PRIMERA PARTE...

¿QUE RELACION EXISTE ENTRE LA SERIE Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER?

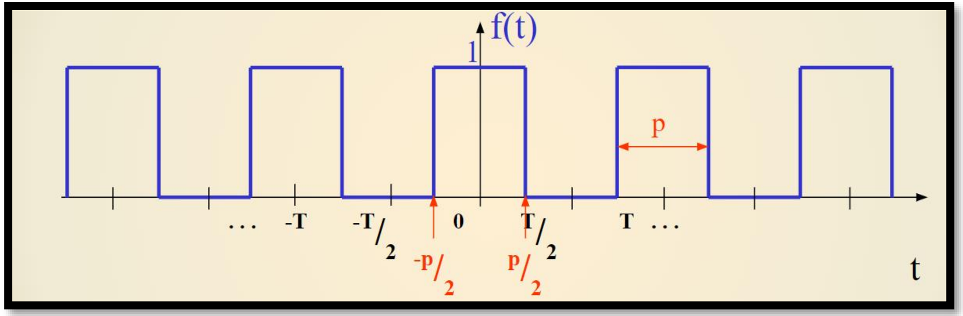
RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

- *La **Serie de Fourier** nos permite obtener una **representación en el dominio de la frecuencia** para funciones **periódicas** $f(t)$.*

- *¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener el **dominio de la frecuencia de funciones no periódicas**?*

RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

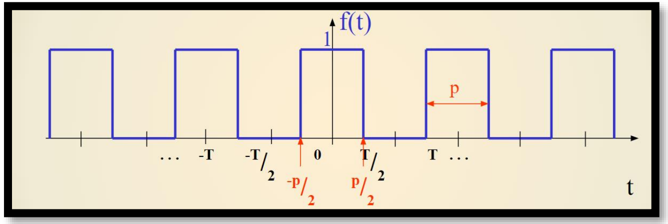
Consideremos la siguiente ***función periódica de periodo*** $\boldsymbol{T}$.



$$f(t)=\begin{cases}0 & \frac{-T}{2}<t<\frac{-p}{2}\\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2}\\ 0 & \frac{p}{2}<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

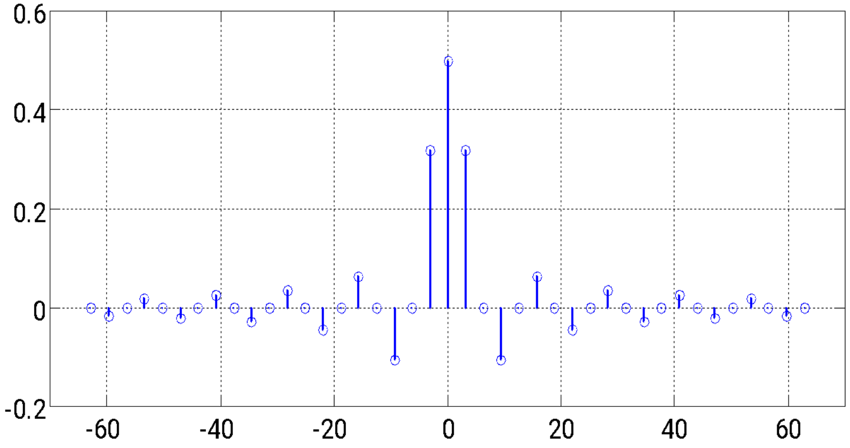
Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T

RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

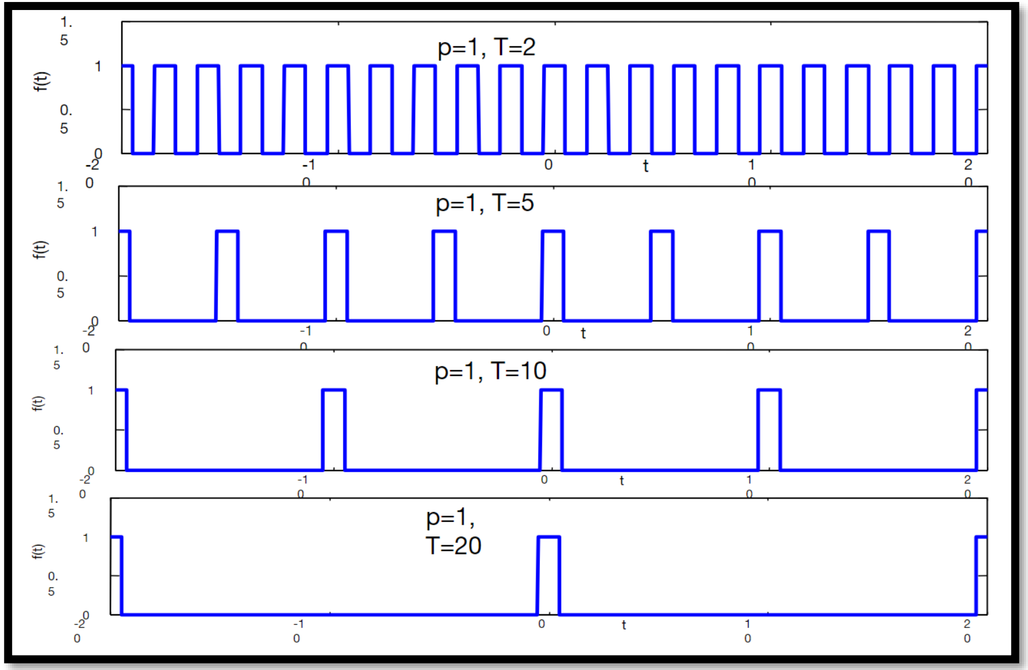
Graficando su espectro tenemos:



Tren de pulsos para p=1, T=2

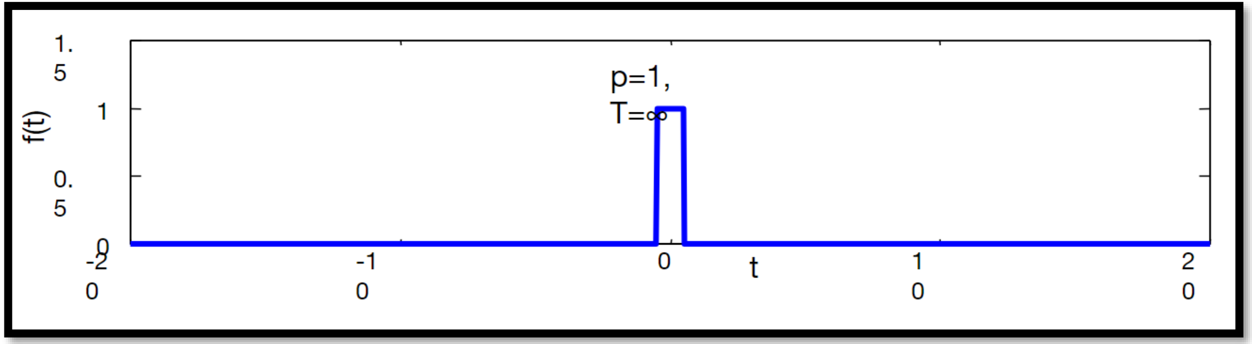
RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

Ahora, si ***aumentamos el período****:*



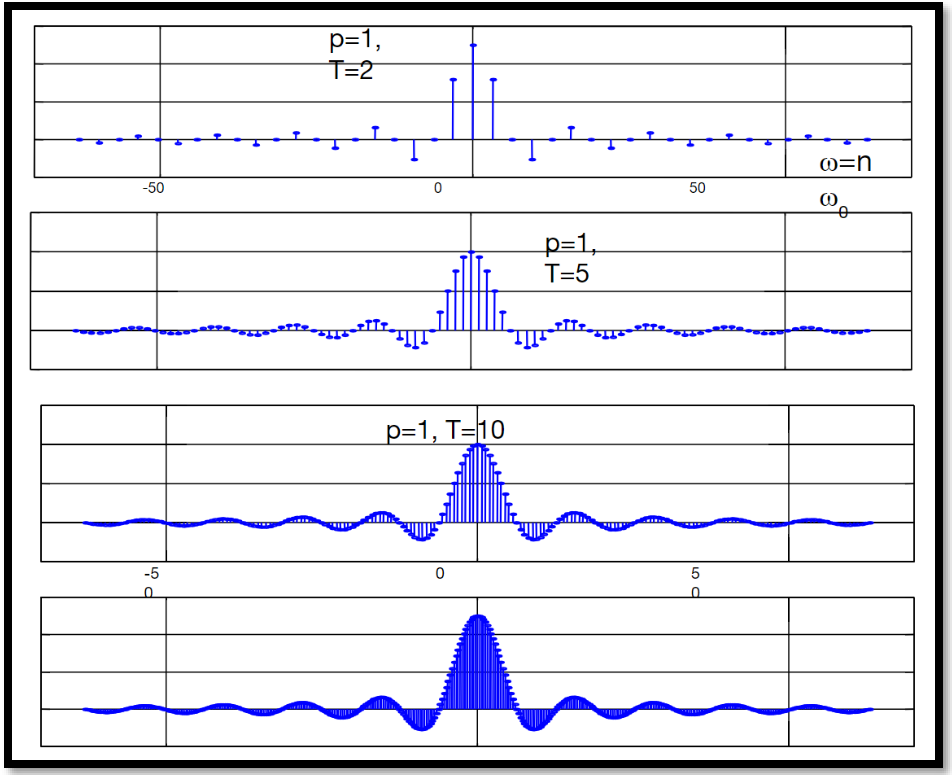
RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

En el límite cuando $\boldsymbol{T} \rightarrow \infty$, *la función deja de ser periódica.*



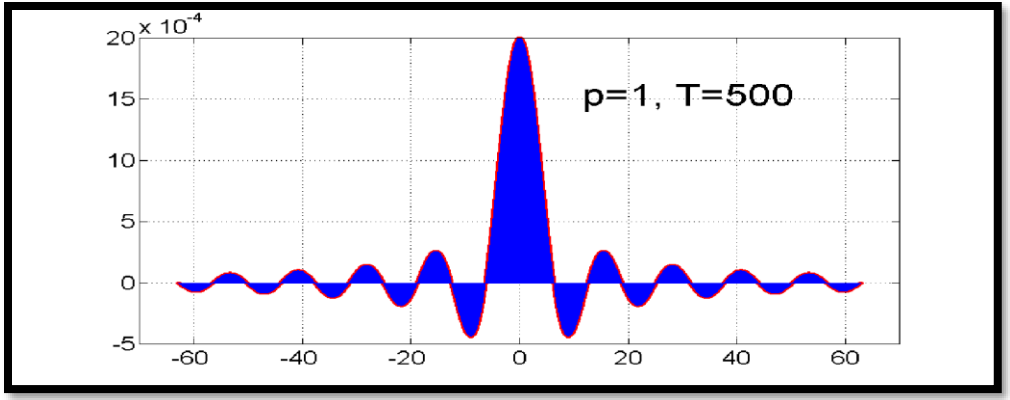
RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

¿qué pasa con los coeficientes de Fourier?



RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

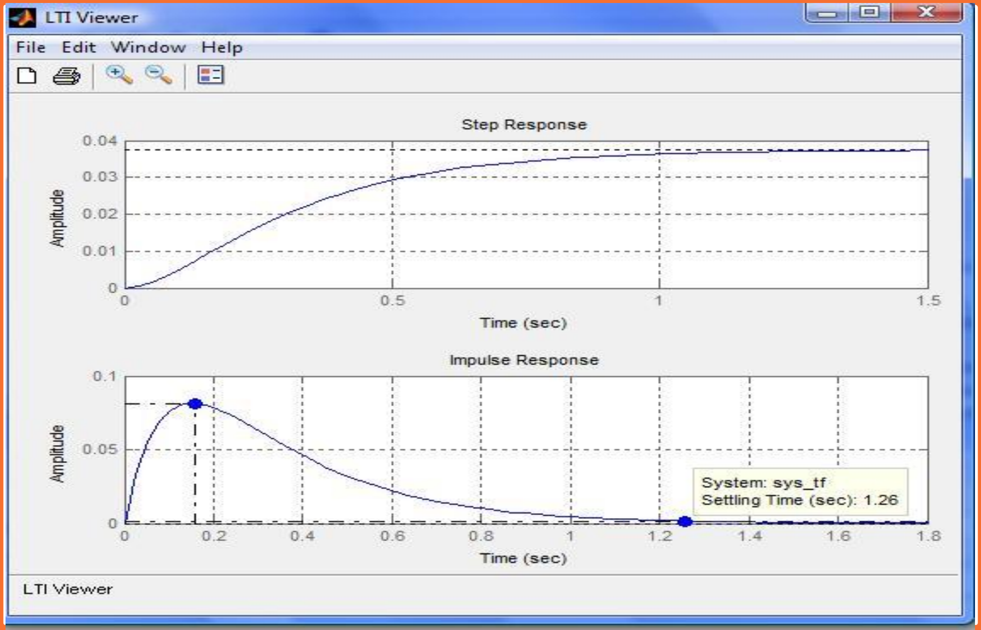
Si T se hace muy grande ($T \to \infty$): ***El espectro se vuelve ¡continuo!***



RELACION ENTRE LA SERIE Y LA TRANS. DE FOURIER

- *El razonamiento anterior nos lleva a* ***reconsiderar la expresión de una función $f(t)$ no periódica en el dominio de la frecuencia****, no como una* ***suma de armónicos*** *de frecuencia $n\omega_0$, sino como* ***una función continua*** *de la frecuencia ω.*

- *Al* ***cambiar la variable discreta*** *$n\omega_0$ (cuando $T \to \infty$) por la* ***variable continua*** *ω, se* ***transforma en una integral tal como veremos a continuación.***



TRANSFORMADA DE LAPLACE

“

Bibliografía Recomendada

Transformada de Laplace

M. Spiegel

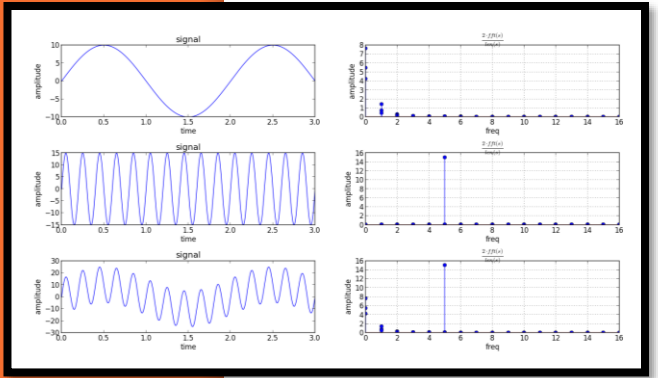
DE LA *TRANSFORMADA DE FOURIER* A LA *TRANSFORMADA DE LAPLACE*

RELACIÓN | EJEMPLO

Imagina una **canción que está en formato digital**. Tu **objetivo** es analizar esta canción para **entender cómo están distribuidos los diferentes tonos y frecuencias en ella.**

RELACIÓN | EJEMPLO

Imagina una **canción que está en formato digital**. Tu **objetivo** es analizar esta canción para **entender cómo están distribuidos los diferentes tonos y frecuencias en ella.**



Si aplicamos la **Transformada de Fourier desglosamos la canción** en sus notas (**componentes de frecuencia**) y en los sonidos fuertes y/o suaves (**amplitud**).

RELACIÓN | EJEMPLO

En cambio, si **tomamos la canción** sonando y **bajamos el volumen gradualmente** (sin apagarlo de inmediato)...

RELACIÓN | EJEMPLO

En cambio, si **tomamos la canción sonando** y **bajamos el volumen gradualmente** (sin apagarlo de inmediato)…

La **Transformada de Laplace** nos permitirá **analizar cómo cambia el volumen de la canción con el tiempo.**

RELACIÓN

	T. FOURIER	T. LAPLACE
Dominio	Trabaja en el dominio del tiempo, es decir, **analiza una señal en función de las frecuencias presentes en un momento específico.**	Se enfoca en cómo **evoluciona una señal en el tiempo**. No solo **te dice qué frecuencias están presentes en un momento**, sino que **también te muestra cómo es la evolución de esas frecuencias a lo largo del tiempo**.
Relación Matemática	Cuando aplicas la Transformada de Laplace de una señal y la evalúas en un valor específico del dominio de Laplace, obtienes una función en el dominio de Fourier. Esto significa que **puedes "congelar" la evolución de una señal en un momento particular y analizar sus componentes de frecuencia como lo harías con la Transformada de Fourier.**	Se utiliza en problemas más generales.

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- ✓ Se **utiliza** principalmente en matemáticas, ingeniería y física **para analizar sistemas y funciones que varían en el tiempo**.

- ✓ **Ayuda a convertir ecuaciones diferenciales**, que describen cómo cambian las cosas con respecto al tiempo, **en ecuaciones algebraicas más sencillas**.

- ✓ Además, **permite analizar sistemas y señales** de una manera más **manejable** y **efectiva**.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Consideremos una función $f(t)$ que depende del tiempo t.

Puede representar cualquier cosa que **cambie con el tiempo**, como la temperatura en un día o la posición de un objeto en movimiento.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Consideremos una función $f(t)$ que depende del tiempo t.

Puede representar cualquier cosa que **cambie con el tiempo**, como la temperatura en un día o la posición de un objeto en movimiento.

La Transformada de Laplace toma esta **función $f(t)$ y la convierte** en **una nueva** función $F(s)$, donde **s es una variable compleja.**

La notación general para la Transformada de Laplace es $F(s) = L\{f(t)\}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Consideremos una función $f(t)$ que depende del tiempo t.

Puede representar cualquier cosa que **cambie con el tiempo**, como la temperatura en un día o la posición de un objeto en movimiento.

La Transformada de Laplace toma esta **función $f(t)$ y la convierte** en **una nueva** función $F(s)$**,** donde **s es una variable compleja ¿Qué es?**

La notación general para la Transformada de Laplace es $F(s) = L\{f(t)\}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Lo que **obtenemos**, $F(s)$, es una nueva representación de $f(t)$ que nos **permite analizar cómo se comporta la función en el dominio de Laplace,** que es útil para **resolver ecuaciones diferenciales y estudiar sistemas dinámicos.**

$F(s)$ se conoce como "parámetro de Laplace".

DENIFICION

Una **función** $f(t)$ definida en $0 < t < \infty$ tiene transformada de Laplace si ∋ **un Real**

$a > 0$ tal que la integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Converge para $s > a$.

*Se dice que **la Transformada de Laplace F(s) existe cuando la integral mencionada converge para algún valor de s.***

DENIFICION

En general, Fourier, consideraba que $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ pero es de mucha utilidad establecer que $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}$ asi Laplace estableció una **mejora** para Fourier ya que siendo:

$$\boxed{\boldsymbol{s = j\omega\ (Fourier)}}$$

DENIFICION

En general, Fourier, consideraba que $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ pero es de mucha utilidad establecer que $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}$ asi Laplace estableció una **mejora** para Fourier ya que siendo:

$$\boxed{\boldsymbol{s = j\omega \ (Fourier)}}$$

NO todas las funciones convergen, pero introduciendo el **valor $\boldsymbol{\sigma}$ $(\boldsymbol{sigma})$** como **condición suficiente** para la convergencia tenemos por Laplace:

$$\boxed{\boldsymbol{s = \sigma + j\omega \ (Laplace)}}$$

DENIFICION

Además, si consideramos que:

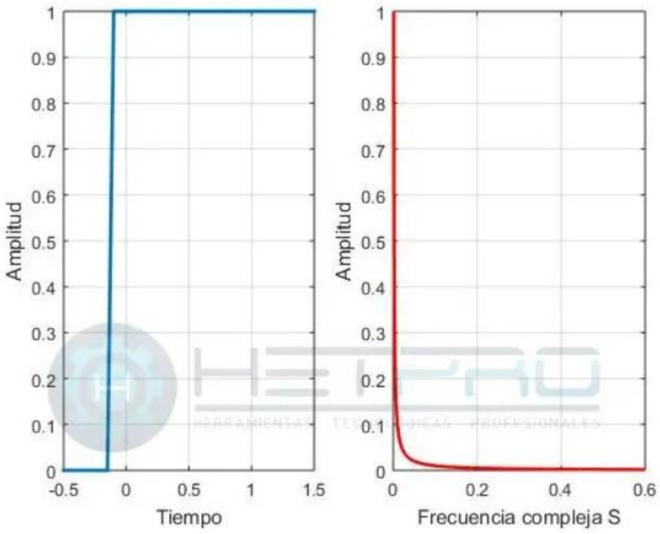
$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-st}f(t)dt\ \boxed{\exists\ y\ es\ \infty}$$

Entonces **Laplace también puede definirse con el límite,** siendo entonces:

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-st}f(t)dt$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

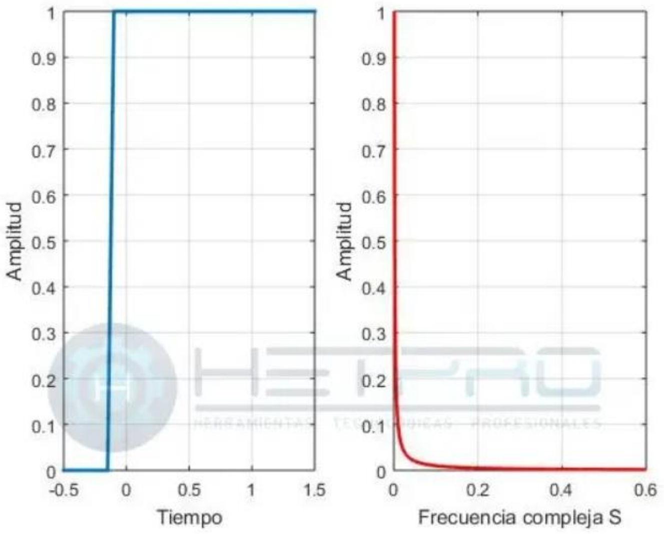
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s} e^{-s\infty} + \frac{1}{s} e^{-s0} = \frac{1}{s}$$



Función Escalón Unitario

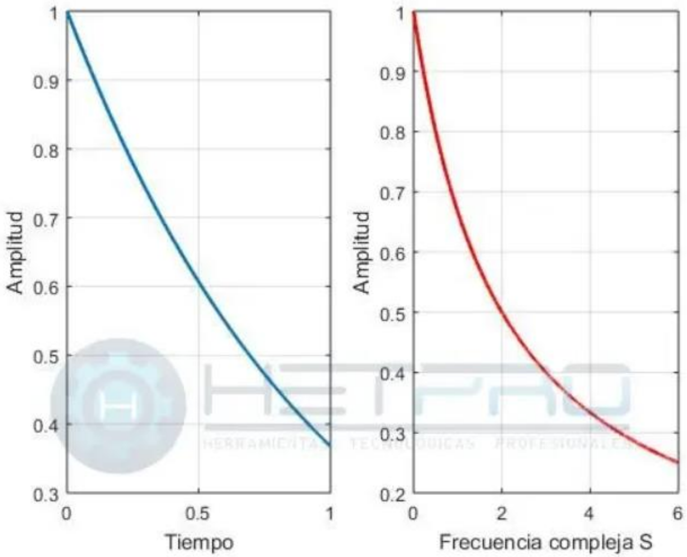
TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s}e^{-s\infty} + \frac{1}{s}e^{-s0} = \frac{1}{s}$$



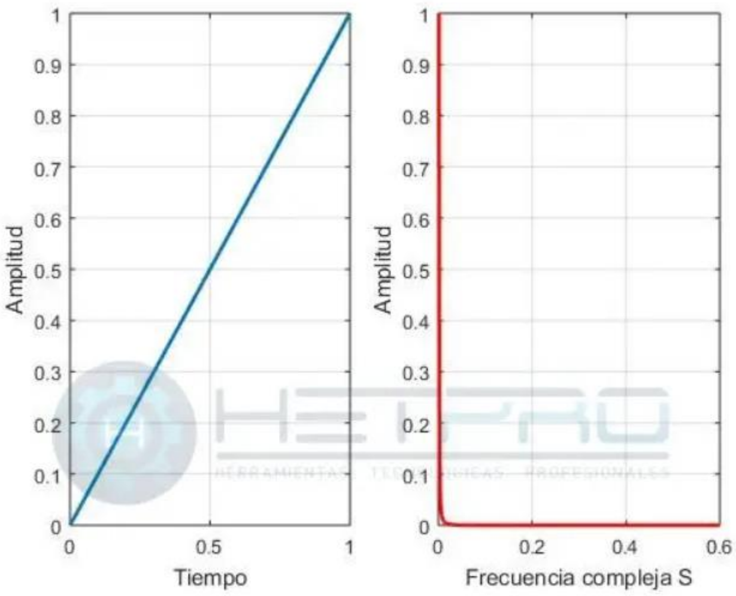
Función Escalón Unitario

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}e^{-\alpha t}dt = -\frac{1}{s}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$



Función Exponencial

TRANSFORMADA DE LAPLACE



Función Rampa

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = t$$

$$dv = e^{-st}$$

Por lo tanto:

$$du = 1$$

$$v = -\frac{1}{-s}e^{-st}$$

Sustituyendo, nos queda:

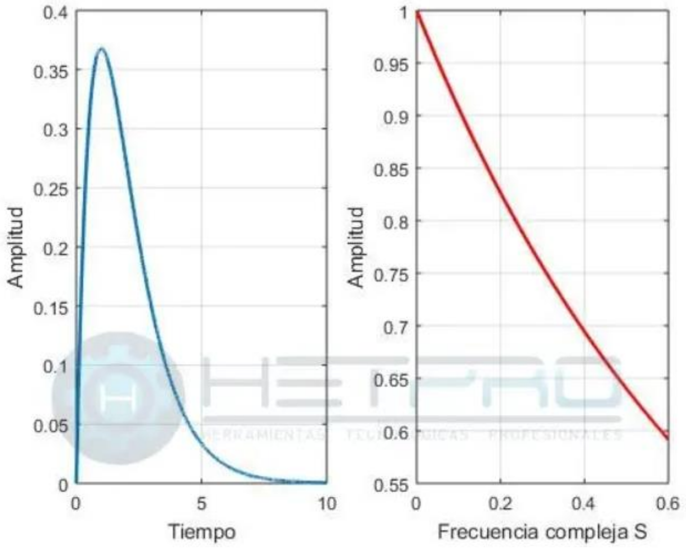
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt = -t\frac{1}{s}e^{-st} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}(1) = -\frac{t}{s}e^{-st} - \left(-\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\right)$$

$$F(s) = -\frac{t}{s}e^{-st} - \left(-\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\right) = -\frac{t}{s}e^{-st} - \left(\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_{0^-}^{\infty}$$

$$F(s) = \left(-\frac{\infty}{s}e^{-s\infty} - \left(\frac{1}{s^2}e^{-s\infty}\right)\right) - \left(-\frac{0}{s}e^{-s0} - \left(\frac{1}{s^2}e^{-s0}\right)\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

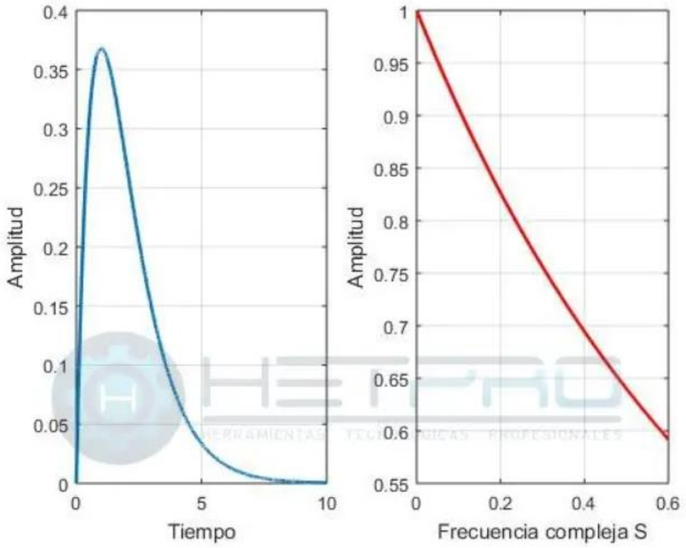
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$



Función rampa con exponencial

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$



Función rampa con exponencial

FÓRMULAS DE FUNCIONES BÁSICAS

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = e^{-st_0}$$

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$\mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}$$

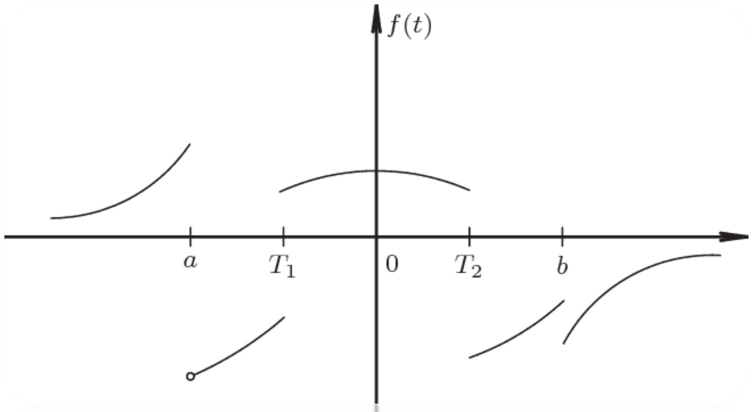
$$\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA

CONDICIONES

Si $\boldsymbol{f(t)}$ **es seccionalmente continua** en cada intervalo finito $\boldsymbol{0 \leq t \leq N}$ **de orden exponencial** $\boldsymbol{\gamma}$ para $\boldsymbol{t > N}$ entonces:

Existe la transformada de Laplace F(s) para todo $s > \gamma$



CONDICIONES

Esto se traduce como…

Dominio de Existencia: La función $f(t)$ debe estar definida en un intervalo de números reales no negativos, generalmente $t \geq 0$.

Comportamiento a lo largo de $t \to \infty$: La función $f(t)$ debe ser tal que cuando t tiende a infinito, **su magnitud no debe crecer exponencialmente.**

Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\lim_{t \to \infty} e^{at} |f(t)| = 0$$

Donde a es una constante real positiva.

CONDICIONES

Esta condición asegura **que la función decaiga lo suficientemente rápido a medida que t se hace muy grande.**

Las condiciones son SUFICIENTES para garantizar la existencia de la transformada.

Como NO son NECESARIAS, si no son satisfechas puede que exista la transformada o no.

METODOS PARA CALCULAR LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

METODOS DE CÁLCULO

- Utilizando la DEFINICION.
- Utilizando la TABLA.
- Método de las Ecuaciones Diferenciales.

METODOS DE CÁLCULO - DEFINICION

La Transformada de Laplace de una función $f(t)$ se calcula mediante la siguiente fórmula: $\boldsymbol{F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt}$**.**

1. Define la función $\mathbf{f(t)}$**:** Conocer la función $f(t)$ que deseas transformar. Esta función debe estar definida en un intervalo (generalmente $t \geq 0$).

2. Aplica la fórmula de la Transformada de Laplace: Sustituye $f(t)$ en la fórmula de la Transformada de Laplace.

METODOS DE CÁLCULO - DEFINICION

3. Evalúa la integral definida: Calcula la integral definida desde 0 hasta ∞ algebraicamente o por medio de técnicas de integración según la función $f(t)$.

4. Expresa el resultado en función de s: Una vez que hayas evaluado la integral y el límite, obtendrás una expresión en términos de s, que es la Transformada de $F(s)$ de la función $f(t)$.

METODOS DE CÁLCULO - DEFINICION

La forma en que $\boldsymbol{F(s)}$ **converge o diverge** a medida que t se acerca al ∞ es fundamental para determinar la **existencia de la Transformada de Laplace**.

- ✓ Si $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e^{-st}f(t) = 0}$ entonces la Transformada de Laplace converge y puedes calcularla.

- ✓ Si $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e^{-st}f(t)\ NO\ es\ igual\ a\ 0\ o\ NO\ Existe}$ entonces la Transformada de Laplace no existe para la función $f(t)$.

METODOS DE CÁLCULO – POR TABLA

Transformada de Laplace	Transformada de Laplace inversa
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kt}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$
$\mathcal{L}\{t^n\, e^{kt}\} = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}\right\} = t^n\, e^{kt}$
$\mathcal{L}\{sen\ kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = sen\ kt$
$\mathcal{L}\{cos\ kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = cos\ kt$
$\mathcal{L}\{senh\ kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = senh\ kt$
$\mathcal{L}\{cosh\ kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = cosh\ kt$
$\mathcal{L}\{\delta(t-k)\} = e^{-ks}$	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-ks}\} = \delta(t-k)$

Lo veremos en la segunda parte…