

# Física Computacional: Resolución problema 1, guía 3

Martín Famá

Fecha de entrega: 03/09/2020

## 1 Resumen

El mapeo logístico es un sistema dinámico en tiempo discreto. Es un mapeo no lineal descrito por la ecuación 1:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

en donde  $r$  es un número real constante. El modelo describe la proporción de una población en un sistema de especies ( $x_n$ ), teniendo en cuenta la tasa de reproducción ( $rx_n$ ) limitada por los individuos presentes ( $1 - x_n$ ). El mapeo logístico presenta comportamiento complejo que varía según el valor de  $r$ , incluyendo bifurcaciones del periodo y eventualmente comportamiento caótico. En lo que continúa de este trabajo se analizará el modelo para distintos  $r$ .

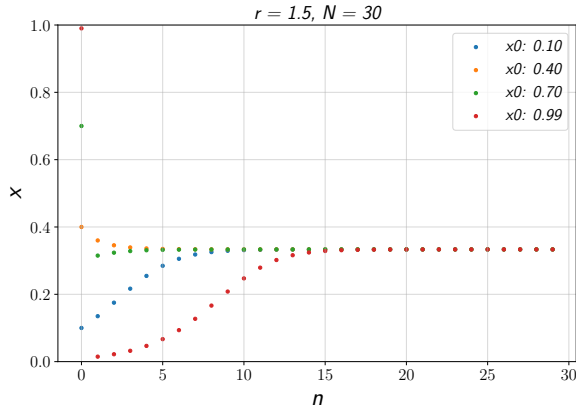
## 2 Condición de estabilidad

Aprovechamos para dejar algunos conceptos y notación clara. En primer lugar, la ecuación 1 se puede pensar como obtener  $x_{n+1}$  a partir de  $f(x_n)$ , en donde  $f(x) = rx(1 - x)$ . Además, podemos definir la notación  $f^n(x) = f(f(f(\dots f(x)\dots))$ , es decir aplicar la función de manera recursiva  $n$  veces. Resulta útil dejar clara la condición en la cual que un punto  $x^*$  es un equilibrio estable de  $f^n$  (ecuación 2):

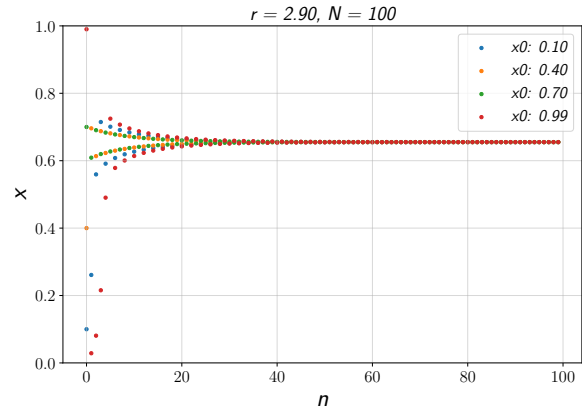
$$|(f^n)'(x^*)| < 1 \longrightarrow x^* \text{ es equilibrio estable de } f^n \text{ (atrae órbitas)} \quad (2)$$

### 3 Parte A: Trayectorias del mapeo logístico - Atractores

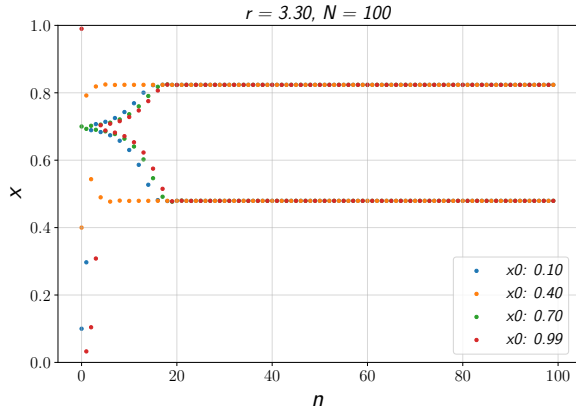
En la figura 1 se puede ver la evolución del mapeo para varios valores de  $r$ . En cada gráfico, se tienen distintas condiciones iniciales ( $x_0$ ). Vemos que para  $r = 1.5$  y  $r = 2.9$ , el sistema tiende a un único punto de equilibrio (llamado atractor), independientemente del valor inicial. Entre  $r = 2.9$  y  $r = 3.3$  ocurre algo interesante: una *bifurcación del periodo*. El sistema ya no se queda en un punto fijo estable, sino que oscila entre dos valores de  $x$  que juntos forman una *órbita estable*. Es decir, en  $r = 3.3$  tenemos dos atractores. Esto ocurre nuevamente en  $r = 3.5$  y  $r = 3.55$ : las órbitas duplican su periodo en cada bifurcación. Para  $r = 3.59$ , entramos en un régimen caótico, en donde ya no se puede hablar fácilmente de periodos estables, sino que el sistema es muy sensible a valores iniciales y evoluciona de manera caótica (aunque en este caso, el caos está limitado a ciertos rangos de  $x$ ). Para  $r = 3.83$ , el sistema salió del régimen caótico y entró en una órbita de periodo 3. Luego, en  $r = 4$ , estamos de nuevo en el régimen caótico, y ahora con atractores en todo  $x \in (0, 1)$ .



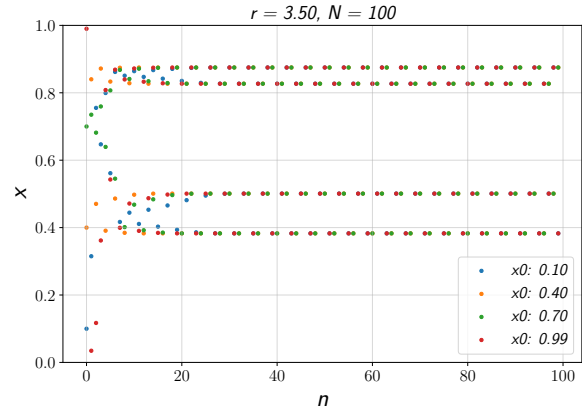
(a) Único atractor estable (periodo 1 si se quiere)



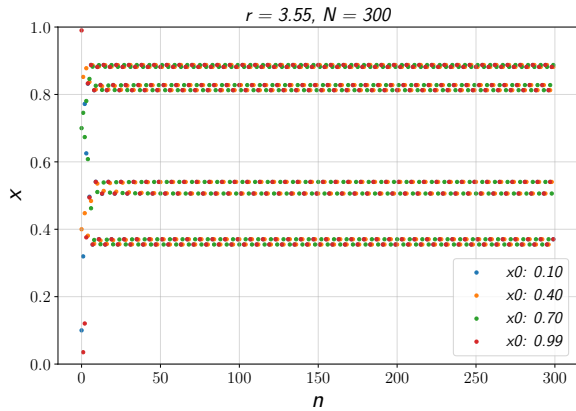
(b) Periodo 1



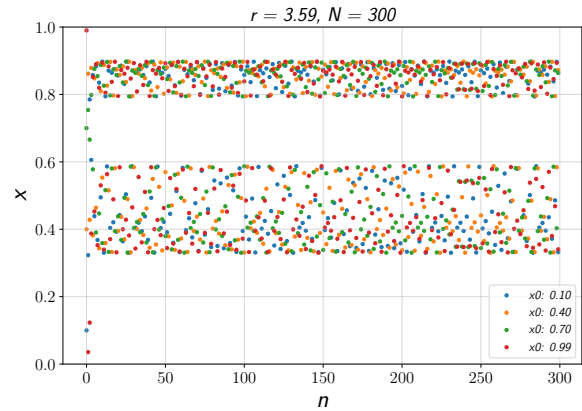
(c) Periodo 2



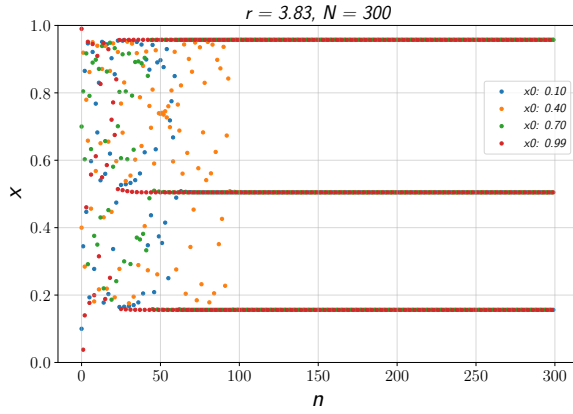
(d) Periodo 4



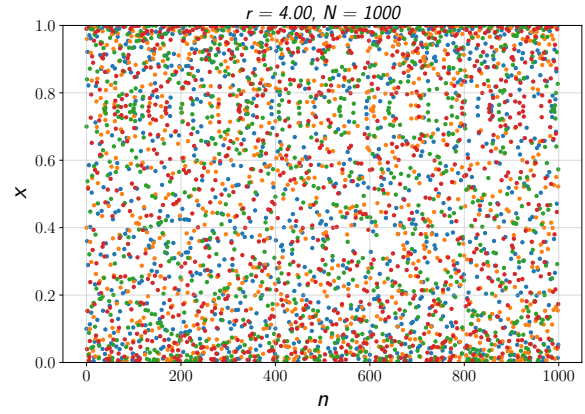
(e) Periodo 8



(f) Régimen caótico



(g) Ventana de periodo 3



(h) De nuevo al caos, ahora en todo  $x \in (0, 1)$

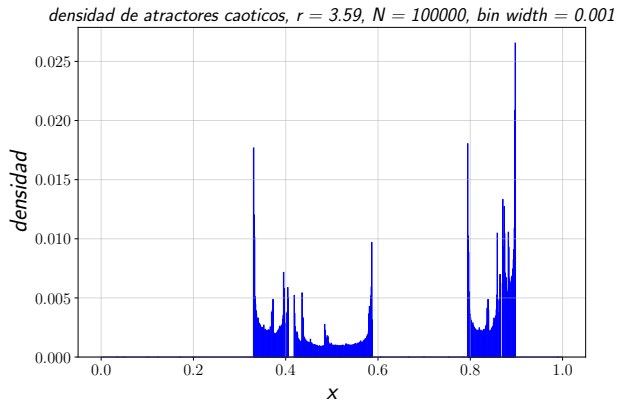
**Fig. 1:** Evolución del mapeo logístico para varios valores de  $r$ , con distintas condiciones iniciales.

En la tabla 1 se pueden ver los valores de los atractores para los  $r$  mostrados (en este caso no caóticos, con lo cual los atractores son fácilmente numerables). Para los primeros 4 valores de  $r$  tabulados, se pudieron calcular analíticamente los atractores utilizando el Mathematica, ya que simplemente es cuestión de verificar que valores cumplen las condiciones de puntos de equilibrio estable (ecuación 2) para  $f$ ,  $f^2$  y  $f^4$ . En el caso de  $f^8$ , la idea es la misma, pero el Mathematica falló en poder encontrar las soluciones, con lo cual se agarraron puntos para  $n$  grande en donde se pudo verificar que los puntos se repetían con periodo 8 con la precisión deseada (al menos de 6 dígitos significativos). En el caso de  $r = 3.83$ , cuando el sistema entra en el periodo 3, también se pudieron encontrar los atractores analíticamente, analizando  $f^3$ . Los atractores encontrados analíticamente se corroboraron con los que se obtienen llevando a cabo la simulación del sistema.

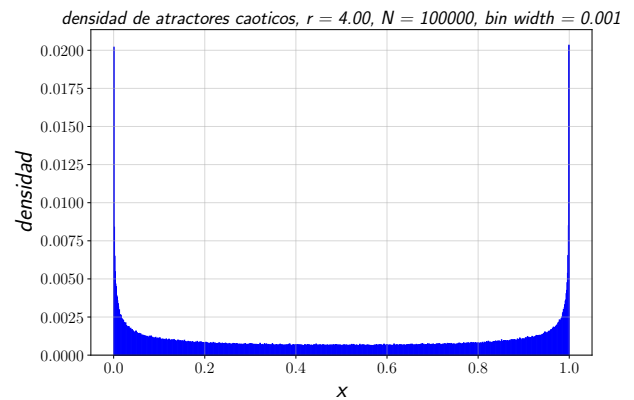
$r$	Atractor(es) ( $x$ )
1.5	$1/3 = 0.3333...$
2.9	0.655172
3.3	0.479427, 0.823603
3.5	0.382820, 0.500088, 0.826941, 0.874997
3.55	0.370326, 0.881684, 0.540475, 0.812656, 0.354800, 0.887371, 0.506031, 0.827805
3.83	0.156149, 0.957417, 0.504666

**Tab. 1:** Los atractores de los valores de  $r$  no caóticos mostrados en la figura 1. Para cada  $r$ , la órbita toma pasos por los atractores en el orden en que se muestran.

En la figura 2, se pueden ver histogramas de la densidad de atractores en los casos  $r = 3.59$  y  $r = 4$ , en donde hay comportamiento caótico. Vemos claramente que los atractores no están distribuidos uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$ . Se armaron histogramas con  $N$  más chicos también, pero al aumentar  $N$  los histogramas resultan cada vez más precisos en mostrar la densidad de los atractores, así que se omiten otros histogramas para no ocupar demasiado espacio.



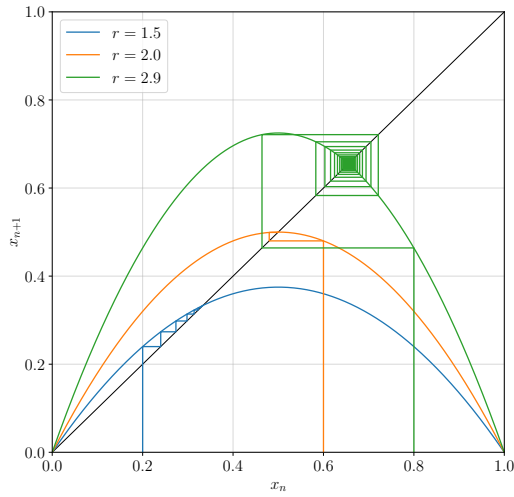
(a) El caos está acotado a ciertas regiones



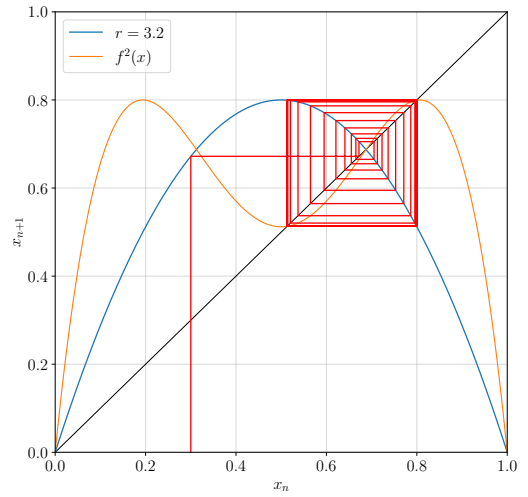
(b) El caos cubre todo el intervalo  $(0, 1)$

**Fig. 2:** Densidad de atractores caóticos en  $r = 3.59$  y  $r = 4$

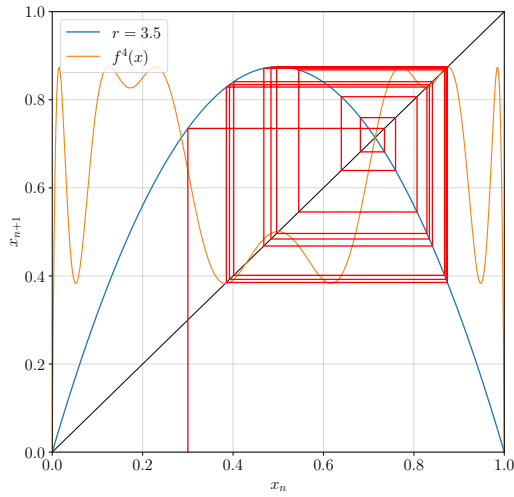
## 4 Parte B: Diagramas cobweb - Bifurcaciones del periodo



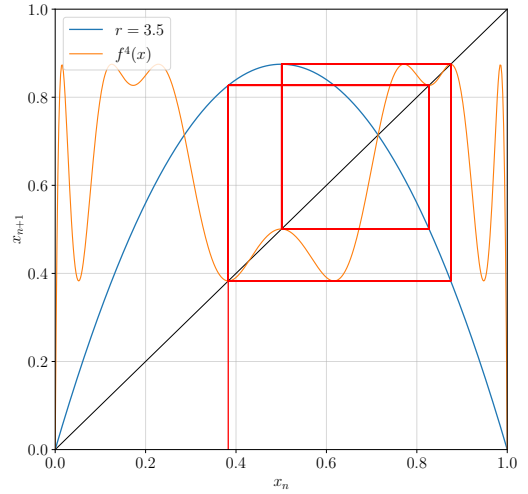
(a) Para  $r < 3$ , el sistema tiende a un único punto



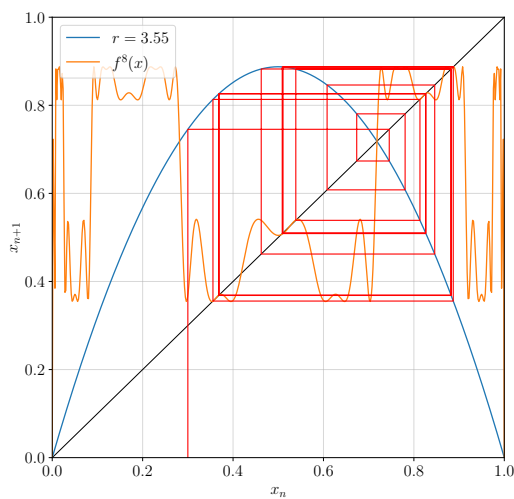
(b) Acá ya se puede ver una órbita de periodo 2



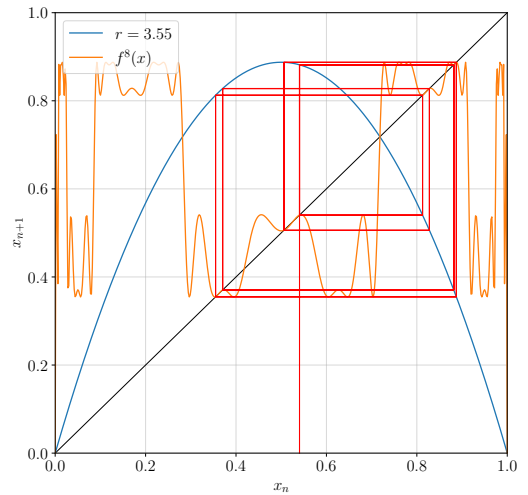
(c) Órbita de de periodo 4



(d) La misma órbita de periodo 4, con  $x_0$  uno de los puntos de la órbita



(e) Órbita de de periodo 8



(f) La misma órbita de periodo 8, con  $x_0$  uno de los puntos de la órbita

**Fig. 3:** Diagramas cobweb para algunos  $r$ . Permiten ver de manera muy intuitiva las órbitas a las que tiende el sistema.

En la figura 3 se pueden ver diagramas cobweb para distintos valores de  $r$ . Abarcan hasta 3.55, que es donde habíamos visto una órbita de periodo 8. En estos diagramas se pueden ver claramente las órbitas a las que tiende el sistema. En la figura 3a, tenemos valores de  $r$  menores a 3, que es cuando ocurre la primera bifurcación. Se puede ver que en este caso el sistema tiende a un único punto de equilibrio. En la figura 3b, podemos ver que el sistema se aleja del anterior punto de equilibrio (la intersección entre  $f(x)$  y  $x$ ), y entra en una órbita de periodo 2. También graficada está la función  $f^2(x)$ , y se puede ver que los puntos de la órbita corresponden a los puntos de intersección entre  $f^2(x)$  y  $x$ . Ídem para las figuras 3c a 3f, que corresponden a  $f^4$  y  $f^8$  (se incluyen cobwebs en donde  $x_0$  sea igual a uno de los puntos de la órbita para que la misma se vea sin ser opacada por el transitorio).

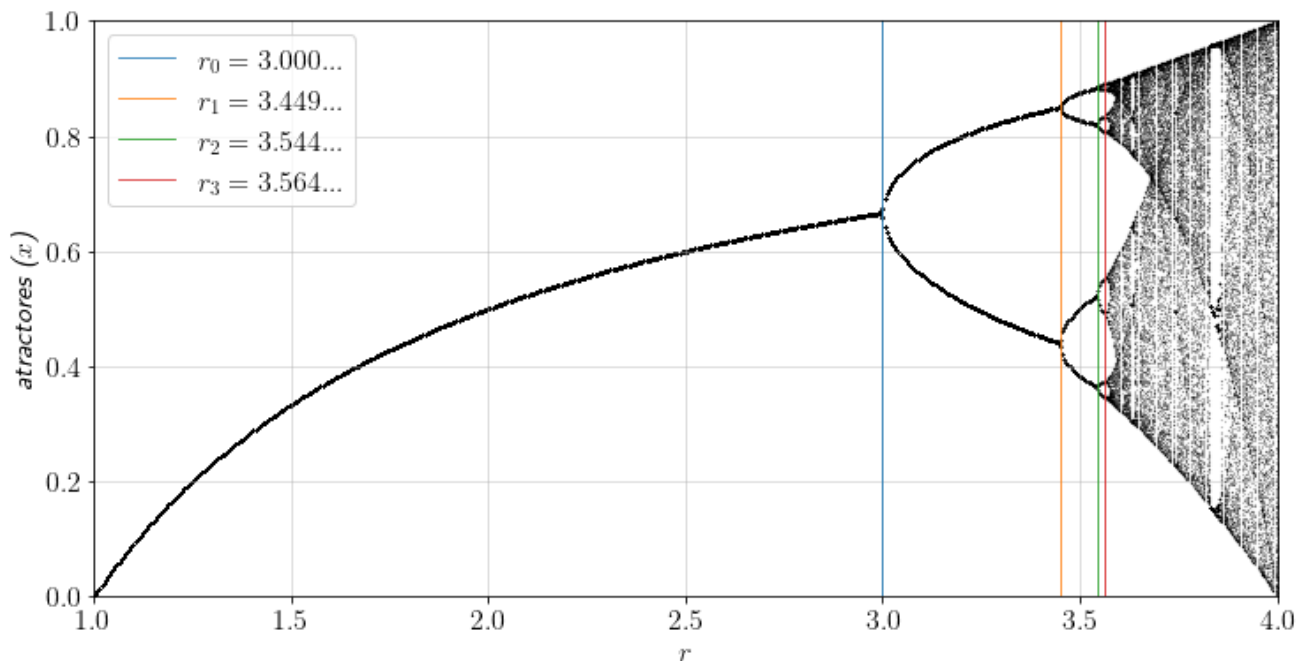
Para encontrar los puntos de bifurcación, se puede emplear la condición de equilibrio estable vista en la ecuación 2. Empecemos con la primera bifurcación. Tenemos que el equilibrio del sistema viene dado por  $f(x^*) = x^*$ , de donde se despeja que  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ . Luego, este punto de equilibrio es estable si  $|f'(x^*)| < 1$ . Desarrollando:  $|f'(x^*)| = |r - 2rx^*| = |r - 2r(1 - \frac{1}{r})| = |2 - r|$ . Es decir, el sistema presenta un punto de equilibrio estable para  $f$  si  $|2 - r| < 1$ , y esto se cumple para  $r < 3$ . Con esto, hemos encontrado el primer punto de bifurcación:  $r_0 = 3$ . A partir de ahí,  $x^*$  ya no es un equilibrio *estable* para  $f$ , y hay que pasar a analizar puntos estables de  $f^2$ .

Haciendo ese mismo procedimiento para  $f^2$  (encontrando puntos de equilibrio, analizando estabilidad, y viendo hasta que  $r$  se cumple la condición de estabilidad), se llega a que la próxima bifurcación es en  $r_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489\dots$

Para encontrar el próximo punto de bifurcación, el método sigue siendo aplicable analizando  $f^4$ , pero el Mathematica no pudo resolverme el polinomio enorme que queda.

## 5 Parte C: Diagrama de bifurcaciones

A continuación se muestra el diagrama de bifurcaciones para distintos rangos de  $r$ . Se marcan también los puntos de bifurcación con líneas verticales. Notamos que los puntos de bifurcación forman una secuencia que converge en  $r_{\text{inf}} = 3.568\dots$



**Fig. 4:** Diagrama de bifurcaciones en el intervalo  $r \in [1, 4]$ . Las líneas verticales muestran los primeros puntos de bifurcación.

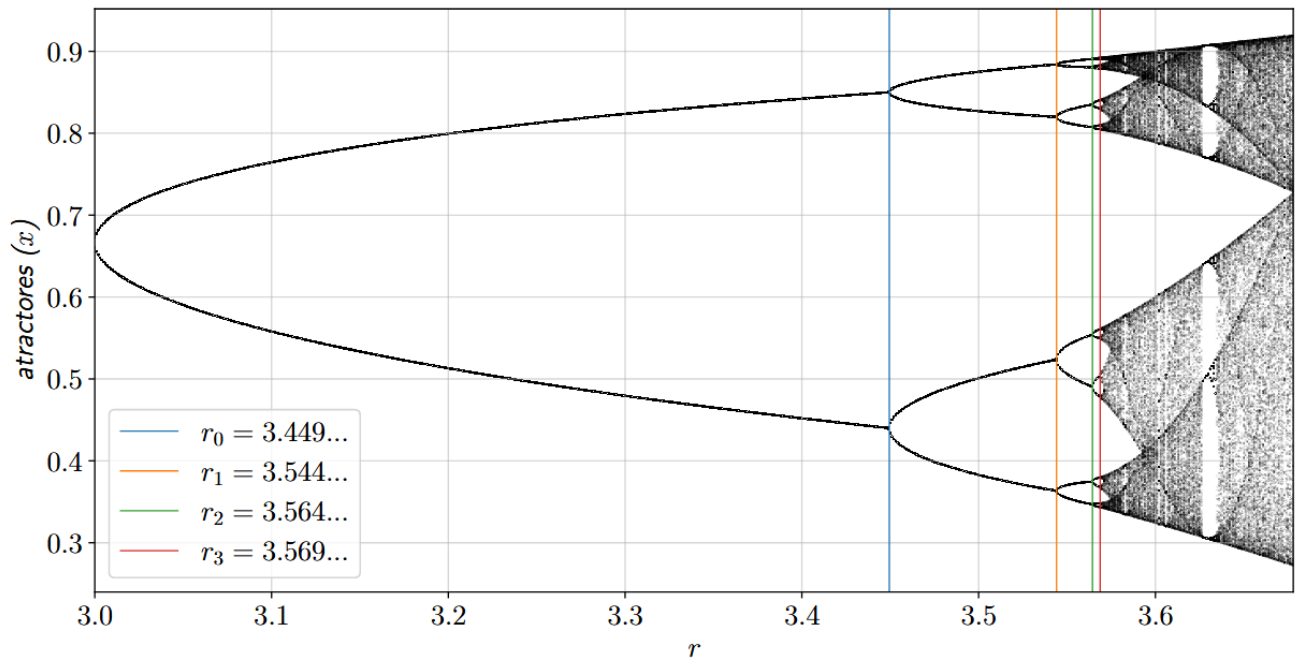


Fig. 5

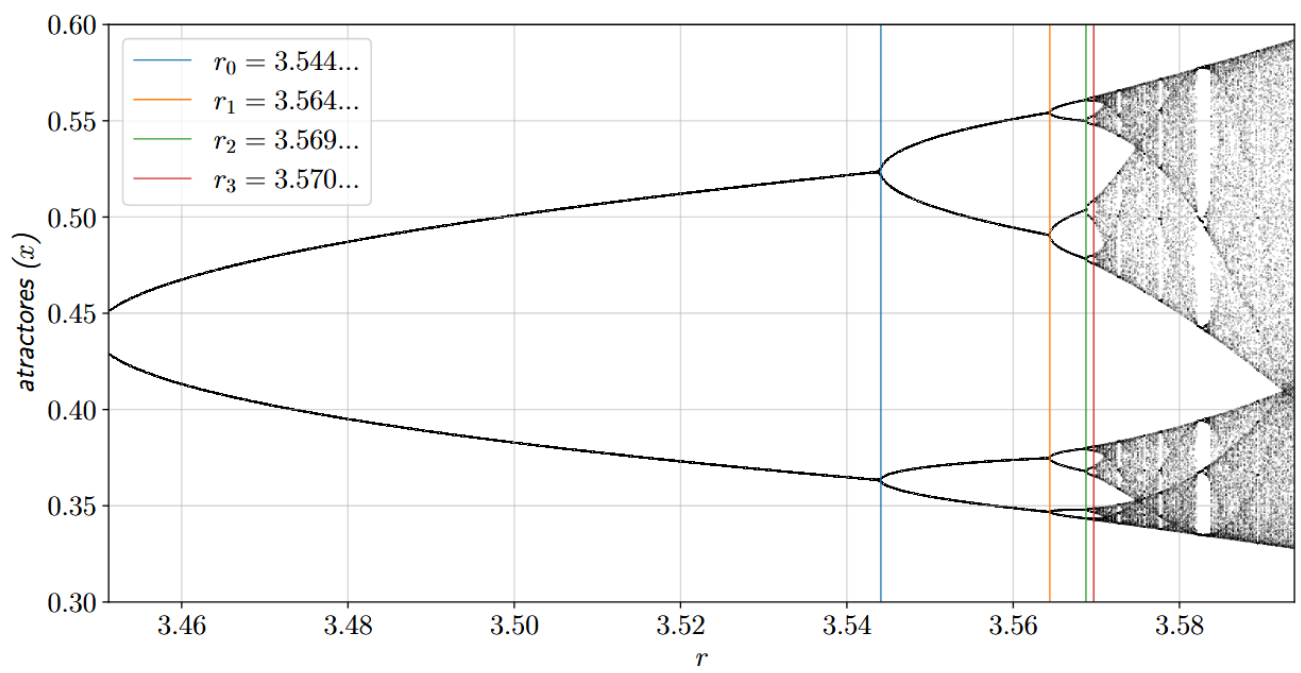


Fig. 6

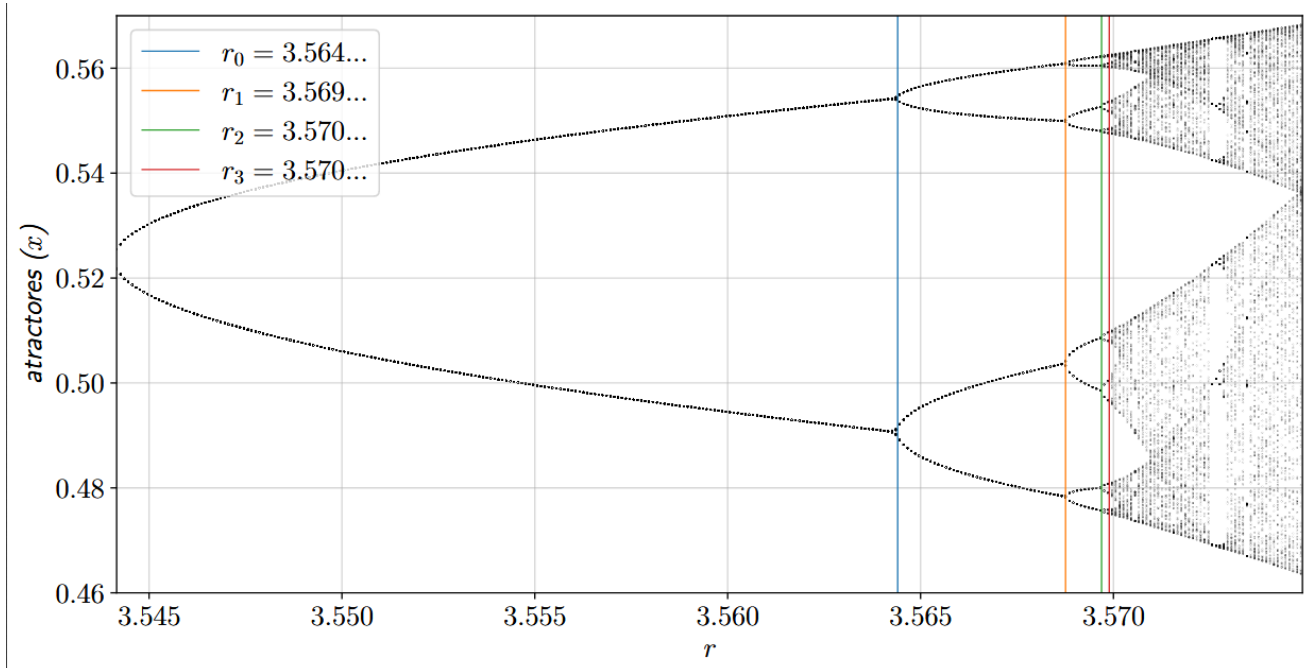


Fig. 7

## 6 Parte D: Exponente de Lyapunov

En la figura 8 se puede ver el exponente de Lyapunov para valores de  $r$  entre 2.5 y 4. El exponente de Lyapunov permite determinar si el comportamiento del mapeo es caótico para un dado valor de  $r$ : si  $\lambda > 0$ , es caótico. Vemos que las regiones donde  $\lambda > 0$  se corresponden a las regiones caóticas en el diagrama de bifurcaciones.

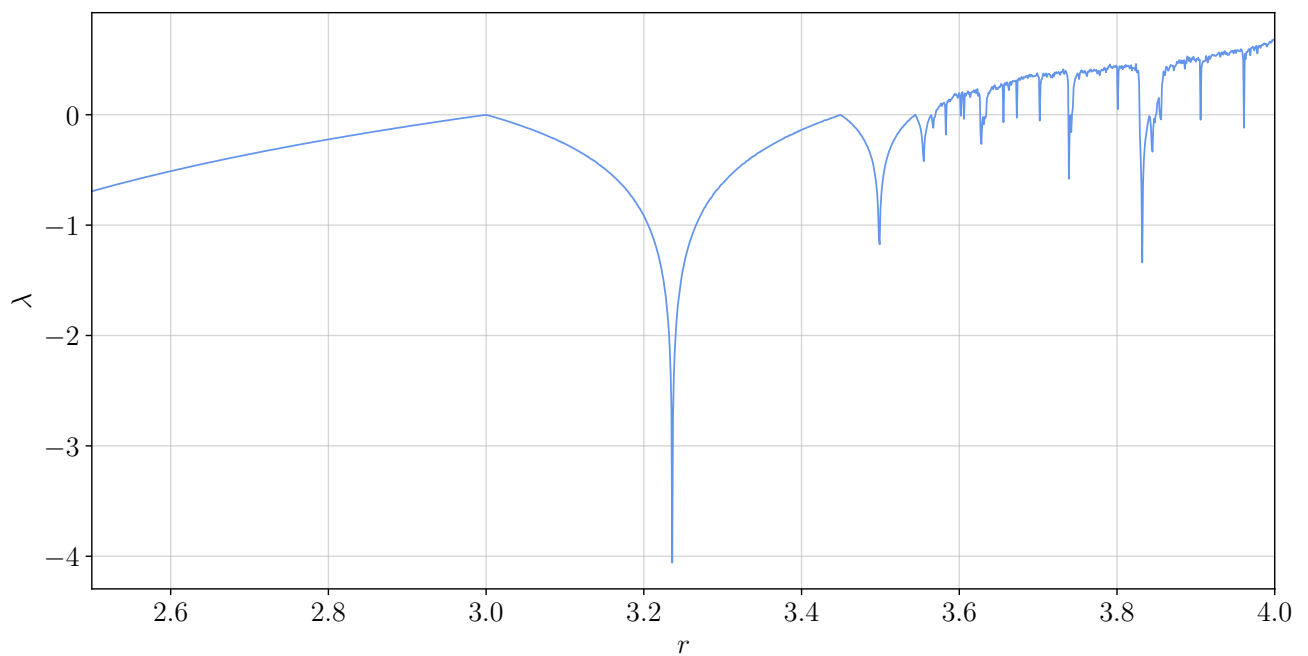


Fig. 8