Planche d'exercices n° 1

Exercice 1.1 — *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.*

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soit $p \in [0,1]$. On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. (a) Rappeler la définition de la convergence presque sûre.
   (b) En utilisant un résultat célèbre, montrer que $\frac{1}{n}S_n$ converge presque sûrement vers $2p-1$.
3. (a) Démontrer que si $p > \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $+\infty$. De même, démontrer que si $p < \frac{1}{2}$, alors S_n tend presque sûrement vers $-\infty$.
   (b) Le même argument permet-il de dire quelque chose lorsque p vaut $\frac{1}{2}$?
4. Supposons $p \neq \frac{1}{2}$. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \forall x \in \mathbb{Z},\, \exists n \geqslant 1,\, \forall m \geqslant n,\, S_m(\omega) \neq x\}\,.$$

   Montrer que A est bien un événement, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathscr{F}$. Le décrire par une phrase en français et établir que sa probabilité vaut 1.

Exercice 1.2 — *Passages en zéro.*

Conservons les notations de l'exercice 1. On introduit Z la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui compte combien de fois la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ passe en zéro :

$$Z(\omega) := \mathrm{Card}\left(\{n \geqslant 1 \,:\, S_n(\omega) = 0\}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on introduit l'événement $A_n := \{S_n = 0\} := \{\omega \in \Omega \,:\, S_n(\omega) = 0\}$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(A_n)$.
2. Expliquer pourquoi $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$.
3. Déterminer, pour chaque valeur de p, si l'espérance de Z est finie ou infinie.
4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z \neq \infty) > 0$?
   (b) Si $p = \frac{1}{2}$, peut-on en déduire que $\mathbf{P}(Z = \infty) = 1$? Que $\mathbf{P}(Z = \infty) > 0$?

Exercice 1.3 — *Produits aléatoires.*

Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $n \geqslant 1$. On pose $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Que vaut $\mathbf{E}[Y_n]$?
2. Montrer que $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(Y_n \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.

Exercice 1.4 — *Le quantificateur "pour presque tout".*

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pensons chaque A_i comme défini par une certaine condition dépendant de ω, qu'on note $\mathcal{P}_i(\omega)$ et qui peut être tantôt vraie tantôt fausse. On a ainsi $A_i = \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega)\}$.

Étant donné une propriété $\mathcal{P}(\omega)$ telle que $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}$ soit mesurable, on définit "pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" comme signifiant $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\}) = 1$. Cela est raisonnable. En effet, "pour *tout* ω, on a $\mathcal{P}(\omega)$" est équivalent à $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)\} = \Omega$.

1. On suppose que $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{F}$ et que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Montrer que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
2. On suppose que I est dénombrable et que pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$. Démontrer que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, par exemple de loi uniforme sur $[0,1]$. Prenons dans cette question $I = \mathbb{R}$ et, pour $i \in I$, posons $\mathcal{P}_i(\omega) =$ "$X(\omega) \neq i$". Est-il vrai que, pour tout $i \in I$, pour presque tout ω, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Que pour presque tout ω, pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{P}_i(\omega)$? Quelle leçon tirer de tout cela ?

Exercice 1.5 — *Toute loi se réalise.*

1. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans E et de loi μ.
2. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se donne un espace mesurable $(E_i, \mathcal{E}_i)$ et une mesure de probabilité μ_i sur cet espace mesurable. Construire des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aléatoire X_i soit de loi μ_i.

Exercice 1.6 — *Lemmes de Borel–Cantelli.*

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements. On s'intéresse à trois conditions :

(I) presque sûrement, il existe un rang à partir duquel les A_n n'ont pas lieu,

(II) il existe un rang tel que presque sûrement, après ce rang, les A_n n'aient pas lieu,

(III) il existe un rang tel qu'après ce rang, presque sûrement les A_n n'aient pas lieu.

1. (a) Réécrire ces conditions sans utiliser "presque sûrement", en écrivant plutôt que certaines probabilités sont égales à 1.
   (b) Montrer que (II) implique (I).
   (c) Montrer que (II) équivaut à (III).
   (d) Montrer que (I) équivaut à : $\mathbf{P}(\forall n \geqslant k,\, A_n \text{ n'a pas lieu}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.
   (e) On se donne X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$ (pourquoi un tel X existe-t-il ?). On pose $A_n := \{X \geqslant n\}$. Montrer que cette construction fournit un contre-exemple à (I) $\implies$ (II).
   (f) *(bonus)* On pose T le rang aléatoire à partir duquel aucun des A_n n'a lieu, en posant $T(\omega) = \infty$ lorsque ce rang n'est pas défini. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$T(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k,\, \omega \notin A_n\}.$$

Montrer que (I) équivaut à “T est fini presque sûrement” et que (II) équivaut à $\|T\|_\infty < \infty$.

2. Démontrer le lemme de Borel–Cantelli.
Indication : $\mathbb{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k)$.
3. Pour chaque $n \geqslant 1$, on lance un dé équilibré à n faces, numérotées de 1 à n^2, et on pose A_n l'événement “le $n^{\text{ème}}$ dé tombe sur la face 1”. Montrer que cette situation vérifie (I) mais pas (II).
4. Rappeler l'énoncé du lemme de Borel–Cantelli indépendant. Montrer que cet énoncé devient faux si on enlève l'hypothèse d'indépendance.
Indication : On pourra s'inspirer de la question 1e.

Exercice 1.7 — *Une condition suffisante pour la convergence presque sûre.*
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty,$$
alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$.
2. Appliquer la question 1 pour démontrer que, dans le contexte de l'exercice 3, on a la convergence $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.
3. On suppose désormais que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et on s'intéresse à la réciproque du résultat précédent.
   (a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} c$, où c est une constante. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - c| > \varepsilon\big) < \infty$.
   (b) On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, pour une certaine variable aléatoire X. Démontrer qu'il existe une constante c à laquelle X est égale presque sûrement.
   (c) En déduire que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, alors on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty$. *On rappelle que la réciproque que nous venons d'établir utilise l'hypothèse additionnelle d'indépendance des X_n.*

Exercice 1.8 — *Convergences de variables aléatoires.*
Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est susceptible de réaliser ?

1. $\mathbf{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$;
2. $\mathbf{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$;
3. $\mathbf{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$;
4. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$;
5. $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$, $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$.

Exercice 1.9 — *En extrayant, on peut rendre presque sûre la convergence en probabilité.*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Montrer qu'il existe une extractrice déterministe φ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Étant donnée une telle extractrice, montrer que la sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement.

Exercice 1.10 — *Ratatiner X_n en le multipliant par un petit réel déterministe a_n.*

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathbf{P}(|X| \geqslant k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $a_n X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.

Exercice 1.11 — *Récurrence de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 1. On suppose en outre que $p = \frac{1}{2}$, et on cherche à montrer que presque sûrement, on a $\liminf S_n = -\infty$ et $\limsup S_n = +\infty$.

1. Pour $K \geqslant 1$ fixé et $\ell \geqslant 0$, on pose $A_\ell := \big\{X_{\ell K+1} = \cdots = X_{\ell K+K} = +1\big\}$. Montrer que pour tout K, presque sûrement, une infinité de A_ℓ est réalisée.
2. En déduire que pour tout K, on a $\mathbf{P}\big(\forall n \geqslant 1,\ -K/2 < S_n < K/2\big) = 0$, puis que $\mathbf{P}\big(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}\big) = 1$.
3. Expliquer pourquoi $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = \mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big)$. En déduire que $\mathbf{P}\left(\liminf S_n = -\infty\right) = \mathbf{P}\left(\limsup S_n = +\infty\right) \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que l'événement $\{\limsup S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue de la suite (X_n). On rappelle que cette tribu est par définition $\bigcap_{k\geqslant 1} \sigma(X_i\ :\ i \geqslant k)$.
5. Utiliser la loi du 0–1 de Kolmogorov pour conclure que $\mathbf{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big) = 1$ et $\mathbf{P}\big(\liminf S_n = -\infty\big) = 1$.
6. En déduire que pour presque tout ω, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la trajectoire $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ passe une infinité de fois par la valeur x.

Exercice 1.12 — *Démonstration de la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbf{L}^4$.*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées vérifiant $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

1. On suppose pour l'instant que $\mathbf{E}[X_1] = 0$.
   (a) Montrer que les espérances $\mathbf{E}[X_1^3 X_2]$, $\mathbf{E}[X_1^2 X_2 X_3]$ et $\mathbf{E}[X_1 X_2 X_3 X_4]$ sont bien définies et donner leur valeur.
   (b) Calculer $\mathbf{E}[Z_n^4]$.
   (c) Montrer que la variable $\sum_{n=1}^\infty Z_n^4$ est intégrable et en déduire que Z_n converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse $\mathbf{E}[X_1] = 0$, déduire de la question précédente que Z_n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[X_1]$.

Planche d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 2.1 — *Somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes.*

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_1 + X_2 \mid X_1]$.
2. Étant donnés des entiers k et n vérifiant $n \geqslant k \geqslant 0$, calculer $\mathbf{P}(X_1 + X_2 = n)$ et $\mathbf{P}(X_1 = k \text{ et } X_1 + X_2 = n)$.
3. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$, puis en calculer l'espérance. Qu'observe-t-on ?

Exercice 2.2 — *Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.*

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose ces variables aléatoires indépendantes, de même loi et d'espérance μ. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la famille $(X_i)_{i \geqslant 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Lorsque $N(\omega) = 0$, on pose par convention $S(\omega) = 0$.

1. Quel lien y a-t-il entre S et la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}_{N \geqslant i}$?
2. Pourquoi est-il incorrect d'écrire $\mathbf{E}[S] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}[X_i]$?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}[S \mathbf{1}_{N=n}]$. En déduire $\mathbf{E}[S \mid N]$, puis $\mathbf{E}[S]$.
4. Pour $r \in [0, 1]$, calculer $\mathbf{E}[r^S \mid N]$ en fonction de $\varphi_{X_1}(r) = \mathbf{E}[r^{X_1}]$. En déduire la fonction génératrice de S en fonction de celle de X_1 et de celle de N.

Exercice 2.3 — *Tribu engendrée par une partition.*

1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω, c'est-à-dire une famille de parties non-vides A_i qui sont disjointes et vérifient $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. On suppose dans cette question que I est dénombrable. Montrer que la tribu sur Ω engendrée par cette partition est
$$\sigma(A_i : i \in I) = \Big\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \Big\}.$$
En déduire que dans le cas où I est fini de cardinal n, cette tribu a exactement 2^n éléments.
2. Posons $\Omega = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ et $A_i = \{i\}$. On veut démontrer que dans ce cas, on a
$$\sigma(A_i : i \in I) \neq \Big\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \Big\}.$$
   (a) Montrer que $\Big\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \Big\}$ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que $\sigma(A_i : i \in I)$ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui sont soit dénombrable, soit de complémentaire dénombrable.

(c) Donner une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni dénombrable, ni de complémentaire dénombrable.

(d) Conclure. Pourquoi cela ne contredit-il pas la question 1 ?

Exercice 2.4 — *Sujet d'examen (deuxième session, juin 2023).*
On munit l'ensemble

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell\}$$

de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de probabilité uniforme. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω, définies comme suit :

ω	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	ℓ
$X(\omega)$	0	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4
$Y(\omega)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathbf{E}[X \mid Y](\omega)$												

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Combien d'éléments a la tribu $\sigma(Y)$? Et la tribu $\sigma(X, Y)$?
4. Calculer $\mathbf{E}[X \mid Y]$ et remplir la dernière ligne du tableau. *Seul le résultat est demandé.*

Exercice 2.5 — *Somme finie implique support dénombrable.*
On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements disjoints qui sont chacun de probabilité non nulle. Montrer que I est nécessairement dénombrable.
Indication : montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il ne peut pas y avoir strictement plus de n indices $i \in I$ vérifiant $\mathbf{P}(A_i) \geqslant 1/n$.

Exercice 2.6 — *Égalités et inégalités.*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Montrer que l'inégalité $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] \leqslant \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ a lieu presque sûrement si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] \leqslant \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A]$.
2. Montrer que l'égalité $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ a lieu presque sûrement si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{G}$, on a $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A]$.

Exercice 2.7 — *Variance conditionnelle.*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. On suppose qu'on a $\mathbf{E}[X^2] < \infty$. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On introduit

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G}) := \mathbf{E}[X^2 \mid \mathscr{G}] - \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]^2.$$

1. Que vaut $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ lorsqu'on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$? Et quand $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$?
2. Montrer que si X est $\mathscr{G}$-mesurable, alors $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ est nulle presque sûrement. Démontrer que cela est toujours vrai si on suppose seulement qu'il existe une variable aléatoire Y qui est $\mathscr{G}$-mesurable et telle que $X = Y$ presque sûrement.

3. On suppose désormais $\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G})$ est nulle presque sûrement. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire Y qui est $\mathscr{G}$-mesurable et telle que $X = Y$ presque sûrement.
4. Soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux sous-tribus de $\mathscr{F}$ vérifiant $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$. Établir que l'inégalité suivante a lieu presque sûrement :
$$\mathbf{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{H}] \leqslant \mathrm{Var}(X \mid \mathscr{H}).$$
5. Essayer de comprendre intuitivement, en termes "d'information", ce que signifient les résultats établis aux questions précédentes. Vous paraissent-ils plutôt naturels ou contre-intuitifs ?

Exercice 2.8 — *Un cousin de l'exercice 5.*

Montrer que toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ est de la forme $\sigma(X)$, pour une variable aléatoire X bien choisie.

Exercice 2.9 — *Envoyons chaque ω sur l'étiquette de son bloc.*

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω par des éléments de $\mathscr{F}$. Soit
$$Z : (\Omega, \mathscr{F}) \to (I, \mathscr{P}(I))$$
la fonction qui, pour tout $i \in I$, est constante égale à i sur le bloc A_i.

Montrer que $\sigma(Z) = \sigma(A_i : i \in I)$.

Exercice 2.10 — *Du bon usage de la symétrie autour des espérances conditionnelles.*

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On suppose que X est intégrable et que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\mathbf{E}[X \mid Y] = h(Y)$ presque sûrement. Soit (X', Y') un couple de variables aléatoires ayant même loi que (X, Y). Montrer que $\mathbf{E}[X' \mid Y'] = h(Y')$ p.s.
2. Soient m et n deux entiers vérifiant $n \geqslant m \geqslant 1$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $S_k := X_1 + \cdots + X_k$.
   (a) Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbf{E}[X_i \mid S_n] = \mathbf{E}[X_1 \mid S_n]$ presque sûrement.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}[S_m \mid S_n] = \frac{m}{n} S_n$ presque sûrement.

Exercice 2.11 — *Deux points de vue sur une même chose.*

Soient Ω, E et R trois ensembles. Soit $Z : \Omega \to E$ une fonction. Pour tout $e \in Z(\Omega)$, on pose $A_e = Z^{-1}(\{e\})$. On définit ainsi une partition $(A_e : e \in Z(\Omega))$ de Ω.

Soit maintenant $Y : \Omega \to R$ une fonction. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une fonction $h : E \to R$ telle que $Y = h \circ Z$,
2. pour tout $e \in Z(\Omega)$, la fonction Y est constante sur A_e.