Física Computacional: Resolución problema 1, guía 2

Martín Famá

Fecha de entrega: 27/08/2020

1 Resumen

El modelo propuesto por Alan Turing para describir la *morfogénesis* consiste en las ecuaciones diferenciales 1 y 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_1(u,v) \tag{1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_2(u,v) \tag{2}$$

En donde u y v representan concentraciones (por ejemplo, en el caso de la morfogénesis, pueden ser células de distintos colores que dan lugar a las manchas en los animales). Las funciones $g_1(u,v)$ y $g_2(u,v)$ describen la interacción entre las concentraciones:

$$g_1(u,v) = \frac{1}{32}\left(-7u^2 - 50uv + 57\right) \tag{3}$$
$$g_2(u,v) = \frac{1}{32}\left(7u^2 + 50uv - 2v + 57\right) \tag{4}$$

Se implementó un algoritmo utilizando el método FTCS (**f**orward-**t**ime, **c**enter-**s**pace) para simular la evolución del sistema en distintas condiciones.

2 Implementación del algoritmo FTCS

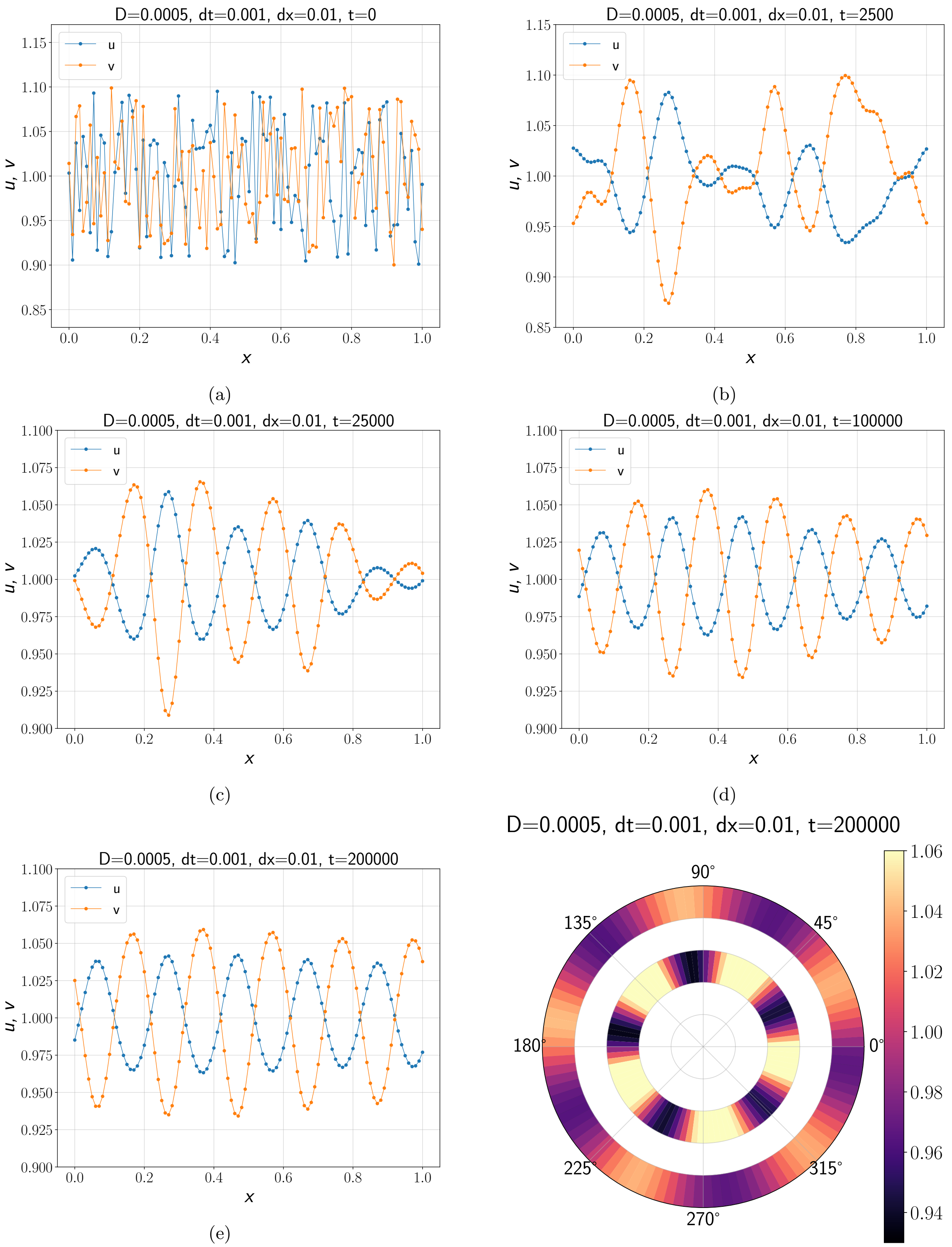
El método FTCS consiste en definir una grilla en el espacio y el tiempo. Se discretiza un intervalo en el espacio en pasos Δx y lo mismo con el tiempo en pasos Δt. En este caso, se utilizaron pasos fijos, aunque es posible usar pasos adaptativos. Para la evolución del sistema, el método consiste en tomar los siguientes pasos:

$$\begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ v_j^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j^{n} \\ v_j^{n} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} \mu\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ \nu\left(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n\right) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} g_1(u_j^n, v_j^n) \\ g_2(u_j^n, v_j^n) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Las condiciones iniciales consistieron en darles a u y v valores aleatorios en $x \in [0,1]$, usando el mapeo:

$$u(x,0) = 1 + 0.1(2r-1) \tag{6}$$
$$v(x,0) = 1 + 0.1(2r-1) \tag{7}$$

En donde r es un numero aleatorio tomado de una distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Además, se consideraron sistemas con $\mu = D$, $\nu = D/2$ para D un número real. Se hicieron pruebas para $D = 0.01$, 0.0025, 0.0015, 0.00075 y 0.0005. En todos los casos, se tomo un grilla en donde $\Delta x = 0.01$, y $\Delta t = 0.001$.



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f) Anillo interno: $u(x, t_f)$, Anillo externo: $v(x, t_f)$

Fig. 1: Evolución del sistema con $D = 0.0005$.

En la figura 1 se puede ver la evolución del sistema en donde $D = 0.0005$. Vemos que el equilibrio es un modo con número de onda $1/5$. En la figura 1f se puede ver un poco más estético este equilibrio. Notamos que a u y v están desfasadas en 180°. Además, sus amplitudes no coinciden. En otros casos, se encontró que ocurre algo similar, y la amplitud final de cada onda es consecuencia de las condiciones iniciales aleatorias.

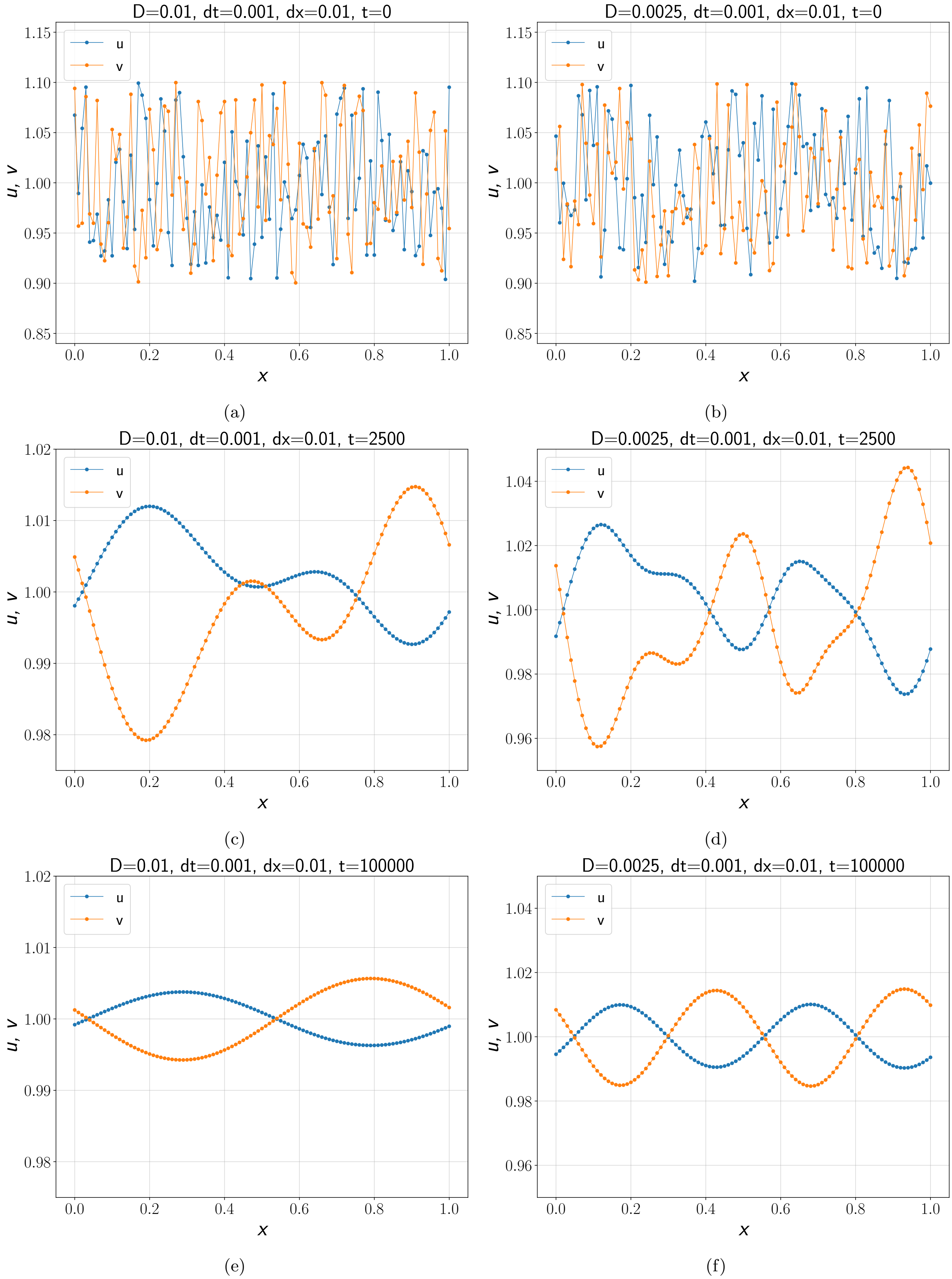
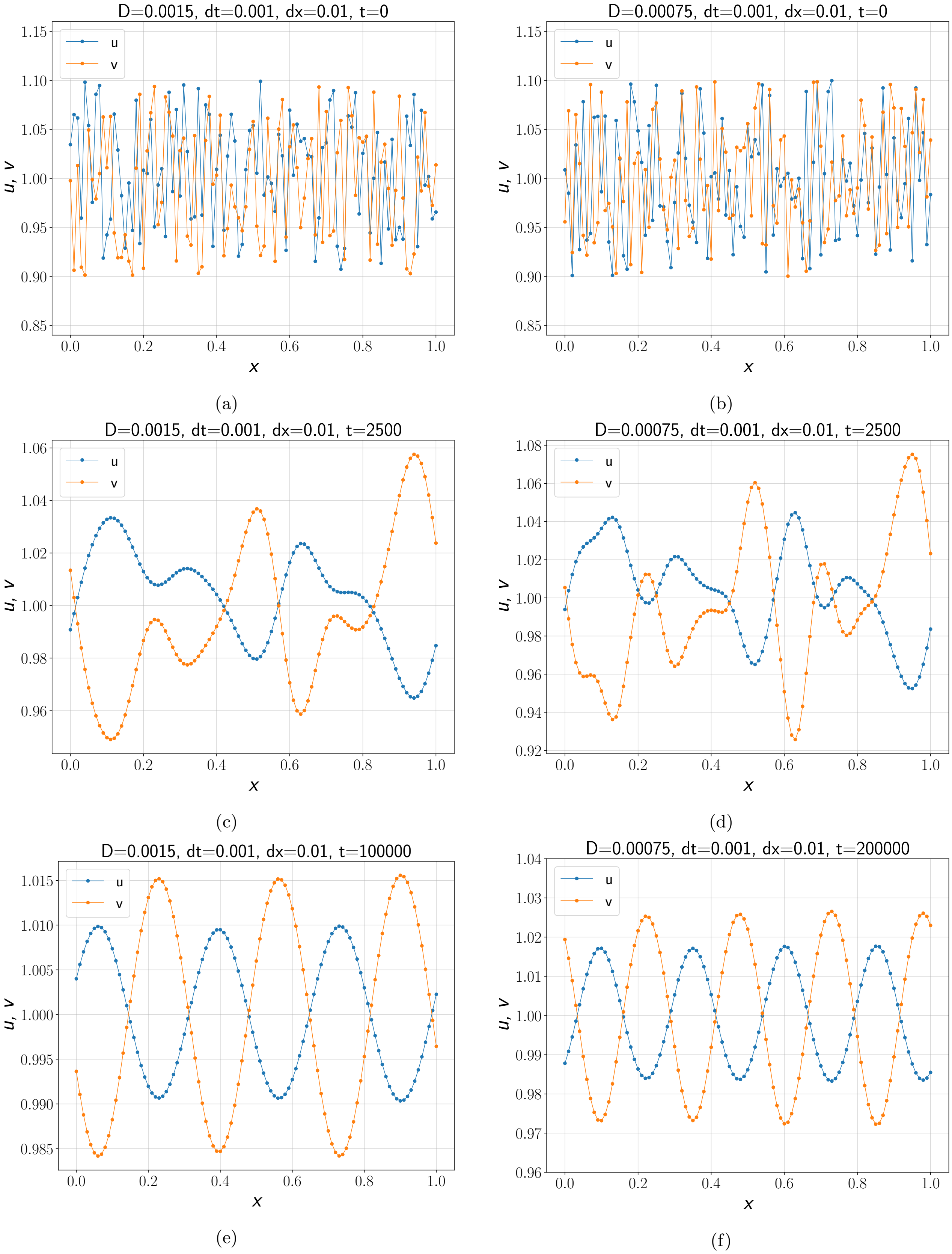


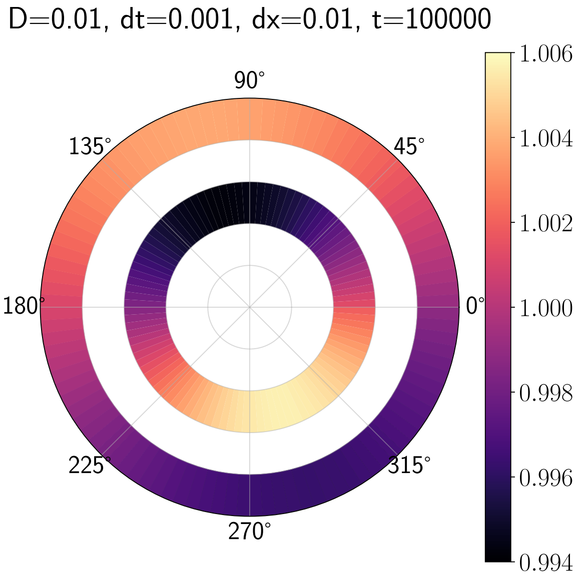
Fig. 2: Primera columna: $D = 0.01$, Segunda columna: $D = 0.0025$



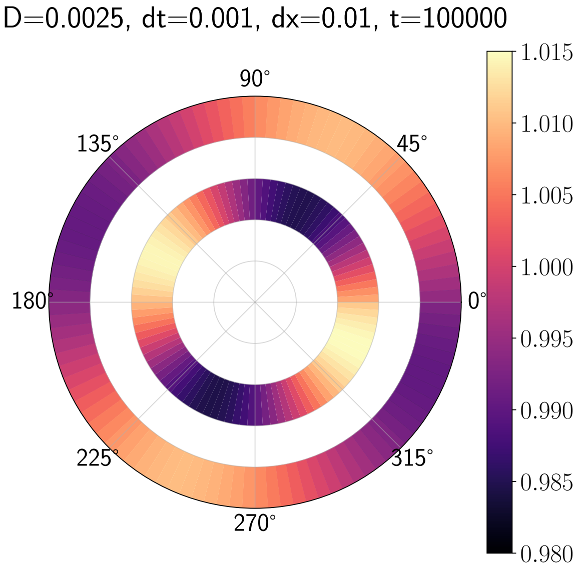
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Fig. 3: Primera columna: $D = 0.0015$, Segunda columna: $D = 0.00075$

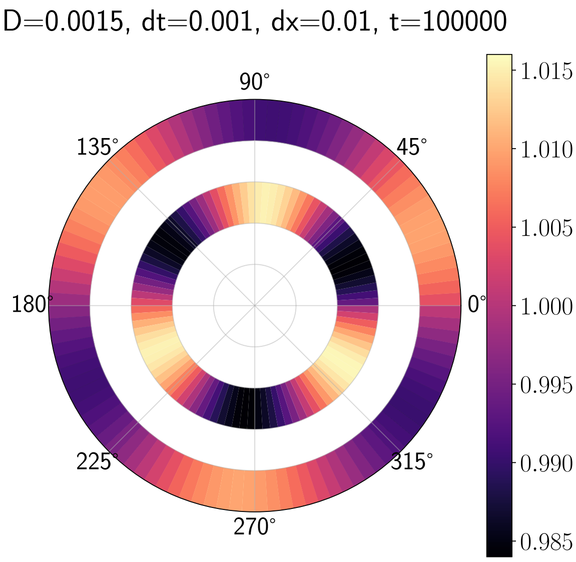
En la figura 3, notamos que para $D = 0.00075$, se usó un tiempo final de $t_f = 200000$ iteraciones (como con $D = 0.0005$). Se notó que para D más chico, se requerían más iteraciones para la convergencia.



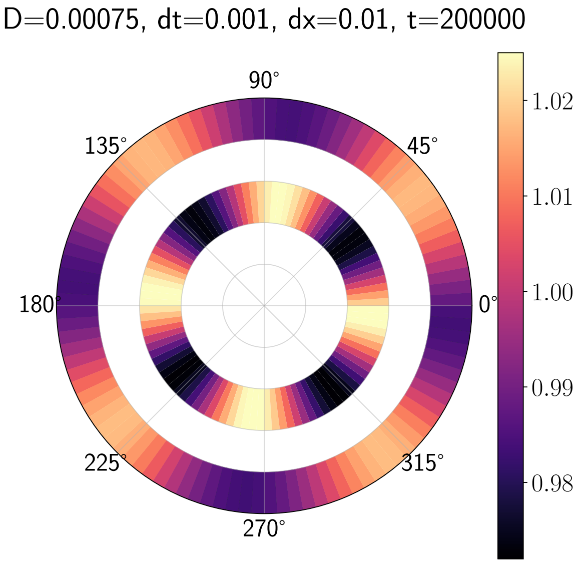
(a)



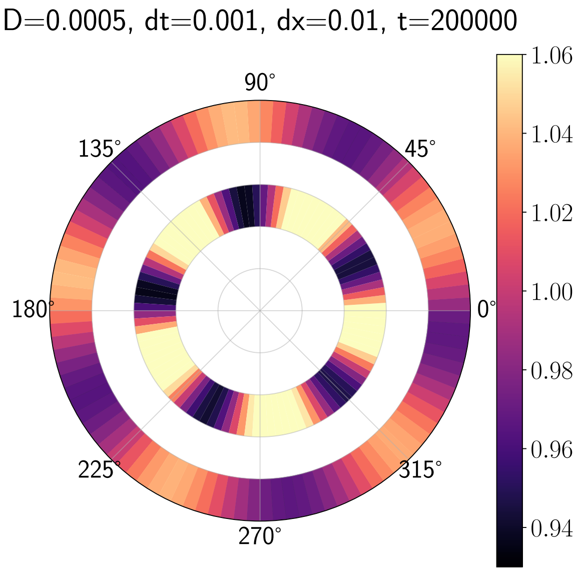
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 4: Estados finales para cada D. Dan números de onda sucesivos (entre 1 y 1/5).