SEGUNDA PARTE...

Ing. Paula A. Toselli

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPIEDADES - TRANSFORMADA DE LAPLACE

- ✓ Linealidad
- ✓ Translación
- ✓ Cambio de escala
- ✓ Derivada
- ✓ Integrales
- ✓ Multiplica por t^2
- ✓ Divide por t
- ✓ Comportamiento de $F(s)$
- ✓ Teorema del Valor Final
- ✓ Teorema del Valor Inicial

En grupos (10 grupos), definir en el foro una de las propiedades lo más detallado y claro posible. Establecer la bibliografía utilizada.

PROPIEDAD DE LA LINEALIDAD

Teorema 1-2. Si c_1 y c_2 son constantes y $F_1(t)$ y $F_2(t)$ son funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente, $f_1(s)$ y $f_2(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s) \qquad (2)$$

Este resultado puede extenderse fácilmente a más de dos funciones.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}\end{aligned}$$

PRIMERA PROPIEDAD DE LA TRANSLACION

Teorema 1-3. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

PROPIEDAD DEL CAMBIO DE ESCALA

Teorema 1-5. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, se tiene

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$ tal como puede ser verificado directamente.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA

Teorema 1-6. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) \qquad (6)$$

si $F(t)$ es continua para $0 \leqq t \leqq N$ y de orden exponencial para $t > N$ mientras que $F'(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leqq t \leqq N$.

Ejemplo. Si $F(t) = \cos 3t$, entonces $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s}{s^2+9}$ y se tendrá

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3 \operatorname{sen} 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE INTEGRALES

Teorema 1-11. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen} 2u\,du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

como se puede verificar directamente.

MULTIPLICAR POR t^2

Teorema 1-12. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{s-2}$, se tendrá

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

DIVISION POR t

Teorema 1-13. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$$

siempre que exista $\lim_{t \to 0} F(t)/t$.

Ejemplo. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ y $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

COMPORTAMIENTO DE $F(s)$

Comportamiento de $f(s)$ cuando $s \to \infty$.

Teorema 1-15. Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\lim_{s \to \infty} f(s) = 0$$

TEOREMA DEL VALOR INICIAL

Teorema 1-16. Si existen los límites indicados, entonces

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{s \to \infty} s\, f(s)$$

TEOREMA DEL VALOR FINAL

Teorema 1-17. Si existen los valores indicados, entonces

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s\, f(s)$$

CONVOLUCION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

CONVOLUCION

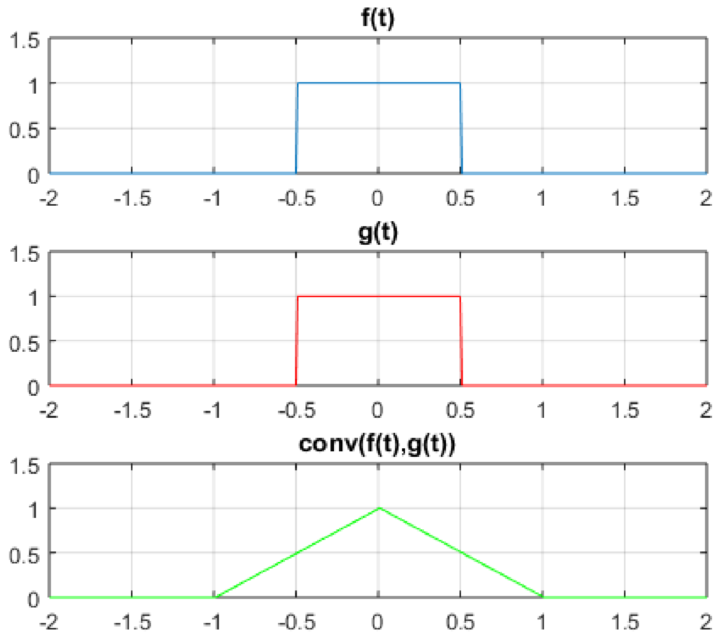
Como hemos visto, **la transformada de una suma es la suma de las transformadas**, entonces cabe preguntarse si se tiene algo similar para el *producto*.

En general **la transformada de un producto NO es el producto de las transformadas**, pero podemos definir un nuevo producto generalizado bajo el cual esto es cierto y se denomina ***CONVOLUCION***.

CONVOLUCION

Se denomina ***convolución*** a una función, que, de forma lineal y continua, **transforma una señal de entrada en una nueva señal de salida.**

$$f(t) * g(t) = h(t)$$



La función de ***convolución*** se expresa por el símbolo $*$.

CONVOLUCION

- La **convolución** de dos funciones $\boldsymbol{u(t)}$, $\boldsymbol{v(t)}$
- **Continuas por tramos**
- De **orden exponencial** en $\boldsymbol{0 \leq t < \infty}$ es la función $\boldsymbol{u * v}$ **definida en** $\boldsymbol{0 \leq t < \infty}$ por:

$$(u * v)(t) = \int_{o}^{t} u(t-y)v(y)dy$$

CONVOLUCION

Suponiendo válido el cambio de orden en la integración tenemos:

$$L\{u * v\} = L\{u\}L\{v\}$$

Propiedad de Convolución

CONVOLUCION - EJEMPLO

Tienes dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ que representan algo que cambia con el tiempo.

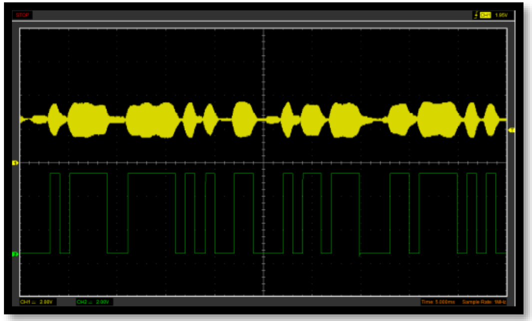
Por ejemplo, $f(t)$ **podría ser un sonido y** $g(t)$ **podría ser un filtro que afecta ese sonido.**

CONVOLUCION - EJEMPLO

Tienes dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ que representan algo que cambia con el tiempo.

Por ejemplo, $f(t)$ **podría ser un sonido y $g(t)$ podría ser un filtro que afecta ese sonido.**

La **convolución** en la Transformada de Laplace **combina estas dos funciones** en el dominio de Laplace, y el **resultado** se llama $H(s)$.



CONVOLUCION - EJEMPLO

Es decir, estamos calculando una nueva función $\boldsymbol{H(s)}$ que **describe cómo estas dos funciones interactúan cuando se transforman al dominio de Laplace.**

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

PROPIEDAD DE INVERSIÓN

Dada una función $v(s)$ **definida en un intervalo a** $< \mathbf{s} < \infty$, **si existe** una función **definida en** $\mathbf{0} < \mathbf{t} < \infty$ tal que:

$$L\{u\} = v$$

Entonces v es **ESCENCIALMENTE UNICA**

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Una función $\mathbf{v(s)}$ definida en un intervalo

$\mathbf{a < s < \infty}$ tiene **<u>transformada de Laplace inversa</u>** si **existe** una función $\mathbf{u(t)}$ **definida en**

$\mathbf{0 \leq t < \infty}$ tal que:

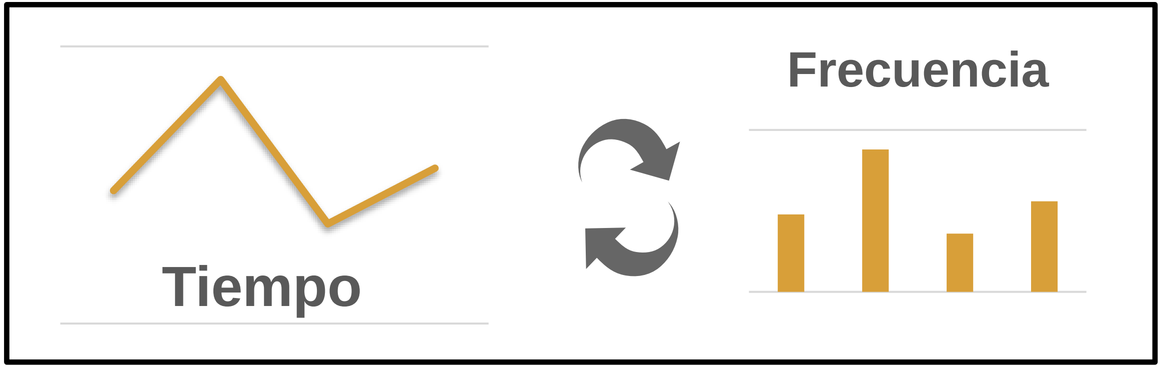
$$L\{u\} = v$$

Entonces $\mathbf{u}$ **es la transformada inversa de Laplace de** $\mathbf{v}$ y se denota: $\mathbf{L^{-1}\{v\}}$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Una **condición necesaria** para que una **función $v(s)$ posea transformada inversa** de Laplace es que:

$$\lim_{s \to \infty} v(s) = 0$$



ECUACIONES DIFERENCIALES - TRANSFORMADA DE LAPLACE

BENEFICIOS DE APLICAR TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL CALCULO DE EDO

- **Simplificación de EDOs:** La TdeL **puede convertir EDOs en ecuaciones algebraicas más simples** en el dominio de Laplace. Así las ecuaciones son más simples de resolver, especialmente cuando son EDOs lineales con coeficientes constantes.

- **Manejo de condiciones iniciales:** Las **condiciones iniciales** se traducen directamente **en condiciones iniciales en el dominio de Laplace**, es decir si la ecuación diferencial tiene valores iniciales, se puede obtener la solución **particular directamente sin pasar por la solución general.**

BENEFICIOS DE APLICAR TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL CALCULO DE EDO

- **Resolución de ecuaciones lineales con coeficientes variables:** Aunque la Transformada de Laplace brilla en EDOs lineales con coeficientes constantes, también puede aplicarse a EDOs lineales con coeficientes variables, lo que a menudo es difícil de abordar directamente en el dominio del tiempo.

- **Manipulación algebraica más sencilla:** En el dominio de Laplace, las derivadas se convierten en multiplicaciones por s, lo que simplifica las ecuaciones diferenciales en comparación con el cálculo de derivadas en el dominio del tiempo.

BENEFICIOS DE APLICAR TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL CALCULO DE EDO

- ✓ **Soluciones más generales:** La Transformada de Laplace puede utilizarse para obtener **soluciones en forma de fracciones parciales en el dominio de Laplace**, que **luego se pueden invertir para obtener soluciones en el dominio del tiempo**. Esto puede proporcionar **soluciones más generales** que las obtenidas a través de métodos directos.

- ✓ **Análisis de estabilidad y respuesta en frecuencia**: La Transformada de Laplace permite un análisis más completo de sistemas dinámicos. Puede utilizarse para estudiar la estabilidad de sistemas y para analizar la respuesta en frecuencia, lo que es crucial en control automático, procesamiento de señales y otras áreas de la ingeniería.

EJEMPLO EDO-

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Resolver con Transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = -8\, e^{-t}$$

Condiciones Iniciales:

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = 12$$

EJEMPLO EDO-

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se aplica la transformada:

$$\mathcal{L}\{\, y'' - 2y' + 5y\} = -8\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Por la propiedad de linealidad y la transformada aplicada:

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1} \qquad (1)$$

EJEMPLO EDO-

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dado que $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ y usando las propiedades para derivadas junto con las condiciones iniciales:

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$
$$= s^2Y(s) - 2s - 12$$

EJEMPLO EDO-

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sustituimos las expresiones en

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1}\,(1):$$

$$[s^2Y(s) - 2s - 12] - 2[sY(s) - 2] + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1} + 8 + 2s$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) = \frac{2s^2 + 10s}{(s+1)}$$

EJEMPLO EDO-

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Finalmente:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 \; - 2s + 5)(\; s + 1)}$$

Se calcula la Transformada Inversa usando Descomposición de Fracciones Simples, llegando a:

$$y(t) = 3e^t \cos 2t + 4e^t sen\, 2t \; - \; e^{-t}$$

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Este método se utiliza generalmente para calcular la anti-transformada.

DEFINICION:

Cada factor con una raíz con parte real α dará lugar a una fracción simple cuya anti-transformada vendrá dada por una exponencial $e^{\alpha t}$ acompañada o no de potencias de t, $senos$ o $cosenos$

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Las **fracciones parciales** en que se descompone el cociente $\frac{\mathbf{P(s)}}{\mathbf{Q(s)}}$ puede ser:

- ✓ $\dfrac{A}{(s-r)}$
- ✓ $\dfrac{B}{(s-r)^m}$
- ✓ $\dfrac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
- ✓ $\dfrac{Ks+L}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^m}$

PASO A PASO – DESCOMPOSICION DE FRACCIONES SIMPLES

Paso 1: Factorización del denominador.

Factorizar el denominador de la fracción original en sus factores irreducibles.

Paso 2: Descomposición en fracciones simples

Debes encontrar los valores de A, B, C, etc., que hacen que la igualdad sea cierta.

Paso 3: Resolución del sistema de ecuaciones

Escribe la fracción original como una suma de las fracciones simples utilizando los valores encontrados en el paso anterior. Cada término en la suma es una fracción simple con un denominador irreducible.

EJEMPLO

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Descomponer $\mathrm{F}(s) = \frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}$ en fracciones parciales y calcular $L^{-1}\{F(s)\}$:

Buscamos A y B: (1)

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)}$$

EJEMPLO

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Para que la suma de fracciones de igual tenemos que:

$$\frac{A(s-3)+B(s-1)}{(s-1)(s-3)} = \frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}$$

Esto ocurre si los numeradores son iguales (los denominadores ya lo son):

$$A(s-3)+B(s-1) = 3s-7$$

EJEMPLO

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Se determina A y B bajo el supuesto de que la relación se cumple para todo s:

1) Si $s = 1$ entonces:

$$A(1-3) + B(1-1) = 3(1) - 7$$

$$-2A = -4$$

$$A = 2$$

2) Si s = 3 entonces:

$$A(3-3) + B(3-1) = 3(3) - 7$$

$$2B = 2$$

$$B = 1$$

EJEMPLO

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)}$$

Reemplazando los valores de A y B en (1):

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{2}{(s-1)} + \frac{1}{(s-3)}$$

EJEMPLO

DESCOMPOSICION POR FRACCIONES SIMPLES

Aplicando la anti-transformada:

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

Por linealidad:

$$2e^{t} + e^{3t}$$

APLICACIONES REALES DE LA TRANS. DE LAPLACE

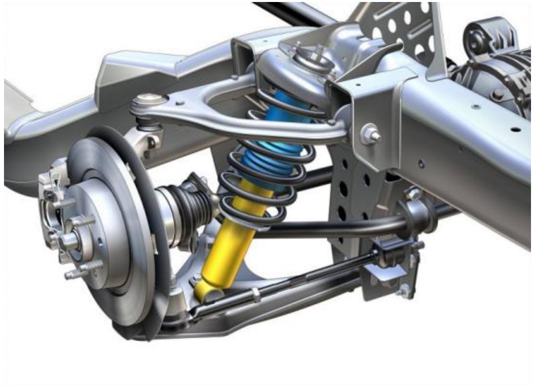
APLICACIONES | TRANSFORMADA DE LAPLACE

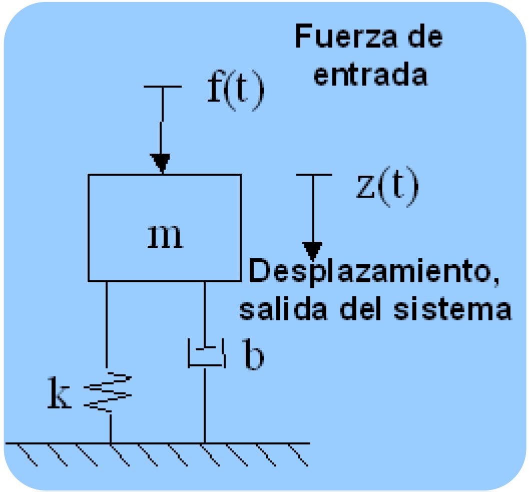
- ✓ Es una metodología ampliamente utilizada en los sistemas de control.

- ✓ Estos sistemas pueden modelarse por medio de ecuaciones diferenciales respecto del tiempo representando matemáticamente los procesos dinámicos.

APLICACIONES | TRANSFORMADA DE LAPLACE

Modelado del funcionamiento de la suspensión de un auto.

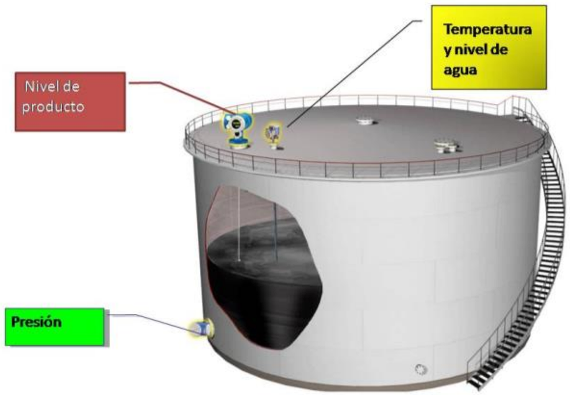


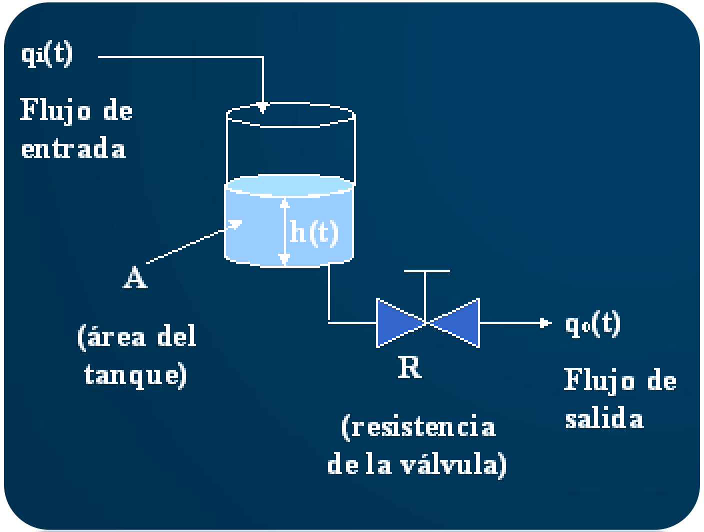


$$\sum F = ma$$

$$f(t) - kz(t) - b\frac{dz(t)}{dt} = m\frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

Modelado del funcionamiento del nivel de un tanque





Flujo que entra – Flujo que sale = Acumulamiento

$$q_i(t) - q_o(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

$$R = \frac{h(t)}{q_o(t)}$$

$$q_i(t) - \frac{1}{R}h(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

APLICACIONES | TRANSFORMADA DE LAPLACE

Área de Aplicación	Ejemplo de Aplicación
Ingeniería de Control	Control de sistemas dinámicos, análisis de estabilidad y respuesta en frecuencia.
Ingeniería Eléctrica	Análisis de circuitos eléctricos, respuesta de sistemas eléctricos a señales.
Ingeniería Mecánica	Análisis de sistemas de masas y resortes, sistemas amortiguados, vibraciones mecánicas.
Telecomunicaciones	Análisis de señales y sistemas de comunicación, modulación, demodulación.
Procesamiento de Señales	Filtrado de señales, análisis de audio y video, compresión de datos.
Matemáticas y Ecuaciones Diferenciales	Resolución de ecuaciones diferenciales, métodos numéricos.
Física	Resolución de problemas de física con ecuaciones diferenciales, como oscilaciones y difusión.
Ciencia de los Materiales	Análisis de comportamiento térmico y mecánico de materiales.
Economía y Finanzas	Modelado de sistemas financieros, análisis de series temporales.