Introduction à la théorie de la mesure et de l'intégration

Ce texte n'est pas un cours précis. Il explique plutôt à quoi sert la théorie de la mesure et de l'intégration.

1 Une théorie des poids

Soit E un ensemble. On veut "répartir de la masse" sur E. Par exemple, disons que E est la carte du monde et qu'on s'intéresse à la masse de cacao produite en avril 2025. On exprimera les masses en kilogrammes. On veut se rappeler où le cacao est produit. Comment modéliser cela mathématiquement ?

Voici une première façon de faire. Pour chaque pays, on note la production totale. On a alors une fonction$f : E \to [0, \infty[$ qui, pour chaque pays, vaudra partout sur ce pays la masse produite divisée par l'aire du pays exprimée en km^2. La fonction indique la production de cacao *par unité de surface*.

Voici une seconde façon de faire. Chaque arbre a des coordonnées GPS exactes. Si on pense comme cela, on ne peut pas faire comme avant car l'aire d'un point est nulle. Il faut plutôt représenter chaque arbre par un point sur la carte et écrire à côté de chaque arbre sa production.

Problème : trouver une théorie permettant les deux façons de faire.

Réponse : la théorie de la mesure.

Idée : avec chacune des deux façons, on peut associer à chaque partie de E une masse (correspondant au cacao produit dans cette partie). Ces masses vérifient certaines propriétés de compatibilité, qui sont dans la définition de "mesure" vue en cours.

Soyons précis. Soit A une partie du monde incluse dans un pays donné, par exemple le Ghana. Avec la première façon de faire, on voudrait associer à A la production du Ghana fois l'aire de A divisée par l'aire du Ghana. Or définir l'aire d'une partie A quelconque du plan n'est pas évident. Pour certaines parties très très très compliquées, c'est même impossible. Au lieu de gérer *toutes* les parties A du monde, on va gérer *beaucoup* de parties A et éviter les parties qui posent problème. C'est pour cette raison qu'on doit introduire les "tribus". Avec cette méthode, on peut gérer à peu près toutes les parties que vous rencontrerez dans votre vie.

Dans le reste du document, pour faire simple, je ne parle plus des tribus. On se concentre sur les notions de mesure et d'intégration.

2 L'intégration, une théorie unificatrice

Quand on a un ensemble E, une mesure μ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, on peut définir le nombre $\int f \, \mathrm{d}\mu$. En vrai, il y a des hypothèses à faire sur f mais je n'en parle pas. Expliquons sur des exemples ce que signifie le nombre $\int f \, \mathrm{d}\mu$.

Reprenons l'exemple du cacao. On note E la carte du monde et μ une mesure qui représente la répartition de la production de cacao. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Le nombre $f(x)$ représente le prix du cacao produit à l'endroit x, exprimé en €/kg. Combien cela coûterait d'acheter tout le cacao produit dans le monde (ou dans une zone A donnée) ? La réponse à cette question est $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ (ou $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ pour une zone A donnée). Quand $A = E$, on peut noter $\int f \, \mathrm{d}\mu$ au lieu de $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

Le tableau suivant montre que la théorie générale de l'intégration étudiée dans ce cours contient plusieurs théories comme cas particuliers. Pour comprendre la deuxième colonne, penser qu'une mesure peut correspondre à n'importe quelle notion raisonnable de « taille » : pour mesurer la taille d'une partie A d'un ensemble E, on peut prendre le cardinal de A si $E = \mathbb{N}$, la longueur de A si $E = \mathbb{R}$, etc. Pour un ensemble E fixé, on peut envisager plusieurs notions de taille, correspondant à des mesures différentes μ sur ce même ensemble E. C'était le cas dès la première page : si on prend la production de cacao en octobre 2024 ou en avril 2025, on a deux mesures différentes.

Ensemble E	Mesure μ	Fonction $f : E \to \mathbb{R}$	$\int f \,\mathrm{d}\mu$
$\mathbb{N}$	Cardinal	$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$
$\mathbb{R}$	Longueur	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Intégrale simple $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\mathbb{R}^2$	Aire	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	Intégrale double $\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$\mathbb{R}^3$	Volume	$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	Intégrale triple $\iiint f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Ω	Probabilité	Variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$	Espérance $\mathbb{E}[X]$

3 Une théorie puissante

Dernière ligne du tableau : la variable aléatoire peut être discrète ou à densité. Elle peut aussi n'être ni discrète ni à densité : la nouvelle théorie crée de nouvelles possibilités.

Même si on ne s'intéresse qu'à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, passer au point de vue moderne est utile. On devient capable d'intégrer beaucoup plus de fonctions (hypothèses beaucoup plus faibles que la continuité par morceaux). C'est le bon cadre pour démontrer plusieurs théorèmes d'intégration, comme le théorème de convergence dominée.

— *Début de l'approfondissement.* —

La théorie de ce cours est très puissante. Elle unifie et complète les théories des séries, intégrales et espérances. Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sont à valeurs *positives*, la théorie moderne est parfaite. Quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, f ou X prend des valeurs positives et des valeurs négatives, la théorie moderne a besoin d'une “hypothèse d'intégrabilité”. Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cela revient à supposer que la série est absolument convergente, c'est-à-dire que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cela revient à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Il faut penser cette hypothèse comme évitant des problèmes du type “$\infty - \infty$”.

Il y a *un* type de questions que ce cours ne sait pas gérer : les questions qui dépendent de “l'ordre de parcours”. Je m'explique. On peut trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les nombres $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ aient un sens du point de vue “cours de série” mais que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$. Cela n'arrive jamais si on suppose l'intégrabilité, c'est-à-dire la convergence absolue de la série. On peut aussi trouver des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que les limites $\int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ existent mais soient deux nombres différents. Cela n'arrive jamais si on suppose que f est intégrable. La théorie générale de l'intégration ne gère pas ces subtilités. Ou plutôt, elle se place dans un cadre où ces subtilités sont absentes.

4 Qu'est-ce que l'intégrale ?

Soit E un ensemble et soit $f : E \to \mathbb{R}$.

Scénario 1 : Je décide de déposer 1 unité de masse sur un élément $x_0 \in E$ et de ne pas mettre de masse ailleurs. Je décide qu'à cette distribution de masse et à ce choix de f, on associe le nombre $f(x_0)$.

Scénario 2 : Je décide de déposer 3 unités de masse sur un élément $x_0 \in E$ et de ne pas mettre de masse ailleurs. Je décide qu'à cette distribution de masse et à ce choix de f, on associe le nombre $3f(x_0)$.

Scénario 3 : Je décide de déposer 2 unités de masse sur un élément $x_0 \in E$, 7 unités de masse sur un élément $x_1 \in E$ et de ne pas mettre de masse ailleurs. Je décide qu'à cette distribution de masse et à ce choix de f, on associe le nombre $2f(x_0) + 7f(x_1)$.

Comment continuer cette suite logique ? Comment faire si la masse est répartie de façon compliquée, selon une mesure μ ? Le nombre $\int f\,\mathrm{d}\mu$ est la réponse à cette question.

5 Pourquoi s'intéresser à l'intégration moderne ?

Plusieurs raisons de s'intéresser à l'intégration moderne :

- une théorie générale des poids,
- approfondissement de l'intégrale usuelle,
- approfondissement de l'espérance.

Je n'ai pas mis les séries dans la liste. L'intégration moderne permet de retrouver des résultats sur les séries mais des démonstrations plus simples sans intégration existent. Aussi, on a déjà besoin de connaitre un peu les séries pour définir les mesures.

La théorie de la mesure et de l'intégration est incontournable pour faire des probabilités de façon approfondie.

Il y a aussi une raison algébrique de s'intéresser à cette théorie. Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel normé, muni de la norme uniforme. Question : quelles sont les formes linéaires continues sur V ? La réponse est liée aux mesures sur $[0,1]$. Cette question est une version précise de : quelles sont toutes les façons "naturelles" d'associer un nombre réel à chaque élément $f \in V$?

— *Début de l'approfondissement avancé.* —

Exemples de formes linéaires continues sur V (on fixe x_0 et x_1 deux éléments de $[0,1]$) :

- $f \mapsto f(x_0)$,
- $f \mapsto 3f(x_0)$,
- $f \mapsto 2f(x_0) + f(x_1)$.

On reconnait les exemples de la section 4.

Question : pour quelles mesures μ sur $[0,1]$, est-ce que $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ définit bien une forme linéaire continue sur V ?

Réponse : les mesures *finies*, c'est-à-dire vérifiant $\mu([0,1]) < \infty$.

Autres exemples correspondant à des mesures finies :

- $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$,
- $f \mapsto \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x + f(1)$,
- $f \mapsto \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Toute mesure finie sur $[0,1]$ définit une forme linéaire continue sur V, et dès qu'on prend deux mesures finies distinctes, cela donne deux formes linéaires distinctes. Toutes les formes linéaires Φ ainsi produites sont *positives* : cela signifie que si une fonction $f \in V$ est positive (c'est-à-dire vérifie $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$), alors on a $\Phi(f) \geqslant 0$. C'est une propriété classique de l'intégrale : intégrer une fonction positive donne un résultat positif. Un théorème de Riesz (prononcer "r i s") dit que toute forme linéaire continue sur V qui est positive s'écrit sous la forme $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ pour une unique mesure finie μ. Ainsi, on a une bijection de l'ensemble des mesures finies sur $[0,1]$ vers l'ensemble des formes linéaires continues sur V qui sont positives — la bijection qui envoie μ sur la forme linéaire $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Les formes linéaires continues et positives sur V sont donc fortement liées aux mesures finies. Est-ce aussi le cas si on enlève la condition de positivité ?

La réponse est oui. Si Φ et Ψ sont deux formes linéaires continues sur V, alors $\Phi - \Psi$ est une forme linéaire continue sur V. Ainsi, si μ et ν désignent deux mesures finies sur $[0,1]$, alors $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\nu$ est une forme linéaire continue sur V. Et un théorème dit que toute forme linéaire continue sur V peut s'écrire sous cette forme.

Cette écriture n'est pas unique : si on ajoute de la masse dans μ et la même masse dans ν, en faisant la soustraction, la masse ainsi introduite ne joue aucun rôle. Plus précisément, si μ, ν et ρ sont trois mesures finies sur $[0,1]$, et si on pose $\tilde{\mu} := \mu + \rho$ et $\tilde{\nu} := \nu + \rho$, alors les formes linéaires $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\tilde{\mu} - \int f \,\mathrm{d}\tilde{\nu}$ et $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\nu$ sont égales.

Les trois prochaines définitions ne sont pas standards. Si (μ_1, ν_1) et (μ_2, ν_2) sont deux couples de mesures finies sur $[0,1]$, on dit que (μ_1, ν_1) *se simplifie* en (μ_2, ν_2) s'il existe une mesure finie ρ sur $[0,1]$ telle que $\mu_1 = \mu_2 + \rho$ et $\nu_1 = \nu_2 + \rho$. On dit qu'un couple de *totalement simplifié* si le seul couple en lequel il peut se simplifier est lui-même. Soit Φ une forme linéaire continue sur V. On dit qu'un couple (μ, ν) de mesures finies sur $[0,1]$ *représente* Φ si, pour tout $f \in V$, on a $\Phi(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\nu$. On peut démontrer qu'il existe un unique couple totalement simplifié représentant Φ. De plus, n'importe quel couple représentant Φ peut se simplifier en ce couple-ci. On a donc une bijection de l'ensemble des couples totalement simplifiés de mesures finies sur $[0,1]$ vers l'ensemble des formes linéaires continues sur V — la bijection qui envoie (μ, ν) sur la forme linéaire $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\nu$.