Nozioni di teoria dei giochi

La teoria dei giochi è uno strumento per comprendere i processi decisionali in contesti competitivi.

In un contesto in cui operano più decisori (giocatori) il risultato che uno di essi ottiene (profitto o costo) dal prendere una certa decisione dipende dalle decisioni che contemporaneamente e indipendentemente da lui stanno prendendo gli altri giocatori.

Se Ω è la regione ammissibile di un problema classico di ottimizzazione e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione obiettivo del decisore (con $f(x)$ il "risultato" della decisione x), nella teoria dei giochi il risultato ottenuto è

$$f(x, y_1, \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{dove le } y^{(i)} \in \Omega^{(i)} \text{ sono}$$

le decisioni dei rimanenti $(n-1)$ giocatori

Consideriamo il caso più semplice in cui

1) I giocatori sono solo due
2) La regione ammissibile di ciascuno è costituita da un numero finito di possibili decisioni (mosse)

Supponiamo che il giocatore 1 abbia a disposizione $\underline{m}$ mosse, con indice $i = 1, ..., m$, e il giocatore 2 $\underline{n}$ mosse, con indice $j = 1, ..., n$.

Le regole del gioco sono che ogni giocatore prende "al buio" la sua decisione (senza conoscere cioè quella dell'altro) e il risultato ottenuto da ciascuno dei due è definito dalla coppia di decisioni prese.

Si suppongono note ai due decisori le tabelle dei pagamenti (payoff), il risultato (pagamento) ottenuto in relazione ad ogni coppia di decisioni. Possiamo interpretare un pagamento positivo come una vincita e negativo come una perdita.

$$\Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \pi^{(1)}_{11} & \cdots & \pi^{(1)}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi^{(1)}_{m1} & \cdots & \pi^{(1)}_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \pi^{(2)}_{11} & \cdots & \pi^{(2)}_{1n} \\ \vdots & & \\ \pi^{(2)}_{m1} & \cdots & \pi^{(m)}_{m2} \end{pmatrix}$$

$\pi^{(1)}_{ij}$: pagamento per il giocatore 1 quando il giocatore 1 "gioca" la mossa i e il giocatore 2 "gioca" la mossa j

$\pi^{(2)}_{ij}$: pagamento per il giocatore 2 quando il giocatore 1 "gioca" la mossa i e il giocatore 2 "gioca" la mossa j.

Def. Un gioco si dice a **somma nulla** se

$$\pi_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(2)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \, ; \, \forall j = 1, \dots, n$$

Per ogni scelta delle mosse (i, j), quello che vince (perde) il giocatore 1 e' uguale a quello che perde (vince) il giocatore 2

$$\pi_{ij}^{(2)} = -\pi_{ij}^{(1)} \quad \forall (i, j)$$

In un gioco a somme nulle e' sufficiente "memorizzare" solo la matrice di payoff di un giocatore (l'altra si ottiene per cambiamento del segno).

Faremo riferimento ai **pagamenti del gicatore 1** e porremo $\Pi = \Pi^{(1)}$

Nota Un gioco a **somma costante** $\pi_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(2)} = a \quad \forall (i,j)$ si riduce facilmente ad un gioco a somma nulle costruendo due nuove tabelle $\hat{\Pi}^{(1)}, \hat{\Pi}^{(2)}$ con

$$\hat{\pi}_{ij}^{(1)} = \pi_{ij}^{(1)} - \frac{a}{2} \quad ; \quad \hat{\pi}_{ij}^{(2)} = \pi_{ij}^{(2)} - \frac{a}{2}$$

Cerchiamo ora di definire, servendoci di un esempio, una strategia ragionevole di comportamento per entrambi i giocatori.

$m = 3$ (mosse disponibili per 1); $n = 5$ (mosse disponibili per 2)

$$
\begin{array}{cc}
 & 2 \\
1 & \begin{array}{c|c} \boxed{1} & \\ \boxed{2} & \\ \boxed{3} & \end{array}
\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 5 & 5 \\ -9 & 10 & -1 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \Pi \\
 & \quad\ \ \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5}
\end{array}
$$

pagamenti giocatore 1

Es. il significato del numero -4 nella posizione $(1, 4)$ è che se 1 gioca la mossa 1 e 2 la 4, il giocatore 1 perde 4 e il 2 vince 4

Entrambi i giocatori hanno un atteggiamento "prudenziale" nel senso che valutano ciascuna mossa in ragione del peggior risultato che essa può produrre. 1 deve scegliere una riga e 2 una colonna

Giocatore 1 A ciascuna mossa $i = 1, \dots, 3$ il giocatore associa il peggior risultato possibile (cioè il valore minimo su ciascuna riga di Π). Definiamo quindi

$$v_i = \min_{1 \le j \le n} \Pi_{ij} \quad \text{e otteniamo}$$

$$v_1 = -4, \quad v_2 = 4, \quad v_3 = -9$$

Il giocatore 1 sceglierà la mossa i^* come quella che gli fornisce il miglior risultato nell'ipotesi più svantaggiosa:

$$i^* = \arg\max_{1 \le i \le m} v_i = \arg\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} \Pi_{ij} = \boxed{2}$$

La mossa n 2

Scegliendo la mossa $\boxed{2}$, il giocatore (1) si assicura un pagamento, nel peggiore dei casi, pari a 4

Giocatore (2) Il giocatore (2) si comporta in maniera assolutamente identica a quella di (1). Bisogna solo tener presente che i pagamenti per il giocatore (2) sono opposti a quelli in tabella.

A ciascuna mossa $j = 1, \dots, 5$ il giocatore associa il peggior risultato (cioè il valore massimo sulla colonna j)

Definiamo $w_j = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \pi_{ij}$ e otteniamo

$$w_1 = 6, \; w_2 = 8, \; w_3 = 4, \; w_4 = 5, \; w_5 = 5$$

Il giocatore (2) sceglierà come mossa j^* quella che gli fornisce il miglior risultato nell'ipotesi più svantaggiosa

$$j^* = \arg\min_{1 \leq j \leq n} w_j = \arg\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} \pi_{ij} = \boxed{3}$$

Quindi sceglierà la mossa

In definitiva (1) sceglierà $\boxed{2}$ e (2) sceglierà $\boxed{3}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 5 & 5 \\ -9 & 10 & -1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo calcolato la coppia (i^*, j^*)
$i^* = 2$, $j^* = 3$ e ottenuto

$v^* = \max\limits_{1 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} \pi_{ij} = 4$; $w^* = \min\limits_{1 \le j \le n} \max\limits_{1 \le i \le m} \pi_{ij}$

$$\boxed{v^* = w^*}$$

In generale possiamo scrivere $\forall (i, j)$

$$v_i = \min_{1 \le j \le n} \pi_{ij} \le \pi_{ij} \le \max_{1 \le i \le m} \pi_{ij} = w_j$$

$$\Rightarrow \forall (i, j) \quad v_i \le w_j \Rightarrow \max_{1 \le i \le m} v_i \le \min_{1 \le j \le n} w_j$$

$$\Rightarrow v^* \le w^*,$$ cioè

$$v^* = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} \pi_{ij} \le \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} \pi_{ij} = w^*$$

Nota Nell'esempio vale $v^* = w^* = 4$. Ciò corrisponde al fatto che la coppia $(i^*, j^*) = (2, 3)$ individua un punto di sella nella tabella di payoff: $\pi_{23} = 4$ è al tempo stesso un minimo sulla riga 2 e un massimo sulla colonna 3

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \downarrow j^*=3 & & \end{array} \\ i^*=2 \rightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 5 & 5 \\ -9 & 10 & -1 & -8 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La coppia $\underbrace{(i^*, j^*) = (2, 3)}$ individua in questo esempio un punto di equilibrio del gioco.

Punto di sella

Supponiamo che il giocatore 1 venga a sapere con certezza che il giocatore 2 giocherà la mossa $\boxed{3}$. Quest'informazione non gli recherà alcun vantaggio, perché non avrà convenienza a modificare la sue scelta della mossa $\boxed{2}$ (se lo facesse, i suoi pagamenti peggiorerebbero: π_{23} è infatti un massimo sulla colonna)

In maniera analoga supponiamo che il giocatore 2 venga a sapere con certezza che 1 giocherà la mossa $\boxed{2}$. Anche lui non ha interesse a cambiare la sue scelta della mossa $\boxed{3}$ (i suoi pagamenti peggiorerebbero perché π_{23} è un minimo di riga)

Definizione Un punto di equilibrio è una coppia di mosse rispetto alle quali nessuno dei due giocatori ha interesse a modificare unilateralmente il suo comportamento.

Un punto di sella è un punto di equilibrio. Un gioco che ammette un punto di sella è detto strettamente determinato

Esempio 2

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} & & (2) & & \downarrow j^*=5 \end{array} \\
\begin{array}{c} i^*=1 \rightarrow \\ (1) \\ \ \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 & -4 & -3 \\ -8 & 2 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$m=3$, $n=5$

Giocatore (1) $\quad v_1=-4$, $v_2=-8$, $v_3=-6$ $\Longrightarrow i^* = \arg \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} \Pi_{ij} = \boxed{1}$

$v^* = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le} \Pi_{ij} = -4$ $\quad$ [-4 è una sorta di "minimo garantito"]

Giocatore (2) $\quad w_1=4$, $w_2=7$, $w_3=6$, $w_4=5$, $w_5=2 \Longrightarrow j^* = \arg \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} \Pi_{ij} = \boxed{5}$

$w^* = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} \Pi_{ij} = 2$ $\quad$ [2 è una sorta di "minimo garantito"

In questo caso $v^* < w^*$.

Teorema $\quad$ La coppia (i^*, j^*) individua un punto di sella se e solo se è $v^* = w^*$

Questo gioco non è strettamente determinato e $\Pi_{i^* j^*} = \Pi_{15} = -3$ NON è un punto di equilibrio: ad esempio il giocatore (1), se sapesse che (2) gioca la mossa $\boxed{5}$, avrebbe interesse a spostare la sua scelta dalla mossa $\boxed{1}$ alla $\boxed{2}$.

Nota $\quad$ Tenendo conto che $\Pi_{13}=-3$, spiegare il senso del termine "minimo garantito" $\quad$ 142

Abbiamo visto che non tutti i giochi a due persone e a somma nulla ammettono un punto di equilibrio se si adottano strategie pure.

Strategia pura: individuare una ed una sola mossa da giocare.

Strategia mista (o stocastica): individuare un vettore di probabilità con cui giocare le singole mosse.

Esempio. Supponiamo che ogni mattina io abbia l'abitudine di prendere un caffè al bar e che abbia due bar, il "Mokambo" e il "Casablanca", ai quali sono ugualmente affezionato. Come regolarsi? Una possibilità è quella di tirare una moneta, assegnando "Testa" al "Mokambo" e "Croce" al Casablanca, ogni mattina. Se la moneta, come spero, non è truccata, sceglierò con probabilità 0.5 il "Mokambo" e con la stessa probabilità il "Casablanca"
La mia strategia stocastica sarà definita dal vettore di probabilità $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ con $p_1 = p_2 = 0.5$

Qualsiasi vettore $p \in \mathbb{R}^2$, $p \geq 0$ $e^T p = \sum_{i=1}^{2} p_i = 1$ rappresenterà una possibile strategia stocastica

Introdurre quindi nei giochi a due persone a somma nulla le strategie stocastiche significa che ciascun giocatore dovrà decidere non "la mossa", ma le probabilità di giocare le singole mosse. Quindi 1 dovrà scegliere il suo vettore $p^{(1)} \in \mathbb{R}^m$ e 2 il suo vettore $p^{(2)} \in \mathbb{R}^n$

Dovrà essere $p^{(1)} \geq 0$, $e^T p^{(1)} = 1$ e $p^{(2)} \geq 0$, $e^T p^{(2)} = 1$; $p^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_m^{(1)} \end{pmatrix}$ $p^{(2)} = \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ \vdots \\ p_n^{(2)} \end{pmatrix}$

Fissati i vettori $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$, la probabilità con la quale si realizza il pagamento Π_{ij} è data dal prodotto $p_i^{(1)} p_j^{(2)}$ (Π_{ij} si realizza quando 1 gioca $\boxed{i}$ e 2 gioca $\boxed{j}$.)

Il valore atteso del pagamento quando 1 sceglie il vettore $p^{(1)}$ e 2 il vettore $p^{(2)}$:

$$f(p^{(1)}, p^{(2)}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij}\, p_i^{(1)} p_j^{(2)} = p^{(1)T}\, \Pi\, p^{(2)}$$

I due giocatori sceglieranno le loro soluzioni ottime $p^{(1)*}$ e $p^{(2)*}$ in maniera analoga al caso delle strategie pure

1

$$p^{(1)*} = \arg\max_{\substack{p^{(1)} \geq 0 \\ e^T p^{(1)} = 1}} \min_{\substack{p^{(2)} \geq 0 \\ e^T p^{(2)} = 1}} p^{(1)T}\, \Pi\, p^{(2)}$$

$$p^{(2)*} = \arg\min_{\substack{p^{(2)} \geq 0 \\ e^T p^{(2)} = 1}} \max_{\substack{p^{(1)} \geq 0 \\ e^T p^{(1)} = 1}} p^{(1)T}\, \Pi\, p^{(2)}$$

Detti $\quad v^* = \max\limits_{\substack{p^{(1)} \geq 0 \\ e^T p^{(1)} = 1}} \min\limits_{\substack{p^{(2)} \geq 0 \\ e^T p^{(2)} = 1}} p^{(1)T} \Pi p^{(2)}$ e $w^* = \min\limits_{\substack{p^{(2)} \geq 0 \\ e^T p^{(2)} = 1}} \max\limits_{\substack{p^{(1)} \geq 0 \\ e^T p^{(1)} = 1}} p^{(1)T} \Pi p^{(2)}$

Vale il seguente:

<u>Teorema di Von Neumann</u> $\quad v^* = w^*$

<u>Dimostrazione</u>. Applicazione della teoria della dualità nella Programmazione lineare.

La coppia di strategie stocastiche $\left(p^{(1)*}, p^{(2)*}\right)$ individua <u>un punto di sella</u> (e quindi <u>un punto di equilibrio</u>)

$$p^{(1)T} \Pi p^{(2)*} \underset{\forall p^{(1)}}{\leq} p^{(1)*T} \Pi p^{(2)*} \underset{\forall p^{(2)}}{\leq} p^{(1)*T} \Pi p^{(2)}$$

"Nessuno dei due giocatori ha interesse a modifiche unilaterali della propria strategia ottima ottenuta risolvendo il problema di max min e di min max.

Tutti i giochi a due persone a somma nulla sono strettamente determinati se si ammettono strategie stocastiche.

Un gioco a due persone a somma non nulla: il paradosso dei prigionieri

Due prigionieri accusati di un grave delitto vivono il dilemma se convenga confessare o non confessare. A seconda delle loro decisioni congiunte, i risultati possibili cambiano.

Scala di valore dei pagamenti:

0: condanna pesante; 2: condanna lieve; 4: libertà; 5: libertà più premio

Tabella dei pagamenti (in ogni posizione è riportato il pagamento del prigioniero 1 e poi del prigioniero 2)

$$\begin{array}{cc} & \textcircled{2} \\ & \begin{array}{cc} \text{Non Confessa} & \text{Confessa} \end{array} \\ \textcircled{1} \begin{array}{c} \text{Non confessa} \\ \text{Confessa} \end{array} & \begin{bmatrix} (4,4) & (0,5) \\ (5,0) & (2,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Se tutti e due non confessano, vengono entrambi liberati (il giudice non ha prove);

b) Se tutti e due confessano sono entrambi condannati ad una pena lieve;

c) Se uno confessa e l'altro no, chi confessa viene liberato e premiato e l'altro riceve una pesante condanna

Vediamo se il gioco ammette un equilibrio. Esaminiamo le varie posizioni

(4,4) non lo è: se 1 sa che 2 non confessa ha interesse a confessare
(lo stesso per il prigioniero 2)

(0, 5) e (5, 0) non lo sono: se uno dei giocatori sa che l'altro confessa, ha anche lui interesse a confessare

(2, 2) è un punto di equilibrio se uno dei due giocatori ha deciso di confessare e sa che l'altro confessa NON ha interesse a modificare la sua scelta.

Il paradosso sta nel fatto che la mancanza di fiducia reciproca (o l'assenza di un'istanza superiore capace di far rispettare gli accordi) porta alla soluzione di equilibrio (2, 2) pur a fronte della soluzione (4, 4) che sarebbe mutuamente più vantaggiosa

Dilemma dei prigionieri utilizzato per modellare l'equilibrio del terrore tra le superpotenze, alcune dinamiche interpersonali in psicologia, l'uso di beni pubblici comuni _ _ _ _