Proposition 3.6. Soient E un U-site et V un univers auquel appartiennent U et E.

(i) les foncteurs

$$\hat{E} \xrightarrow{a} \tilde{E}, \quad \tilde{E} \xrightarrow{i} \hat{E}, \quad E \xrightarrow{\eta} \hat{E}, \quad E \xrightarrow{\varepsilon} \tilde{E}, \tag{1}$$

de (2.4 (1)) et (2.5 (1) (3)) [relatifs à U] définissent des morphismes de V-sites

$$\hat{E} \leftarrow \tilde{E}, \quad \tilde{E} \leftarrow \hat{E}, \quad E \leftarrow \hat{E}, \quad E \leftarrow \tilde{E}, \tag{2}$$

si l'on munit E (resp. $\hat{E}$) (resp. $\tilde{E}$) de la topologie donnée (resp. induite) (resp. canonique).

(ii) Les foncteurs image directe définis par les morphismes de sites (2) [qui, par définition, sont induits par la composition avec les foncteurs de (1)] sont des équivalences de catégories et induisent des *équivalences* entre les catégories de U-faisceaux d'ensembles.

3.6.1. En général, $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ n'est pas une U-catégorie, ce qui nous a conduit à introduire V pour avoir un énoncé correct. Prouvons d'abord que *tout* U-*faisceau* F *sur* $\hat{E}$ *pour la topologie induite est représentable par un* $X \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}) \subset \mathrm{Ob}(\hat{E})$. D'après (3.5.3), le composé $F \cdot i$ est un U-faisceau sur $\tilde{E}$ pour la topologie canonique. D'après (2.6) il est donc représentable par un $X \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$. Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, on a des morphismes

$$F(P) \xrightarrow{m} F(i \cdot a(P)) \xrightarrow{m'} \mathrm{Hom}_{\tilde{E}}(a(P), X) \xrightarrow{m''} \mathrm{Hom}_{\hat{E}}(P, i(X)), \tag{3}$$