CONCEPTOS GENERALES

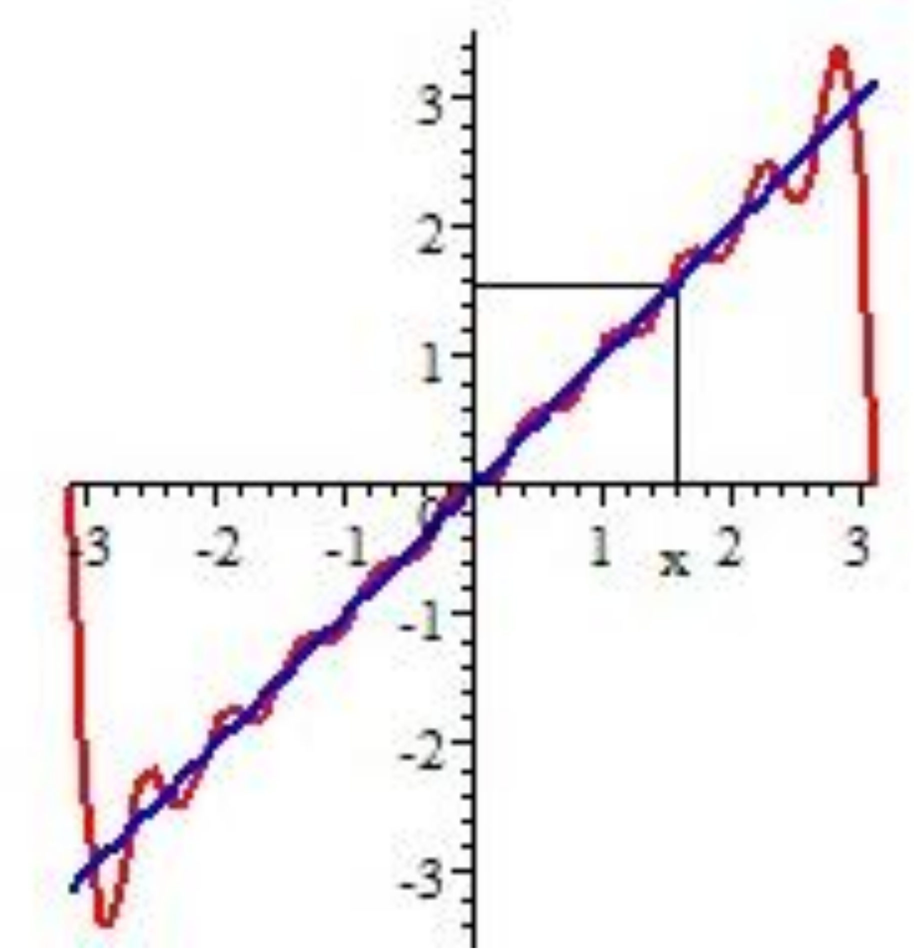
Ing. Paula A. Toselli

CONCEPTOS Y REPASO - **ACTIVIDAD**

1. Ir al campus en la sección Series y Transformadas de Fourier buscar Repaso de Conceptos.
2. Allí, por grupo, poner el contenido solicitado en el tablero creado.
3. Al terminar conversaremos en clase sobre lo realizado.

ACTIVIDAD: 20 minutos | DEBATE: 10 minutos

¿POR QUÉ NECESITAMOS REPASAR ESTOS CONCEPTOS?



SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Ing. Paula A. Toselli

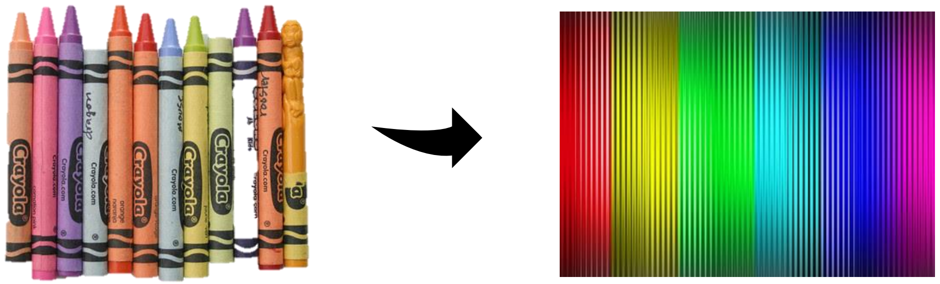
GENERALIDADES

La **respuesta de un sistema lineal** (con una entrada arbitraria) **puede obtenerse representando** dicha **entrada** en **función de señales básicas.**

Una señal básica es una función γ desplazada.

GENERALIDADES - EJEMPLO

Imagina que tienes una caja de colores y quieres crear nuevos colores combinándolos.

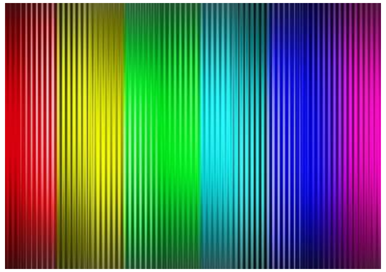


Cada color en la caja se puede ver como una señal básica.

Si sabes cómo mezclar esos colores, puedes representar cualquier color que desees utilizando esos colores básicos como bloques de construcción.

GENERALIDADES - EJEMPLO

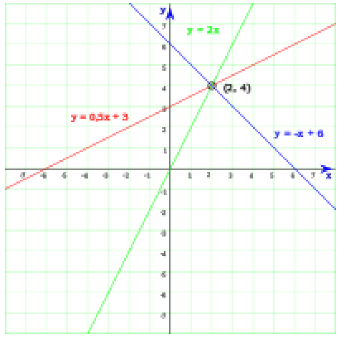
Imagina que tienes una caja de colores y quieres crear nuevos colores combinándolos.



Cada color en la caja se puede ver como una señal básica.

Si sabes cómo mezclar esos colores, puedes representar cualquier color que desees utilizando esos colores básicos como bloques de construcción.

Así, en lugar de guardar todos los colores posibles, solo necesitas saber cómo mezclar los colores básicos para obtener cualquier otro color que desees.



De manera similar, en un sistema lineal, podemos representar cualquier entrada complicada como una combinación de señales básicas que sabemos cómo el sistema responderá

GENERALIDADES

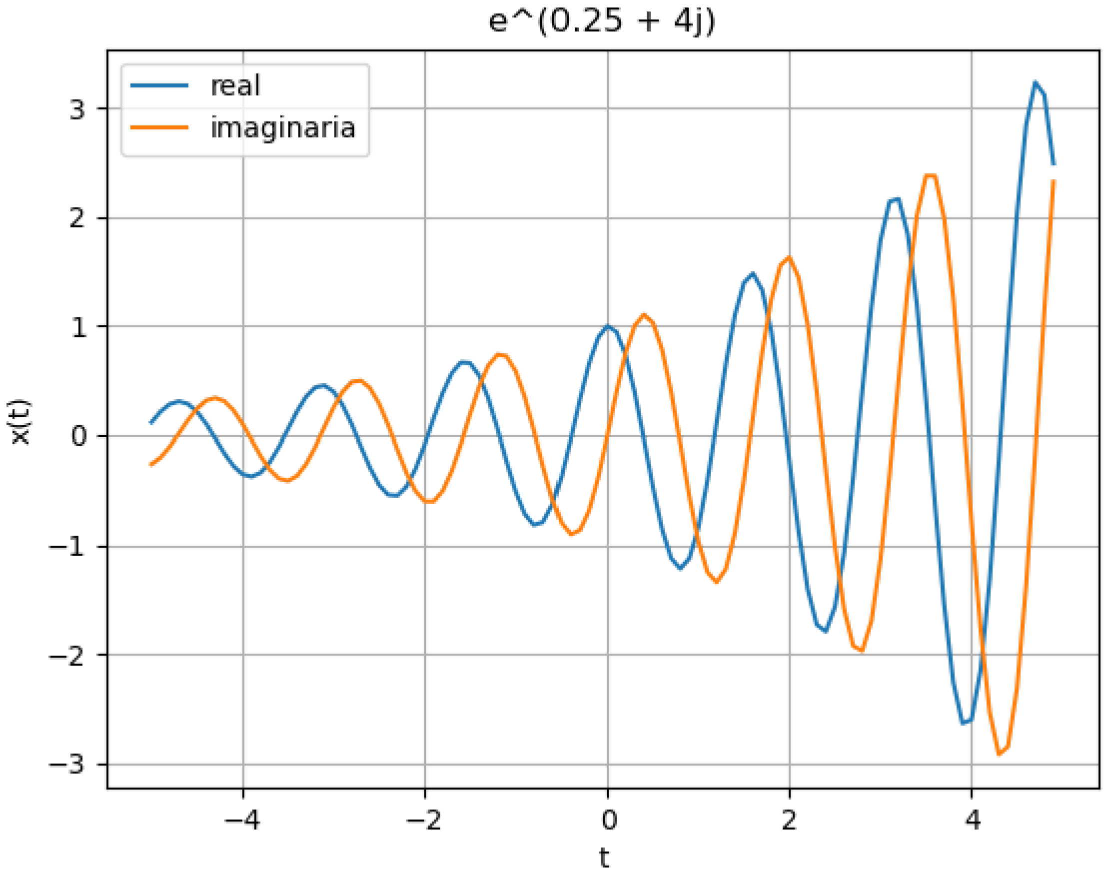
Es conveniente escoger como **señales básicas** las **funciones ortogonales**, ya que:

- **Simplifican las operaciones** que se realizan sobre dicha señal.
- **Se puede representar como un vector** en un sistema de coordenadas ortogonales, **donde las funciones serán las coordenadas.**
- **Proporciona medios para encontrar la respuesta** de sistemas lineales.

GENERALIDADES

- En el caso de las **señales periódicas** resulta conveniente seleccionar el **conjunto de señales exponenciales complejas.**

- Son **funciones periódicas,** que trabajan con **números complejos** y son útiles para describir **señales electrónicas o vibraciones.**



GENERALIDADES

- La **representación de una señal exponencialmente compleja**, es decir, con usando **senos** y **cosenos** conduce al concepto de **Series de Fourier.**

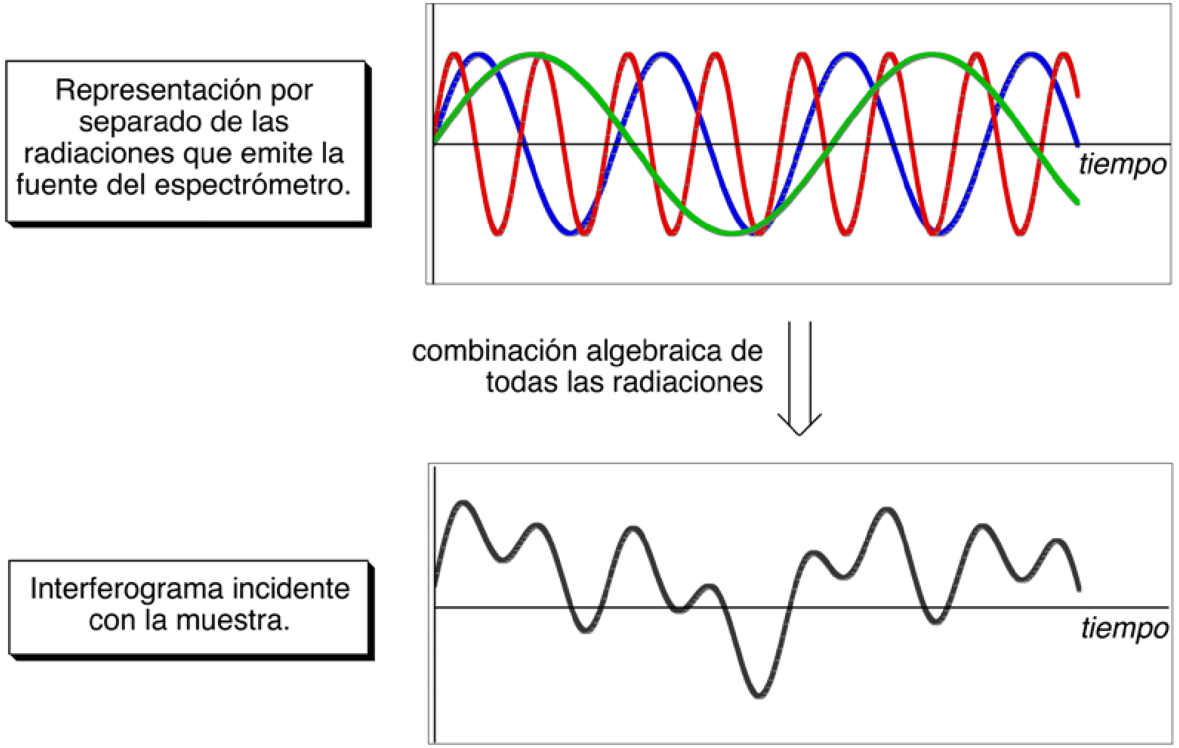
- Éste fue un físico, francés (1768-1830), que **sugirió por primera vez que las señales periódicas podían ser representadas como una <u>suma de sinusoides</u>.**

ENTONCES…

Con el **análisis de Fourier** se puede demostrar que **cualquier señal está constituida por componentes senoidales de distintas frecuencias.**

ENTONCES…

Con el **<u>análisis de Fourier</u>** se puede demostrar que **cualquier señal está constituida por componentes senoidales de distintas frecuencias.**

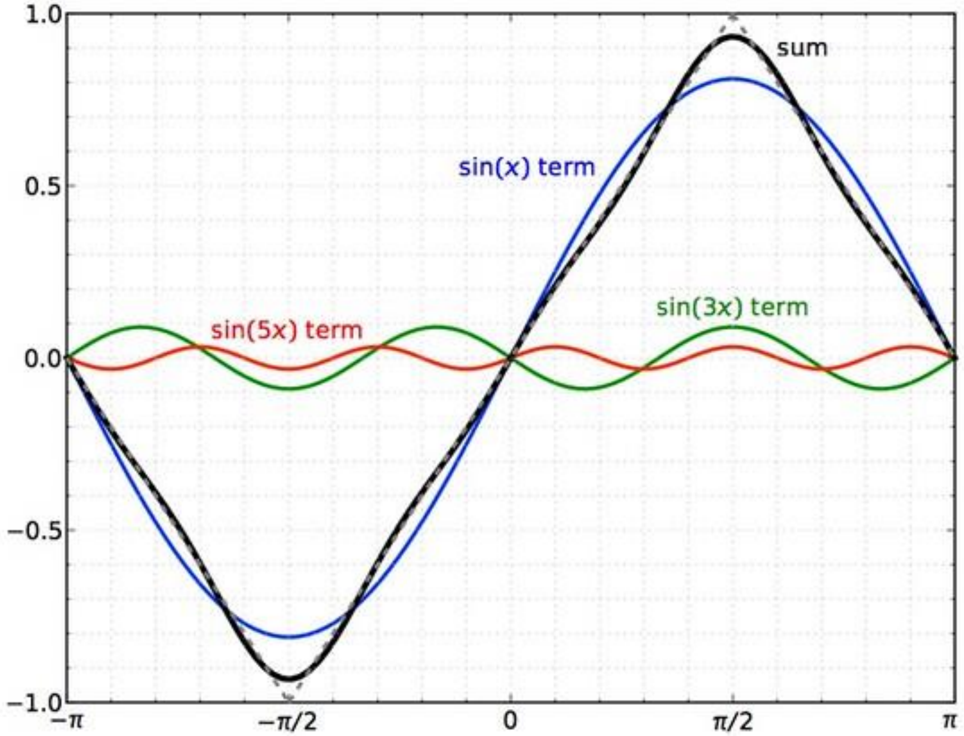


¿POR QUÉ ESTUDIARLAS?

Las **funciones periódicas** aparecen en un conjunto amplio de **fenómenos físicos.**

- Por ejemplo:
  - ✓Ondas acústicas
  - ✓Ondas electromagnéticas
  - ✓Desplazamiento vertical de un péndulo mecánico
  - ✓Vibraciones periódicas de los instrumentos
  - ✓Otros…

SERIE DE FOURIER



SERIE DE FOURIER-DEFINICION

Toda **función periódica** (período T) puede ser **expresada** como una **suma trigonométrica de senos y cosenos** del mismo período T.

SERIE DE FOURIER-DEFINICION

Toda **función periódica** (período T) puede ser **expresada** como una **suma trigonométrica de senos y cosenos** del mismo período T.

Entonces si $\mathrm{x}(t)$ es periódica, con período T tenemos:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}]$$

SERIE DE FOURIER-DEFINICION

Donde a_0, a_n, b_n se denominan COEFICIENTES DE FOURIER.

- Estos valores **describen la contribución de cada componente** (seno o coseno) **en la descomposición de una señal** en una serie de Fourier.
- Para una señal periódica dada, **hay un coeficiente de Fourier asociado a cada componente de la serie.**

Donde a_0, a_n, b_n se denominan COEFICIENTES DE FOURIER.

- Estos valores **describen la contribución de cada componente** (seno o coseno) **en la descomposición de una señal** en una serie de Fourier.
- Para una señal periódica dada, **hay un coeficiente de Fourier asociado a cada componente de la serie.**

SERIE DE FOURIER-DEFINICION

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}\right]$$

Estos coeficientes **determinan la magnitud y la fase** (el desplazamiento en el tiempo) **de cada componente sinusoidal** que se **suma** para **reconstruir la señal original.**

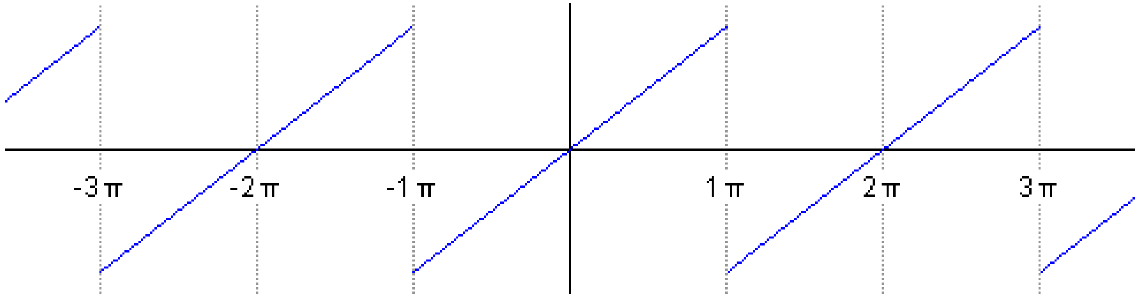
$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int x(t)dt$$

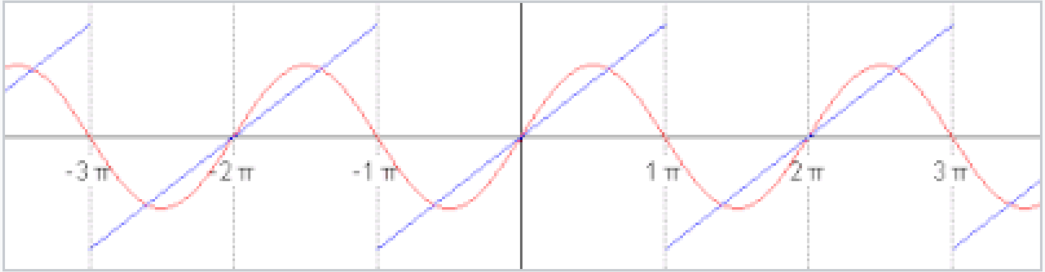
$$a_n = \frac{2}{T}\int x(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int x(t)\,sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$$

$$\therefore n = 0,1,2,3\ldots$$

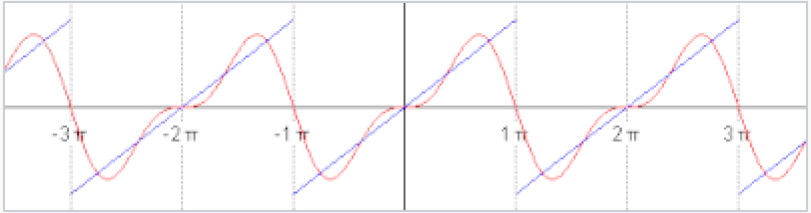
SERIE DE FOURIER - EJEMPLO



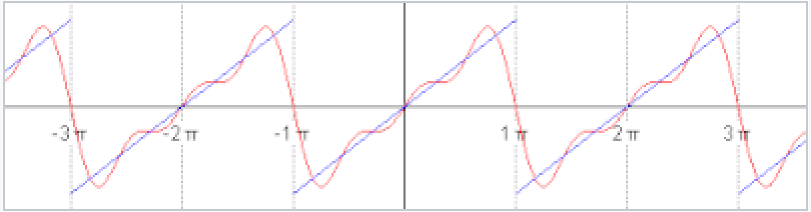


Animación de la suma de los 5 primeros armónicos.

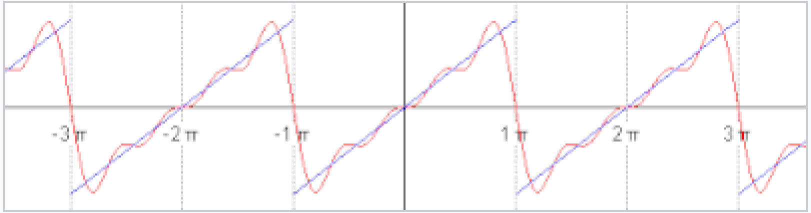
$$f(x+2\pi) = x \therefore -\infty < x < \infty$$



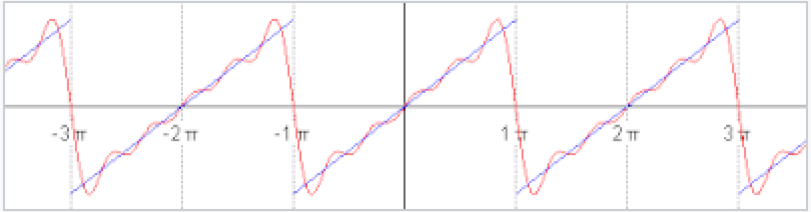
Animación de la suma de los 5 primeros armónicos.



Animación de la suma de los 5 primeros armónicos.



Animación de la suma de los 5 primeros armónicos.



Animación de la suma de los 5 primeros armónicos.

SERIE DE FOURIER - EJEMPLO

Suponiendo la función $f(x) = x \therefore -\pi < x < \pi$

Con un periodo $T = \pi$ calculamos los coeficientes de Fourier para armar la Serie:

$$a_0 = 0$$

Aplicamos los valores en la ecuación de a_0 resolvemos la integral y nos da 0.

SERIE DE FOURIER - EJEMPLO

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos\frac{nx\pi}{\pi}\,dx = 0$$

Al resolver la integral nos da 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x sen\frac{nx\pi}{\pi}\,dx = \frac{-2}{n}\cos(n\pi)\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

SERIE DE FOURIER - EJEMPLO

Armando entonces la Serie de Fourier tenemos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} sen(nx)$$

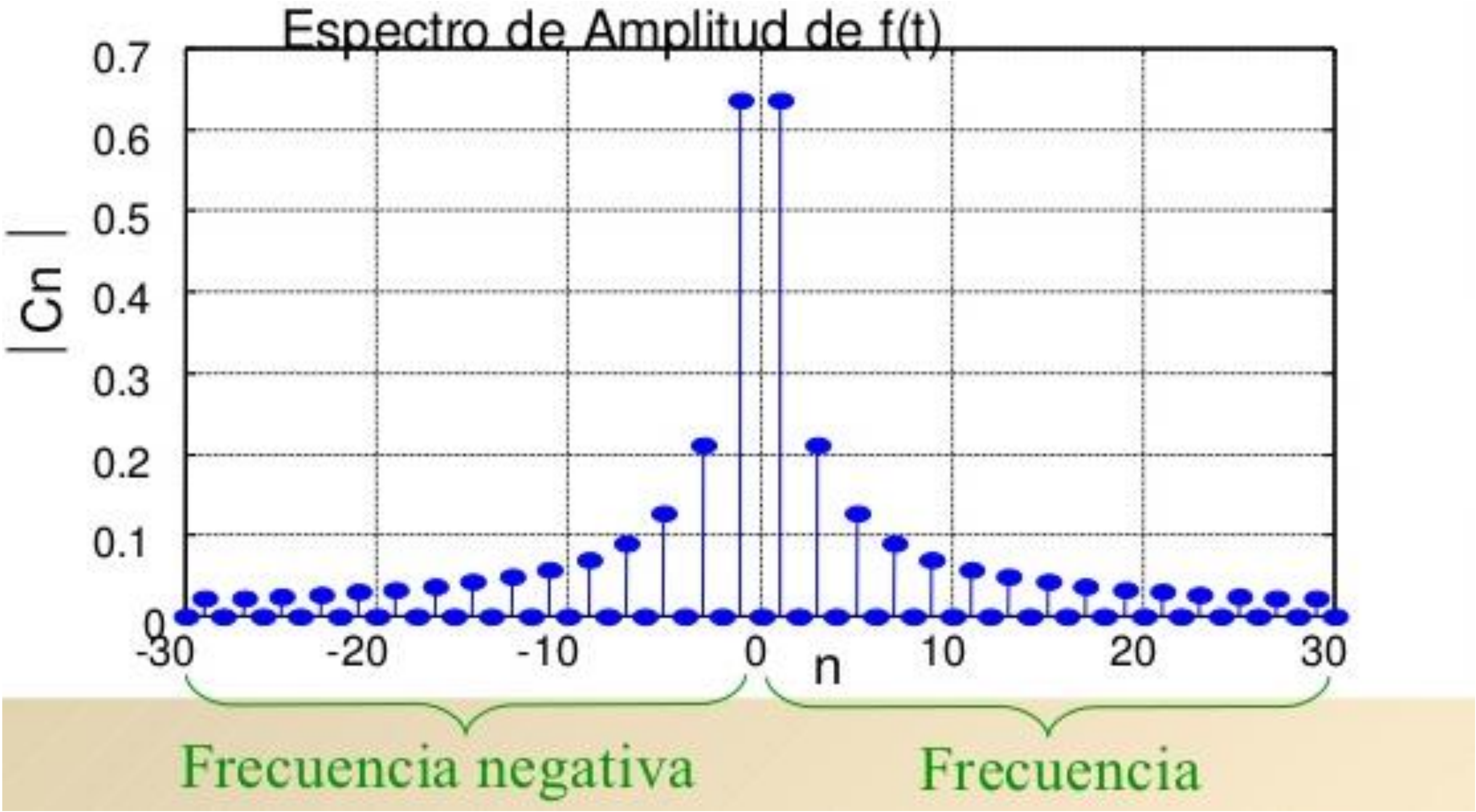
ESPECTRO DE UNA SEÑAL

Ing. Paula A. Toselli

SERIE DE FOURIER - ESPECTRO

EL ESPECTRO DE UNA SEÑAL ES EL **CONJUNTO DE FRECUENCIAS** QUE LA **CONSTITUYEN.**

SERIE DE FOURIER - ESPECTRO



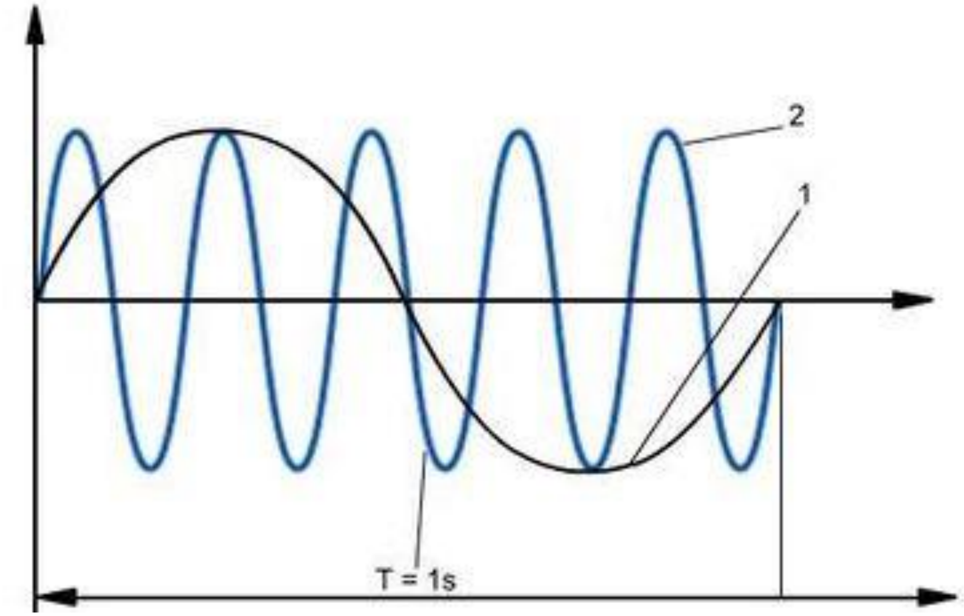
SERIE DE FOURIER - ESPECTRO

Se obtiene **representando gráficamente** las **amplitudes y las fases** de los distintos componentes versus la **frecuencia angular**.

SERIE DE FOURIER - ESPECTRO

Se obtiene **representando gráficamente** las **amplitudes y las fases** de los distintos componentes versus la **frecuencia angular**.

La frecuencia (f), es el valor recíproco de la duración de tiempo (T) más pequeña (duración del período, duración de oscilación) para que se repita una magnitud periódica.



1 Duración de oscilación

2 Frecuencia 5 veces superior a 1

SERIE DE FOURIER - ESPECTRO

AMPLITUD: $\boxed{A_n = \frac{1}{2} C_n}$ y $\boxed{C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

SERIE DE FOURIER - ESPECTRO

AMPLITUD: $\boxed{A_n = \frac{1}{2} C_n}$ y $\boxed{C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

FRECUENCIA ANGULAR: $\boxed{sen\ \emptyset_n = \frac{b_n}{A_n}}$ y $\boxed{cos\emptyset_n = \frac{a_n}{A_n}}$

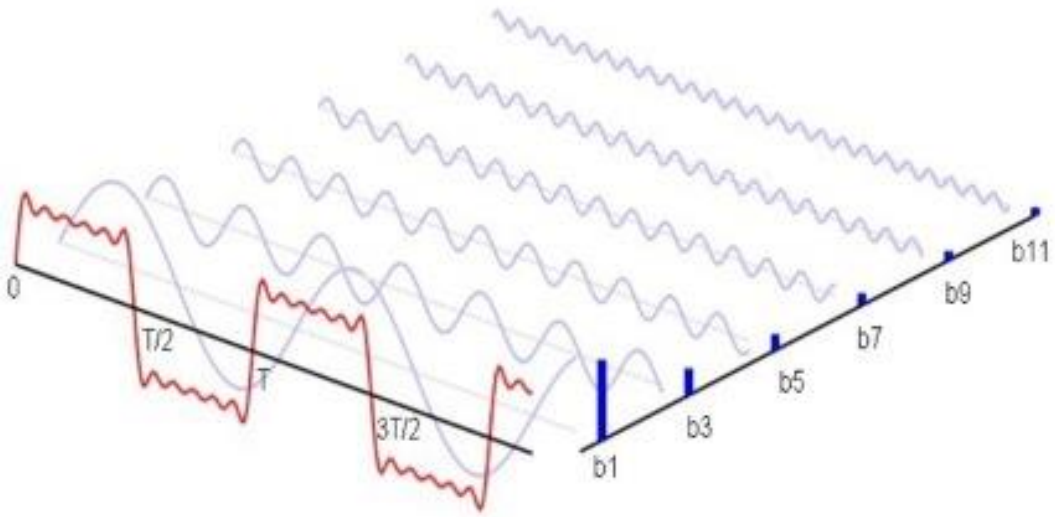
ESPECTRO DE FRECUENCIA DISCRETA

- Al **representar una función** se puede hacer en el **dominio del tiempo o de la frecuencia.**

- Si **especifico f(t) puedo encontrar su espectro.** Si tengo el **espectro** puedo **especificar la función.**

ESPECTRO DE FRECUENCIA DISCRETA

Al representar una f(t) por una Serie de Fourier estamos descomponiendo a la función en sus componentes armónicos de diferentes frecuencias.



Descomposición hasta el sexto armónico de una onda cuadrada.

ESPECTRO DE FRECUENCIA DISCRETA

A tener en cuenta…

Si f(t) tiene período T entonces:

$$w_0 = \frac{2n\pi}{T} = nw_0$$

$$n = (0{,}1{,}2{,}3 \ldots) \text{ (rad/seg)}$$

Donde w_0 es la frecuencia de ángulos fundamentales (Frecuencia Patrón).

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

- ✓Fourier pensó que **cualquier señal periódica podría ser representada mediante una suma de sinusoides** pero **NO** es así.

- ✓Para que una **Serie de Fourier converja**, la **señal** $x(t)$ en cualquier periodo debe **cumplir** con las **condiciones de DIRICHLET**.

CONDICIONES DE DIRICHLET

Dirichlet proporcionó la demostración precisa de **las condiciones SUFICIENTES** (aunque no necesarias) para **que una función pueda ser expresada como una serie trigonométrica.**

CONDICIONES DE DIRICHLET

- ✓**La función $x(t)$ es absolutamente integrable en cualquier período.**

$$\int_{h}^{h+T} |x(t)|\, dt \ < \ \infty$$

- ✓**La función $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier período.**

- ✓**La función $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier período.**

CONDICIONES DE DIRICHLET

Si una señal $x(t)$ **satisface las condiciones**, la **Serie de Fourier converge** y su **suma vale x(t).**

<u>excepto en los puntos t_0 donde NO es continua</u>

CONDICIONES DE DIRICHLET

En los **puntos de discontinuidad** la **serie converge** al **valor medio de los limites** por la derecha y la izquierda de $x(t)$ en t_0.

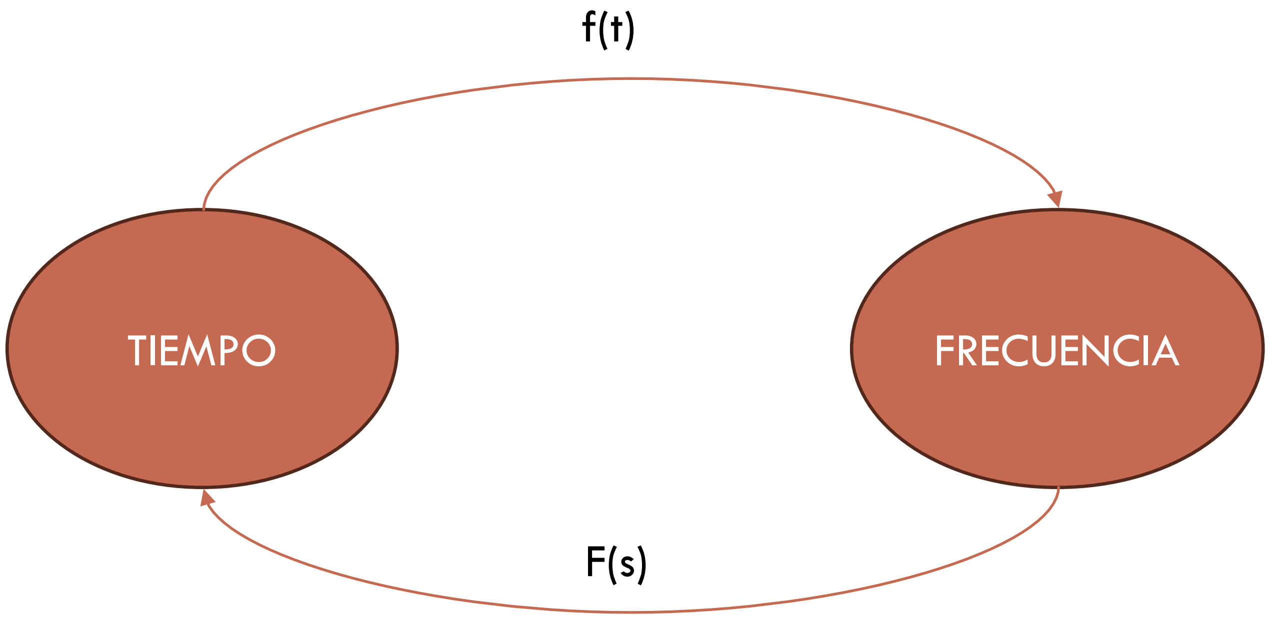
$$\boxed{x(t_0) = \frac{1}{2}\left[x(t_0^+) + x(t_0^-)\right]}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

Ing. Paula A. Toselli

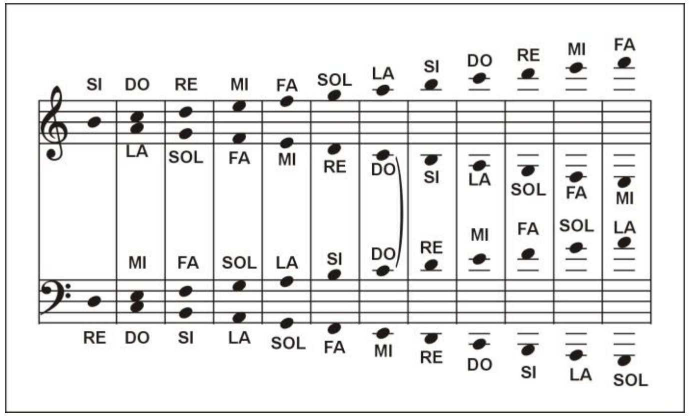
EJEMPLO – TRANSFORMADA DE FOURIER

En sencillas palabras, permite transformar una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.



EJEMPLO – TRANSFORMADA DE FOURIER

- Imaginemos una una canción.
- Podemos disfrutarla desde que comienza hasta que termina (es decir en el tiempo.)
- Ahora, si queremos analizarla, nos interesa saber qué notas la componen.



EJEMPLO – TRANSFORMADA DE FOURIER

La Transformada de Fourier nos permite justamente eso:

- descompone la canción en sus notas individuales,
- permitiendo que notas componen la canción y
- con qué intensidad o frecuencia aparecen, sin importar cuánto se superpongan durante la canción.

La Transformada de Fourier toma la señal y calcula cuánto de cada frecuencia existe en esa señal.

FORMALMENTE – TRANSFORMADA DE FOURIER

- ✓ Mientras que para las **señales periódicas** las exponenciales complejas que las constituyen están **relacionadas armoniosamente,** en las señales **APERIODICAS** están **infinitésimamente cercanas en frecuencia.**

- ✓ Esto quiere decir que **se necesita de otra representación** y que la misma se adapta a la forma de una **INTEGRAL** en vez de una **suma.**

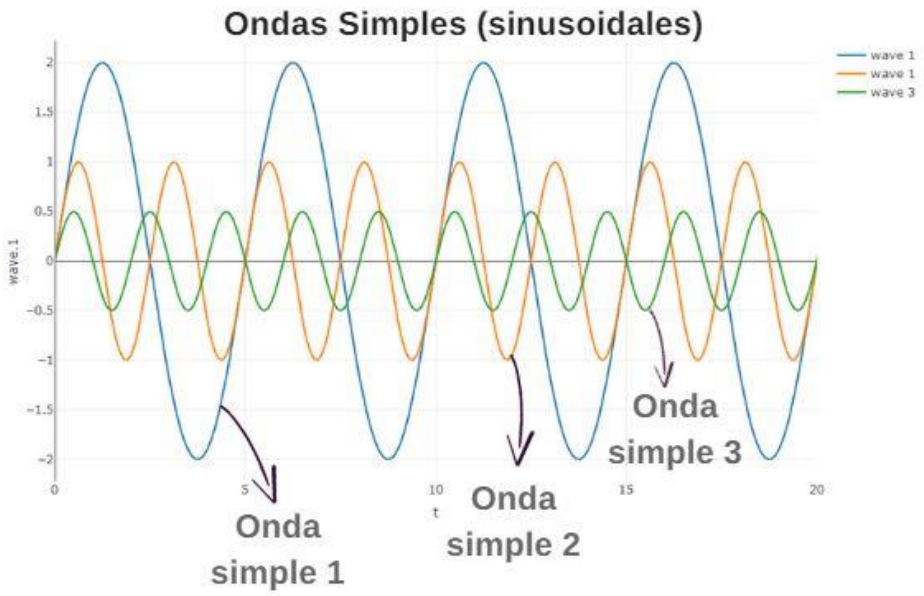
FORMALMENTE – TRANSFORMADA DE FOURIER

- ✓El **espectro de coeficientes resultantes** de esta representación se conoce como **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

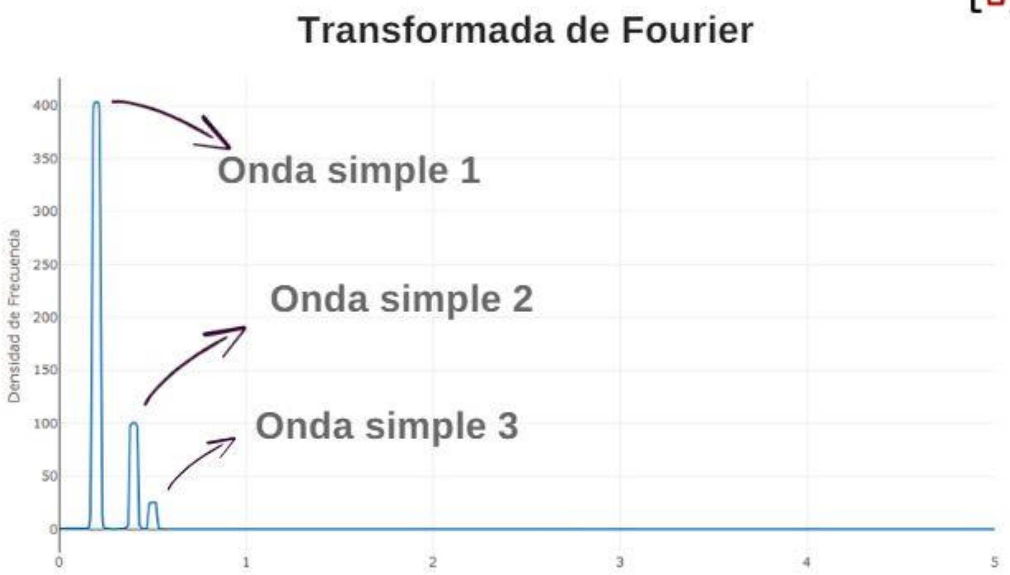
- ✓Es una transformación matemática empleada para **mapear señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.**

- ✓También puede aplicarse la **AntiTransformada** para volver al dominio previo.

FORMALMENTE – TRANSFORMADA DE FOURIER

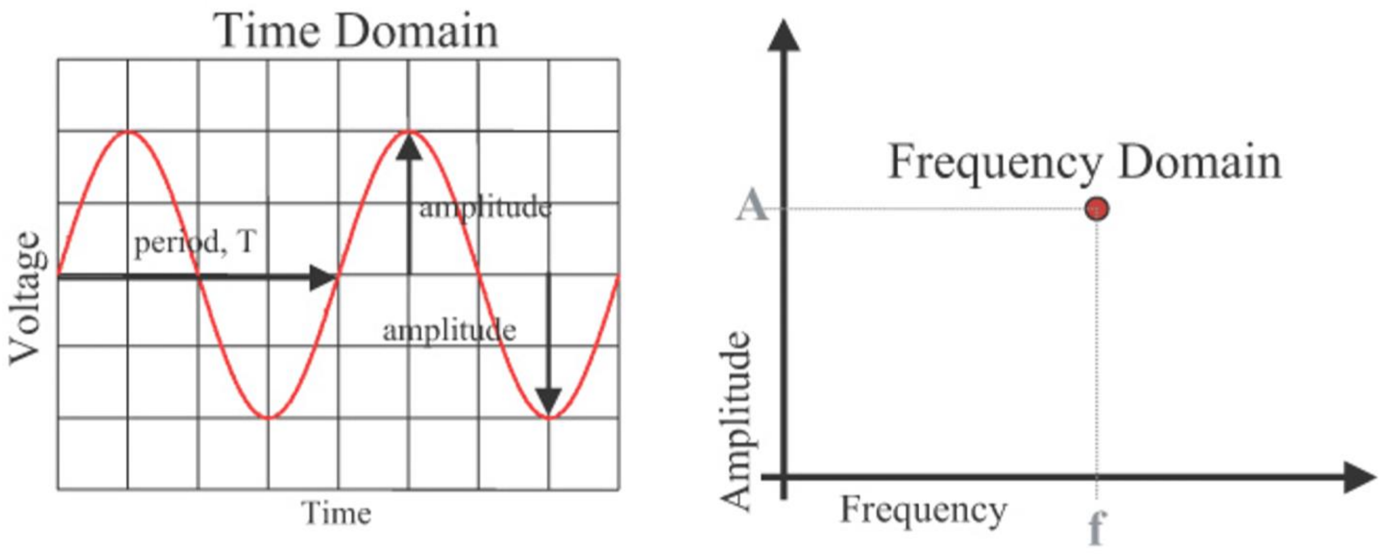


TIEMPO



FRECUENCIA (HZ)

- Una **función en el dominio del tiempo** $s(t)$ determina la **amplitud de la señal** en cada **instante de tiempo.**



- Una **función en el dominio de la frecuencia** $S(f)$ que **especifica las frecuencias constitutivas** de la señal: podrá ser **discreta** o **continua.**

TRANSFORMADA DE FOURIER - DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable: $\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\ \boldsymbol{dx} < +\infty\right]$

Transformada de Fourier

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega t}}\ \boldsymbol{dt}$$

INVERSA Transf. de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\ d\omega$$

TRANS. DE FOURIER – DISCRETA /CONTINUA

- ✓**Continua (FT):** Se utiliza para señales continuas en el tiempo.
- ✓**Discreta (DFT):** Se utiliza para señales digitales o muestreadas, que son las que comúnmente usamos en computadoras.
- ✓La DFT es la que se aplica cuando trabajamos con datos reales en una computadora, y su versión eficiente, **la FFT (Transformada Rápida de Fourier)**, permite hacer el cálculo rápidamente.

EJEMPLOS – TRANS. DE FOURIER CONTINUA

Consideremos una señal analógica, como la de un **micrófono en un concierto en vivo.**

Esta **señal es continua** porque cambia fluidamente en el tiempo sin saltos ni interrupciones. Se podría graficar y obtener **una curva suave.**

Si aplicamos la Transformada de Fourier a esta señal, se podría descomponer en todas las frecuencias que contiene, desde los graves más profundos hasta los agudos más altos.

Así **podríamos saber exactamente qué notas están sonando y con qué intensidad**, en cada momento del concierto.

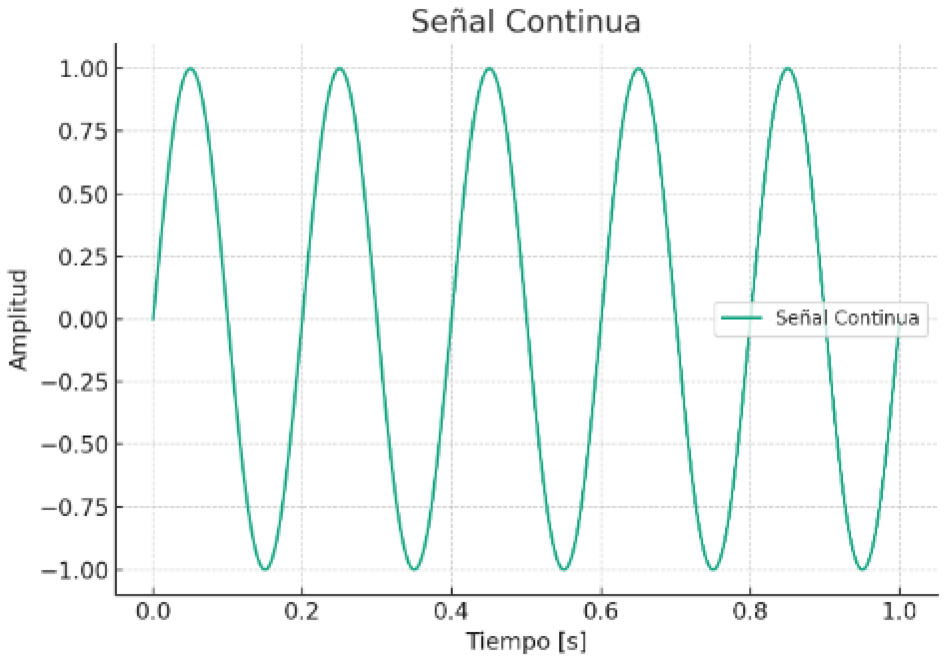
EJEMPLOS – TRANS. DE FOURIER DISCRETA

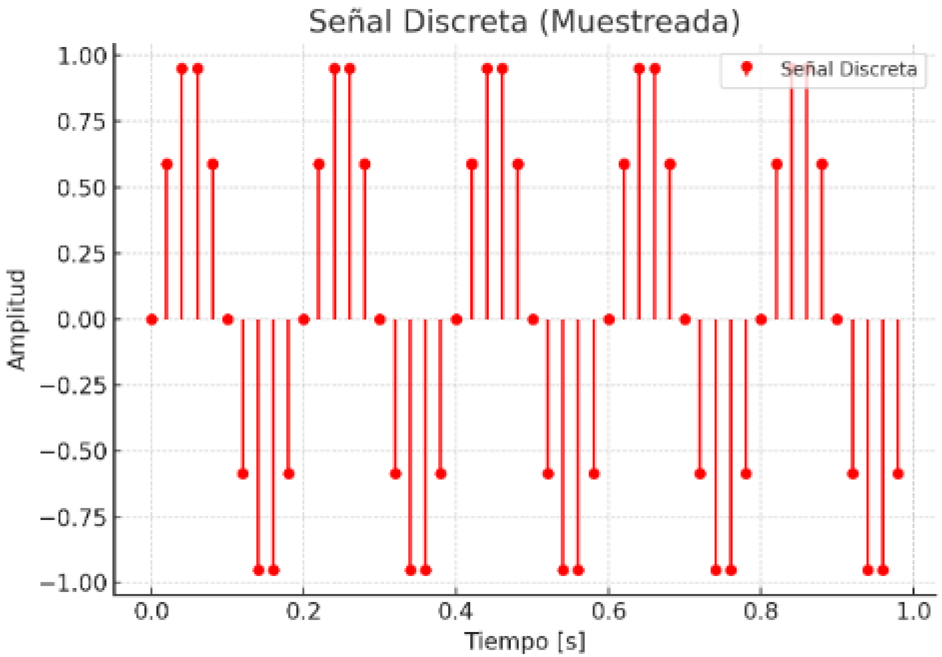
Ahora, consideremos **que grabamos ese concierto con el teléfono.**

El micrófono del teléfono convierte **la señal analógica en una señal digital.** Esta señal digital **no es continua**, está compuesta por una serie de muestras tomadas a intervalos regulares de tiempo (muestreo).

Cuando se aplica la Transformada de Fourier Discreta a esta señal digital, **obtenemos una representación de las frecuencias presentes en cada muestra.**

EJEMPLOS – DISCRETA /CONTINUA (PREVIO A LA TRANSFORMADA)

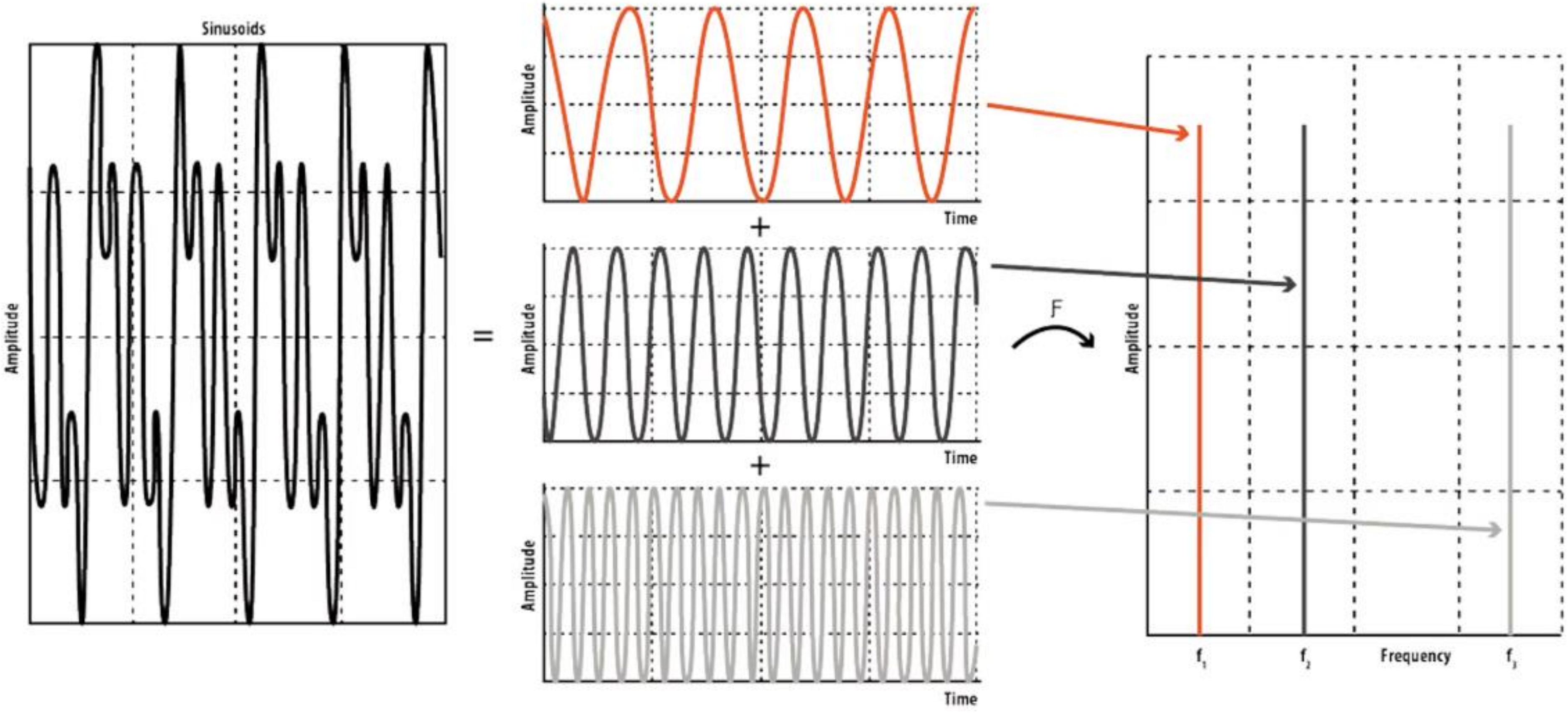




La primera gráfica muestra una señal continua, que es suave y no tiene saltos. Como la señal del micrófono en un concierto en vivo.

La segunda gráfica muestra una señal discreta, que está compuesta por muestras individuales tomadas a intervalos regulares de tiempo. Esto es similar a lo que el teléfono grabaría durante el concierto.

FOURIER – EN RESUMEN



APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ing. Paula A. Toselli

ACTIVIDAD 20-30 MIN:

1. En el foro agregar 1 ejemplo bien detallado sobre del uso de la transformada de Fourier en la vida real. Si algún grupo /compañero ya eligió ese ejemplo previamente no se considera cumplida la tarea.
2. Revisar los videos subidos al campus para complementar el tema de Series y Transformadas de Fourier.
3. Conversaremos sobre los ejemplos encontrados.

APLICACIÓN EN COMUNICACIÓN:

1. Analizar frecuencia de señales.
2. Analizar los cambios que ocurren cuando las señales viajan por un determinado medio de transmisión.
3. Diseño de sistemas para compensar la distorsión de señales en los sistemas de transmisión.

APLICACIÓN EN SEÑALES DE AUDIO:

1. Compactar señales de audio (mp3, mp4).
2. Producir efectos de sonidos.
3. Diseñar sintetizadores y ecualizadores.

APLICACIÓN EN PROCESAMIENTO DE IMÁGENES:

1. Filtrar imágenes.
2. Transformar imágenes.
3. Compactar imágenes.