pour $s \in [0, 1[$. Montrer que $U(s) = 1 + U(s)F(s)$.
3. Calculer u_n pour tout n, puis calculer $U(s)$. En déduire $F(s)$, puis la valeur de f_n pour tout n.

Exercices supplémentaires

Exercice 0.26. 1. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$). Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer card(Ω), le cardinal de Ω.

2. Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M + 1$ à N sont blanches. On introduit les événements A_k, $1 \leq k \leq n$, définis par $A_k = \{\text{la } k\text{-ième boule tirée est rouge}\}$.

   (a) Calculer les $\mathbf{P}(A_k)$.
   (b) Calculer, pour $k \neq l$, les $\mathbf{P}(A_k \cap A_l)$.
3. On introduit les variables aléatoires Z_k, $1 \leq k \leq n$, définies par $Z_k = 1$ si la k-ième boule tirée est rouge, et $Z_k = 0$ sinon. On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note p le rapport M/N.
   (a) Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$ en fonction de n et p.
   (b) Calculer la limite de $\mathrm{Var}(S_n)$, n fixé, quand M et N tendent vers l'infini de telle sorte que p tende vers un réel p_0, $0 < p_0 < 1$.

Exercice 0.27. Montrer qu'une suite de variables aléatoires $(X_n,\, n \geq 1)$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\Big) = 0\,.$$

Exercice 0.28. — *Loi des grands nombres : preuve dans* $\mathbf{L}^4$
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telles que $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$. On pose $Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

1. On suppose pour l'instant que $\mathbf{E}(X_1) = 0$.
   (a) Montrer que les espérances $\mathbf{E}(X_1^3 X_2)$, $\mathbf{E}(X_1^2 X_2 X_3)$ et $\mathbf{E}(X_1 X_2 X_3 X_4)$ sont bien définies et donner leur valeur.
   (b) Calculer $\mathbf{E}Z_n^4$.
   (c) Montrer que la variable $\sum_{n\in\mathbf{N}} Z_n^4$ est intégrable et en déduire que (Z_n) converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse $\mathbf{E}X_1 = 0$, déduire de la question précédente que (Z_n) converge vers $\mathbf{E}X_1$ presque sûrement.

Exercice 0.29. — *Loi des grands nombres : preuve dans* $\mathbf{L}^2$
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telles ques $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$. On pose $Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

1. Calculer la variance de Z_n. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que (Z_{n^2}) converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$.
2. Pour tout n, on note q_n la partie entière de $\sqrt{n}$, de sorte que $q_n^2 \leq n < (q_n + 1)^2$. En déduire que $0 \leq n - q_n^2 \leq 2\sqrt{n} + 1$.
3. En raisonnant comme en question 1, montrer que la suite $(Z_n - \frac{q_n^2}{n} Z_{q_n^2})$ converge presque sûrement vers 0.
4. En déduire que (Z_n) converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$.

Exercice 0.30. — *Loi des grands nombres : preuve dans* $\mathbf{L}^1$
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que $\mathbf{E}(|Y_1|) < \infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n, \quad T_n = \max(S_1, \ldots, S_n), \quad T = \sup_{k\in\mathbf{N}} S_k$$

$$\overline{S}_n = Y_2 + \ldots + Y_n, \quad \overline{T}_n = \max(\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_n), \quad \overline{T} = \sup_{k\in\mathbf{N}} \overline{S}_k.$$

1. Montrer que $\mathbf{P}(T = \infty) = \mathbf{P}(\overline{T} = \infty)$.
2. Déduire de la loi $0 - 1$ de Kolmogorov que $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$ ou 1.
3. Prouver la relation $T_n - \overline{T}_n = \max(Y_1 - \overline{T}_n, Y_1)$.
4. En déduire que si $T = \infty$ p.s, alors $\mathbf{E}(Y_1) \geq 0$.
5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d et intégrables. En appliquant la conclusion précédente aux variables $Y_n = X_n - \mathbf{E}X_n - \varepsilon$ et $Y'_n = -X_n + \mathbf{E}X_n - \varepsilon$ (pour $\varepsilon > 0$ arbitraire), en déduire la loi forte des grands nombres : $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$.

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Généralités et calculs

Exercice 1.1. — *Questions de cours*
Soient A un événement et X une variable aléatoire réelle positive, resp. intégrable.

1. Soit $B \in \mathscr{F}$ tel que l'on ait $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(B^c) > 0$. On introduit la sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ définie par $\mathscr{G} = \{\varnothing, B, B^c, \Omega\}$. Donner :
   — les probabilités conditionnelles de A sachant B, de A sachant B^c.
   — la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathscr{G}$.
   — l'espérance conditionnelle de X sachant B, de X sachant B^c.
   — l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
2. Soit $(B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots)$ une partition dénombrable (finie ou infinie) de Ω dans $\mathscr{F}$ telle que $\mathbf{P}(B_k) > 0$, $\forall k$. Soit $\mathscr{G} := \sigma(B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots)$. Donner
   — la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathscr{G}$.
   — l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$ Donner
   — la probabilité conditionnelle de A sachant Y.
   — l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 1.2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose ces variables aléatoires indépendantes, de même loi et d'espérance $\mu = \mathbf{E}[X_1]$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante de la famille $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Si $N = 0$, on pose par convention $S = 0$.

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\mathbf{E}[S \mid N = n]$. En déduire $\mathbf{E}[S \mid N]$ puis $\mathbf{E}[S]$.
2. Pour $r \in [0, 1]$, calculer $\mathbf{E}[r^S \mid N]$ en fonction de $\varphi_{X_1}(r) = \mathbf{E}[r^{X_1}]$. En déduire la fonction génératrice de S en fonction de celle de X_1 et de celle de N.

Exercice 1.3. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendantes de N. On note $T = \min\{T_1, \dots, T_N\}$, en utilisant la convention $\min \varnothing = 1$ (c'est-à-dire que T vaut 1 sur l'événement $\{N = 0\}$).

1. Calculer $\mathbf{P}(T > t \mid N = n)$ pour $t \in [0,1]$.
2. Montrer que $\mathbf{E}[T \mid N = n] = \frac{1}{n+1}$, et en déduire $\mathbf{E}[T \mid N]$.
3. En déduire $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 1.4. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Déterminer $\mathbf{P}(X_1 = k \,|\, X_1 + X_2 = n)$.
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_1 \,|\, X_1 + X_2)$.
3. Mêmes questions en supposant que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, de loi binomiale de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). On pourra utiliser le fait que si $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\sum_{k=1}^n \xi_k$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Exercice 1.5. Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Que peut-on dire, sous réserve d'hypothèses convenables, des espérances conditionnelles suivantes ?

1. $\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ si X est $\mathscr{G}$-mesurable ;
2. $\mathbf{E}(XY \,|\, \mathscr{G})$ si X est $\mathscr{G}$-mesurable ;
3. $\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ si X est indépendante de $\mathscr{G}$;
4. $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G}))$.

Exercice 1.6. Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Que peut-on dire de X si $(\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G}))^2 = \mathbf{E}(X^2 \,|\, \mathscr{G})$ p.s. ?

Exercice 1.7. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans des espaces mesurés E_1 et E_2 respectivement, de lois respectives ν_1 et ν_2. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable bornée (resp. positive).

1. Montrer que
$$\mathbf{E}[f(X_1, X_2) \,|\, X_1] = \int_{E_2} f(X_1, u) d\nu_2(u) \qquad \text{p.s.}$$
2. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante de Z et de fonction génératrice $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(N = n) x^n$. Montrer que $\mathbf{E}(Z^N | Z) = \varphi(Z)$ p.s.
3. Soient X et U deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit F la fonction de répartition de U. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{U\leq X} | X) = F(X)$ p.s. Exprimer également la quantité $\mathbf{E}(\exp(2\mathbf{1}_{U\leq X}) | X)$ à partir de $F(X)$.

Exercice 1.8. Montrer que toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ est de la forme $\sigma(X)$, pour une variable aléatoire X bien choisie.

Exercice 1.9. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est l'espérance conditionnelle de $(Y-X)^+$ sachant X ?

Exercice 1.10. — *Partiel 2017*
Soient λ et μ sont deux réels strictement positifs, et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}_+$ respectivement telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \mu \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)y} dy\,.$$

1. Quelle est la loi marginale de X ? Quelle est celle de Y ?
   On rappelle que pour tout $a > 0$ et $n \geq 1$, $\int_0^\infty a^{n+1} y^n e^{-ay} dy = n!$.
2. Calculer $\mathbf{E}[Y|X]$.
3. Calculer $\mathbf{E}[\frac{Y}{X+1}]$.
4. Calculer $\mathbf{P}(X = n|Y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{X=n}|Y]$ ainsi que $\mathbf{E}[X|Y]$.

Exercice 1.11. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de même paramètre λ.

1. Calculer $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) \,|\, X_1]$ puis $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)]$.
2. Calculer $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) \,|\, X_1 + X_2]$.
3. Calculer $\mathbf{E}[X_1 \,|\, \min(X_1, X_2)]$.

Exercice 1.12. — *Partiel 2016*
Soit $\alpha > 0$. Soient B et U deux variables indépendantes telles que U est uniforme sur l'intervalle $]0,1[$, B est à valeurs positives et B^α est intégrable. On définit la variable C par

$$C = f(B, U) = 2U(B + U^2)^\alpha.$$

Justifier que C est intégrable et calculer $E(C|B)$.

Exercice 1.13. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. On suppose que la loi de X est symétrique (c'est-à-dire, X a la même loi que $-X$), et on pose $Y = |X|$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(X \,|\, Y) = \mathbf{E}(X)$ p.s.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.14. Soient X et Y des variables aléatoires réelles intégrables, et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \leq \mathbf{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$ p.s., si et seulement si $\mathbf{E}(X\, \mathbf{1}_A) \leq \mathbf{E}(Y\, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G}) = \mathbf{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$ p.s., si et seulement si $\mathbf{E}(X\, \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(Y\, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.
3. Montrer que $|\mathbf{E}(X|\mathscr{G})| \leq \mathbf{E}(|X||\mathscr{G})$.

Exercice 1.15. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Soient Z et $\widetilde{Z}$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathscr{E})$ et $(\widetilde{E}, \widetilde{\mathscr{E}})$, respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(X \,|\, Z, \widetilde{Z})$ est $\sigma(Z)$-mesurable. Montrer que $\mathbf{E}(X \,|\, Z, \widetilde{Z}) = \mathbf{E}(X \,|\, Z)$ p.s.

Variables gaussiennes

Exercice 1.16. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$, $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Quelles sont les lois de U, V et W ? Quels sont les couples indépendants parmi les couples (U, V), (U, W), (V, W) ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $W = aU + Z$ avec U et Z indépendantes. En déduire $\mathbf{E}(W \,|\, U)$, $\mathbf{E}(W^2 \,|\, U)$ et $\mathbf{E}(W^3 \,|\, U)$.

Exercice 1.17. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $Z = X + Y$, $W = X - Y$.

1. Montrer que Z et W sont indépendantes. Quelle est la loi de W ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Z.
3. Calculer $\mathbf{E}(XY \,|\, Z)$ et $\mathbf{E}(XYZ \,|\, Z)$.

Exercice 1.18. — *Partiel 2016*
Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. On pose $Z = X + 2Y$. Montrer qu'il existe un unique a tel que $X = aZ + W$ avec W indépendant de Z. En déduire l'expression de $E(X|Z)$ et $E(X^2|Z)$.

Exercice 1.19. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbf{R}^2$. On suppose que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$ avec $|\rho| < 1$. On pose $U = X - \rho Y$, $V = \sqrt{1 - \rho^2}Y$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X \,|\, Y)$.
2. Quelles sont les lois de U et de V ? Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{E}(U^2V^2)$, $\mathbf{E}(UV^3)$, $\mathbf{E}(V^4)$. En déduire $\mathbf{E}(X^2Y^2)$.

Exercice 1.20. Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où $\rho \in]-1, 1[$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. À quelle condition les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. On intoduit les coordonnées polaires (R, Φ) du couple (X_1, X_2) : $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ est définie par
$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin\Phi = \frac{X_2}{R} \text{ si } R > 0, \;\; \Phi = 0 \text{ si } R = 0.$$
Déterminer la densité du couple (R, Φ), puis celle de Φ.
3. Déterminer la densité de R lorsque $\rho = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires R et Φ dans ce cas ?

Chapitre 2

Filtration, temps d'arrêt et martingales

On rappelle les notations

$$s \wedge t := \min\{s,t\}, \qquad s \vee t := \max\{s,t\}, \quad s,t \in \mathbf{R}.$$

Sauf mention du contraire, toutes les martingales sont définies sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\ \mathscr{F},\ (\mathscr{F}_n),\ \mathbf{P})$.

2.1 Filtrations, temps d'arrêt, martingales

Exercice 2.1. Soient $(\Omega,\ \mathscr{F},\ (\mathscr{F}_n),\ \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré, T et S deux temps d'arrêt, $\mathscr{F}_T$ et $\mathscr{F}_S$ les tribus respectives des événements antérieurs à T et S. Montrer que (cf. cours)

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S+T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbf{N}$), alors $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_p$,
3. T est $\mathscr{F}_T$-mesurable,
4. Si $S \leq T$, $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$,
5. $\mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$,
6. $T+S$ est $\mathscr{F}_{S\vee T}$-mesurable,
7. $\{S<T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$, $\{S=T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$.

Exercice 2.2. — *Marche aléatoire et martingales*
Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = +1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1-p$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var} X_1$. On pose, $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $S_n - n\mu$ et $M_n := (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. On définit $\psi(x) = pe^x + (1-p)e^{-x}$, pour $x \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $e^{\theta S_n}/\psi(\theta)^n$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2.3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[0, 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n > X_0\},$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Exercice 2.4. Soit $(\xi_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables réelles, indépendantes, centrées et de carrés intégrables : $\mathbf{E}[\xi_n] = 0$ et $\sigma_n^2 = \mathbf{E}[\xi_n^2] < \infty$. On pose $S_n = \xi_0 + \cdots + \xi_n$ et on définit la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ par $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\tau = \inf\{n\,;\, |S_n| \geq x\}$ est un temps d'arrêt.
3. En utilisant τ, montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \ \geq x \Big) \leq x^{-2}\ \mathrm{Var}(S_n)\ ,$$

valable pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$. La quantité $\mathrm{Var}(S_n)$ est la variance de S_n, que l'on calculera en fonction de $(\sigma_i^2,\, i \geq 0)$.

Exercice 2.5. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On se donne un temps d'arrêt T pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. Dans cet exercice, on démontre presque intégralement le fait suivant : la tribu $\mathscr{F}_T$ est égale à la tribu

$$\mathscr{G} = \sigma(T, X_{0\wedge T}, X_{1\wedge T}, X_{2\wedge T}, X_{3\wedge T}, \ldots).$$

1. En partant de la définition de $\mathscr{G}$, montrer qu'on a l'inclusion $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_T$.
2. Pour établir l'inclusion réciproque, on fait l'hypothèse simplificatrice suivante : le temps d'arrêt T est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Autrement dit, T ne prend jamais de valeur infinie.
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que la tribu $\mathscr{F}_n$ est égale à l'ensemble des événements de la forme $\{(X_0, \ldots, X_n) \in B\}$, où B parcourt les boréliens de $\mathbf{R}^{n+1}$.
   (b) En utilisant l'hypothèse simplificatrice, établir l'inclusion $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{G}$.
   (c) Sans chercher à entrer dans les détails, essayer de comprendre pourquoi il est naturel que ce soit encore vrai sans l'hypothèse simplificatrice. C'est alors qu'une partie bien spécifique de la définition de $\mathscr{F}_T$ se met à jouer un rôle important : de quelle partie s'agit-il ?

Exercice 2.6. Soit $(\xi_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables telles que $\mathbf{E}[\xi_n] = 0$, pour tout $n \geq 0$. On fixe $p \geq 1$, on pose $X_0^{(p)} = X_1^{(p)} = \cdots = X_{p-1}^{(p)} = 0$ et pour tout $n \geq p$, on pose

$$X_n^{(p)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_p} \,.$$

Montrer que $(X_n^{(p)},\, n \geq 0)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)$, donnée par $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ si $n \geq 1$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Exercice 2.7. Soient $(X_n,\, n \geq 0)$ et $(Y_n,\, n \geq 0)$ deux sous-martingales pour une même filtration. Montrer que $(X_n \vee Y_n,\, n \geq 0)$ est également une sous-martingale.

Exercice 2.8. Trouver une sous-martingale dont le carré n'est pas une sous-martingale (*Indication : faire très simple*).

Exercice 2.9. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(T = n) = 1/(n(n+1))$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n = (n+1)\, \mathbf{1}_{T>n}$.

1. Montrer que (X_n) est une martingale positive. Vérifier que $X_n \to 0$ p.s. X_n converge-t-elle dans $\mathbf{L}^1$?
2. Quelle est la loi de $\sup_{n \geq 0} X_n$? En déduire $\mathbf{E}\big(\sup_{n \geq 0} X_n\big)$.

Exercice 2.10. Soient (X_n) et (Y_n) deux $(\mathscr{F}_n)$-martingales de carré intégrable.

1. Montrer que, pour $n \geq m$, $\mathbf{E}(X_m Y_n \,|\, \mathscr{F}_m) = X_m Y_m$ p.s. et donc en particulier que $\mathbf{E}(X_m X_n \,|\, \mathscr{F}_m) = X_m X_m$ p.s.
2. Montrer que, pour $m < n \leq p < q$, $\mathrm{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
3. Montrer que
$$\mathbf{E}((X_n - X_0)^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}((X_k - X_{k-1})^2).$$

Exercice 2.11. Montrer que toute filtration est de la forme $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, pour des variables aléatoires X_i bien choisies.

Exercice 2.12.

1. *Décomposition de Doob.* Soit (X_n) une sous-martingale pour une filtration $(\mathscr{F}_n)$. Démontrer que X_n s'écrit de manière unique sous la forme
$$X_n = M_n + A_n$$
où M_n est une martingale et A_n un processus croissant prévisible, i.e. $0 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots A_n \leq \cdots$ et, pour $n \geq 1$, A_n est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable. *(Indication : introduire les différences $X_k - \mathbf{E}[X_k|\mathscr{F}_{k-1}]$.)* On appelle cette décomposition la *décomposition de Doob.*
2. *Exemple 1.* Soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ des variables aléatoires réelles i.i.d., définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose que $\mathbf{E}(Y_1) = 0$ et que $\mathbf{E}(Y_1^2) < \infty$. On pose $X_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$.

(a) Montrer que (X_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale (X_n^2) (on posera $\sigma^2 = \mathbf{E}(Y_1^2)$).

(b) Soit T un temps d'arrêt (pour la filtration $\mathscr{F}_n$) intégrable. Montrer que

$$\sup_n \mathbf{E}(X_{T\wedge n}^2) < \infty.$$

En déduire que $\mathbf{E}(X_T^2) = \mathbf{E}(T)\sigma^2$.

3. *Exemple 2.* On garde les hypothèses et notations précédentes. On suppose en particulier que les variables aléatoires Y_n ont pour loi commune : $\mathbf{P}(Y_n = -1) = \mathbf{P}(Y_n = 1) = 1/2$.
On pose

$$M_0 = 0 \text{ et, pour } n \geq 1,\ M_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(X_{k-1})Y_k$$

où $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $= -1$ si $x < 0$, $= 0$ si $x = 0$.

(a) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale (M_n^2).

(b) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale $(|X_n|,\, n \geq 0)$?

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, M_n est $\sigma(|X_1|, \cdots, |X_n|)$-mesurable.

Exercice 2.13. On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit $S_0 = x > 0$, le capital initial, $c > 0$ le montant des revenus des cotisations par an et $X_n \geq 0$ le coût des dommages pour l'année n. Le capital à la fin de l'année n est donc $S_n = x + nc - \sum_{k=1}^{n} X_k$. L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, c'est-à-dire si le temps d'arrêt $\tau = \inf\{k \geq 0; S_k < 0\}$ est fini.

On suppose $(X_k,\, k \geq 1)$ i.i.d. positives avec $\mathbf{E}(e^{\lambda X_k}) < \infty$, $\forall\, \lambda > 0$. Le but ici est de majorer la probabilité de ruine $\mathbf{P}(\tau < \infty)$. On pose $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

1. Vérifier que $\mathbf{E}(X_1) > c$ implique $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$.
2. On suppose dorénavant que $\mathbf{E}(X_1) < c$ et $\mathbf{P}(X_1 > c) > 0$. Soit $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda(X_1 - c)})$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\varphi'' > 0$, $\varphi'(0) < 0$ et

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \infty.$$

Dessiner le graphe de φ et montrer qu'il existe un et un seul $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{\lambda_0 X_1}) = e^{\lambda_0 c}$.

3. Montrer que $V_n = \exp(-\lambda_0 S_n + \lambda_0 x)$ est une martingale positive.
4. Pour $N \geq 1$ montrer que

$$\mathbf{E}(V_N\, \mathbf{1}_{\{\tau \leq N\}}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}(V_k\, \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}) \geq e^{\lambda_0 x}\, \mathbf{P}(\tau \leq N).$$

5. En déduire que $\mathbf{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$.

Théorèmes d'arrêt

Exercice 2.14. — *Partiel 2016*
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbf{P}(X_1 = +1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et soit la filtration $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On fixe un entier $N \geq 1$, et pour $x \in \{0, \ldots, N\}$, on considère la marche aléatoire issue de x : $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$ $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_i$.

1. Montrer que S_n et $M_n := S_n^2 - n$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On considère le temps $T := \inf\{n\,;\, S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
3. Pour $m \geq 0$, on introduit l'événement $A_m = \{X_{mN+1} = \cdots = X_{(m+1)N} = +1\}$. Montrer que pour $q \geq 1$, $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$, et en déduire une majoration de $\mathbf{P}(T > qN)$. Montrer que $\mathbf{E}[T] = \sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(T > j) < +\infty$ et que $T < +\infty$ p.s.
4. Calculer $\mathbf{E}[S_T]$ et en déduire que $\mathbf{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$.
5. Calculer $\mathbf{E}[M_T]$ et en déduire $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 2.15. — *Un jeu de cartes à un seul joueur*
On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une ; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire *"rouge la prochaine !"*, il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n (pour $0 \leq n \leq 51$) le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement {la n-ième carte retournée est rouge}. Calculer $\mathbf{P}(A_{n+1} \,|\, R_n = j)$, pour $j \in \{0, \cdots, 26\}$, $n \in \{0, \cdots, 51\}$, $0 \leq j \leq 52 - n$.
2. Calculer $\mathbf{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbf{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathscr{F}_n)$, où $\mathscr{F}_n := \sigma(R_0, \cdots, R_n)$, $n \in \{0, \cdots, 50\}$, $j \in \{0, \cdots, 26\}$. Montrer que
$$\mathbf{E}(R_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \qquad n = 0, \cdots, 51.$$
Montrer que $X_n := R_n/(52 - n)$, $n = 0, \cdots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)$ et que $X_n = \mathbf{P}(A_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$.
3. Le joueur décide d'annoncer *"rouge la prochaine !"* après avoir retourné τ cartes, où τ est un temps d'arrêt. Montrer que la probabilité de victoire est $\mathbf{E}(X_\tau)$. En déduire que pour toute stratégie, la probabilité de victoire dans ce jeu est toujours la même et la calculer.

Exercice 2.16. Soit $(\xi_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = 1/2$. La variable aléatoire ξ_n s'interprète comme un pari qui est gagné si $\xi_n = 1$ et qui est perdu si $\xi_n = -1$. À l'étape n du jeu, un joueur mise une certaine somme $S_n > 0$, il remporte $2S_n$ (en faisant ainsi un gain de S_n) si $\xi_n = 1$ (il gagne le pari) et perd sa mise si $\xi_n = -1$ (il perd le pari). On pose $X_0 = S_0 = 0$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geq 1$, on pose
$$X_n = \sum_{k=1}^n S_k \xi_k \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)\ .$$

La variable aléatoire X_n représente le gain algébrique du joueur après la n-ième partie. Comme le joueur ne devine pas l'avenir, S_n ne dépend que de $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$, c'est-à-dire que $(S_n,\, n \geq 1)$ est $(\mathscr{F}_n)$-prévisible. On suppose que pour tout $n \geq 1$, S_n est intégrable.

1. Montrer que $(X_n,\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale.
2. Le joueur adopte la stratégie suivante : à chaque pari qu'il perd, le joueur double la mise pour le pari suivant. Il arrête de jouer lorsqu'il gagne au moins une fois. On suppose qu'il part d'une mise initiale de un euros. On a alors $S_n = 2^{n-1}\mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$ où T désigne la première fois où le joueur gagne.

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, \xi_n = 1\}.$$

   Montrer que $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Calculer le gain moyen du joueur, c'est-à-dire $\mathbf{E}[X_T]$. Si cela vous semble merveilleux, calculez $\mathbf{E}[X_{T-1}]$ qui est la perte moyenne du joueur juste avant qu'il ne gagne. Que pensez-vous de cette stratégie ?
3. On suppose que le joueur ne dispose que d'une réserve d'argent égale à $2^{n_0} - 1$ euros (avec $n_0 \geq 1$) et que les mises doivent être payées comptant, ce qui force le joueur à quitter le jeu lorsqu'il n'a plus d'argent. Il choisit prudemment de s'arrêter la première fois qu'il gagne. Quelle est la probabilité qu'il termine le jeu faute d'argent à jouer ? Si on ne joue qu'une fois à ce jeu dans sa vie, faut-il jouer ? Quelle est le gain (algébrique) moyen ?

Exercice 2.17. — *Partiel 2017*
Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}\left(Z_n = 1\right) = \mathbf{P}\left(Z_n = -1\right) = 1/2.$$

Soit $S_0 = 0$ et $S_n = Z_1 + \cdots Z_n$ pour $n \geq 1$. On définit $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, \cdots, Z_n)$ pour $n \geq 1$.

Soit $a \in \mathbf{N}^*$ et λ tel que $0 < \lambda < \frac{\pi}{2a}$. Enfin, on définit $\tau = \inf\{k \in \mathbf{N} \,:\, |S_k| = a\}$ le temps de sortie de l'intervalle $]-a, a[$.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que $X_n = (\cos(\lambda))^{-n}\cos(\lambda S_n)$ est une martingale.
3. Montrer que $\mathbf{E}(X_{n\wedge\tau}) \geq \cos(\lambda a)\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-n\wedge\tau})$.
4. Montrer que $\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$ et que $\tau < \infty$ p.s..
5. Montrer que la martingale $(X_{n\wedge\tau})$ est fermée.
6. Que vaut $\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-\tau})$? Est-il vrai que τ appartient à $\mathbf{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$?

Exercice 2.18. — *Examen 2019*
Donner un énoncé précis et une démonstration du fait suivant : lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

Convergence de martingales

Exercice 2.19. Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q, \qquad \mathbf{P}(Y_1 = 1) = p, \qquad \text{avec } p + q = 1,\ 0 < p < q < 1.$$

On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{X_n}$.

1. Montrer que (Z_n) est une martingale positive. Montrer que $Z_n \to 0$ p.s.
2. On pose, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0\ ;\ X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k \wedge n})$ et la décomposition

$$Z_{T_k \wedge n} = Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} + Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k = \infty\}}\,,$$

   montrer que

$$\mathbf{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3. En déduire que $\sup_{n \geq 0} X_n$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - p/q$, et ainsi que

$$\mathbf{E}(\sup_{n \geq 0} X_n) = \frac{p}{q - p}.$$

Exercice 2.20. Soient $Y_1, Y_2, \cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On pose

$$S_0 = 0\,, \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n\,, \quad n \geq 1\,, \quad \mathscr{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n)$$

et, pour tout θ réel ,

$$\varphi(\theta) = \mathbf{E}(e^{\theta Y_1})\,, \quad X_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\varphi(\theta)^n}.$$

1. Donner le tableau de variation de la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta)$.
2. Montrer que (X_n) est une martingale et que, dans le cas où $\theta \neq 0$, X_n converge p.s. vers 0.
3. Soit $T = \inf\{n > 0;\ S_n = 1\}$. Montrer que, pour $\theta > \max(0, \ln(q/p))$, on a

$$\mathbf{E}\big(\varphi(\theta)^{-T}\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\big) = e^{-\theta}.$$

   En déduire que $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ si $p \geq q$, $\mathbf{P}(T < \infty) = p/q$ si $p < q$, et

$$\mathbf{E}\big(s^T\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\big) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Exercice 2.21. Soit $(\sigma_n,\, n \geq 1)$ une suite i.i.d. telle que $\mathbf{P}(\sigma_n = 1) = \mathbf{P}(\sigma_n = -1) = \frac{1}{2}$. Introduire une martingale opportune pour montrer la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n}.$$

Exercice 2.22. On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après la n-ième partie le capital du joueur est $X_n \in [0,1]$ et le capital du croupier est $1 - X_n$. Au début le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0,1[$ et le capital du croupier est $1 - p$.

La règle du jeu est que, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner l'$(n+1)$-ième partie est X_n, et la probabilité de perdre est $1 - X_n$; si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier.

Plus précisément, on se donne une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$ de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes entre elles et indépendantes de X_0, et on pose :

$$X_{n+1} = \left(X_n + \frac{1 - X_n}{2}\right) \mathbf{1}_{U_{n+1} < X_n} + \frac{X_n}{2} \mathbf{1}_{U_{n+1} \geq X_n}.$$

On considère alors la filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

1. Prouver que (X_n) est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Prouver que X_n converge p.s. et dans $\mathbf{L}^2$ vers une variable Z.
3. Prouver que $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \mathbf{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(Z) = p$.
4. Prouver que toute variable aléatoire W, telle que $0 \leq W \leq 1$ et $\mathbf{E}(W(1-W)) = 0$, est une variable aléatoire de Bernoulli. En déduire la loi de Z.
5. Pour tout $n \geq 0$, soit $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Montrer que
$$\mathbf{P}(Y_n = 0 \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 - X_n, \qquad \mathbf{P}(Y_n = 1 \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n,$$
et en déduire la loi de Y_n.
6. Considérer les événements $G_n := \{Y_n = 1\}$, $P_n := \{Y_n = 0\}$. Prouver que Y_n converge presque sûrement vers Z et en déduire que
$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} G_n\right) = p, \qquad \mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n\right) = 1 - p.$$
Les variables aléatoires Y_n, $n \geq 0$, sont-elles indépendantes ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Exercice 2.23. On a une population de taille fixée $N \in \mathbf{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et on pose $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. On a alors $\mathbf{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathscr{F}_n) = \binom{N}{i} \left(\frac{X_n}{N}\right)^i (1 - \frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \cdots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.

3. Calculer $\mathbf{E}(X_\infty)$ et $\mathbf{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 2.24. Soient $(\xi_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,\,1)$ et $(\alpha_n,\, n \geq 1)$ une suite de réels. On pose $X_0 := 1$ et $\mathscr{F}_0 := \{\varnothing,\, \Omega\}$, et pour $n \geq 1$,

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\, \cdots,\, \xi_n)\,, \qquad X_n = \exp\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\Big)\,.$$

1. Montrer que (X_n) est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale et que X_n converge p.s.
2. On suppose que $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 = \infty$. En considérant la suite $(X_n^\lambda)_{n\geq 1}$ pour un $\lambda > 0$ bien choisi, montrer que $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle fermée ?

Exercice 2.25. — *Urne de Polya à deux couleurs*
On considère qu'une urne contient, à l'instant 0, $a > 0$ boules rouges et $b > 0$ boules blanches. On suppose que l'on dispose, à côté, d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges. À l'étape 1, on tire une boule au hasard dans l'urne : si elle est blanche, on remet cette boule en y ajoutant une boule blanche prise dans le stock ; si la boule tirée est rouge, on la remet et on y ajoute une boule rouge prise dans le stock. On fait de même à l'étape 2, 3 ... etc, en supposant qu'à chaque étape les tirages sont uniformes et indépendants. On note B_n le nombre de boules blanches à l'instant n, d'où il y a au total $a+b+n$ boules dans l'urne. La proportion de boules blanches à l'instant n est notée $X_n = B_n/(a+b+n)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(B_0, \cdots, B_n)$.

1. Montrer que $(X_n,\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale positive avec $|X_n| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. En déduire que la limite $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a lieu presque sûrement et dans $\mathbf{L}^p$, pour tout $p \in [1, \infty[$.
2. Montrer que la limite X_∞ vérifie $\mathbf{P}(X_\infty = 0) < 1$ et $\mathbf{P}(X_\infty = 1) < 1$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la coloration de l'urne au cours du temps et asymptotiquement ?
3. On fixe $k \in \mathbf{N}$, et pose, pour tout $n \geq 0$,

$$Y_n^{(k)} = \frac{B_n(B_n+1)\cdots(B_n+k-1)}{(a+b+n)(a+b+n+1)\cdots(a+b+n+k-1)}.$$

   Montrer que $(Y_n^{(k)},\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale positive, avec $|Y_n^{(k)}| \leq 1$, $\forall n$. En déduire qu'elle converge p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers une limite notée $Y_\infty^{(k)}$. Calculer $\mathbf{E}[Y_\infty^{(k)}]$ en fonction de b et de a.
4. Montrer que $Y_\infty^{(k)} = (X_\infty)^k$ p.s. En déduire $\mathbf{E}[(X_\infty)^k]$ explicitement en fonction de b et de a.
5. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ dont la loi admet la densité $f(x) = C_{a,b}(1-x)^{a-1}x^{b-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Trouver la constante $C_{a,b}$. Montrer que $\mathbf{E}[Z^k] = \mathbf{E}[(X_\infty)^k]$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. En déduire que Z et X_∞ ont la même loi, autrement dit que X_∞ suit la loi bêta de paramètres a et b.

Exercice 2.26. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbf{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbf{P}(U_n = 0) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. On pose

$$T = \inf\{n \geq 0 \; ; \; U_n = 1\}, \quad T = \infty \text{ si } U_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = q^{-n}\mathbf{1}_{\{T>n\}}$.

1. Montrer que (X_n) est une martingale (on précisera la filtration $(\mathscr{F}_n)$).
2. Montrer que X_n converge p.s. vers 0.
3. A-t-on $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$? A-t-on $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$?
4. La martingale (X_n) est-elle fermée ?
5. La suite $Y_n = \sqrt{X_n}$ est-elle uniformément intégrable ?

Exercice 2.27. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit η_k une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \varepsilon_k^2)$, avec $\varepsilon_k > 0$. On suppose que X, η_0, η_1, $\cdots$ sont indépendantes. On définit $Y_k = X + \eta_k$, $k \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$.

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire X avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience k donne comme résultat $Y_k = X + \eta_k$, où η_k est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après n expériences, la meilleure prévision possible sur X est

$$X_n := \mathbf{E}(X \mid \mathscr{F}_n) = \mathbf{E}(X \mid Y_0, \cdots, Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de X quand n tend vers l'infini, et notamment si X_n converge vers X.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et que X_n converge p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers une variable aléatoire X_∞. Quelle est la relation entre X et X_∞ ?
2. Montrer que $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^2$; b) $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^1$; c) X est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable.
3. Calculer $\mathbf{E}(Y_i Y_j)$, $\mathbf{E}(Y_i^2)$ et $\mathbf{E}(XY_i)$ pour $i, j \geq 0$, $i \neq j$. Montrer que pour tous $n \geq 0$ et $i = 0, \cdots, n$, on a $\mathbf{E}(Z_n Y_i) = 0$, où
$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} \, Y_j.$$
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ la variable Z_n est indépendante de $\{Y_0, \cdots, Y_n\}$ et en déduire que $X_n = X - Z_n$.
5. Calculer $\mathbf{E}((X - X_n)^2)$ et montrer que $X_n \to X$ dans $\mathbf{L}^2$ si et seulement si $\sum_{i=0}^\infty \varepsilon_i^{-2} = \infty$.
6. Discuter le cas $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$, notamment les liens avec la loi des grands nombres.

Exercice 2.28. — *D'après l'examen 2020*
Alexandre affirme qu'une sur-martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas tendre presque sûrement vers $+\infty$. Il argumente qu'une telle sur-martingale serait minorée et par conséquent convergerait vers une variable aléatoire finie. Bertrand est assez d'accord avec Alexandre et donne un autre argument par l'absurde : la suite $(\mathbf{E}(X_n))_{n\geq 0}$ est décroissante, et si $\liminf_n X_n = \lim_n X_n = +\infty$ p.s on aurait par Fatou :

$$+\infty = \mathbf{E}[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n \mathbf{E}[X_n] \leq \mathbf{E}[X_0] < +\infty.$$

Cécile n'est pas d'accord avec les arguments précédents et affirme qu'elle sait construire un exemple de sur-martingale qui tend presque sûrement vers $+\infty$. Qui croire ?

Exercice 2.29. Soit $(Y_n,\, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \cdots Y_n$.

1. Montrer que X_n, resp. $\sqrt{X_n}$, est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale, resp. surmartingale.
2. Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\sqrt{Y_k})$ converge dans $\mathbf{R}_+$. On note ℓ sa limite.
3. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle fermée ?
4. On suppose $\ell > 0$. Montrer que $\sqrt{X_n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2$. En déduire que (X_n) est fermée.
5. Application
   Soient p et q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même loi q. On suppose que, pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$ (notations : $p(x) := p(\{x\})$ et $q(x) := q(\{x\})$, $x \in E$). On pose
   $$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$
   À partir de ce qui précède, montrer que $X_n \to 0$ p.s.

Exercice 2.30. On sait (cf. cours) que, pour une martingale (X_n), $\mathbf{E}[(\sup_{n\geq 0}|X_n|)^2] \leq 4\sup_{n\geq 0}\mathbf{E}(X_n^2)$: ainsi, si $\sup_{n\geq 0}\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$, alors, $\sup_{n\geq 0}|X_n| \in \mathbf{L}^2$.

Dans cet exercice on se propose de prouver que, si $\sup_{n\geq 0}\mathbf{E}[|X_n|\ln^+(|X_n|)] < \infty$, alors $\sup_n |X_n| \in \mathbf{L}^1$. [Notation : $\ln^+ x := \ln\max\{x,\, 1\}$.]

Soit (X_n) une martingale.

1. Montrer que, pour $u \geq 1$, $\dfrac{1}{u}\ln u \leq \dfrac{1}{e}$. En déduire que pour tous réels $0 < x \leq y$, on a $x\ln y \leq x \ln x + \frac{y}{e}$, puis $x \ln y \leq x\ln^+ x + \frac{y}{e}$, et enfin $x\ln^+ y \leq x \ln^+ x + \frac{y}{e}$.
2. Rappelons la version suivante de l'inégalité maximale : si $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une sous-martingale, alors
   $$\lambda\, \mathbf{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq \lambda) \leq \mathbf{E}(M_n\, \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq \lambda\}})$$
   pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $\lambda \geq 0$.

À partir de l'inégalité maximale appliquée à la sous-martingale $(|X_n|)$, montrer que

$$\int_1^\infty \mathbf{P}\big(\max_{0\le k\le n}|X_k|\ge a\big)da \le \mathbf{E}|X_n|\ln^+\big(\max_{0\le k\le n}|X_k|\big).$$

3. Conclure que

$$\mathbf{E}\big(\sup_{n\ge 0}|X_n|\big) \le \frac{e}{e-1}\big(1+\sup_{n\ge 0}\mathbf{E}(|X_n|\ln^+|X_n|)\big).$$

Exercice 2.31. — *Pour aller plus loin*

Le but de cet exercice atypique est de traiter de manière probabiliste par la théorie des martingales deux questions d'analyse. Pour cela, nous allons construire un espace de probabilité filtré explicite. Soit $\Omega = [0,1[$ et $\mathscr{F}$ la tribu borélienne sur Ω. Soit $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $0 \le k \le 2^n - 1[$, soit $B_{n,k} = [k/2^n, (k+1)/2^n[$. Soit $\mathscr{F}_n$ la sous-tribu de $\mathscr{F}$ engendrée par la partition $(B_{n,k})_{0\le k<2^n}$. Nous rappelons que la tribu engendrée par toutes les $\mathscr{F}_n$ est la tribu borélienne.

Toute fonction mesurable F sur $[0,1[$ à valeurs réelles peut ainsi être considérée comme une variable aléatoire sur Ω.

1. Montrer que les $\mathscr{F}_n$ forment une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Montrer que pour tout $n \ge 1$ et $0 \le k < 2^n$, $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_{n,k}}|\mathscr{F}_{n-1}) = (1/2)\mathbf{1}_{B_{n-1,p(k)}}$ où $p(k)$ est l'unique entier tel que $k = 2p(k)$ ou $k = 2p(k)+1$.
3. Supposons F intégrable sur $[0,1[$. Soit $F_n = \mathbf{E}(F|\mathscr{F}_n)$. Montrer que, pour presque tout $x \in \Omega$,
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(2^n\int_{B_{n,k}}F(x)dx\right)\mathbf{1}_{B_{n,k}}(x).$$
4. Montrer que $(F_n, n \ge 0)$ est une martingale et étudier sa convergence presque sûre et dans $\mathbf{L}^1$.
5. En déduire le résultat d'analyse suivant : toute fonction f intégrable sur $[0,1[$ est égale presque partout à la limite de ses moyennes locales $2^n\int_{B_{n,\lfloor 2^n x\rfloor}} f(y)dy$.
6. Supposons que F admette une limite l en 1 et que F étendue sur $[0,1]$ soit K-Lipschitzienne. Soit G_n la fonction définie pour tout $x \in \Omega$ par :
$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1}2^n\left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\mathbf{1}_{B_{n,k}}(x).$$
avec la convention $F(1) = l$. Montrer que $|G_n(x)| < K$ pour tout $x \in [0,1[$ et que, pour tout $x \in [0,1[$, on a
$$\left|F_n(x) - F(0) - \int_0^x G_n(u)du\right| \le 2K/2^n$$
7. Montrer que G_n est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n, n \ge 0)$ et montrer que $\sup_n \mathbf{E}(G_n^2) < \infty$. Conclure au sujet de la convergence presque sûre, dans $\mathbf{L}^1$ et dans $\mathbf{L}^2$ de G_n vers une variable aléatoire G. Montrer que pour tout x, $\int_0^x G_n(u)du$ converge quand $n \to \infty$.

8. En déduire le résultat d'analyse suivant : pour tout fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ intégrable et K-Lipschitzienne, il existe une fonction g mesurable bornée sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

Chapitre 3

Chaînes de Markov

Matrices de transition, calculs

Exercice 3.1. Soient p et q dans $[0,1]$. Une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2\}$ a toujours une matrice de transition de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. Décrire la chaîne dans le cas particulier où p et q sont tous les deux dans $\{0,1\}$.

On supposera par la suite que (p,q) est différent de $(1,1)$ et de $(0,0)$.

2. Calculer M^n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ pour tout $i,j \in \{1,2\}$.
3. Un virus peut exister sous N formes différentes. À chaque instant, avec probabilité $1-a$, il reste sous la forme où il est, ou avec la probabilité respective a, il mute sous une forme différente, uniformément choisie parmi les autres $N-1$ formes. Quelle est la probabilité que la forme du virus au temps n soit la même qu'au temps 0 ?
   Suggestion : réduire le problème à l'analyse d'une chaîne de Markov à deux états.

Exercice 3.2. À une probabilité quelconque $(p_i)_{i\geq 1}$ sur $\{1,\, 2,\, \cdots\}$ on associe une chaîne de Markov $(X_n,\, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbf{N}$, de loi initiale δ_0 et de matrice de transition Q définie par

$$Q(0,i) = p_{i+1}\,, \quad Q(i+1,i) = 1\,, \quad i \geq 0\,.$$

On pose $S = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$, avec la convention $\inf \varnothing = \infty$ (premier temps de retour à l'origine). Quelle est la loi de S ?

Exercice 3.3. Un joueur fréquente trois casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité $\frac{1}{2}$. Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos suivant une loi de probabilité μ sur $E := \{1,2,3\}$. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour n. On considérera la suite $(X_n,\, n \geq 0)$ comme une chaîne de Markov définie sur $(\Omega, \mathscr{F})$ sous les lois $\mathbf{P}_\mu$; on précisera la matrice de transition Q.

1. Calculer les puissances Q^n de Q, puis $\lim_{n\to\infty} Q^n$.

2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\mu(X_n = j)$, pour $j = 1$, 2 et 3.

Exercice 3.4. Soient $(Y_n,\, n \geq 1)$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0,\, 1[$ et $X_0 := 0$, $X_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geq 1$. Remarquer que $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n. Soit pour tout $y \in \mathbf{N}$ le temps d'arrêt $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ ($\inf \varnothing := \infty$).

1. Montrer, à l'aide de la loi des grands nombres, que $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ p.s. et en déduire que $\mathbf{P}(T_y < \infty) = 1$.
2. Montrer que $M_n := X_n - np$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)$ engendrée par (X_n).
3. Calculer $\mathbf{E}(T_y)$, en utilisant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T_y})$.

Soit $N(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k = y\}}$ le nombre de visites de (X_n) à $y \in \mathbf{N}$.

4. Calculer $\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ sur les événements $\{k < T_y\}$, $\{T_y \leq k < T_{y+1}\}$ et $\{k \geq T_{y+1}\}$, respectivement. En déduire que $N(y) = T_{y+1} - T_y$ p.s. et la valeur de $\mathbf{E}[N(y)]$.

On remarque que (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition Q donnée par $Q(x, x) = 1 - p$, $Q(x, x + 1) = p$, $x \in \mathbf{N}$ (on ne demande pas de le prouver).

5. Calculer la loi de X_n et la loi de T_1
6. Prouver, à l'aide de la loi de Markov forte et du point 4, que $N(y)$ a même loi que T_1.
7. Calculer la loi de T_y.

Exercice 3.5. On travaille avec les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ de l'espace canonique correspondant à un ensemble dénombrable E. Sous la probabilité $\mathbf{P}_\mu$, la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov à de loi initiale μ et de matrice de transition Q.

1. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbf{P}_\mu(T < \infty) = 1$. Que peut-on dire de la suite $(X_{T+n},\, n \geq 0)$?
2. Soit $S = \mathscr{S}((X_n)_{n\geq 0})$ un temps d'arrêt tel que, pour tout $x \in E$, $\mathbf{P}_x(S < \infty) = 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,
$$S_{n+1} = S_n + \mathscr{S}((X_{S_n+k})_{k\geq 0}).$$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, les S_n sont $\mathbf{P}_x$-p.s. finis.
   (b) Montrer que la suite $(X_{S_n},\, n \geq 0)$ associée à la filtration $(\mathscr{F}_{S_n},\, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par
$$Q_S(x, y) = \mathbf{P}_x(X_S = y).$$

Exercice 3.6. Dans cet exercice, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et une famille de probabilités $\mathbf{P}_\mu$ telles que sous $\mathbf{P}_\mu$, X_0 suive la loi μ et la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ est i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et indépendante de X_0 : $\mathbf{P}(X_1 = y) = p^{y-1}(1 - p)$. On peut voir $(X_k)_{k\geq 0}$ comme une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, de matrice de transition
$$Q(x, y) = p^{y-1}\,(1 - p), \qquad x, y \in \mathbf{N}^*.$$

Comme d'habitude, la filtration est définie en posant $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

On introduit le temps d'arrêt τ défini par

$$\tau = \mathscr{T}((X_k)_{k\geq 0}) := \inf\{k \geq 1 : X_k > X_0\},$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$. La fonction $\mathscr{T}$ permet de définir les temps des records successifs de la suite (X_n) par $\tau_0 = 0$ et

$$\tau_{n+1} := \tau_n + \mathscr{T}((X_{\tau_n+k})_{k\geq 0}) = \inf\{k > \tau_n : X_k > X_{\tau_n}\}.$$

On note $Z_k := X_{\tau_k}$, les records successifs.

1. Soit x, y et m trois entiers strictement positifs. Calculer
$$\mathbf{P}_x(X_1 \leq x, \cdots, X_{m-1} \leq x, X_m > y).$$
2. Calculer $\mathbf{P}_x(\tau = m,\ X_m > y)$ en séparant les cas $y \leq x$ et $x < y$. Montrer que, sous $\mathbf{P}_x$, τ est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que X_τ a la même loi que $x + X_1$. Le couple (τ, X_τ) est-il indépendant sous $\mathbf{P}_x$?
3. Montrer que $\pi(x) = p^{x-1}(1-p),\ x \in \mathbf{N}^*$, est la seule mesure de probabilité invariante pour Q. Montrer que $\mathbf{P}_\pi(\tau < \infty) = 1$ et $\mathbf{E}_\pi(\tau) = \infty$.
4. Montrer que $(Z_k,\ k \geq 0)$ est une chaîne de Markov dans $\mathbf{N}^*$ sous $\mathbf{P}_x$. Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
5. Calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{k+1} - Z_k)$ sachant $\mathscr{F}_{\tau_k}$. Montrer que la suite $(Z_k - Z_{k-1},\ n \geq 1)$ est i.i.d. sous $\mathbf{P}_x$.
6. Calculer la limite $\mathbf{P}_x$-presque sûre de Z_k/k, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$.

Récurrence, transience, irréductibilité

Exercice 3.7. On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ? Déterminer les états x tels que $G(x, x) = \infty$, où G est la fonction de Green. Déterminer également si $G(x, y) = 0$.
2. Montrer que G satisfait la formule $G = I + QG$, où I est la matrice identité. En déduire la valeur de G et donc les valeurs de $\mathbf{E}_x(N_y)$ pour tous $x, y \in E$, où N_y est le nombre de visite de X à y.
3. On s'intéresse à présent au temps de première visite en 1 (i.e., $T_{\{1\}} = \inf\{n \geq 0; X_n = 1\}$) en fonction du point de départ. On introduit alors $v(x) = \mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$. Montrer que
$$v(x) = 1 + (Qv)(x), \quad x \in \{2, 3\}, \qquad v(1) = 0.$$
En déduire la valeur de $\mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$ pour tout $x \in E$.

4. Que peut-on dire de $\mathbf{E}_x(T_{\{3\}})$ où $T_{\{3\}}$ est le temps de première visite de $\{3\}$?
5. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.
6. Soit $T_{\{1,2\}}$ le premier temps de visite de X à l'ensemble $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $T_{\{1,2\}}$ sous $\mathbf{P}_3$?
7. Remarquer que $\mathbf{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbf{E}_3(N_3)$. Quelle en est la raison ?

Exercice 3.8. Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q. Soient $x, y, z \in E$. Prouver que si y transient, alors, en notant $T_y = \inf\{n \geq 0, X_n = y\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}} \sum_{n\geq T_y} \mathbf{1}_{\{X_n=z\}}\Big) &= \mathbf{P}_x(T_y < \infty)G(y, z) \\ &= \frac{G(x, y)}{G(y, y)}G(y, z),\end{aligned}$$

où l'x en indice signifie qu'on prend pour loi initiale la masse de Dirac en x, c'est-à-dire $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Exercice 3.9. Soit $Q := (Q(x,\, y),\, x,\, y \in E)$ une matrice de transition sur un espace d'états dénombrable E et soit π une mesure de probabilité invariante telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Soit $Q^* := (Q^*(x,\, y),\, x,\, y \in E)$ définie par

$$Q^*(x, y) := \frac{Q(y,\, x)\pi(y)}{\pi(x)}, \qquad x,\, y \in E.$$

1. Montrer que Q^* est une matrice de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q^*. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Q^* = Q$.
2. Soit $(X_n,\, n \geq 0)$ une chaîne de Markov avec matrice de transition Q et telle que X_0 soit de loi π. Soit $N \in \mathbf{N}$ fixé et $X^*_n := X_{N-n}$. Calculer $\mathbf{P}(X^*_0 = x_0, \cdots , X^*_N = x_N)$ et en déduire que $(X^*_n,\, n \in [0,\, N])$ est, sous $\mathbf{P}$, une chaîne de Markov avec loi initiale π et matrice de transition Q^*.
3. Soit maintenant $p \in]0, 1[$ et Q la matrice de transition sur $\mathbf{N} = \{0, 1, \cdots\}$ donnée par
$$Q(x, y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1 - p)\mathbf{1}_{\{y=0\}}, \qquad x, y \in \mathbf{N}.$$
Calculer une mesure de probabilité invariante π et dire si elle est unique. Calculer Q^* et vérifier que dans ce cas
$$Q^*(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y)\mathbf{1}_{\{x=0\}}, \qquad x, y \in \mathbf{N}.$$
Dessiner les trajectoires typiques de X et X^* dans ce cas.

Exercice 3.10. On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{N}$ et de matrice de transition $Q := (Q(i,\, j),\, i,\, j \in \mathbf{N})$ définie par

$$Q(i, 0) = q_i \text{ et } Q(i, i + 1) = p_i \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}\,,$$

où, pour tout i, $p_i + q_i = 1$, $p_i > 0, q_i > 0$.

1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. À quelle condition sur les p_i existe-t-il une mesure invariante ? Dans ce cas prouver que la chaîne est récurrente.
3. Sous quelle condition sur les p_i la chaîne est-elle récurrente positive ?

Exercice 3.11. Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0,\, 1\}$ avec $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. On s'intéresse aux blocs de 3 zéros consécutifs sans compter 2 fois 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent. Lorsqu'il y a 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent, on compte seulement le premier.
On note N_n le nombre de blocs comptés entre les instants 1 et n. On veut calculer la limite de la fréquence empirique de ces blocs, i.e., la limite p.s. de N_n/n.
Pour ce faire on utilise une chaîne de Markov $Y = (Y_n,\, n \geq 0)$ à 4 états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0 (0 état de repos) qui mémorise le nombre de zéros consécutifs et retombe à l'état de repos lorsqu'on a compté 3 zéros consécutifs. Par exemple : si

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, \cdots) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \cdots),$$

alors

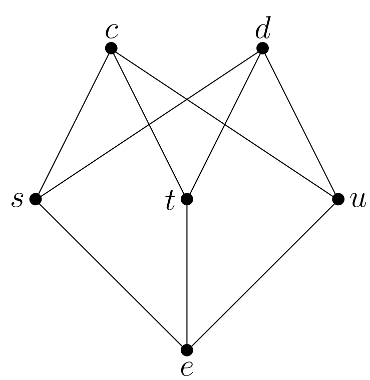
$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, \cdots) = (1, 0, 1, 2, 3, 1, 0, \cdots)$$

et $N_7 = 1 = \sum_{k=1}^{7} \mathbf{1}_{\{Y_k = 3\}}$. La matrice de transition $Q := (p(x,\, y),\, x,\, y \in \{0,\, 1,\, 2,\, 3\})$ de la chaîne Y est donnée par

$$\begin{aligned} p(0,0) &= p(0,1) = \frac{1}{2}, \qquad p(1,0) = p(1,2) = \frac{1}{2} \\ p(2,0) &= p(2,3) = \frac{1}{2}, \qquad p(3,0) = p(3,1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que la chaîne Y est irréductible récurrente positive. Calculer sa probabilité invariante.
2. En déduire la limite p.s. de N_n/n.

Exercice 3.12. — *Examen 2017*
On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{e, s, t, u, c, d\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
2. Déterminer toutes les mesure de probabilités invariantes de cette chaîne de Markov.
3. Entre deux visites en t, combien de fois la chaîne de Markov passe-t-elle, en moyenne, en c ?
4. Partant de u, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en u ?
5. Partant de e, quelle proportion du temps la chaîne passe-t-elle, asymptotiquement, dans le sous-ensemble $\{c, d\}$ de E ?
6. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à atteindre d ?

Convergence vers la loi stationnaire

Exercice 3.13. On considère une chaîne de Markov (X_n) dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition $Q := (Q(x, y), x, y \in E)$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à x, $\mathbf{E}_x(S_x)$.
4. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités de transition $[Q^n](x, y)$, quand $n \to \infty$?

Exercice 3.14. — *Deuxième session 2017*
Un professeur possède un nombre entier $N \geq 1$ de parapluies, répartis entre son bureau et son domicile. Il se rend à son bureau à pied le matin et rentre chez lui à pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un à sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'à chaque trajet du professeur il pleut avec probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des trajets précédents.

1. Écrire la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{0, ..., N\}$ qui modélise convenablement ce problème, l'entier k correspondant à la situation où il y a k parapluies à l'endroit où se trouve le professeur.
2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
3. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne.
4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? Vérifier que pour $p = \frac{1}{2}$, cette proportion vaut $\frac{1}{4N+2}$.
5. Quelle est la période de la chaîne de Markov que nous sommes en train d'étudier ?

Exercice 3.15. — *Produit de 2 chaînes indépendantes*
Soient $X = (X_n)$ et $Y = (Y_n)$ deux chaînes de Markov indépendantes d'espaces d'états E et F, de matrice de transition Q et R respectivement. La chaîne produit est par définition la chaîne $Z = (Z_n)$ où $Z_n = (X_n, Y_n)$. On vérifie sans peine que la chaîne Z est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$S\big((x,y),(x',y')\big) = Q(x,x')R(y,y'), \quad x,x' \in E,\ y,y' \in F.$$

1. Exprimer les coefficients de S^n en fonction des coefficients de Q^n et R^n.
2. Montrer que si X et Y sont irréductibles de période 1, alors la chaîne $Z = (Z_n)$ est irréductible de période 1.
3. Donner un contre-exemple pour lequel X et Y sont irréductibles de période 2 et pour lequel Z n'est pas irréductible.
4. Supposons que Q et R admettent des probabilités invariantes respectives ρ et σ. Trouver une probabilité invariante π pour la chaîne produit.
5. On considère un damier à 16 cases (numérotées successivement de 1 à 16 de gauche à droite, de haut en bas ; les cases sont de couleur noire ou blanche alternée) sur lequel se déplacent indépendamment l'une de l'autre deux souris ; chaque souris passe d'une case à l'une des k cases voisines avec la probabilité $1/k$ (les déplacements diagonaux sont proscrits).

   Quel est l'intervalle de temps moyen séparant deux rencontres successives sur la case 7 ?

Exercice 3.16. — *Problème de Dirichlet discret et formule de Feynman–Kac*
Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans un ensemble fini E, de matrice de transition P. On considère un sous-ensemble A de E (avec $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$), et deux fonctions $f : A \to \mathbf{R}$ et $g : A^c \to \mathbf{R}$ définies respectivement sur A et son complémentaire.

On note $T_A = \min\{n \geq 0, X_n \in A\}$ le premier temps d'atteinte de A pour la chaîne, et on considère la fonction $u : E \to \mathbf{R}$ définie par :

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left[f(X_{T_A}) + \sum_{k=0}^{T_A - 1} g(X_k) \right]$$

Montrer que la fonction u vérifie :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) \text{ pour } x \in A, \\ (I-P)u(x) &= g(x) \text{ pour } x \in A^c. \end{aligned}$$

Exercice 3.17. — *Examen 2018*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable. On suppose que la chaîne est irréductible et qu'il existe une mesure de probabilité π sur E qui soit invariante.

On fixe $x \in E$ et on considère un temps d'arrêt $S = \mathscr{S}((X_n)_{n\geq 0})$ tel que $\mathbf{P}_x$-presque sûrement, on a $1 \leq S < +\infty$ et $X_S = x$. On suppose de plus que $\mathbf{E}_x[S] < +\infty$. Plus généralement, on définit la suite de temps d'arrêts successifs $S_1 = S$ et $S_{i+1} = S_i + \mathscr{S}((X_{S_i+n})_{n\geq 0})$. On pose $S_0 = 0$ par convention.

1. Soit $y \in E$. Que peut-on dire de la convergence presque sûre et dans $\mathbf{L}^1$ de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}?$$

2. Montrer que, sous $\mathbf{P}_x$, les variables aléatoires

$$\sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}} \quad i \geq 0,$$

sont indépendantes et de même loi.

3. À l'aide de la loi forte des grands nombres et de la question 1, montrer que, quel que soit $y \in E$,

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right] = \pi(y)\mathbf{E}_x[S].$$

4. Pour $z \in E$, on note $T_z = \inf\{n \geq 1,\ X_n = z\}$. Soit S le premier temps de passage par x après avoir visité y. Exprimer $\mathbf{E}_x S$ en fonction de T_x et T_y.
5. En considérant le temps d'arrêt S, montrer que pout tous $x \neq y \in E$ on a

$$\pi(y)\mathbf{P}_y(T_x < T_y)(\mathbf{E}_x(T_y) + \mathbf{E}_y(T_x)) = 1.$$

Exercice 3.18. Serge aime beaucoup le vin. Après avoir trop bu, il s'endort et fait le rêve suivant : au départ il a une somme d'argent $x \in \mathbf{N}$ (en Euros) ; à chaque minute il boit un verre de vin, qui lui coûte un Euro ; chaque fois qu'il épuise son capital, il trouve un porte monnaie qui contient un nombre entier et aléatoire de pièces d'un Euro, et il recommence instantanément à acheter du vin et boire. Le rêve continue de la même façon indéfiniment.

On modélise le capital X_n à disposition de Serge à chaque minute $n \in \mathbf{N}$ à l'aide d'une chaîne de Markov sur $\mathbf{N} = \{0, 1, \cdots\}$, avec matrice de transition $P := (p(x,\, y),\, x,\, y \in \mathbf{N})$ définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} f(y+1) & \text{si } x = 0,\ y \geq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0,\ y = x-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où f est une probabilité sur $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$, $f : \mathbf{N}^* \to]0,1[$, $\sum_n f(n) = 1$, avec $f(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbf{N}^*$. Sous $\mathbf{P}_x$, (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbf{N} = \{0, 1, \cdots\}$ avec probabilité de transition P et état initial déterministe $X_0 = x \in \mathbf{N}$. Si au temps i le capital de Serge est $y > 0$, au temps $i+1$ le capital sera $y-1$. Si au temps i le capital de Serge est nul, il trouve une quantité $y \geq 1$ de pièces avec probabilité $f(y)$, et il en dépense instantanément une, ainsi que son capital au temps $i+1$ sera $y-1$ avec probabilité $f(y)$. Soient $S_0 := 0$, $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$, les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov (X_n) ?
2. Montrer que $\mathbf{P}_0(S_1 = n) = f(n)$, $n \geq 1$. En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires.

3. Montrer que la mesure sur $\mathbf{N}$ définie par

$$\lambda(x) := \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), \qquad x \in \mathbf{N},$$

est invariante pour P et que toute mesure invariante est un multiple de λ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive. Montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité invariante si et seulement si

$$m := \sum_n n\, f(n) < \infty.$$

On suppose la condition $m < \infty$ satisfaite dans la suite.

5. Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x(X_n = y)$, pour tous $x, y \in \mathbf{N}$.
6. Définir $u(n) := \mathbf{P}_0(X_n = 0)$. Montrer que $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z \le n}\{X_0 = X_n = 0,\, S_1 = z\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = [f * u](n), \qquad n \geq 1.$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. Montrer que $(t_i)_{i\geq 1}$ est, sous $\mathbf{P}_0$, une suite i.i.d. et calculer $\mathbf{P}_0(t_i = n)$, pour $n \geq 1$.
8. Montrer que $\mathbf{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution de f itérée i fois, pour $i \geq 1$.
9. Montrer que $\{X_n = 0\} = \bigcup_{i\geq 0}\{S_i = n\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \geq 1.$$

10. Montrer le *Théorème du renouvellement* : si u est définie par la formule précédente, alors

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = \frac{1}{m}.$$

Problème : Processus de branchement

Le but de ce problème est d'étudier un type de processus, appelé *processus de branchement*, qui est largement utilisé en biologie pour décrire l'évolution d'une population dont la reproduction des individus est aléatoire ou, de manière plus générale, tous les problèmes où des structures d'arbres aléatoires apparaissent.

La problématique est la suivante : on considère des générations discrètes dont on renouvelle tous les individus d'une génération à la suivante. Chaque individu a un nombre aléatoire d'enfants, indépendamment de tous les autres individus et ce nombre peut être éventuellement nul. On s'intéresse alors à la taille de la population $(Z_n,\, n \geq 0)$ au cours du temps, sachant que l'on commence avec un unique individu $(Z_0 = 1)$.

Pour décrire le nombre d'enfants de chaque individu (réel ou virtuel), on introduit une famille de variables aléatoires $(X_{k,n})_{(k,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ à valeurs entières, indépendantes, et de même loi ξ. Chaque $X_{k,n}$ représente le nombre d'enfants de l'individu k à la génération n (s'il existe). Nous introduisons alors la filtration associée $\mathscr{F}_n = \sigma(X_{k,i}; k \in \mathbf{N}^*, 1 \leq i \leq n)$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. La loi ξ est appelée *la loi de branchement*.

La taille de la population suit ainsi l'évolution suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1} & \text{si } Z_n > 0 \end{cases}$$

1. (Un premier cas simple) Nous supposons tout d'abord $\xi(0)+\xi(1) = 1$. Interpréter cette condition en termes de nombre d'enfants. Comment évolue Z_n lorsque n augmente ? Nous supposons ensuite $\xi(0) = 0$: la population peut-elle s'éteindre ?

Nous supposerons désormais que $\xi(0) + \xi(1) < 1$ **et** $\xi(0) > 0$**.**

Nous introduisons les notations

$$m = \sum_{k\in\mathbf{N}} k\xi(k), \qquad \varphi(r) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \xi(k)r^k \quad \text{pour } r \in [0,1]$$

qui sont la moyenne du nombre d'enfants d'un individu et la fonction génératrice de ce nombre. Nous définissons également les itérées de la fonction φ par $\varphi_0(r) = r$ et $\varphi_{n+1}(r) = \varphi(\varphi_n(r)) = \varphi_n(\varphi(r))$ pour $n \in \mathbf{N}$.

2. Calculer $\mathbf{E}(Z_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$ puis $\mathbf{E}(Z_n)$ pour tout n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $r \in [0,1]$,

$$\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}} \,|\, \mathscr{F}_n) = \varphi(r)^{Z_n}$$

En déduire $\mathbf{E}(r^{Z_n})$.

3. Nous étudions les points fixes de la fonction φ selon la valeur de m. Étudier la fonction $r \mapsto \varphi(r)$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation $\varphi(r) = r$ sur $[0,1]$.

Nous appellerons q la plus petite solution de l'équation $\varphi(r) = r$ sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(\varphi_n(0),\, n \geq 0)$ est une suite croissante qui converge vers q.

Nous voulons savoir si la population survit ou s'éteint aux temps longs et introduisons dans ce but la variable aléatoire :

$$T = \inf \{n \in \mathbf{N}; Z_n = 0\},$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$.

4. Montrer que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$. Montrer, en utilisant les résultats précédents sur la fonction φ, que

$$\mathbf{P}(T < \infty) = q\,.$$

Nous appellerons *extinction* l'événement $\{T < \infty\}$ et *survie* l'événement $\{T = \infty\}$. Le cas *critique* correspond à $m = 1$, le cas *surcritique* à $m > 1$ et le cas *sous-critique* à $m < 1$. Faire le lien avec la probabilité de survie.

5. Nous supposerons dans cette question $m > 1$ et introduisons les variables $M_n = q^{Z_n}$. Montrer que $(M_n,\, n \geq 0)$ est une martingale dont on étudiera la convergence. En déduire l'égalité presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} q^{Z_n} \mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = 0$$

puis en déduire l'égalité presque sûre

$$\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = \mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\}}\,.$$

Conclure sur le comportement de la population lorsqu'elle ne s'éteint pas.

6. Nous supposons toujours $m > 1$ et supposons en plus que $\sigma^2 = \sum_{k\in\mathbf{N}} k^2 \xi(k) - m^2 < \infty$. En introduisant une martingale idoine, nous pouvons être en fait beaucoup plus précis sur le comportement de Z_n lorsque $n \to \infty$! Soit la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $W_n = Z_n / m^n$.

1. Montrer que $(W_n,\, n \geq 0)$ est une martingale.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) = m^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$$

   En déduire que $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(W_n^2) < \infty$. Conclure sur la convergence de la martingale (W_n), dont on notera la limite W_∞.
3. Introduisons la fonction $L : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $L(\lambda) = \mathbf{E}(e^{-\lambda W_\infty})$. Écrire une identité fonctionnelle faisant intervenir φ, L et m. Montrer que $\mathbf{P}(W_\infty = 0) = \lim_{\lambda\to\infty} L(\lambda)$. Conclure sur la valeur de $\mathbf{P}(W_\infty = 0)$.
4. En déduire l'égalité presque sûre $\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = \mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}}$ et en déduire que, si la population survit, alors Z_n croît exponentiellement et donner un équivalent.

7. Nous supposons à présent $m < 1$. Quelle est la limite presque sûre de (W_n) ? Est-ce une martingale fermée ?

Le point de vue des chaînes de Markov

Nous nous focalisons à nouveau au cas sur le plus intéressant $\xi(0) > 0$ et $\xi(0)+\xi(1) < 1$.

8. Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov dont on précisera la loi de transition en fonction des convolutions de la loi ξ.

9. Que peut-on dire de l'état 0 ? Quelles sont les classes d'états ? Discuter le caractère transient ou récurrent de ces classes d'états.

10. En déduire que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, on a ou bien extinction ou bien divergence de la taille Z_n vers ∞, i.e.,

$$\mathbf{P}(\exists n \in \mathbf{N}, \forall k \geq n, Z_k = 0) + \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1.$$

Quelques compléments pour réfléchir

Supposons à nouveau que $\sum_k k^2\xi(k) < \infty$. Nous nous plaçons à présent dans le cas où $m < 1$. Nous considérons à présent une modification du problème de départ. Nous conservons les mêmes variables aléatoires $X_{k,n}$ mais considérons une probabilité $\mathbf{Q}$ telle que les $X_{k,n}$ sont indépendantes, les $X_{k,n}$ avec $k > 1$ ont pour loi $\xi(k)$ et la variable $X_{1,n}$ a pour loi $k\xi(k)/m$. Nous supposerons qu'une telle probabilité $\mathbf{Q}$ existe et nous noterons $\mathbf{E}_\mathbf{Q}$ l'espérance associée.

11.

1. Montrer que $\mathbf{E}_\mathbf{Q}(r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = r\varphi'(r)\varphi(r)^{Z_n-1}/m$. Le processus (Z_n) s'éteint-il sous $\mathbf{Q}$?
2. Montrer que $\mathbf{E}(W_{n+1}r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = W_n r\varphi'(r)\varphi(r)^{Z_n-1}/m$. Le processus (Z_n) s'éteint-il sous $\mathbf{P}$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{R}$, bornée mesurable, on a

   $$\mathbf{E}_\mathbf{Q}(f(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)) = \mathbf{E}(W_n f(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n))$$

   En déduire la densité de $\mathbf{Q}$ par rapport à $\mathbf{P}$ lorsque ces mesures sont restreintes à la tribu $\mathscr{G}_n = \sigma(Z_0, \cdots, Z_n)$.

Vous pouvez à présent utiliser ce changement de probabilité et étudier $\mathbf{Q}$ en détail pour en tirer des renseignements plus précis sur l'extinction de Z_n sous la probabilité $\mathbf{P}$.

Indications pour les exercices

Chapitre 0

Indications du chapitre “Rappels”

Espaces de probabilité et variables aléatoires

Indications pour l’exercice 0.1. On trouve une probabilité de $\frac{p}{7-6p}$.

Indications pour l’exercice 0.2.

1. Il suffit de remarquer que $\omega \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ si et seulement si $\omega \in A_k$ pour tout $k = 1, \cdots, n$, c’est à dire si et seulement si $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$ pour tout $k = 1, \cdots, n$.
2. Cela s’obtient à partir de la relation précédente en passant au complémentaire.
3. On développe le produit en utilisant la relation :

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}} \prod_{k \notin E} a_k \times \prod_{k \in E} b_k,$$

   ou encore, en notant $i_1 < \ldots < i_q$ les éléments de E (de cardinal $0 \leq q \leq n$)

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + b_k) = \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}} \prod_{k \in E} b_k = \sum_{q=0}^{n} \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_q} \prod_{i=1}^{q} b_{i_q}$$

   Pour conclure, on passe à l’espérance.
4. On applique la formule précédente avec A_k l’événement {l’étiquette k est attribuée au nom k}. On trouve pour $p(n)$ la valeur $p(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}/k!$, qui tend vers $1 - 1/e$.

Indications pour l’exercice 0.3. On trouve $\mathbf{P}(X = Y) = \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n}$. La loi de $X - Y$ est donnée par $\mathbf{P}(X - Y = k) = \frac{n-|k|}{n^2}$ pour $-n < k < n$.

Indications pour l’exercice 0.4. On remarque que l’hypothèse peut se récrire

$$\mathbf{P}(T \geq m + n) = \mathbf{P}(T \geq n)\mathbf{P}(T \geq m).$$

En particulier, pour $m = 1$ on voit que la suite $\mathbf{P}(T \geq n)$ est géométrique de raison $p = \mathbf{P}(T \geq 1)$.

Indications pour l'exercice 0.5. 1. Poser $\Omega = E$ et prendre X l'identité de E. Quelles tribu et mesure de probabilité mettre sur Ω ?

2. Utiliser la question 1 pour construire une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans l'espace $(E_1 \times \dots \times E_n, \mathscr{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathscr{E}_n)$, en lui prescrivant la bonne loi.

Indications pour l'exercice 0.6. 1. L'indépendance de εX et εX est équivalente à l'égalité

$$\mathbf{P}(\varepsilon X \leq t, \varepsilon = a) = \mathbf{P}(\varepsilon X \leq t)\mathbf{P}(\varepsilon = a)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $a \in \{-1, 1\}$.

2. Il suffit de prendre $Y = \varepsilon X$, $\mathscr{A} = \sigma(X)$, $\mathscr{B} = \sigma(\varepsilon)$, pour ε et X tels que dans la question précédente, avec X symétrique et non presque sûrement nul.
3. Il suffit de prendre $Y = \varepsilon$, $\mathscr{A} = \sigma(X)$, $\mathscr{B} = \sigma(\varepsilon X)$, pour ε et X tels que dans la question précédente, avec X symétrique et presque sûrement non nul.

Indications pour l'exercice 0.7. 1. La variable Z_1 suit donc la loi binomiale de paramètres n et p_1. En particulier, Z_i et Z_j ont même loi si et seulement si $p_i = p_j$.

2. On a $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = -np_1p_2$. En particulier, Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes dès que $p_1 \neq 0$ et $p_2 \neq 0$.

Indications pour l'exercice 0.8. 1. On trouve

$$\mathbf{E}(U^n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a.$$

2. Après un changement de variables $(x, y) = (u/(u+v), u+v)$ dans une intégrale double, on trouve que les variables $X = U/(U+V)$ et $Y = U+V$ sont indépendantes, et que leur lois admettent respectivement les densités

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{(loi bêta de paramètres } a \text{ et } b)$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(a+b)} e^{-y} y^{a+b-1}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \quad \text{(loi gamma de paramètre } a).$$

Indications pour l'exercice 0.9. 1. On trouve pour la loi de $(S_1, ..., S_n)$ la densité

$$f_{S_1,..,S_n}(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n)\mathbf{1}_{\{0<s_1<s_2<\cdots<s_n\}}.$$

2. Il suffit d'intégrer la densité précédente par rapport aux $n-1$ premières variables.
3. La fonction caractéristique de S_n est

$$\varphi_{S_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n.$$

4. On peut raisonner en dérivant la fonction caractéristique, ou bien en utilisant la densité de S_n, ou encore en écrivant S_n comme somme de variables indépendantes. On trouve

$$\mathbf{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Convergences de suites de variables aléatoires

Indications pour l'exercice 0.10.

1. La suite (X_n) converge vers 1 presque sûrement et dans tous les $\mathbf{L}^p$, $(p \geq 1)$, et donc aussi en probabilité et en loi.
2. On a une convergence presque sûre (utiliser Borel–Cantelli) et dans tous les $\mathbf{L}^p$ vers 0.
3. On a une convergence vers 0 presque sûrement (et donc en probabilité et en loi), mais pas dans $\mathbf{L}^1$, ni dans aucun $\mathbf{L}^p$, $p \geq 1$.
4. On a convergence dans tous les $\mathbf{L}^p$ $(p \geq 1)$ vers 0, et donc en probabilité et en loi. Pour ce qui est de la convergence presque sûre, on ne peut rien déduire. Si on rajoute que les (X_n) sont indépendantes, on n'a pas convergence presque sûre (Borel–Cantelli). Si en revanche, on fixe U de loi uniforme sur $[0,1]$ et que l'on définit $X_n = \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$, les X_n ont bien la loi de l'énoncé et convergent presque sûrement vers 0.
5. On a convergence presque sûre vers 0, et convergence dans $\mathbf{L}^p$ si et seulement si $p < 3/2$.
6. (a) Si (X_n) converge presque sûrement, sa limite est une variable aléatoire à valeur dans $\{0,1\}$. Par la loi du $0-1$, elle est en fait déterministe. Par Borel–Cantelli, on trouve que X_n converge presque sûrement vers 0 si $\sum_n p_n < \infty$, converge presque sûrement vers 1 si $\sum_n 1 - p_n < \infty$, et ne converge pas dans les autres cas.
   (b) Une suite qui converge dans $\mathbf{L}^1$ admet une sous suite qui converge presque sûrement, par conséquent, la limite éventuelle dans $\mathbf{L}^1$ de (X_n) est soit la constante 0 soit la constante 1. On voit que X_n converge vers 0 si p_n converge vers 0 et que X_n converge vers 1 si p_n converge vers 1. Dans les autres cas, la suite diverge.
   (c) La convergence en loi a lieu si et seulement si (p_n) converge.

Indications pour l'exercice 0.11.

1. Par Borel–Cantelli, les $\Omega_\varepsilon = \liminf\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}$ ont probabilité 1 (l'hypothèse d'indépendance n'est pas utile dans cette question). On remarque ensuite que $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ pour tout ω de l'événement $\tilde{\Omega} = \bigcap_{n\geq 1} \Omega_{1/n}$ qui est de probabilité 1.
2. La loi du $0-1$ assure que X est presque sûrement constante. Par conséquent, les événements $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ sont indépendants, et il suffit d'appliquer le deuxième lemme de Borel–Cantelli.
3. On conclut que, pour une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes,

$$X_n \to X \text{ p.s. si et seulement si, } \forall \varepsilon > 0, \sum_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

Indications pour l'exercice 0.12. On définit $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(n+1) = \max(\varphi(n)+1, K_n)$ où K_n est tel que pour tout $k \geq K_n$,

$$\mathbf{P}(|X_k - X| > \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}.$$

On conclut par Borel–Cantelli.

Indications pour l'exercice 0.13.

1. La suite converge en probabilité vers 0.
2. C'est le lemme de Borel–Cantelli

Indications pour l'exercice 0.14. La convergence en probabilité de X_n vers 0 est un simple calcul à partir de la définition. Pour Y_n, on montre que la probabilité $\mathbf{P}(|Y_n - 0| > 1)$ ne tend pas vers 0 en utilisant l'inclusion

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > n\} \subset \{Y_n > 1\}.$$

L'indépendance des X_i permet de montrer (passer au complémentaire) que $\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i > n\}$ a pour probabilité $1/2$.

Indications pour l'exercice 0.15.

1. C'est presque sûrement une série absolument convergence ($|X_k/2^n| \leq 1/2^n$).
2. En voyant les X_k comme les chiffres binaires de Y_n, on voit que Y_n suit la loi uniforme sur $\{k/2^n, 0 \leq k < 2^n\}$. En passant par les fonction de répartition, on voit que la fonction de répartition limite est celle d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Indications pour l'exercice 0.16.

1. Pour des variables centrées $\mathrm{Var}(S_n) = \|S_n\|_{\mathbf{L}^2}$, et on utilise la completude de $\mathbf{L}^2$.
2. La convergence $\mathbf{L}^2$ implique la convergence $\mathbf{L}^1$ qui implique la convergence des espérances. Pour la variance, l'indépendance implique que la variance de la somme est la somme des variances. Le passage à la limite est autorisé dans la variance grâce à la convergence $\mathbf{L}^2$.
3. On remarque que $\sum_{n=1}^{+\infty} n \,\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(S - S_{k-1})$. On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et le lemme de Borel–Cantelli.

Indications pour l'exercice 0.17. Pour les trois questions, passer par la catactérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition.

Indications pour l'exercice 0.18.

1. Avec les fonctions caractéristiques, on écrit

$$\begin{aligned}\varphi_{(X_n,Y_n)}(t,s) - \varphi_{(X,c)}(t,s) =& \varphi_{(X_n,Y_n)}(t,s) - \varphi_X(t)e^{ics} \\ =& \left(\varphi_{(X_n,Y_n)}(t,s) - \varphi_{X_n}(t)e^{ics}\right) + e^{ics}\left(\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)\right),\end{aligned}$$

et on montre que les deux termes du membre de droite tendent vers 0.

2. On considère une variable W de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (par exemple), et on pose $X_n = (-1)^n W$, $Y_n = W$.

Indications pour l'exercice 0.19. On voit que

$$|X_n - X| = X_n + X - 2\min(X, X_n).$$

On passe à l'espérance, et on remarque que $\mathbf{E}\min(X, X_n)$ converge vers $\mathbf{E}X$ par convergence dominée.

Indications pour l'exercice 0.20. 1. Par indépendance, on a $\mathbf{E}[Y_n] = 1$.y

2. En se ramenant à une intégrale Gaussienne, on trouve $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$, puis par indépendance $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}] = (\sqrt{\pi}/2)^n$.
3. C'est l'inégalité de Markov appliquée à $\sqrt{Y}_n$.
4. On peut appliquer Borel–Cantelli, en remarquant $\sqrt{\pi}/2 < 1$.

Indications pour l'exercice 0.21. C'est l'inégalité de Jensen. L'inégalité obtenue peut se récrire avec les normes $\|X\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|X\|_{\mathbf{L}^q}$, ce qui s'interprète sur les espaces $\mathbf{L}^p$ et $\mathbf{L}^q$ comme indiqué.

Autour de la marche aléatoire simple

Indications pour l'exercice 0.22. 1. $\mathbf{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$ et $\mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k$. On a en particulier l'équivalent $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4p(1-p))^n$.

2. Si $p \neq 1/2$, d'après Borel–Cantelli, (S_n) passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en 0. Pour $p = 1/2$, on ne peut pas conclure.
3. La loi des grands nombres donne l'équivalent presque sûr $S_n \sim n(2p-1)$. Qui permet de conclure dans le cas $p \neq 1/2$.

Indications pour l'exercice 0.23. 1. C'est Borel–Cantelli.

2. Le premier point découle de
$$\bigcap_{n\geq 1}\{-K/2 < S_n < K/2\} \subset \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n^c$$
et le deuxième de
$$\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \bigcup_{n\geq 1}\{S_n \geq K/2\} \text{ et } \{\limsup_n S_n = -\infty\} = \bigcup_{n\geq 1}\{S_n \leq -K/2\}.$$
3. On peut écrire $\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \{\limsup_n S_{n+k} - S_k = +\infty\}$, or $S_{n+k} - S_k$ est $\sigma((X_{n+k})_{n\geq 1})$-mesurable.

Indications pour l'exercice 0.24. 1. On écrit
$$\begin{aligned}\{S_n = k, M_n \geq y\} &= \bigcup_{q=1}^{n}\{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n = k\} \\ &= \bigcup_{q=1}^{n}\{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = k - y\},\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\{S_n = 2y - k\} &= \bigcup_{q=1}^{n}\{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n = 2y - k,\} \\ &= \bigcup_{q=1}^{n}\{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = y - k,\},\end{aligned}$$

où les unions sont disjointes, puis on remarque que

$$\mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = k - y)$$

et

$$\mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = y - k).$$

sont égaux.

2. On écrit
$$\mathbf{P}(M_n \geq y) = \sum_{k \leq y} \mathbf{P}(M_n \geq y, S_n = k) + \sum_{k > y} \mathbf{P}(S_n > k)$$
et on utilise la relation de la question précédente.

3. La majoration $\mathbf{P}(S_n = y) \leq C/\sqrt{n}$ permet de déduire $\mathbf{P}(S_n = y) \to 0$ et $\mathbf{P}(0 \leq S_n < y) \to 0$ quand $n \to \infty$. On en déduit par symétrie que $\mathbf{P}(S_n \geq 0)$ converge vers $1/2$, puis que $2\mathbf{P}(S_n \geq y) - \mathbf{P}(S_n = y)$ converge vers $2 \times 1/2 + 0 = 1$. On a ensuite par monotonie $\mathbf{P}(M_\infty \geq y) = \lim_n \mathbf{P}(M_n \geq y)$.

4. On a bien $\mathbf{P}(M_\infty = \infty) = \lim_{y \to \infty} \mathbf{P}(M_\infty \geq y)$.

Indications pour l'exercice 0.25. 1. La relation à montrer se déduit de l'égalité entre événements

$$\begin{aligned}\{S_n = 0\} &= \bigcup_{k=1}^{n} \{S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \{S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n - S_k = 0\},\end{aligned}$$

où l'union est disjointe.

2. Cela s'obtient à partir de l'équation précédente en multipliant par s^n et en sommant sur n. Les calculs sont justifiés car on manipule des séries entières dont le rayon de convergence est ≥ 1.

3. On a l'expression $u_{2n} = 4^{-n}\binom{2n}{n}$ (et $u_{2n+1} = 0$), d'où on déduit $U(s) = (1 - s^2)^{-1/2}$. Par conséquent, $F(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2}$. En développant en série, on trouve

$$\mathbf{P}(T_0 = 2n) = \frac{1}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n}.$$

Pour les entiers impairs, on a $\mathbf{P}(T_0 = 2n + 1) = 0$.

Exercices supplémentaires

Indications pour l'exercice 0.26. 1. Le nombre de résultats possible est $N(N - 1) \cdots (N - n + 1)$.

2. On a $\mathbf{P}(A_k) = M/N$ et $\mathbf{P}(A_k \cap A_l) = M(M-1)/(N(N-1))$.

3. On trouve
$$\mathrm{Var}(S_n) = np(1-p)\Big(1 - \frac{n-1}{N-1}\Big),$$
qui tend, dans le régime indiqué, vers $np_0(1-p_0)$.

Indications pour l'exercice 0.27. L'équivalence se déduit des inégalités, pour $x \geq 0$,
$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\mathbf{1}_{x\geq\varepsilon} \leq \frac{x}{1+x} \leq \varepsilon + \mathbf{1}_{x\geq\varepsilon}.$$

Indications pour l'exercice 0.28. 1. On trouve
$$\mathbf{E}(Z_n^4) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_i^4) + \frac{1}{n^4}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\mathbf{E}(X_i^2X_j^2) = \frac{1}{n^3}\mathbf{E}(X_1^4) + \frac{n-1}{2n^3}\mathbf{E}(X_1^2)^2.$$
Par conséquent, $\sum_{n\geq 1}\mathbf{E}(Z_n^4)$ converge, donc par Fubini $\sum_{n\geq 1} Z_n^4$ est intégrable, donc presque sûrement finie, donc $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(X_n - \mathbf{E}X_1)_{n\in\mathbf{N}}$.

Indications pour l'exercice 0.29. 1. La variance de Z_n vaut $\mathrm{Var}(X_1)/n$, de sorte que $\sum \mathrm{Var}(Z_{n^2})$ converge. Avec Bienaymé-Tchebychev puis Borel–Cantelli, on obtient la convergence presque sûre de (Z_{n^2}) vers $\mathbf{E}X_1$.

2. On a $n - q_n^2 \leq (q_n+1)^2 - q_n^2 = 2q_n + 1 \leq 2\sqrt{n} + 1$.
3. La variance de $Z_n - \frac{q_n^2}{n}Z_{q_n^2}$ vaut $\mathrm{Var}(X_1)(n-q_n^2)/n^2 \leq \mathrm{Var}(X_1)n^{-3/2}$. Il s'agit encore du terme général d'une série convergente, et on peut raisonner comme en 1.
4. On écrit $Z_n = \left(Z_n - \frac{q_n^2}{n}Z_{q_n^2}\right) + \frac{q_n^2}{n}Z_{q_n^2}$. Le premier terme converge presque sûrement vers 0, le deuxième vers $\mathbf{E}X_1$.

Indications pour l'exercice 0.30. 1. On a $\overline{T} = \sup_{k\in\mathbf{N}} S_k = \sup_{k\in\mathbf{N}} \overline{S}_{k+1}$. Or S_k et $\overline{S}_{k+1}$ ont même loi. Les variables T et $\overline{T}$ ont donc la même loi.

2. On a les égalités entre événements, pour tout $q \geq 1$,
$$\{T = \infty\} = \{\sup_k (S_{k+q} - S_q) = \infty\},$$
donc $\{T = \infty\}$ est $\sigma((X_{q+n})_{n\geq 1})$-mesurable pour tout q, et est donc asympotique.
3. On a $T_n = \max(Y_1 + 0, Y_1 + \overline{S}_1, \ldots, Y_1 + \overline{S}_n) = Y_1 + \max(0, \overline{T}_n)$, d'où le résultat.
4. Si $T = \infty$ p.s., alors $\max(Y_1 - \overline{T}_n, Y_1)$ converge presque sûrement vers Y_1, en décroissant. Par convergence dominée, $\mathbf{E}(T_n - \overline{T}_n)$ converge donc vers $\mathbf{E}Y_1$. Or, comme T_{n-1} et $\overline{T}_n$ ont même loi, on a $\mathbf{E}(T_n - \overline{T}_n) = \mathbf{E}(T_n - T_{n-1}) \geq 0$, d'où le résultat.
5. Y_n admet une espérance négative, donc d'après la question précédente, la suite $(X_1 + \ldots + X_n - n\mathbf{E}X_1 - n\varepsilon)$ est presque sûrement majorée, d'où (pour tout $\varepsilon > 0$)
$$\limsup_n \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbf{E}X_1 \leq \varepsilon.$$
De même, en appliquant le résultat à Y_n', on trouve $\liminf_n \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - \mathbf{E}X_1 \geq -\varepsilon$. Ces deux inégalités étant valables pour tous ε, on conclut.

Chapitre 1

Corrigé : Espérance conditionnelle

1.1 Généralités et calculs

Indications pour l'exercice 1.1. 1. De la définition même des probabilités conditionnelles résulte que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(A\,|\,B^c) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B^c)}{\mathbf{P}(B^c)}.\\
&\mathbf{P}(A\,|\,\mathscr{G}) = \mathbf{E}(A\,|\,B)\mathbf{1}_B + \mathbf{E}(A\,|\,B^c)\mathbf{1}_{B^c}\\
&\mathbf{E}(X\,|\,B) = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{E}(X\,|\,B^c) = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B^c})}{\mathbf{P}(B^c)}\\
&\mathbf{E}(X\,|\,\mathscr{G}) = \mathbf{E}(X\,|\,B)\mathbf{1}_B + \mathbf{E}(X\,|\,B^c)\mathbf{1}_{B^c}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\mathbf{P}(A\,|\,\mathscr{G}) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(A\,|\,B_k)\mathbf{1}_{B_k}, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X\,|\,\mathscr{G}) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B_k})}{\mathbf{P}(B_k)}\mathbf{1}_{B_k}$$

3. On a

$$\mathbf{P}(A\,|\,Y) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(A\,|\,Y = y_k)\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}} \text{ et } \mathbf{E}(X\,|\,Y) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}})}{\mathbf{P}(Y = y_k)}\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}}$$

Indications pour l'exercice 1.2. 1. On a $\mathbf{E}[S|N = n] = n\mu$, puis $\mathbf{E}[S|N] = N\mu$ et $\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[N]\mu$

2. On trouve, $\mathbf{E}[r^S|N = n] = \varphi_{X_1}(r)^n$, puis $\mathbf{E}[r^S|N] = \varphi_{X_1}(r)^N$ et

$$\mathbf{E}[r^S] = \mathbf{E}[\varphi_{X_1}(r)^N] = \varphi_N\big(\varphi_{X_1}(r)\big).$$

Indications pour l'exercice 1.3. 1. Sur l'événement $\{N = n\}$, T est donné par $T = \min(T_1, \dots, T_n)$, puis l'indépendance donne

$$\mathbf{P}(T > t|N = n) = (1 - t)^n.$$

2. On s'est en fait ramené au calcul de l'espérance d'une variable de fonction de répartition $t \mapsto (1-t)^n$, dont la moyenne est $1/(n+1)$. On a donc $\mathbf{E}[T \mid N] = 1/(N+1)$.
3. On a $\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[T \mid N]\big] = (1-e^{-\lambda})/\lambda$.

Indications pour l'exercice 1.4. 1. Comme $X_1 + X_2$ suit aussi une loi de Poisson, on trouve pour $0 \le k \le n$,

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}.$$

2. Par le calcul, ou en reconnaissant une loi binomiale, on trouve

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2 = n) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} n$$

puis

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(X_1 + X_2).$$

3. Comme $X_1 + X_2$ suit aussi une loi binomiale, on trouve pour $0 \le k \le \min(n_1, n)$ et $0 \le n \le n_1 + n_2$,

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

Pour l'espérance conditionnelle, on remarque que $(X_1, X_1 + X_2)$ a même loi que le couple $\left(\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i, \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i\right)$ où les (ξ_i) sont des variables de Bernoulli i.i.d. La linéarité de l'espérance conditionnelle donne alors :

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \middle| \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i\right) = n_1 \mathbf{E}\left(\xi_1 \middle| \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i\right) = \frac{n_1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i\right).$$

On en déduit

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(X_1 + X_2).$$

Indications pour l'exercice 1.5. Ce sont essentiellement des propriétés de cours : pour X $\mathscr{G}$-mesurable, on a $\mathbf{E}[X|\mathscr{G}] = X$, et $\mathbf{E}[XY|\mathscr{G}] = X\mathbf{E}[Y|\mathscr{G}]$. Pour X indépendante de $\mathscr{G}$, on a $\mathbf{E}[X|\mathscr{G}] = \mathbf{E}X$, et enfin, on a toujours $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathscr{G}]] = \mathbf{E}X$.

Indications pour l'exercice 1.6. La quantité $\mathbf{E}[X^2|\mathscr{G}] - \mathbf{E}[X|\mathscr{G}]^2$ s'appelle la variance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$, et on est donc en train de considérer une variable de variance conditionnelle nulle.

En raisonnant comme pour montrer qu'une variable de variance nulle est presque sûrement constante, on montre que la variance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$ est nulle si et seulement si X est $\mathscr{G}$-mesurable (ou plutôt si et seulement si X est presque sûrement égale à une variable $\mathscr{G}$-mesurable).

Indications pour l'exercice 1.7. 1. La variable $\int_{E_2} f(X_1, x_2) d\nu_2(x_2)$ étant bien mesurable pour la tribu $\sigma(X_1)$, il suffit de montrer que pour tout événement $A = \{X_1 \in B\}$ de $\sigma(X_1)$, on a

$$\mathbf{E}\left[\int_{E_2} f(X_1, x_2) d\nu_2(x_2) \mathbf{1}_A\right] = \mathbf{E}[f(X_1, X_2)\mathbf{1}_A],$$

ce qui est une simple récriture en utilisant le théorème de Fubini.

2. C'est un cas particulier du calcul précédent avec $E_1 = \mathbf{R}$, $E_2 = \mathbf{N}$, $X_1 = Z$, $X_2 = N$ et $f(z, n) = z^n$.
3. C'est encore un cas particulier avec $E_1 = E_2 = \mathbf{R}$ et $f(x, u) = \mathbf{1}_{u \leq x}$. Pour le second calcul, on remarque que l'on peut écrire $e^{2\mathbf{1}_A} = e^2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c}$, et on trouve $\mathbf{E}(e^{2\mathbf{1}_{U \leq X}} | X) = (e^2 - 1)F(X) + 1$.

Indications pour l'exercice 1.8. Poser X l'identité de Ω. Quelles tribus mettre sur Ω à la source et au but ?

Indications pour l'exercice 1.9. On trouve

$$\mathbf{E}[(Y - X)^+ | X] = \int_0^1 (y - X)^+ dy = \frac{1}{2}(1 - X)^2.$$

Indications pour l'exercice 1.10. 1. En faisant $t \to +\infty$, on obtient

$$\mathbf{P}(X = n) = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^n,$$

ce qui correspond à une loi géométrique. De même, en sommant sur tous les n, on trouve

$$\mathbf{P}(Y \leq t) = \sum_n \mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \mu \int_0^t e^{-\mu y} dy,$$

ce qui est la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle.

2. On a

$$\mathbf{E}[Y | X = n] = \frac{n + 1}{\lambda + \mu},$$

donc

$$\mathbf{E}[Y | X] = \frac{X + 1}{\lambda + \mu}.$$

3. On utilise un conditionnement par rapport à X :

$$\mathbf{E}\left[\frac{Y}{X + 1}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\frac{Y}{X + 1}\middle| X\right]\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{X + 1}\mathbf{E}[Y | X]\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{\lambda + \mu}\right] = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

4. On obtient $\mathbf{P}(X = n | Y) = e^{-\lambda Y} \frac{(\lambda Y)^n}{n!}$, soit une loi de Poisson de paramètre λY. En particulier, $\mathbf{E}[X | Y] = \lambda Y$.

Indications pour l'exercice 1.11. 1. Par calcul, on obtient :

$$\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)|X_1] = X_1 + e^{-\lambda X_1}/\lambda.$$

En passant à l'espérance, on obtient $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \frac{3}{2\lambda}$.

2. On obtient $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)|X_1 + X_2] = \frac{3}{4}(X_1 + X_2)$.
3. On trouve :

$$\mathbf{E}[X_1| \min(X_1, X_2)] = \min(X_1, X_2) + \frac{1}{2\lambda}.$$

Indications pour l'exercice 1.12. L'intégrabilité vient de $0 \leq C \leq 2(B+1)^\alpha \leq 2 \times 2^\alpha \max(B^\alpha, 1) \leq 2^{\alpha+1}(B^\alpha + 1)$. Pour le calcul de l'espérance conditionnelle, on trouve :

$$\begin{aligned} E(2U(B+U^2)^\alpha) &= \int_0^1 2u(B+u^2)^\alpha du \\ &= \frac{(B+1)^{\alpha+1} - B^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Indications pour l'exercice 1.13. 1. On remarque que $\mathbf{E}\big[X \mid |X|\big]$ et $\mathbf{E}\big[-X \mid |X|\big]$ sont égales, donc $\mathbf{E}\big[X \mid |X|\big] = 0 = \mathbf{E}[X]$.

2. Si X et $|X|$ sont indépendantes, alors $|X|$ est indépendante d'elle-même, donc constante. Dans ce cas, on a $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = -a) = 1/2$.

Indications pour l'exercice 1.14. 1. Il suffit de traiter le cas $X = 0$. Si $\mathbf{E}[Y|\mathscr{G}] \geq 0$, alors $\mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}[Y|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A\right) \geq 0$. Pour la réciproque, il suffit de choisir $A = \{\mathbf{E}[Y|\mathscr{G}] < 0\}$.

2. C'est une conséquence immédiate de la question 1.
3. On applique le point 1 aux variables Z et $-Z$.

Indications pour l'exercice 1.15. Il suffit d'appliquer la propriété $\mathbf{E}[\,\mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \,|\, \mathscr{H}\,] = \mathbf{E}(X \,|\, \mathscr{H})$ (pour toutes sous-tribus $\mathscr{H} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$) à $\mathscr{G} := \sigma(Z, \widetilde{Z})$ et $\mathscr{H} := \sigma(Z)$.

Variables gaussiennes

Indications pour l'exercice 1.16. 1. La matrice de covariance de (U, V, W) est

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a $U \sim \mathcal{N}(0, 6)$, $V \sim \mathcal{N}(0, 3)$, $W \sim \mathcal{N}(0, 26)$, et les vecteurs (U, V) et (V, W) ont leurs coordonnées indépendantes, contrairement au vecteur (U, W).

2. La covariance de $W - aU$ et U vaut $9 - 6a$. Donc en posant $Z = W - \frac{3}{2}U$, les variables U et Z sont indépendantes. On trouve alors

$$\mathbf{E}(W \,|\, U) = \frac{3}{2}U, \quad \mathbf{E}(W^2 \,|\, U) = \frac{9}{4}U^2 + \frac{25}{2}, \quad \mathbf{E}(W^3 \,|\, U) = \frac{27}{8}U^3 + \frac{225}{4}U.$$

Indications pour l'exercice 1.17. 1. Le vecteur Gaussien (Z, W) a pour matrice de covariance $2I$ (où I est la matrice identité). Par conséquent, Z et W sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 2)$.

2. On a $\mathbf{E}(X \mid Z) = (X + Y)/2$.
3. On a

$$\mathbf{E}(XY \mid Z) = \frac{Z^2}{4} - \frac{1}{2}, \text{ et } \mathbf{E}(XYZ \mid Z) = \frac{Z^3}{4} - \frac{Z}{2}.$$

Indications pour l'exercice 1.18. En calculant la covariance de W et Z, on trouve que seul $a = 1/5$ assure l'indépendance. On a alors

$$\mathbf{E}[X|Z] = \frac{Z}{5}, \ \mathbf{E}[X^2|Z] = \frac{Z^2}{25} + \frac{4}{5}.$$

Indications pour l'exercice 1.19. 1. L'espérance $\mathbf{E}[X|Y]$ vaut ρY.

2. Le couple (U, V) est Gaussien centré de covariance :

$$\begin{pmatrix} 1-\rho^2 & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix},$$

autrement dit U et V sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1-\rho^2)$.

3. On trouve :

$$\mathbf{E}[U^2V^2] = (1-\rho^2)^2, \quad \mathbf{E}[UV^3] = 0, \quad \mathbf{E}[V^4] = 3(1-\rho^2)^2, \quad \mathbf{E}[X^2Y^2] = 1 + 2\rho^2.$$

Indications pour l'exercice 1.20. 1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Elles sont indépendantes si et seulement si $\rho = 1$.

2. La densité du couple (R, Φ) est donnée par

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(- \frac{r^2(1-\rho\sin(2\varphi))}{2(1-\rho^2)} \right) \mathbf{1}_{r>0} \mathbf{1}_{0<\varphi<2\pi}.$$

La densité de Φ est donnée par

$$f_\Phi(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \frac{\mathbf{1}_{]0,2\pi]}(\varphi)}{(1-\rho\sin 2\varphi)}.$$

3. Pour $\rho = 0$, R admet pour densité $re^{-r^2/2}\mathbf{1}_{r>0}$, Φ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, et les variables R et Φ sont indépendantes.

Chapitre 2

Corrigé : Filtrations, temps d'arrêt et martingales

Filtrations, temps d'arrêt, martingales

Indications pour l'exercice 2.1. 1. Cela découle des égalités

$$\begin{aligned}
\{S \wedge T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\}, \\
\{S \vee T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\}, \\
\{S + T = n\} &= \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k\} \cup \{T = n - k\}.
\end{aligned}$$

2. Cela vient du fait que $\{T = n\}$ vaut Ω si $n = p$ et est vide sinon.
3. Les événements $\{T = k\}$ sont dans $\mathscr{F}_T$ car $\{T = k\} \cap \{T = n\}$ est dans $\mathscr{F}_n$ pour tout n.
4. Pour $A \in \mathscr{F}_S$, on peut écrire $A \cap \{T \leq n\} = A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\}$ qui est bien dans $\mathscr{F}_n$.
5. D'après la question 4, comme $S \wedge T \leq S$ et $S \wedge T \leq T$, on a $\mathscr{F}_{S \wedge T} \subset \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$. Pour l'inclusion inverse, cela découle de

$$A \cap \{S \wedge T \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A \cap \{T \leq n\}).$$

6. S est $\mathscr{F}_S$-mesurable, mais $S \leq T \vee S$, donc S est $\mathscr{F}_{S \vee T}$-mesurable. La même chose vaut pour T et on fait la somme.
7. On écrit

$$\{S < T\} \cap \{S \wedge T = n\} = \{S = n\} \cap \{T \leq n\}^c$$

et

$$\{S = T\} \cap \{S \wedge T = n\} = \{S = n\} \cap \{T = n\}.$$

Indications pour l'exercice 2.2. 1. On a $\Big(S_{n+1} - (n+1)\mu\Big) - \Big(S_n - n\mu\Big) = X_{n+1} - \mu$ qui a bien une espérance nulle conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, de même que $M_{n+1} - M_n = (X_{n+1} - \mu)^2 + 2(S_{n+1} - \mu)M_n - \sigma^2$.

2. On écrit $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \times \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}$, où le deuxième terme du produit est indépendant de $\mathscr{F}_n$ et de moyenne 1.
3. C'est essentiellement la même chose qu'en question 2.

Indications pour l'exercice 2.3. 1. Cela vient de

$$\{T = n\} = \{X_1 \leq X_0, \dots, X_{n-1} \leq X_0, X_n > X_0\}.$$

2. On trouve $\mathbf{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$, et l'espérance de T est infinie.

Indications pour l'exercice 2.4. 1. C'est le même raisonnement qu'en exercice 2.2, question 1.
2. Cela se déduit de $\{\tau > n\} = \bigcap_{k=0}^{n}\{|S_k| < x\}$.
3. Cela découle de la propriété de sous-martingale et de l'écriture

$$\left\{\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \geq x\right\} = \bigcup_{i=0}^{n}\{\tau = i\}.$$

En effet

$$x^2\, \mathbf{P}\left(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \geq x\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}(S_i^2\, \mathbf{1}_{\tau=i}) \leq \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}(S_n^2\, \mathbf{1}_{\tau=i}).$$

Indications pour l'exercice 2.5. 1. Il s'agit de montrer que chacune des variables aléatoires intervenant dans la définition de $\mathscr{G}$ est $\mathscr{F}_T$-mesurable.
2. (a) La tribu engendrée par les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ est la même que celle engendrée par la variable aléatoire vectorielle $(X_0, \dots, X_n)$. On pourra garder à l'esprit qu'il n'y a qu'une seule tribu naturelle sur $\mathbf{R}^{n+1}$ donc pas de risque de confusion possible. Plus précisément, deux procédures peuvent être envisagées : on peut prendre $n + 1$ copies de $\mathbf{R}$, chacune munie de sa tribu borélienne, puis former l'espace *mesurable* produit ou bien l'on peut considérer l'espace *topologique* produit $\mathbf{R}^{n+1}$ et en considérer la tribu borélienne. Il se trouve que les deux constructions aboutissent bien à la même tribu.
   (b) Observer que, si on pose $A_n = A \cap \{T = n\}$, grâce à l'hypothèse simplificatrice, on a $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \cap \{T = n\}$, où $A_n \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$. S'appuyer alors sur la question précédente pour conclure.
   (c) S'intéresser à $\mathscr{F}_\infty$.

Indications pour l'exercice 2.6. Cela se déduit de l'égalité

$$X_{n+1}^{(p)} = X_n^{(p)} + X_n^{(p-1)}\xi_{n+1}.$$

Indications pour l'exercice 2.7. On montre successivement $\mathbf{E}[X_{n+1} \vee Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geq X_n$ et $\mathbf{E}[X_{n+1} \vee Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geq Y_n$, ce qui permet de conclure.

Indications pour l'exercice 2.8. Il suffit de prendre $X_n = -\frac{1}{n}$ (qui est donc déterministe). On est obligé de considérer un processus prenant des valeurs négatives car le carré d'une sous-martingale positive est une sous-martingale.

Indications pour l'exercice 2.9. 1. Le fait que X_n soit une martingale se ramène au calcul de $\mathbf{P}(T > n+1 \mid T > n)$. Pour la convergeance $\mathbf{L}^1$, si X_n convergeait dans $\mathbf{L}^1$ vers 0, son espérance convergerait vers 0.

2. La variable $\sup_{n\geq 0} X_n$ est égale à T, qui n'est pas intégrable.

Remarque : toute surmartingale positive converge p.s. ; dans le cas où elle ne converge pas dans $\mathbf{L}^1$, on a nécessairement $\mathbf{E}\big(\sup_{n\geq 0} X_n\big) = \infty$.

Indications pour l'exercice 2.10. 1. On écrit

$$\mathbf{E}(X_m Y_n \mid \mathscr{F}_m) = X_m \mathbf{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_m) = X_m Y_m.$$

2. En remarquant que $Y_q - Y_p$ et $X_n - X_m$ sont centrées, on obtient :

   $$\mathrm{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}[(X_n - X_m)(Y_q - Y_p)|\mathscr{F}_n]\big) = \mathbf{E}\big((X_n - X_m)(Y_n - Y_n)\big)$$

   (on aurait pu aussi conditionner par $\mathscr{F}_p$ ou par n'importe quel $\mathscr{F}_k$ avec $n \leq k \leq p$).
3. C'est le théorème de Pythagore (la question 2 implique que les $(X_k - X_{k-1})$ sont orthogonaux, au sens où $\mathbf{E}[(X_k - X_{k-1})(X_q - X_{q-1})] = 0$ pour $k \neq q$).

Indications pour l'exercice 2.11. S'appuyer sur l'exercice 1.8.

Indications pour l'exercice 2.12. 1. Pour l'unicité, si on a $M_n + A_n = M'_n + A'_n$, alors $M_n - M'_n = A'_n - A_n$ est une martingale prévisible, et est donc constante égale à $A'_0 - A_0 = 0$.
   Pour l'existence, on vérifie que

   $$M_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbf{E}[X_k|\mathscr{F}_{k-1}]) \quad \text{et } A_n = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{E}[X_k|\mathscr{F}_{k-1}] - X_{k-1})$$

   conviennent.
2. *Exemple 1.*
   (a) La décomposition de Doob obtenue est $X_n^2 = (X_n^2 - n\sigma^2) + n\sigma^2$.
   (b) Par le théorème d'arrêt, appliqué à la partie martingale de la décomposition de Doob de (X_n^2), on a $\mathbf{E}(X_{T\wedge n}^2) = \mathbf{E}(T \wedge n)\sigma^2$.
   Par convergence monotone, $\mathbf{E}(T \wedge n)$ converge vers $\mathbf{E}(T)$, donc $\mathbf{E}(X_{T\wedge n}^2)$ est borné. La martingale $(X_{T\wedge n})$ est donc bornée dans $\mathbf{L}^2$, donc converge dans $\mathbf{L}^2$, ce qui permet de conclure.
3. *Exemple 2.*
   (a) La décomposition de Doob est

   $$M_n^2 = \left(M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k \neq 0\}}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k \neq 0\}}.$$

   (b) Pour la sous-martingale $(|X_n|)$, la décomposition de Doob est

   $$|X_n| = M_n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k = 0\}}.$$

(c) Cela se déduit de

$$M_n = |X_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=0\}} = |X_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{|X_k|=0\}}.$$

Indications pour l'exercice 2.13.

1. C'est une conséquence de la loi forte des grands nombres.
2. Les signes de $\varphi'(0)$ et φ'' se déduisent du théorème de dérivation sous l'espérance. La limite de φ en ∞ se montre avec le théorème de convergence monotone.
   L'existence et l'unicité de λ_0 se montre en établissant un tableau de variations.
3. On écrit $V_n = V_{n-1} e^{\lambda_0 (X_n - c)}$ et on utilise la définition de λ_0.
4. La première égalité s'obtient en écrivant

   $$\mathbf{E}(V_N \, \mathbf{1}_{\{\tau \le N\}}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}(V_N \, \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}).$$

   et en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_k$. Ensuite, sur $\{\tau = k\}$, on a $V_k \ge e^{\lambda_0 x}$.
5. C'est une conséquence de

   $$\mathbf{E}(V_N \, \mathbf{1}_{\{\tau \le N\}}) \le \mathbf{E}(V_N) = \mathbf{E}(V_0) = 1.$$

Théorèmes d'arrêt

Indications pour l'exercice 2.14.

1. Voir exercice 2.2, question 1.
2. C'est une conséquenc de l'écriture

   $$\{T \le n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S_i = 0\} \cup \{S_i = N\}.$$

3. La relation ensembliste est une conséquence de

   $$A_m \subset \{S_{(m+1)N} = S_{mN} + N\} \subset \{S_{mN} \le 0\} \cup \{S_{(m+1)N} > N\}.$$

   Ensuite, comme $\mathbf{P}(A_m) = 1/2^N$ et par indépendance des A_m

   $$\mathbf{P}(T > qN) \le \left(1 - 2^{-N}\right)^q.$$

   On conclut en remarquant que $\mathbf{P}(T > j) \le \mathbf{P}(T > qN)$ pour tout $j \in \{qN + 1, \dots, (q+1)N\}$.
4. Comme $(S_{n\wedge T})_{n\ge 0}$ est une martingale, $\mathbf{E}[S_{n\wedge T}] = x$. On passe à la limite $n \to \infty$ grâce au théorème de convergence dominée. Comme S_T est à valeurs dans $\{0, N\}$, on a $\mathbf{E}(S_T) = N\mathbf{P}(S_T = N)$.
5. De même, $(M_{n\wedge T})_{n\ge 0}$ est une martingale, $\mathbf{E}[M_{n\wedge T}] = x^2$. Le passage à la limite se fait toujours par convergence dominée. On en déduit $\mathbf{E}[M_T] = x^2$ et $\mathbf{E}[T] = x(N - x)$.

Indications pour l'exercice 2.15. 1. On trouve

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid R_n = j) = \frac{j}{52-n}, \text{ ou encore } \mathbf{P}(A_{n+1} \mid R_n) = \frac{R_n}{52-n}.$$

2. On a

$$\begin{cases} \mathbf{P}(R_{n+1} = R_n - 1 \mid R_n) & = \frac{R_n}{52-n}, \\ \mathbf{P}(R_{n+1} = R_n \mid R_n) & = \frac{52-n-R_n}{52-n}, \end{cases}$$

On en conclut

$$\mathbf{E}(R_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}.$$

3. La probabilité de victoire est $\mathbf{P}(A_{\tau+1})$. La relation $\mathbf{P}(A_{\tau+1}) = \mathbf{E}(X_\tau)$ se déduit de $\mathbf{P}(A_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$ en conditionnant par la valeur de τ. Par le théorème d'arrêt, on a $\mathbf{E}(X_\tau) = \mathbf{E}(X_0) = 1/2$. La probabilité de victoire dans ce jeu est donc toujours égale à $1/2$.

Indications pour l'exercice 2.16. 1. On écrit $X_{n+1} = X_n + S_{n+1}\xi_{n+1}$, et on utilise le fait que S_{n+1} est $\mathscr{F}_n$-mesurable et que ξ_{n+1} est centré et indépendant de $\mathscr{F}_n$.

2. T est fini presque sûrement car il suit une loi géométrique de paramètre $1/2$. En considérant les différentes valeurs possibles prises par T, on trouve

$$\mathbf{E}(X_T) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}(X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}) = 1.$$

et

$$\mathbf{E}(X_{T-1}) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}(X_{k-1} \mathbf{1}_{\{T=k\}}) = -\infty.$$

Le gain moyen est de 1 euro, mais il faut en moyenne miser une somme infinie.

3. En partant de $2^{n_0} - 1$ euros, le joueur n'aura plus d'argent après la n_0-ième partie s'il ne fait que perdre, ce qui se produit avec probabilité 2^{-n_0}.

Le gain moyen sera donc $\mathbf{E}[X_{T \wedge n_0}] = 0$ par le théorème d'arrêt, ou par un calcul direct.

Indications pour l'exercice 2.17. 1. Cela vient de l'écriture :

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{|S_k| = a\}.$$

2. La propriété de martingale se prouve en écrivant

$$\cos(\lambda S_{n+1}) = \cos(\lambda S_n + \lambda Z_{n+1}) = \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda Z_{n+1}) - \sin(\lambda S_n)\sin(\lambda Z_{n+1}).$$

3. On a $n \wedge \tau \leq \tau$, donc

$$\lambda Z_{n \wedge \tau} \in [-\lambda a, \lambda a] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

donc $\cos(\lambda Z_{n \wedge \tau}) \geq \cos(\lambda a)$.

4. Comme $(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale, on a $\mathbf{E}[X_{n\wedge\tau}] = \mathbf{E}X_0 = 1$, et on utilise le théorème de convergence monotone.
5. La martingale $(X_{n\wedge\tau})$ est dominée par la variable intégrable $\cos(\lambda)^{-\tau}$, donc uniformément intégrable.
6. Les questions précédentes permettent de déduire :
$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n\wedge\tau}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge\tau}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{\cos(\lambda a)}{\cos(\lambda)^\tau}\right)$$
Par conséquent
$$\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-\tau}) \ = \ \cos(\lambda a)^{-1}.$$
Cette égalité signifie que τ admet des moments exponentiels, et est donc dans tous les $\mathbf{L}^p$, pour $1 \leq p < \infty$ (puisque x^p est négligeable devant $\cos(\lambda)^{-x}$ pour x grand).

Indications pour l'exercice 2.18. Plusieurs solutions sont possibles :
- Une première possibilité est l'énoncé, pour deux entiers $n \leq m$,
  "la variable M_m est nulle sur l'événement $\{M_n = 0\}$",
  ou, ce qui revient au même
  $$\text{“}M_m \mathbf{1}_{\{M_n=0\}} = 0\text{”}.$$
- Une autre possibilité est d'utiliser le temps d'arrêt $\tau = \inf\{n \geq 0, M_n = 0\}$. L'énoncé recherché est alors
  "la variable $M_{\tau+k}$ est nulle sur l'événement $\{\tau < \infty\}$",
  ce qui peut aussi s'écrire
  $$\text{“}M_{\tau+k} \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} = 0\text{”}.$$
- Encore une possibilité :
  "Si τ et σ sont deux temps d'arrêt vérifiant $\tau \leq \sigma$ et tels que M_τ soit nulle sur l'évènemt $\{\tau < \infty\}$, alors M_σ est nulle sur l'événement $\{\sigma < \infty\}$."

Le premier énoncé se montre en écrivant
$$\mathbf{E}[M_m \mathbf{1}_{\{M_n=0\}}] = \mathbf{E}[M_m \mathbf{1}_{\{M_n=0\}} | \mathscr{F}_n] \leq \mathbf{E}[M_n \mathbf{1}_{\{M_n=0\}} | \mathscr{F}_n] = 0.$$
Les troisième énoncé peut se démontrer en écrivant (avec le théorème d'arrêt et en utilisant $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_{\tau\wedge n}$)
$$\mathbf{E}[M_{\sigma\wedge n} \mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} | \mathscr{F}_{\tau\wedge n}] \leq \mathbf{E}[M_{\tau\wedge n} \mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} | \mathscr{F}_{\tau\wedge n}] = 0,$$
d'où $M_{\sigma\wedge n} \mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} = 0$, et on passe à la limite $n \to \infty$.
Le deuxième énoncé est un cas particulier du troisième.

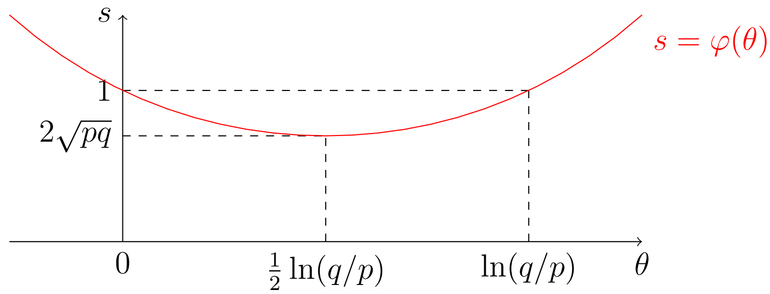
Convergence de martingales

Indications pour l'exercice 2.19. 1. C'est une conséquence de la loi des grands nombres (selon laquelle (X_n) converge vers $-\infty$), mais cela peut aussi se démontrer par une méthode de martingale : (Z_n), comme martingale positive, converge presque sûrement vers un Z_∞, et sur $\{Z_\infty > 0\}$, le quotient (Z_{n+1}/Z_n) converge presque sûrement vers 1. Donc $\mathbf{P}(Z_\infty > 0) = 0$.

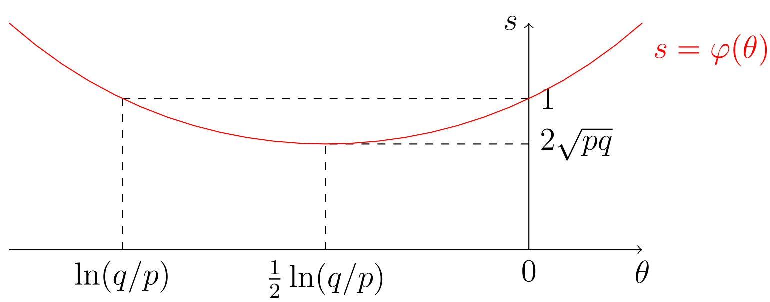
2. La martingale $Z_{T_k \wedge n}$ converge presque sûrement vers $Z_{T_k} \mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}} = \left(\frac{p}{q}\right)^k \mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}}$, et on utilise le théorème d'arrêt et le théorème de convergence dominée.
3. C'est une conséquence de l'égalité

$$\{\sup_{n\geq 0} X_n \geq k\} = \{T_k < \infty\}.$$

Indications pour l'exercice 2.20. 1. Le graphe de φ est, dans le cas $q > p$:



et dans le cas $q < p$:



2. Une martingale positive converge presque sûrement, on note X_∞ la limite de (X_n). Sur l'événement $\{X_\infty > 0\}$, la suite X_{n+1}/X_n converge vers 1, ce qui n'arrive avec probabilité strictement positive que pour $\theta = 0$.
   Une autre preuve de $X_\infty = 0$ consiste à remarquer que $\sqrt{X_n}$ converge dans $\mathbf{L}^1$ vers 0 pour $\theta \neq 0$.
3. Pour $\theta > \ln(q/p)$, la martingale $(X_{T\wedge n})$ converge presque sûrement vers $e^\theta \varphi(\theta)^{-T} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$, et est majorée. En appliquant le théorème d'arrêt et le théorème de convergence dominée, on obtient que $\mathbf{E}(\varphi(\theta)^{-T} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = e^{-\theta}$.
   En faisant décroître θ vers $\max(0, \ln(q/p)$, on obtient la valeur de $\mathbf{P}(T < \infty)$ par convergence monotone. La valeur de $\mathbf{E}[s^T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}]$ s'obtient en posant $s = \varphi(\theta)^{-1}$.

Indications pour l'exercice 2.21. On vérifie que la suite (M_n) définie par

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k}$$

est une martingale bornée dans $\mathbf{L}^2$.

Indications pour l'exercice 2.22. 1. Cela peut se déduire de l'expression $X_{n+1} = \frac{X_n}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{U_{n+1}<X_n\}}$.

2. (X_n) est une martingale bornée (elle prend ses valeurs dans $[0,1]$), donc on est bien sous les hypothèses du théorème de convergence des martingales.
3. La premier égalité se prouve en passant par $\mathbf{E}[X_{n+1}^2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]]$.

   On conclut par le fait que la convergence $\mathbf{L}^2$ implique $\mathbf{E}[Z^2] = \mathbf{E}[(3Z^2+Z)/4]$ et $\mathbf{E}Z = \lim_n \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0$.
4. Pour une telle W, on a $W(1-W) \geq 0$ et $\mathbf{E}(W(1-W)) = 0$, donc $W(1-W) = 0$. C'est donc une variable de Bernoulli. La variable Z suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p.
5. On peut remarquer que $Y_n = \mathbf{1}_{\{U_{n+1} < X_n\}}$, d'où le résultat demandé. Y_n est donc une variable de loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{E}X_n = p$.
6. $Y_n \to Z$ se déduite de $Y_n = 2X_{n+1} - X_n$. Comme Y_n est à valeurs dans $\{0,1\}$, elle converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang (aléatoire).

   Les Y_n ne peuvent pas être indépendants, par exemple car cela contredirait le lemme de Borel–Cantelli ou la loi du 0-1.
7. On a démontré qu'au bout d'un certain moment le joueur finira ou bien par gagner toutes les parties ou bien par toutes les perdre.

Indications pour l'exercice 2.23. On peut remarquer que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathscr{F}_n$ est la loi binomiale de paramètres N et X_n/N, ce qui permet de calculer $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ ou $\mathbf{E}(X_{n+1}^2|\mathscr{F}_n)$.

1. (X_n) étant une martingale bornée, elle converge presque sûrement et dans tous les $\mathbf{L}^p$, $1 \leq p < \infty$.
2. On utilise la moyenne et la variance de la loi binomiale.
3. Comme (X_n) converge, en particulier, dans $\mathbf{L}^1$ et $\mathbf{L}^2$, on a $\mathbf{E}X_\infty = \lim_n \mathbf{E}X_n$ et $\mathbf{E}(X_\infty^2) = \lim_n \mathbf{E}(X_n^2)$. Par ailleurs, (X_n) et (M_n) sont des martingales, donc de moyenne constante. On trouve $\mathbf{E}X_\infty = k/N$ et $\mathbf{E}(X_\infty(N - X_\infty)) = 0$.
4. X_∞ vaut 0 avec probabilité $1 - k/N$ et N avec probabilité k/N.

Indications pour l'exercice 2.24. On utilisera la formule, pour ξ de loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{\alpha\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{\alpha x - x^2/2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-(x-\alpha)^2/2 + \alpha^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy \times e^{\alpha^2/2} \\
&= e^{\alpha^2/2}.
\end{aligned}$$

1. (X_n) est une martingale en conséquence du calcul ci-dessus. Par ailleurs, une martingale positive converge presque sûrement.
2. Par le calcul, on voit que pour tout $0 < \lambda < 1$, la suite (X_n^λ) converge dans $\mathbf{L}^1$ vers 0. Comme elle converge presque sûrement vers X_∞^λ, on en déduit que $X_\infty = 0$.

Indications pour l'exercice 2.25. 1. On peut écrire

$$B_{n+1} = B_n \mathbf{1}_{\{B_{n+1}=B_n\}} + (B_n + 1)\mathbf{1}_{\{B_{n+1}=B_n+1\}},$$

où les deux événements ont pour probabilités conditionnelles sachant $\mathscr{F}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(B_{n+1} = B_n|\mathscr{F}_n) & = 1 - \frac{B_n}{a+b+n} \\ \mathbf{P}(B_{n+1} = B_n + 1|\mathscr{F}_n) & = \frac{B_n}{a+b+n}. \end{cases}$$

On en déduit que (X_n) est une martingale, et comme elle est bornée, elle converge presque sûrement et dans tous les $\mathbf{L}^p$, $0 \le p < \infty$.

2. (X_n) est d'espérance constante car c'est une martingale, et elle converge dans $\mathbf{L}^1$, donc $\mathbf{E}X_\infty = \mathbf{E}X_0 = b/(a+b)$. Comme $0 < b/(a+b) < 1$, X_∞ ne vaut donc pas presque sûrement 1, ni presque sûrement 0.
3. On procède comme en question 1. On trouve

$$\mathbf{E}Y_\infty^{(k)} = \frac{b(b+1)\dots(b+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+k-1)} = \frac{(b+k-1)!(a+b-1)!}{(b-1)!(a+b+k-1)!}.$$

4. On a, pour toutes constantes p et q,

$$\frac{B_n + p}{n+q} = \frac{B_n}{n+q} + \frac{p}{n+q} = \frac{B_n}{n} \times \frac{1}{1+q/n} + \frac{p}{n+q}.$$

Par conséquent, on a presque sûrement $\lim_n (B_n + p)/(n+q) = \lim_n B_n/n = X_\infty$. On en déduit $Y_\infty^{(k)} = X_\infty^k$.

5. En faisant n intégrations par parties, on trouve

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n dx = \frac{n!m!}{(m+n)!}.$$

On en déduit $C_{a,b} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!}$ et

$$\mathbf{E}[Z^k] = \frac{C_{a,b}}{C_{a,b+k}} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!} \times \frac{(a-1)!(b+k-1)!}{(a+b+k-1)!} = \mathbf{E}[(X_\infty)^k].$$

Comme les variables aléatoires Z et X_∞ sont à supports compacts et ont les même moments, on déduit du théorème de Stone-Weierstrass que $\mathbf{E}(f(Z)) = \mathbf{E}(f(X_\infty))$ pour tout fonction f continue sur $[0,1]$, c'est-à-dire que Z et X_∞ ont même loi.

Indications pour l'exercice 2.26. 1. On peut utiliser l'égalité

$$X_{n+1} = \frac{1}{q^{n+1}} \mathbf{1}_{\{T>n\}} \mathbf{1}_{\{U_{n+1}=0\}} = X_n \frac{\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=0\}}}{q}.$$

2. On remarque que la suite (X_n) est nulle à partir du rang $n = T$. On conclut par le fait que T est fini presque sûrement.

3. Comme (X_n) est une martingale positive, on a $\mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0$. En revanche, si $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2)$ était fini, (X_n) serait une martingale bornée dans $\mathbf{L}^2$, donc convergerait dans $\mathbf{L}^2$, et on aurait $0 = \mathbf{E}\lim_n X_n = \lim_n \mathbf{E}X_n = 1$.

   On peut également calculer explicitement $\mathbf{E}X_n = q^{-n}\mathbf{P}(T > n) = 1$ et $\mathbf{E}(X_n^2) = q^{-2n}\mathbf{P}(T > n) = q^{-n}$.
4. Si la martingale (X_n) était fermée, elle convergerait dans $\mathbf{L}^1$, ce qui n'est pas le cas (voir question précédente).
5. Comme $\mathbf{E}(Y_n^2) = \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}X_0$, on a $\sup_n \mathbf{E}(Y_n^2) < \infty$; la suite (Y_n) est donc uniformément intégrable.

Indications pour l'exercice 2.27. 1. On voit que X_n est une martingale fermée par la variable X. Elle converge donc presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers $\mathbf{E}(X|\mathscr{F}_\infty)$.

2. Par l'inégalité de Jensen
$$\mathbf{E}(X_n^2) = \mathbf{E}((\mathbf{E}(X \mid \mathscr{F}_n))^2) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(X^2 \mid \mathscr{F}_n)) = \mathbf{E}(X^2),$$
   donc, $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. La suite X_n converge donc dans $\mathbf{L}^2$ vers $\mathbf{E}(X|\mathscr{F}_\infty)$. On conclut par unicité de la limite.
3. On trouve $\mathbf{E}(Y_i^2) = \sigma^2 + \varepsilon_i^2$, $\mathbf{E}(XY_i) = \sigma^2$, et pour $i \neq j$, $\mathbf{E}(Y_iY_j) = \sigma^2$.
4. L'indépendance est une conséquence du fait que le vecteur $(Z_n, Y_0, \cdots, Y_n)$ est gaussien.
5. On trouve
$$\mathbf{E}((X - X_n)^2) = \mathbf{E}(Z_n^2) = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2}}.$$
6. Si $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$ alors on a
$$X_n = \frac{(n+1)\sigma^2}{\varepsilon^2 + (n+1)\sigma^2} X + \frac{\eta_0 + \cdots + \eta_n}{\varepsilon^2 + (n+1)\sigma^2}.$$
   Donc $X_n \to X$ presque sûrement et dans $\mathbf{L}^2$ par la loi des grands nombres.

Indications pour l'exercice 2.28. — Le premier argument est erroné car il confond "être minoré par une constante" et "être minoré par une variable aléatoire", cette deuxième hypothèse étant plus faible que la première : une suite (X_n) tendant presque sûrement vers $+\infty$ est minorée par une variable aléatoire (par exemple, par $\inf_n X_n$), alors que pour conclure qu'une sur-martingale minorée converge, la bonne hypothèse est d'être minorée par une constante.

— Le deuxième argument est également erroné, car le lemme de Fatou suppose que les variables aléatoires sont positives (ou minorées par une même constante).

— On peut en fait construire un exemple de sur-martingale qui converge presque sûrement vers $+\infty$. Par exemple, $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, avec des (Y_n) indépendants vérifiant
$$\begin{cases} \mathbf{P}(Y_n = 1) & = 1 - \frac{1}{n^2}, \\ \mathbf{P}(Y_n = -n^2) & = \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$
Par Borel–Cantelli, les Y_n vaudront tous 1 à partir d'un certain rang, et X_n tendra vers $+\infty$, mais les Y_n sont d'espérance négative, donc (X_n) est une sur-martingale.

Indications pour l'exercice 2.29. 1. La suite (X_n) est clairement une martingale, pour $(\sqrt{X_n})$, on applique l'inégalité de Jensen.

2. Par l'inégalité de Jensen, $\mathbf{E}(\sqrt{Y_k}) \leq 1$, donc la suite $\prod_{k=0}^{n} \mathbf{E}(\sqrt{Y_k})$ est décroissante et positive.

3. Comme (X_n) est une martingale positive, elle converge presque sûrement vers un X_∞. Si de plus $\ell = 0$, alors $(\sqrt{X_n})$ converge dans $\mathbf{L}^1$ vers 0, or elle converge presque sûrement vers $\sqrt{X_\infty}$.
   Si (X_n) était fermée, on aurait $X_n = \mathbf{E}[X_\infty|\mathscr{F}_n] = 0$.

4. En explicitant $\mathbf{E}\left(\left(\sqrt{X_p} - \sqrt{X_n}\right)^2\right)$ en fonction des $\mathbf{E}\sqrt{Y_n}$, on montre que la suite $(\sqrt{X_n})$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2$. On a donc convergence de (X_n) dans $\mathbf{L}^1$ et (X_n) est donc fermée.

5. On se ramène au cas précédent en posant $Y_n = p(Z_n)/q(Z_n)$. Du fait que p et q sont deux probabilités distinctes, on déduit $\mathbf{E}\sqrt{Y_n} < 1$, et on est donc dans le cadre de la question 3.

Indications pour l'exercice 2.30. 1. C'est une étude de fonction ($\frac{1}{x}\ln(x)$ atteint son maximum en $1/e$). On remarque ensuite que

$$x \ln x - x \ln y = y \times \frac{x}{y} \ln\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{y}{e}.$$

2. Après avoir appliqué l'inégalité maximale, on remarque que

$$\int_1^\infty \frac{1}{a} \mathbf{1}_{\{x \geq a\}} da = \ln^+ x.$$

3. Dans l'inégalité de la question précédente, le membre de gauche est supérieur à

$$\mathbf{E}\left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|\right) - 1,$$

   et le membre de droite est majoré, d'après l'inégalité de la question 1, par

$$\mathbf{E}\left(|X_n| \ln^+ |X_n|\right) + \frac{1}{e}\mathbf{E}\left(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|\right).$$

   On conclut par convergence monotone.

Indications pour l'exercice 2.31. 1. L'inclusion $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$ se déduit de $B_{n,k} = B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}$.

2. La tribu $\mathscr{F}_n$ est engendrée par la partition finie $(B_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$, donc

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{F}_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{E}(X|B_{n,k}) \mathbf{1}_{B_{n,k}}.$$

3. Idem.

4. (F_n) est une martingale fermée, elle converge donc presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers $\mathbf{E}(F|\mathscr{F}_\infty) = F$.
5. Cela découle de $x \in B_{n,\lfloor 2^n x \rfloor}$.
6. Sur chaque $B_{n,k}$, on a

$$G(x) = 2^n \left| F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq K.$$

   La deuxième égalité se déduit de $F_n(k/2^n-) - F(0) = \int_0^{k/2^n} G_n(x)dx$.
7. $\mathbf{E}[G_{n+1}|\mathscr{F}_n]$ se calcule en utilisant la formule pour $\mathbf{E}[X|\mathscr{F}_n]$. On a donc une martingale bornée, donc elle converge presque sûrement et dans tous les $\mathbf{L}^p$, $1 \leq p < \infty$. La convergence $\mathbf{L}^1$ de G_n entraîne la convergence de $\int_0^x G_n(u)du$ pour tout x.
8. C'est la question précédente.

Chapitre 3

Corrigé : Chaînes de Markov

Matrices de transition, calculs

Indications pour l'exercice 3.1. 1. — Dans le cas $(p,q)=(0,0)$, la suite (X_n) est constante en n : on a presque sûrement $X_n = X_0$.

— Dans le cas $(p,q)=(0,1)$, on a presque sûrement $X_n = 1$ pour $n \geq 1$ et dans le cas $(p,q)=(1,0)$, on a $X_n = 2$ pour $n \geq 1$. Dans ces deux cas, X_0 peut être aléatoire.

— Si $(p,q)=(1,1)$, la chaîne change d'état à chaque étape : $X_n = X_0$ pour n pair, et $X_n = 1 - X_0$ pour n impair.

2. En diagonalisant M, on trouve :

$$M = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}1 & p\\ 1 & -q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & p\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}1 & p\\ 1 & -q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-p-q)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & p\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q & p\\ q & p\end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, $\mathbf{P}(X_n = 1 | X_0 = i)$ converge vers $q/(p+q)$ et $\mathbf{P}(X_n = 2 | X_0 = i)$ vers $p/(p+q)$ et ce quel que soit i.

3. En considérant les deux états “forme identique à la forme initiale” et “forme différente de l'état initiale”, on est ramené à la situation des premières questions, avec $p = a$ et $q = a/N$. La probabilité limite est alors $\begin{pmatrix}\frac{1}{N} & \frac{N-1}{N}\end{pmatrix}$.

Indications pour l'exercice 3.2. On remarque que, pour tout $k \geq 1$

$$\{X_1 = k-1, X_2 = k-2, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0\} \subset \{X_1 = k-1\}$$

et que ces deux événements ont même probabilité. Ils sont donc égaux (à un ensemble négligeable près).

Par ailleurs

$$\{X_1 = k-1\} = \{X_1 = k-1, X_2 = k-2, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0\} \subset \{S = k\}.$$

Comme les événements $(\{X_1 = k-1\})_{k\geq 1}$ constituent une partition de Ω, on a donc

$$\{X_1 = k-1\} = \{S = k\},$$

et notamment $\mathbf{P}(S = k) = \mathbf{P}(X_1 = k-1) = p_k$.

Toute probabilité sur $\{1, 2, \cdots\}$ peut donc être considéré comme la loi du temps de retour à un état pour une certaine chaîne de Markov appropriée.

Indications pour l'exercice 3.3. 1. On a affaire à une chaîne de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors

$$Q^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cela peut par exemple se montrer en écrivant $Q = (M - I)/2$, où M est la matrice dont tous les coefficients sont des 1. On peut alors appliquer la formule du binôme, en remarquant que $M^n = 3^n M$ si $n \geq 1$.
En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Quel que soit μ, $\mathbf{P}_\mu(X_n = j)$ converge vers 1/3.

Indications pour l'exercice 3.4. 1. La suite (Y_n) est i.i.d. et $Y_n \in \mathbf{L}^1$, avec $\mathbf{E}(Y_n) = p$. Par la loi des grands nombres, $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = p > 0$ p.s., donc $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ p.s. Puisque $X_n - X_{n-1} \in \{0, 1\}$ pour tout n, $X_0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ p.s., on obtient que (X_n) visite tout $y \in \mathbf{N}$ et donc $T_y < \infty$ p.s..

2. $M_n := X_n - np = \sum_{i=1}^n (Y_i - p)$ est une martingale, car $(Y_i - p,\, i \geq 1)$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées.

3. Puisque $n \wedge T_y$ est un temps d'arrêt borné, on a $\mathbf{E}(M_{n\wedge T_y}) = \mathbf{E}(M_0) = 0$, donc $\mathbf{E}(n \wedge T_y) = \mathbf{E}(X_{n\wedge T_y})/p$. Puisque $T_y < \infty$ et $|X_{n\wedge T_y}| \leq y$ p.s., on a, par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n\wedge T_y}) = \mathbf{E}(X_{T_y}) = y$. Par convergence monotone $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(n \wedge T_y) = \mathbf{E}(T_y)$. Donc

$$\mathbf{E}(T_y) = \frac{y}{p}.$$

4. Puisque $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n, on a

$$1_{(X_k=y)} = 0, \qquad \text{si} \quad k < T_y \quad \text{ou} \quad k \geq T_{y+1},$$

et

$$1_{(X_k=y)} = 1, \qquad \text{si} \quad T_y \leq k < T_{y+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} N(y) &= \sum_{i=T_y}^{T_{y+1}-1} 1 = T_{y+1} - T_y, \\ \mathbf{E}[N(y)] &= \mathbf{E}(T_{y+1} - T_y) = \frac{y+1}{p} - \frac{y}{p} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

5. On voit que X_n est une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p), tandis que T_1 est une variable aléatoire géométrique de paramètre p, car pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}(T_1 = k) = \mathbf{P}(X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0,\, X_k = 1)$$

$$= \mathbf{P}(Y_1 = \cdots = Y_{k-1} = 0,\, Y_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

6. On veut calculer $\mathbf{P}(N(y) = k)$. Par le point 4 on a

$$N(y) = T_{y+1} - T_y = T_{y+1} \circ \theta_{T_y}.$$

Par la propriété de Markov forte,

$$\mathbf{P}(N(y) = k) = \mathbf{P}(T_{y+1} \circ \theta_{T_y} = k) = \mathbf{E}(\mathbf{P}_{X_{T_y}}(T_{y+1} = k))$$

$$= \mathbf{P}_y(T_{y+1} = k) = \mathbf{P}_0(T_1 = k) = \mathbf{P}(T_1 = k).$$

7. Soit $y \geq 2$ et $k \geq y$. On a

$$\mathbf{P}(T_y = k) = \mathbf{P}(X_{k-1} = y-1,\ X_k = y) = \mathbf{P}(X_{k-1} = y-1,\ Y_k = 1)$$

$$= \binom{k-1}{y-1}\ p^y (1-p)^{k-y}.$$

Indications pour l'exercice 3.5. 1. La suite (X_{T+n}) est une chaîne de Markov de matrice de transition Q et dont la loi initiale est celle de la variable aléatoire X_T. Pour voir cela, il suffit d'appliquer la propriété de Markov forte au temps T à une espérance de la forme

$$\mathbf{E}_x(f(X_T, X_{T+1}, \ldots, X_{T+n})).$$

2. (a) On utilise la propriété de Markov forte au temps S_n pour calculer (par récurrence)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(S_{n+1} < \infty) &= \mathbf{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{S_n<\infty\}} \mathbf{P}_x(\mathscr{S}((X_{S_n+k})_{k\geq 0}) < \infty | \mathscr{F}_{S_n})\right) \\ &= \mathbf{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{S_n<\infty\}} \mathbf{P}_{X_{S_n}}(S < \infty)\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) La propriété de Markov forte en S_n permet de montrer :

$$\mathbf{P}_x(X_{S_{n+1}} = y \,|\, \mathscr{F}_{S_n}) = \mathbf{P}_{X_{S_n}}(X_S = y) = Q_S(X_{S_n}, y).$$

En particulier, on peut exprimer $\mathbf{P}_x(X_{S_1} = x_1, \dots, X_{S_n} = x_n)$ à partir de Q_S.

Indications pour l'exercice 3.6. 1. Par indépendance, on a

$$\mathbf{P}_x(X_1 \le x,\, \cdots,\, X_{k-1} \le x,\, X_k > y) = (1-p^x)^{k-1}\, p^y.$$

2. La probabilité $\mathbf{P}_x(\tau = k,\ X_k > y)$ est égale à

$$\mathbf{P}_x(X_1 \le X_0, \dots, X_{k-1} \le X_0, X_k > X_0, X_k > y),$$

et sous $\mathbf{P}_x$, on a $X_0 = x$ presque sûrement. Par conséquent $\mathbf{P}_x(\tau = k,\ X_k > y)$ vaut 1 si $y \le x$, et vaut la probabilité calculée dans la question 1 si $y > x$.

La loi de τ s'obtient en prenant $y = x$, et la loi de X_τ s'obtient en sommant en k : on obtient $\mathbf{P}_x(X_\tau > y) = p^{y-x}$. Les variables τ et X_τ sont indépendantes.

3. Pour toute mesure de probabilité μ, on a $\mu Q = \pi$. On ne peut donc avoir $\mu Q = \mu$ que si $\mu = \pi$.

Sous $\mathbf{P}_x$, τ est de loi géométrique, donc $\mathbf{P}_x(\tau < \infty) = 1$ pour tout x, ce qui entraîne $\mathbf{P}_\pi(\tau < \infty) = 1$. De même $\mathbf{E}_\pi(\tau) = \sum_{x\ge1} \mathbf{E}_x(\tau)\pi(x) = \infty$.

4. On calcule $\mathbf{P}_x(Z_0 = x, Z_1 = x_1, \dots, Z_{k+1} = x_{k+1})$ par récurrence en conditionnant par $\mathscr{F}_{\tau_k}$ et en appliquant la propriété de Markov forte au temps τ_k.

La matrice de transition de (Z_k) est

$$Q^Z(x,y) = \mathbf{1}_{\{y>x\}}\, p^{y-x-1}\,(1-p).$$

Sous $\mathbf{P}_x$, la suite $(Z_k)_{k\ge0}$ part de $Z_0 = x$.

5. C'est une conséquence de la propriété de Markov forte au temps τ_k.

6. On écrit

$$Z_k = x + \sum_{i=1}^{k} (Z_i - Z_{i-1})$$

avec une somme de variables i.i.d. de loi géométrique. La loi des grands nombres permet de conclure que Z_k/k converge vers $1/p$.

Récurrence, transience, irréductibilité

Indications pour l'exercice 3.7. 1. Les états 1 et 2 sont récurrents. L'état 3 est transient. On a $G(x,x) = \infty$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = 2$. On a $G(x,y) = 0$ si et seulement si $(x,y) = (1,3)$ ou $(x,y) = (2,3)$.

2. La formule $G = I + QG$ se montre à partir de la propriété de Markov faible. En effet, en définissant
$$\Phi((X_n)_{n\geq 0}) = \mathrm{card}\{n \in \mathbf{N}, X_n = y\}$$
on a
$$N_y = \Phi((X_n)_{n\geq 0}) = \mathbf{1}_{\{X_0=y\}} + \Phi((X_{n+1})_{n\geq 0}).$$
On obtient alors
$$G = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$
3. On a clairement $v(1) = 0$. En posant
$$\Psi((X_n)_{n\geq 0}) = \inf\{n \geq 1; X_n = 1\},$$
on a $\mathbf{P}_x$-p.s. (pour $x \neq 1$)
$$T_{\{1\}} = \Psi((X_n)_{n\geq 0}) = 1 + \Psi((X_{n+1})_{n\geq 0}).$$
On peut donc encore utiliser la propriété de Markov faible pour obtenir $v(x) = 1 + Qv(x)$ pour $x \neq 1$. La solution est alors
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$
4. On a $\mathbf{E}_3(T_{\{3\}}) = 0$ et $\mathbf{E}_x(T_{\{3\}}) = \infty$ si $x \in \{1,2\}$.
5. Le système linéaire caractérisant une probabilité invariante admet pour unique solution $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.
6. Partant de 3, la chaîne reste en 3 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et entre dans $\{1,2\}$ avec probabilité $\frac{2}{3}$. Donc $T_{\{1,2\}}$ a sous $\mathbf{P}_3$ loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
7. En effet, $\mathbf{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \frac{3}{2} = \mathbf{E}_3(N_3)$. La raison est que, une fois quitté l'état 3, la chaîne n'y revient jamais ; donc $\mathbf{P}_3$-p.s. les événements $\{T_{\{1,2\}} = k\}$ et $\{X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = 3,\ X_j \neq 3\ \forall j \geq k\}$ coïncident et, par conséquence, $\mathbf{P}_3$-p.s. $T_{\{1,2\}} = N_3$.

Indications pour l'exercice 3.8. On applique la propriété de Markov forte au temps T_y :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}} \sum_{n\geq T_y} \mathbf{1}_{\{X_n=z\}}\right) &= \mathbf{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}}\mathbf{E}_x\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_{n+T_y}=z\}}\middle|\mathscr{F}_{T_y}\right)\right) \\ &= \mathbf{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}}\mathbf{E}_{X_{T_y}}(N_z)\right) \\ &= \mathbf{P}_x(T_y < \infty)G(y,z).\end{aligned}$$
Si y est transient, on a de plus $\mathbf{P}_x(T_y < \infty) = \frac{G(x,y)}{G(y,y)}$.

Indications pour l'exercice 3.9. 1. On a

$$\sum_{y\in E} Q^*(x,y) = \sum_{y\in E} \frac{Q(y,x)\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{\pi Q(x)}{\pi(x)} = \frac{\pi(x)}{\pi(x)} = 1,$$

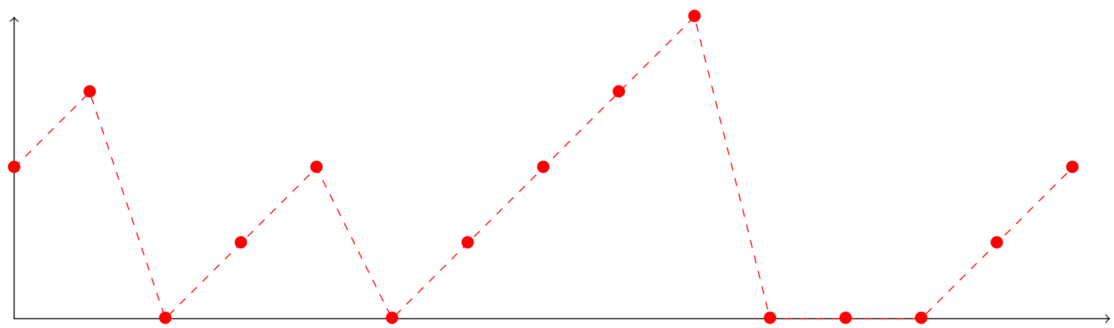
$$\sum_{x\in E} \pi(x)\, Q^*(x,y) = \sum_{x\in E} \pi(x)\, \frac{Q(y,x)\pi(y)}{\pi(x)} = \sum_{x\in E} Q(y,x)\pi(y) = \pi(y).$$

L'égalité $Q^* = Q$ est vraie si et seulement si $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$ pour tout $x, y \in E$, c'est-à-dire si et seulement si π est réversible pour Q.

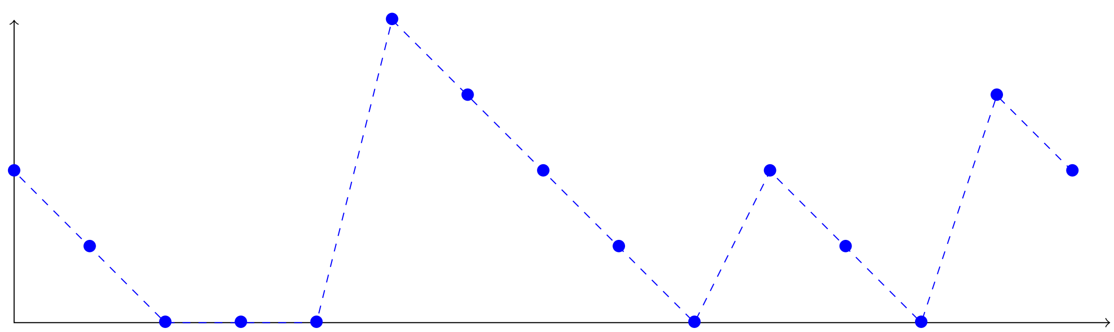
2. En utilisant la relation $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q^*(y,x)$, on obtient par récurrence

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\pi(X_0^* = x_0, \cdots, X_N^* = x_N) &= \mathbf{P}_\pi(X_0 = x_N, \cdots, X_N = x_0)\\ &= \pi(x_N)Q(x_N, x_{N-1})\cdots Q(x_1, x_0)\\ &= \pi(x_0)Q^*(x_0, x_1)\cdots Q^*(x_{N-1}, x_N).\end{aligned}$$

3. L'unique probabilité invariante est $\pi(y) = (1-p)p^y$.
Une trajectoire typique de (X_n) issue de la mesure π est :



Une trajectoire typique de (X_n^*) issue de la mesure π est :



Indications pour l'exercice 3.10. 1. On a $Q^j(0,j) \geq p_0 \dots p_{j-1} > 0$, donc

$$Q^{j+1}(i,j) \geq Q(i,0)Q^j(0,j) > 0.$$

La chaîne est donc bien irréductible.

2. On remarque qu'une mesure μ est invariante si et seulement elle est de la forme

$$\mu(i) = \lambda p_0 p_1 \dots p_{i-1}$$

pour $\lambda > 0$ et qu'elle vérifie $\mu(0) = \lambda = \lambda(1 - \lim_n p_0 \dots p_n)$.

On a donc existence d'une mesure invariante si et seulement si $p_0 \dots p_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour montrer que la chaîne est récurrente, on note T_0 le temps de retour en 0 et il suffit de remarquer que

$$\mathbf{P}(T_0 < \infty) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(T_0 = n) = \sum_{n \geq 1} (p_0 \dots p_{n-1} - p_0 \dots p_n) = 1 - \lim_n p_0 \dots p_n = 1.$$

3. La chaîne est récurrente positive si et seulement si elle admet une probabilité invariante, ce qui revient à $\sum_i \mu(i) < \infty$, c'est-à-dire à $\sum_i p_0 p_1 \dots p_i < \infty$.

Indications pour l'exercice 3.11. 1. La probabilité invariante de la chaîne est

$$\pi = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Par le théorème ergodique, on a $\lim_{n \mapsto \infty} N_n/n = 1/14$ p.s.

Indications pour l'exercice 3.12. 1. La chaîne est irréductible (graphe connexe) et tous les états sont récurents (espace d'état fini).

2. Les mesures invariantes sont les multiples de la mesure uniforme :

$$\mu = \alpha(\delta_c + \delta_d + \delta_e + \delta_s + \delta_t + \delta_u),$$

avec $\alpha > 0$. Par conséquent, l'unique probabilité invariante π est la loi uniforme ($\alpha = 1/6$ dans l'expression de μ ci-dessus).

3. On passe en moyenne une fois en c entre deux passages en t (car μ définie par $\mu(x) = \mathbf{E}_t(\sum_{k=1}^{T_t} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}})$ est une mesure invariante).

4. Le temps de retour moyen en u vaut 6 ($= 1/\pi(c)$).

5. Asymptotiquement, on passe un tiers du temps en dans l'ensemble $\{c, d\}$. Cela découle du théorème ergodique en remarquant $\pi(\{c, d\}) = 1/3$.

6. On note $T_d = \inf\{n \geq 0, X_n = d\}$. En appliquant la propriété de Markov (faible) au temps $t = 1$, on trouve que la fonction $u(x) = \mathbf{E}_x(T_d)$ vérifie

$$\begin{cases} u(d) & = 0, \\ u(x) & = 1 + Qu(x) \text{ si } x \neq d. \end{cases}$$

On en déduit $\mathbf{E}_e(T_d) = 6$.

Convergence vers la loi stationnaire

Indications pour l'exercice 3.13.

1. La chaîne est irréductible et tous les états sont stationnaires.
2. L'unique mesure invariante est
$$\pi = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Elle n'est pas réversible.
3. Pour tout $x \in E$, $\mathbf{E}_x(S_x) = \pi(x)^{-1}$, donc $\mathbf{E}_1(S_1) = \frac{9}{4}$, $\mathbf{E}_2(S_2) = \frac{9}{2}$ et $\mathbf{E}_3(S_3) = \frac{9}{3} = 3$.
4. Par l'irréductibilité, la période est la même pour tout $x \in E$. Comme $Q^2(1,1) > 0$ et $Q^3(1,1) > 0$, la chaîne est apériodique. On a donc la convergence en loi : $\lim_n Q^n(x,y) = \pi(y)$.

Indications pour l'exercice 3.14.

1. La matrice de transition (de taille $(N+1) \times (N+1)$) est
$$\begin{pmatrix} 0 & & & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 1-p & p \\ \vdots & & & & 1-p & p & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & & & & \vdots \\ 1-p & p & 0 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
2. La chaîne est irréductible et tous les états sont récurrents.
3. Par irréductibilité, il y a unicité de la mesure invariante à constante près. Toutes les mesures invariantes sont colinéaires à
$$\begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. L'unique probabilité invariante est
$$\begin{pmatrix} \frac{1-p}{N+1-p} & \frac{1}{N+1-p} & \frac{1}{N+1-p} & \dots & \frac{1}{N+1-p} & \frac{1}{N+1-p}. \end{pmatrix}.$$
Par le théorème ergodique, la proportion du temps passé par le professeur dans un lieu avec 0 parapluie est $\frac{1-p}{N+1-p}$. La proportion du temps passé sous la pluie et sans parapluie est donc p fois cette proportion-là, soit
$$\frac{p(1-p)}{N+1-p}.$$
Pour $p = 1/2$, on trouve bien
$$\frac{1}{4N+2}.$$
5. La période est 1. En effet, si N est pair, on a $Q(N/2, N/2) = 1-p > 0$, et si N est impair, alors $Q((N+1)/2, (N+1)/2) = p > 0$.

Indications pour l'exercice 3.15. 1. On a $S^n\big((x,y),(x',y')\big) = Q^n(x,x')R^n(y,y')$.

2. Par irréductibilité et apériodicité, pour tout x, x', y et y' dans E, on a $Q^n(x,x') > 0$ et $R^n(y,y') > 0$ à partir d'un certain rang. On a donc $S^n\big((x,y),(x',y')\big) > 0$ à partir d'un certain rang.
3. Le produit de deux marches aléatoires simples symétriques sur $\mathbf{Z}$ possède deux classes de communication.
4. La probabilité $\pi(x,y) = \rho(x)\sigma(y)$ est invariante pour la chaîne produit.
5. La mesure invariante du déplacement d'une souris est, après calcul,

$$\rho(1) = \rho(4) = \rho(13) = \rho(16) = \frac{1}{24}$$
$$\rho(2) = \rho(3) = \rho(5) = \rho(9) = \rho(14) = \rho(15) = \rho(8) = \rho(12) = \frac{1}{16}$$
$$\rho(6) = \rho(7) = \rho(10) = \rho(11) = \frac{1}{12}.$$

La mesure $\pi(x,y) = \rho(x)\rho(y)$ est invariante pour la chaîne modélisant le mouvement des deux souris. Mais cette chaîne produit admet deux classes de récurrence disjointes : la classe $\mathscr{C}_1$ des couples de cases de même couleur et la classe $\mathscr{C}_2$ des couples de cases de couleurs différentes. Comme $\pi(\mathscr{C}_i) = 1/2$, la probabilité invariante (unique) sur $\mathscr{C}_1$ est $\pi_1(x,y) = 2\pi(x,y)\mathbf{1}_{\mathscr{C}_1}(x,y)$. Par conséquent, l'intervalle de temps moyen entre deux rencontres des souris en case 7 est

$$\mathbf{E}_{(7,7)}(S_{(7,7)}) = \frac{1}{\pi_1(7,7)} = 72.$$

Indications pour l'exercice 3.16. Si $x \in A$, on a $T_A = 0$ $\mathbf{P}_x$-presque sûrement, d'où $u(x) = f(x)$. Si $x \notin A$, on applique la propriété de Markov (faible) au temps $k = 1$ pour obtenir $u(x) = Pu(x) + g(x)$.

Indications pour l'exercice 3.17. 1. Par irréductibilité, la probabilité invariante π est unique et charge E tout entier. Le théorème ergodique permet d'affirmer que la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ converge presque sûrement et dans $\mathbf{L}^1$ vers $\pi(y)$.

2. Posons $U_i = \sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ On applique la propriété de Markov forte au temps S_i : pour toute fonction $f : E \to \mathbf{R}$,

$$\mathbf{E}_x(f(U_i)|\mathscr{F}_{S_i}) = \mathbf{E}_{X_{S_i}}\left(f\left(\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right)\right) = \mathbf{E}_x\left(f\left(\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right)\right).$$

L'expression obtenue étant déterministe, la variable U_i est donc indépendante de $\mathscr{F}_{S_i}$. En particulier (par récurrence), les variables $(U_1,\dots,U_d)$ sont indépendantes. De plus, $\mathbf{E}_x(f(U_i)) = \mathbf{E}_x\left(f\left(\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right)\right)$ ne dépend pas de i, donc tous les U_i ont même loi.

3. On écrit

$$\frac{1}{S_i}\sum_{k=0}^{S_i-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}} = \frac{i}{S_i}\times\frac{1}{i}\sum_{q=0}^{i-1}\left(\sum_{k=S_q}^{S_{q+1}-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{i}\sum_{q=0}^{i-1}S_{q+1}-S_q\right)^{-1}\times\frac{1}{i}\sum_{q=0}^{i-1}\left(\sum_{k=S_q}^{S_{q+1}-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right)$$

D'une part, par la question 1, le membre de gauche converge presque sûrement vers $\pi(y)$ (remarquer que $S_i \geq i$, donc S_i tend vers ∞), d'autre part, par la loi des grands nombres classique, le membre de droite converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(\sum_{k=0}^{S-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}})/\mathbf{E}_xS$.

4. En appliquant la propriété de Markov forte en T_y, on obtient pour $x \neq y$, $\mathbf{E}_xS = \mathbf{E}_xT_y + \mathbf{E}_yT_x$.

5. L'égalité à démontrer se ramène à

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right) = \frac{1}{\mathbf{P}_y(T_x<T_y)}.$$

Cette égalité se démontre en appliquant la propriété de Markov forte en T_y pour écrire

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right) = \mathbf{E}_y\left(\sum_{k=0}^{T_x-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right),$$

et une autre application de la propriété de Markov forte (en T_y), montre que la variable $\sum_{k=0}^{T_x-1}\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$ suit sous $\mathbf{P}_y$ une loi géométrique de paramètre $\mathbf{P}_y(T_x<T_y)$.

Indications pour l'exercice 3.18. 1. L'état 0 conduit à tout état $x > 0$ puisque $Q(0,x) = f(x) > 0$; tout état $x > 0$ conduit à $x-1$ et donc à 0 après x étapes. La chaîne est donc irréductible.

2. Par les définitions, on voit que

$$\mathbf{P}_0(S_1 = n) = \mathbf{P}_0(X_n = 0, X_{n-1} = 1, \cdots, X_1 = n-1) = \mathbf{P}_0(X_1 = n-1) = f(n).$$

Donc $\mathbf{P}_0(S_1 < \infty) = \sum_n f(n) = 1$ et la chaîne est irréductible récurrente.

3. On voit que

$$\sum_x \lambda(x)\,Q(x,y) = f(y+1)\sum_{z=1}^{\infty}f(z) + \sum_{z=y+2}^{\infty}f(z) = \sum_{z=y+1}^{\infty}f(z) = \lambda(y)$$

donc λ est invariante. Toute mesure μ sur $\mathbf{N}$ est invariante si

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x)\,Q(x,y) = f(y+1)\,\mu(0) + \mu(y+1),$$

ce qui donne

$$\mu(y) = \mu(0) - \mu(0)(f(y) + f(y-1) + \cdots + f(1)) = \mu(0) \sum_{z=y+1}^{\infty} f(z) = \mu(0)\, \lambda(y).$$

4. (X_n) est récurrente positive si et seulement si $\mathbf{E}_0(S_1) = \sum_n n\, f(n) = m < \infty$. Il existe une mesure de probabilité invariante si et seulement si λ est normalisable :

$$\sum_x \lambda(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{z=x+1}^{\infty} f(z) = \sum_{z=1}^{\infty} f(z) \sum_{x=0}^{z-1} 1 = \sum_{z=1}^{\infty} z\, f(z) = m,$$

donc si et seulement si $m < \infty$. On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on appelle π la seule mesure de probabilité invariante :

$$\pi(x) = \frac{1}{m} \sum_{z=x+1}^{\infty} f(z), \qquad x \in \mathbf{N}.$$

5. La chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique, car $Q(0,0) = f(1) > 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x(X_n = y) = \pi(y) = \frac{1}{m} \sum_{z=y+1}^{\infty} f(z),$$

pour tous $x, y \in \mathbf{N}$.

6. Soit $u(n) := \mathbf{P}_0(X_n = 0)$. Si $X_0 = X_n = 0$, alors $S_1 \in \{1, \cdots, n\}$ et donc $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z\le n}\{X_0 = X_n = 0,\, S_1 = z\}$. Par la propriété forte de Markov nous obtenons, puisque S_1 est un temps d'arrêt,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0(X_n = 0) &= \sum_{z=1}^{n} \mathbf{P}_0(S_1 = z,\, X_n = 0) = \sum_{z=1}^{n} \mathbf{E}_0\left(1_{(S_1=z)}\, \mathbf{P}_{X_z}(X_{n-z} = 0)\right) \\ &= \sum_{z=1}^{n} \mathbf{P}_0(S_1 = z)\, \mathbf{P}_0(X_{n-z} = 0) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = f * u(n).\end{aligned}$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \ge 1$. On peut voir que $t_{i+1} = S_1 \circ \theta_{S_i}$, c'est-à-dire le premier temps de retour à 0 après S_i, pour tous $i \ge 0$. Par la propriété forte de Markov, on trouve que la suite $(t_i)_{i\ge1}$ est sous $\mathbf{P}_0$ une suite i.i.d. et

$$\mathbf{P}_0(t_i = n) = \mathbf{P}_0(t_1 = n) = \mathbf{P}_0(S_1 = n) = f(n), \qquad n \ge 1.$$

8. Puisque $S_i = t_1 + \cdots + t_i$ et les (t_i) sont i.i.d. avec distribution commune $f(\cdot)$, alors $\mathbf{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution i fois de f pour $i \ge 1$.
9. La suite aléatoire (S_i) décrit tous les temps de retour à 0, donc il est clair que $\{X_n = 0\} = \cup_i \{S_i = n\}$. Puisque les événements $(\{S_i = n\})_i$ sont disjoints, on obtient

$$u(n) = \mathbf{P}_0(X_n = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_0(S_i = n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \ge 1.$$

10. Par le point 5, $u(n) = \mathbf{P}_0(X_n = 0) \to \pi(0) = 1/m$.

Chapitre 4

Corrigé du problème : Processus de branchement

1. (Un premier cas simple) Nous avons $\xi(0)+\xi(1) = \mathbf{P}(X_{k,n} \leq 1) = 1$. Cela signifie donc que chaque individu a au plus un enfant p.s.. Nous avons ainsi $Z_{n+1} \leq Z_n$ et la population décroît presque sûrement. Si, de plus $Z_0 = 1$ comme supposé, alors Z_n est à valeurs dans $\{0,1\}$ p.s..

Si $\xi(0) = 0$ alors, $Z_n = 1$ p.s. pour tout n. Si $\xi(0) > 0$, alors $T = \inf\{n \in \mathbf{N}; Z_n = 0\} = \inf\{n \in \mathbf{N}; \xi_{1,n} = 0\}$ et $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ (loi géométrique). La population finit donc par s'éteindre.

2. Calculons l'espérance conditionnelle suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) =&\mathbf{E}\Big(\sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \sum_{l=1}^{k} X_{l,n+1} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{E}(X_{l,n+1} \mid \mathscr{F}_n) \\ =&\sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \mathbf{E}(X_{l,n+1}) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} km = mZ_n\end{aligned}$$

où, dans la première ligne, nous avons utilisé le théorème d'interversion espérance-somme positive puis, dans la deuxième ligne, la $\mathscr{F}_n$-mesurabilité de Z_n puis l'indépendance entre les $X_{k,n+1}$ et $\mathscr{F}_n$.

En prenant ensuite l'espérance, on a $\mathbf{E}(Z_{n+1}) = m\,\mathbf{E}(Z_n)$ avec $\mathbf{E}(Z_0) = 1$ d'où la suite géométrique $\mathbf{E}(Z_n) = m^n$.

Pour $r \in [0,1]$, la fonction $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \to r^n$ est positive et bornée par 1. Les variables r^{Z_n} sont donc intégrables, et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{\ell\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=\ell\}} r^{\sum_{k=1}^{\ell} X_{k,n+1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big) \\ &= \sum_{\ell\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=\ell\}}\, \mathbf{E}(r^{\sum_{k=1}^{\ell} X_{k,n+1}} \mid \mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

par interversion série positive-espérance conditionnelle (comme dans le calcul précédent) puis $\mathscr{F}_n$-mesurabilité de Z_n. De plus, nous avons à partir de la définition de $\mathscr{F}_n$ et l'indépendance des $X_{k,n}$:

$$\mathbf{E}(r^{\sum_{k=1}^{\ell} X_{k,n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = \prod_{k=1}^{\ell} \mathbf{E}(r^{X_{k,n+1}}) = \varphi(r)^{\ell}\,,$$

et l'on conclut en recollant les morceaux.

En prenant ensuite l'espérance de la formule précédente, on obtient l'égalité $\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}}) = \mathbf{E}[\varphi(r)^{Z_n}]$ et on conclut par récurrence que

$$\mathbf{E}(r^{Z_n}) = \varphi_n(r).$$

3. Nous avons une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Par dérivation sous la somme, on obtient que pour tout $r \in [0,1[$ (attention, l'intervalle est ouvert en 1), nous obtenons ainsi :

$$\varphi''(r) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\xi(k)r^{k-2}\,,$$

et $\varphi''(r) > 0$ si $r > 0$ puisque sous l'hypothèse $\xi(0) + \xi(1) < 1$, la somme ci-dessus est non-vide. La fonction $r \to \varphi(r) - r$ est donc strictement convexe. De plus $m = \varphi'(1-)$ par convergence monotone lorsque $r \uparrow 1$; la fonction $\varphi(r) - r$ est donc strictement au-dessus de sa tangente en 1 (si m est fini) sur $]0,1[$ et l'on a

$$\varphi(r) - r > (m-1)(r-1) > 0\,.$$

si $r \in [0,1[$ et $m \leq 1$. De plus, nous avons $\varphi(1) = 1$ donc **si $m \leq 1$, il n'y a qu'un unique point fixe de φ sur $[0,1]$ donné par $q = 1$.**

D'autre part, nous avons $\varphi(0) = \xi(0) > 0$ et $\varphi(1-\varepsilon) - (1-\varepsilon) < 0$ pour ε suffisamment petit si $m > 1$ (pente de $\varphi(r) - r$ strictement négative en 1). De plus, φ est continue sur $[0,1]$ donc il existe au moins un $c \in]0,1[$ tel que $\varphi(c) - c = 0$. Par convexité, il est de plus unique. **Si $m > 1$, il existe seulement deux points fixes de φ sur $[0,1]$ donnés par $q = c \in]0,1[$ et 1.**

D'après ce qui précède, nous avons ainsi $\varphi(r) > r$ si $r < q$ et $\varphi(r) < r$ si $r > q$ donc la suite $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante qui converge vers q, le plus petit point fixe stable rencontré en allant de 0 vers 1.

4. Par définition du processus (Z_n), nous avons $Z_n(\omega) = 0 \Rightarrow Z_{n+1}(\omega) = 0$ donc $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$. Nous avons une suite croissante d'événement donc :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_n \{Z_n = 0\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

D'autre part, $\mathbf{E}(r^{Z_n}) = \varphi_n(r) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}) + \mathbf{E}(r^{Z_n}\mathbf{1}_{\{Z_n\geq 1\}})$ donc $\varphi_n(0) = \mathbf{P}(Z_n = 0)$. D'une part $\{T < \infty\} = \cup_n \{Z_n = 0\}$ et d'autre part l'étude de suite précédente donne $\varphi_n(0) \uparrow q$ et l'on obtient le résultat voulu $\mathbf{P}(T < \infty) = q$. Ainsi, on a

$$\mathbf{P}(T < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 1 \text{ (sous-critique)}, \\ q < 1 & \text{si } m > 1 \text{ (surcritique)}. \end{cases}$$

L'extinction est presque sûre dans le cas sous-critique.

5. Les variables aléatoires M_n sont $\mathscr{F}_n$-mesurables et $0 \leq M_n \leq 1$ p.s. pour tout n donc elles sont intégrables. De plus, nous avons $\mathbf{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \varphi(q)^{Z_n} = q^{Z_n} = M_n$ (point fixe) donc (M_n) est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale.

Elle est positive et $\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{E}(|M_n|^p) < \infty$ (pour tout $p \in [1, \infty[\,$) : c'est donc une martingale fermée qui converge p.s., dans $\mathbf{L}^1$ et dans $\mathbf{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[\,$, vers une variable aléatoire M_∞ à valeurs dans $[0, 1]$ p.s.

Nous avons l'égalité p.s.

$$M_{n\wedge T} = M_n \,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} + M_{n\wedge T} \,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$$

Le passage à l'espérance donne

$$\mathbf{E}(M_0) = q = \mathbf{E}(M_n \,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}) + \mathbf{E}(M_{n\wedge T} \,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}).$$

Toutes les variables aléatoires sont comprises p.s. entre 0 et 1. Le théorème de convergence dominée donne alors $\mathbf{E}(M_{n\wedge T} \,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = \mathbf{E}(M_T \,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = q$ pour le deuxième terme et ainsi,

$$\mathbf{E}(M_\infty \,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}) = 0$$

Par positivité, on a ainsi $M_\infty \,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = 0$ p.s. ; d'où $\lim_{n\to\infty} q^{Z_n} \,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = 0$ p.s. comme désiré.

Pour presque tout $\omega \in \{T = \infty\}$, nous avons ainsi $\lim_{n\to\infty} q^{Z_n(\omega)} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = \infty$. On a ainsi $\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} \leq \mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} Z_n=\infty\}}$ p.s. D'autre part il est clair que $\mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} Z_n=\infty\}} \leq \mathbf{1}_{\{T=\infty\}}$. On obtient ainsi l'égalité presque sûre attendue $\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = \mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} Z_n=\infty\}}$.

Lorsqu'elle ne s'éteint pas, la population voit sa taille diverger p.s. Pour remettre ensemble les cas d'extinction et de survie on a $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty = (\infty)\,\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}$.

6.

1. La suite (W_n) est trivialement $(\mathscr{F}_n)$-adaptée. De plus, on montre aisément par récurrence que $\mathbf{E}(Z_n) = m^n$ donc les variables W_n sont intégrables. Nous avons vu à la question 1 que $\mathbf{E}(Z_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = mZ_n$ donc on en déduit immédiatement par division par m^{n+1} que W_n est une martingale.
2. Commençons par étudier $\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n)$ en procédant comme à la question 1 (ou bien en dérivant la fonction génératrice conditionnelle avec les théorèmes adéquats). Un calcul direct avec interversion espérance-série positive donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{l\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \Big(\sum_{k=1}^{l} X_{k,n+1} \Big)^2 \,\Big|\, \mathscr{F}_n \Big) \\
&= \sum_{l\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \sum_{k_1=1}^{l} \sum_{k_2=1}^{l} \mathbf{E}(X_{k_1,n+1} X_{k_2,n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) \\
&= \sum_{l\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \sum_{k_1=1}^{l} \sum_{k_2=1}^{l} \mathbf{E}(X_{k_1,n+1} X_{k_2,n+1}) \\
&= \sum_{l\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \big(l(\sigma^2 + m^2) + l(l-1)m^2 \big) = \sigma^2 Z_n + m^2 Z_n^2
\end{aligned}$$

Prenons l'espérance et normalisons par $m^{2(n+1)}$ pour obtenir

$$\mathbf{E}(W_{n+1}^2) = \mathbf{E}(W_n^2) + \frac{\sigma^2}{m^{2+n}}$$

La suite $u_{n+1} = u_n + \sigma^2 m^{-2-n}$, $u_0 = 1$ est convergente (vers $1 + \sigma^2/(m(m-1)))$ lorsque $m > 1$ et est donc bornée. On a ainsi,

$$\sup_n \mathbf{E}(W_n^2) < \infty,$$

et la martingale (W_n) converge p.s., dans $\mathbf{L}^2$ et donc dans $\mathbf{L}^1$ vers W_∞ qui est une variable aléatoire réelle intégrable positive.

3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(e^{-\lambda\, m\, W_{n+1}}) &= \mathbf{E}[(e^{-\lambda/m^n})^{Z_{n+1}}] = \varphi_{n+1}(e^{-\lambda/m^n}) = \varphi\left(\varphi_n(e^{-\lambda/m^n})\right) \\ &= \varphi\left(\mathbf{E}[e^{-\lambda Z_n/m^n}]\right) = \varphi\left(\mathbf{E}[e^{-\lambda W_n}]\right)\end{aligned}$$

Nous avons $0 \leq e^{-\lambda' W_n} \leq 1$ p.s. pour tout $\lambda' \geq 0$ et φ est continue. Par convergence dominée, on a ainsi,

$$\forall \lambda \geq 0, \quad L(\lambda\, m) = \varphi(L(\lambda)).$$

Décomposons selon la valeur W_∞ puis appliquons le théorème de convergence dominée ($0 \leq e^{-\lambda W_\infty} \leq 1$ p.s.),

$$L(\lambda) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{W_\infty = 0\}}) + \mathbf{E}(e^{-\lambda W_\infty}\, \mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}}),$$

pour obtenir $\mathbf{P}(W_\infty = 0) = \lim_{\lambda \to \infty} L(\lambda) = l$. D'après l'équation fonctionnelle de point fixe pour L, nous obtenons par passage à la limite $\varphi(l) = l$ et ainsi $l \in \{q, 1\}$ lorsque $m > 1$. La valeur 1 est exclue car (W_n) est fermée et donc $\mathbf{E}(W_\infty) = 1 \neq 0$ donc $\mathbf{P}(W_\infty = 0) \neq 1$. On a ainsi,

$$\mathbf{P}(W_\infty = 1) = q\,.$$

4. On observe trivialement que $\mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}} \leq \mathbf{1}_{\{T = \infty\}}$ p.s. car $W_\infty > 0$ donne $Z_n \simeq m^n W_\infty$ p.s. et donc $Z_n \to \infty$ p.s. D'autre part, on a $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{W_\infty\}} - \mathbf{1}_{\{T=\infty\}}) = q - q = 0$ et, par positivité, on a ainsi $\mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}} = \mathbf{1}_{\{T=\infty\}}$ p.s. Comme expliqué ci-dessus, lorsque $T = \infty$, la population voit sa taille exploser, avec l'équivalent $m^n W_\infty$. L'exponentielle m^n capture la croissance moyenne alors que W_∞, qui est aléatoire et dont la distribution est non-triviale, capture les fluctuations initiales.

7. Lorsque $m < 1$, nous avons $T < \infty$ p.s. puis $Z_n = 0$ et donc $W_n = 0$ pour n suffisamment grand p.s. On obtient ainsi $W_n \to 0 = W_\infty$ p.s. On a $\mathbf{E}(W_\infty) \neq \mathbf{E}(W_0)$ donc ce ne peut pas être une martingale fermée.

Le point de vue des chaînes de Markov

Nous nous focalisons à nouveau sur cas le plus intéressant $\xi(0) > 0$ et $\xi(0) + \xi(1) < 1$.

8. Réinterprétons l'égalité $\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = \varphi(r)^{Z_n}$ en termes de chaîne de Markov : par interversion série-espérance conditionnelle positive, nous obtenons p.s.

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} r^k \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=k\}} \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k\in\mathbf{N}} r^k \sum_{l\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \alpha_k(l)\,,$$

où $\alpha_k(l)$ est le coefficient de r^k dans la série entière de φ^l. On a ainsi égalité presque sûre au niveau des indicatrices :

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=k\}} \mid \mathscr{F}_n) = \alpha_k(Z_n)\,.$$

Donnons une description de α_k en termes des convolutions de la loi ξ. La convolution l-ième de ξ est la loi de la variable $X_{1,n} + \cdots + X_{l,n}$. On a d'autre part $\varphi(r)^l = \mathbf{E}(r^{X_{1,n}+\cdots+X_{l,n}})$ et donc par transfert, on a $\varphi(r)^l = \sum_{k\in\mathbf{N}} \xi^{*l}(k) r^k$. On a ainsi $\alpha_k(l) = \xi^{*l}(k)$. On a alors pour f bornée mesurable,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=k\}} \mid \mathscr{F}_n) = \xi^{*Z_n}(k) = p(Z_n, k)\,.$$

Cela montre ainsi que (Z_n) est une chaîne de Markov de loi d'entrée $m = \delta_1$ et de matrice de transition $Q = (p(i,j))_{i,j\in\mathbf{N}}$ avec $p(i,j) = \xi^{*i}(j)$.

9. On a $\mathbf{P}_n(T_0 < \infty) \geq p(n,0) = \xi(0)^n > 0$ donc $i \to 0$. En revanche i n'est pas accessible par 0 car 0 est absorbant d'après la définition du processus Z_n. La classe $R = \{0\}$ est donc récurrente et tous les autres états sont transients $T = \mathbf{N}^*$.

10. La classification des états implique que soit Z_n entre dans la classe R à partir d'un temps fini T_R et y reste indéfiniment. Soit elle ne visite que chaque $n \in \mathbf{N}^*$ qu'un nombre fini de fois. Dans ce dernier cas, on a nécessairement $\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty$. En effet, pour presque tout ω, pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $n_0(\omega)$ tel que Z_n sort de $\{1, 2, \cdots, N-1\}$ pour $n \geq n_0(\omega)$. On a ainsi, selon que $T_R < \infty$ ou $T_R = \infty$:

$$\mathbf{P}(\exists n \in \mathbf{N}, \forall k \geq n, Z_{n+k} = 0) + \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1.$$

Quelques compléments pour réfléchir

11.

1. Par définition, (Z_n) est $(\mathscr{F}_n)$-adapté et est intégrable (preuve par récurrence comme précédemment). On a de plus, pour les mêmes raisons que sous $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(r^{X_{1,n}} r^{X_{2,n}+\cdots+X_{k,n}}) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \frac{r\varphi'(r)}{m} \varphi(r)^{k-1} = \frac{r\varphi'(r)}{m} \varphi(r)^{Z_n-1}\end{aligned}$$

   Le processus (Z_n) ne s'éteint jamais car $\mathbf{P}(X_{1,n} = 0) = 0$ donc il y a toujours au moins un survivant à la génération suivante !

2. Nous avons déjà vu que W_{n+1} est intégrable donc $W_{n+1}r^{Z_{n+1}}$ l'est aussi pour $r \in [0,1]$. On a de plus

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\frac{1}{m}\right)^{n+1} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}((X_{1,n}+\cdots+X_{k,n}) r^{X_{1,n}+\cdots+X_{k,n}}) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{\mathbf{1}_{\{Z_n=k\}}}{m^{n+1}} kr\varphi'(r)\varphi(r)^{k-1} = W_n \frac{r\varphi'(r)}{m}\varphi(r)^{Z_n-1}\end{aligned}$$

3. Commençons par une remarque simple déjà utilisée précédemment : la fonction $r \mapsto \mathbf{E}(r^{Z_n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$ est une série entière dont on peut extraire tous les nombres $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=k\}} \,|\, \mathscr{F}_n)$. Montrer la formule demandée revient, quitte à décomposer sur les indicatrices, à montrer que pour tout vecteur $(r_0, r_1, \cdots, r_n)$ dans $[0,1]^{n+1}$, il sufft de montrer que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(r_0^{Z_0} r_1^{Z_1} \cdots r_n^{Z_n}) = \mathbf{E}(W_n r_0^{Z_0} r_1^{Z_1} \cdots r_n^{Z_n})\,.$$

Procédons par récurrence. Le résultat est trivialement vrai pour $n=0$ puisque $Z_0 = 1$, $\mathbf{Q}$-p.s. et $\mathbf{P}$-p.s. Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(W_{n+1} r_0^{Z_0} r_1^{Z_1} \cdots r_{n+1}^{Z_{n+1}}) &= \mathbf{E}(r_0^{Z_0} \cdots r_n^{Z_n} \mathbf{E}(r_{n+1}^{Z_{n+1}} W_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)) \\ &= \mathbf{E}(r_0^{Z_0} \cdots r_n^{Z_n} \frac{r_n\varphi'(r_n)\varphi(r_{n+1})^{Z_n-1}}{m} W_n)\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence donne alors

$$\mathbf{E}(W_{n+1} r_0^{Z_0} r_1^{Z_1} \cdots r_{n+1}^{Z_{n+1}}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(r_0^{Z_0} \cdots r_n^{Z_n} \frac{r_n\varphi'(r_n)\varphi(r_{n+1})^{Z_n-1}}{m})$$

Le même calcul sous $\mathbf{Q}$ donne le même résultat et le résultat est prouvé.

La formule présente montre ainsi que $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(W_n\,\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}_n$ et ainsi la densité de Radon-Nikodým de $\mathbf{Q}$ par rapport à $\mathbf{P}$ sur $\mathscr{G}_n$ est donnée par W_n.

Un tel procédé permet ainsi d'étudier un processus qui s'éteint $\mathbf{P}$-p.s. en considérant un second processus qui survit éternellement sous une probabilité modifiée !