Entregar los problemas señalados con un cuadradito negro.

1 Alan Turing propuso el siguiente modelo para la *morfogénesis*—la formación de estructuras espaciales en el desarrollo embrionario:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_1(u, v), \tag{1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_2(u, v), \tag{2}$$

con las siguientes interacciones entre ambas substancias:

$$g_1(u, v) = \frac{1}{32}(-7u^2 - 50\,u\,v + 57), \tag{3}$$
$$g_2(u, v) = \frac{1}{32}(7u^2 + 50\,u\,v - 2v - 55). \tag{4}$$

Suponga condiciones iniciales random uniforme para ambas variables, con un parámetro que controle la amplitud alrededor del valor de equilibrio homogéneo $u^* = v^* = 1$. Resuelva numéricamente el sistema en un dominio periódico discretizado con una grilla uniforme en el espacio y el tiempo. Use un método FTCS, asegurando la continuidad del flujo difusivo en el borde del dominio. Para los coeficientes de difusión, use $\mu = D$ y $\nu = D/2$, con $D = 0.01$, 0.0025, 0.0015, 0.00075 y 0.0005. Observe que, para cada valor de D, el modo espacial estacionario tiene un número de onda diferente.

Elija la manera de representar la solución estacionaria que le parezca más simpática. Le doy dos ideas: u y v en el intervalo $(0, 1)$, o, aprovechando la periodicidad, en un anillo y usando una escala de colores para los valores de u y v.

2 La *ecuación de Fisher-Kolmogoroff* combina en forma de ecuación de reacción-difusión una dinámica logística con un transporte difusivo. En 1D tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r\,u(1-u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta ecuación admite soluciones en forma de ondas viajeras, lo cual es un poco sorprendente: no es una ecuación de ondas, la derivada temporal del miembro de la izquierda es una derivada primera, no segunda. Además, el rol intuitivo de la difusión es el de borronear las inhomogeneidades, no propagarlas. Pero la acción conjunta del término logístico y el difusivo produce una especie de milagro matemático y se propaga una onda a velocidad $c = 2\sqrt{rD}$ sin cambiar de forma.

Analice la evolución de una condición inicial en forma de escalón suave, tipo:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x - x_0}{L}\right)\right),$$

usando al menos dos valores del parámetro de escala espacial L. La onda viajará hacia la derecha, así que acomode el valor de x_0, el espacio de integración y los parámetros r y D para poder verla. Defina condiciones de borde compatibles con esta condición inicial. ¿Cómo debería ser la condición inicial para que la onda viaje hacia la izquierda?

a) Use un método FTCS. Dibuje el perfil de la onda viajera a distintos tiempos. ¿Puede usar cualquier valor de Δx y Δt? Calcule la velocidad del frente de la onda (defínalo como mejor le parezca) en función del tiempo.

b) Use el método Leapfrog para calcular lo mismo, y señale las diferencias.