Ottimizzazione per il Controllo, Manlio Gaudioso, Giovanna Miglionico

manlio.gaudioso@unical.it, 0984 494739

Prerequisiti: Corsi base di Analisi e Geometria; Ricerca Operativa (facoltativo)

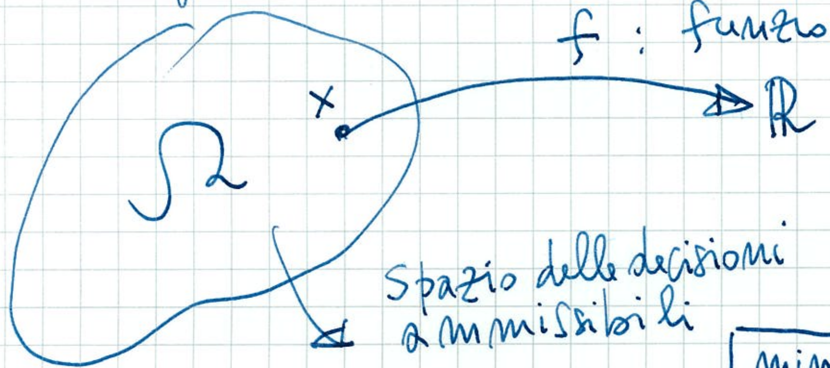
Obiettivi del Corso: Progettare e utilizzare algoritmi per problemi di minimo di funzioni nonlineari di molte variabili

Problemi di "decision making": Prendere decisioni quando le alternative possibili sono molte

$\Downarrow$

Prendere decisioni in maniera ottima

Paradigma fondamentale dell'ottimizzazione:



$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$x \in \Omega$: decisione

$f(x)$: valore o costo di x

$$\boxed{\min_{x \in \Omega} f(x)} \qquad \boxed{\max_{x \in \Omega} f(x)}$$

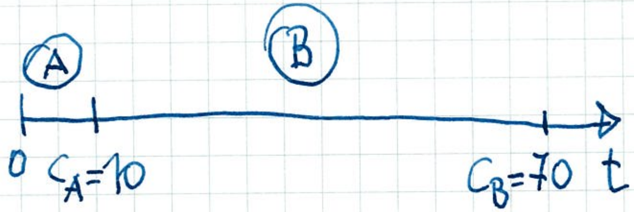
Eulero (XVIII secolo) "Nulla accade nell'universo in cui non risplenda una qualche razionalità di minimo o massimo"

Alcuni esempi.

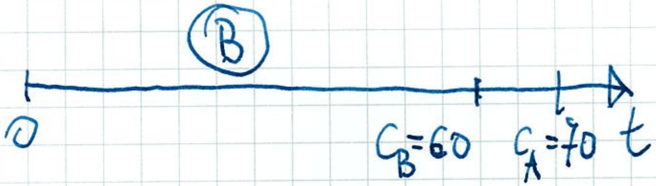
1) Alla cassa del supermercato: cliente A: carrello semivuoto
cliente B: carrello stracolmo

A: tempo di processamento $= p_A = 10$ secondi
B: tempo di processamento $= p_B = 50$ secondi

Due alternative di sequenziamento: $\underbrace{A, B}_{1}$ oppure $\underbrace{B, A}_{2}$

1 

$C_A + C_B = 80$

2 

$C_A + C_B = 130$

Problema di ottimo $\Omega = \{ 1, 2 \}$; $f = C_A + C_B \Rightarrow$ 1 soluzione ottima

f: Tempo complessivamente speso nel sistema. Domanda: e il cassiere...?

Problema. Si consideri un sistema di servizio su un intervallo di tempo $[0,T]$. Gli utenti si presentano al sistema, ricevono il servizio e poi escono dal sistema. Sia $n(t)$ il numero di utenti al tempo t, $t \in [0,T]$ e N il numero totale di utenti che si presentano nell'intervallo $[0,T]$.

Qual è il significato delle seguenti grandezze?

1. $\displaystyle\int_0^T n(t)\,dt$; 2. $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T n(t)\,dt$; 3. $\displaystyle\frac{1}{N}\int_0^T n(t)\,dt$

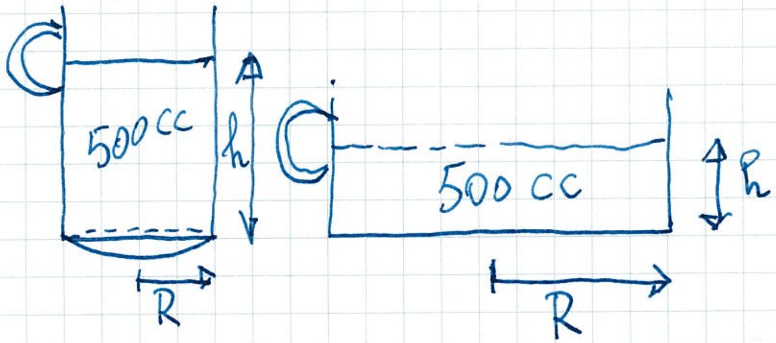
Suggerimento: Si costruisca il grafico di $n(t)$ nel caso in cui $[0,T]=[0,6]$ e ci siano 3 utenti

1. arriva a $t=0$ e va via a $t=3$
2. " " $t=2$ " " " " $t=4$
3. " " $t=5$ " " " " $t=6$

② Preparazione di un budino al cioccolato
(Versare una busta in un pentolino con 500 cc di latte, far bollire e versare in uno stampo).

Obiettivo: rendere minima la quantità sprecata rimasta adesa al pentolino.

Qual è, tra tutti i possibili pentolini cilindrici quello "migliore"?



Base "stretta" o "larga"

$V = 500$ cc

$$\boxed{\min_{R \in \Omega} f(R)}$$

$\Omega = \{R \mid R > 0\}$: Tutti i raggi possibili.

f = Superficie di contatto

$$f(R) = \underbrace{\pi R^2}_{\text{sup. base}} + \underbrace{2\pi R h}_{\text{sup. laterale}} \qquad \text{ma} \qquad V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow f(R) = \pi R^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{R}\frac{V}{\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}} = \pi R^2 + \frac{2V}{R} \Rightarrow \left.\frac{df}{dR} = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}\right|_{R=R^*} = 0$$

$$R^* = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = 4.7 \text{ cm}$$

③ Un problema di "taglio" (Cutting stock)

Assi "grandi" da tagliare in assi "piccole"

Es. Assi grandi : 100 cm (disponibili in quantità illimitata)

Produrre $\underbrace{50 \text{ assi da } 20}_{\text{Prodotto 1}}$; $\underbrace{100 \text{ da } 30}_{\text{Prodotto 2}}$; $\underbrace{80 \text{ da } 60 \text{ cm}}_{\text{Prodotto da 3}}$

Risparmiare quanto più possibile sulla materia prima (le assi grandi)

Una soluzione "ingenua" :

Prodotto 1	: Tagliare	10	assi ciascuna	in 5 pezzi da 20
Prodotto 2	: "	34	" "	" 3 " " 30
Prodotto 3	: "	80	" "	" 1 pezzo " 60

Piano di produzione soddisfatto utilizzando un totale di

$10 + 34 + 80 = 124$ assi grandi.

Si può fare di meglio !!!

Individuiamo un certo numero di modelli di taglio (cutting pattern)

① 5 di 1 ; ② 3 di 2 ③ 2 di 1 e 1 di 3 ④ 1 di 2, 1 di 3

⑤ 2 di 1, 2 di 2

Decisioni da prendere: quante assi grandi tagliare secondo ciascun modello

x_j, $j = 1, \dots, 5$: numero di assi da tagliare secondo j

$\Rightarrow$ La variabile di decisione è un vettore $x \in \mathbb{R}^5$, $x \geq 0$

Regione ammissibile Ω : tutti i vettori di $\mathbb{R}^5$, non negativi, che garantiscono il soddisfacimento della domanda

Prodotto	1	$5x_1 + 2x_3 + 2x_5 \geq 50$
"	2	$3x_2 + x_4 + 2x_5 \geq 100$
"	3	$x_3 + x_4 \geq 80$

Funzione obiettivo: numero totale di assi grandi tagliate

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \qquad f(x) = c^T x \qquad c^T = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^5, \ x \geq 0, \ Ax \geq b\}$$

dove $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$

Problema di Programmazione Lineare

La programmazione lineare

$$\min c^T x \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^n,\ A \text{ matrice } (m \times n),\ b \in \mathbb{R}^m$$

$$Ax \leq b \qquad c \text{ vettore dei costi; } b \text{ vettore delle risorse}$$

$$x \geq 0 \qquad A \text{ matrice dei coefficienti tecnologici}$$

$f(x) = c^T x$ (funzione lineare); $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$

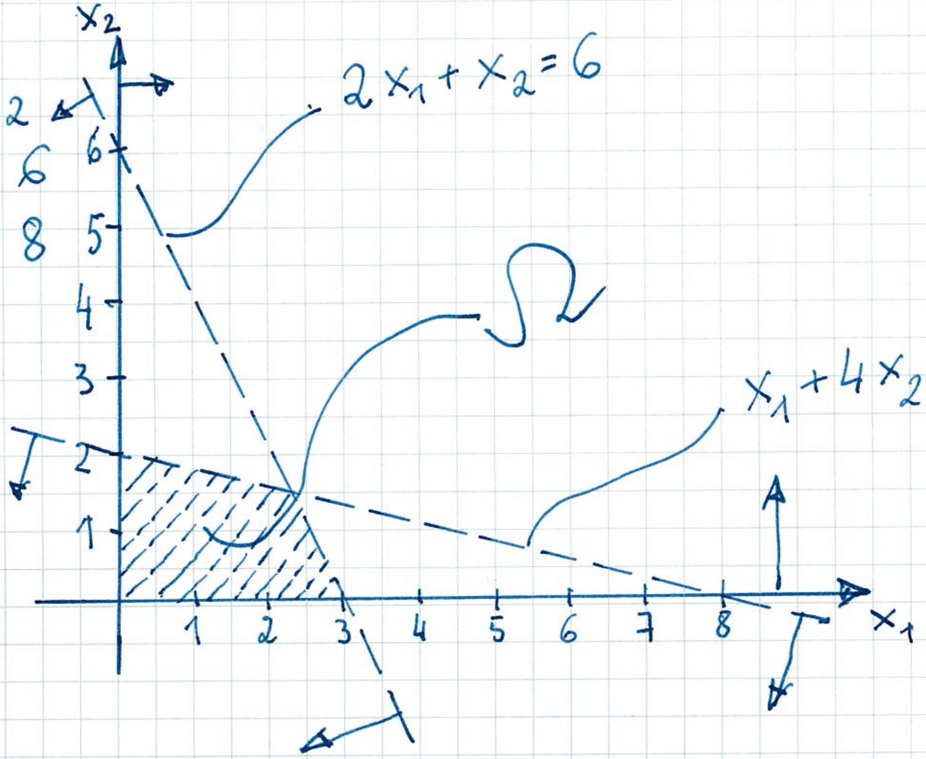
Esempio

$$\max\ 3x_1 + 2x_2$$

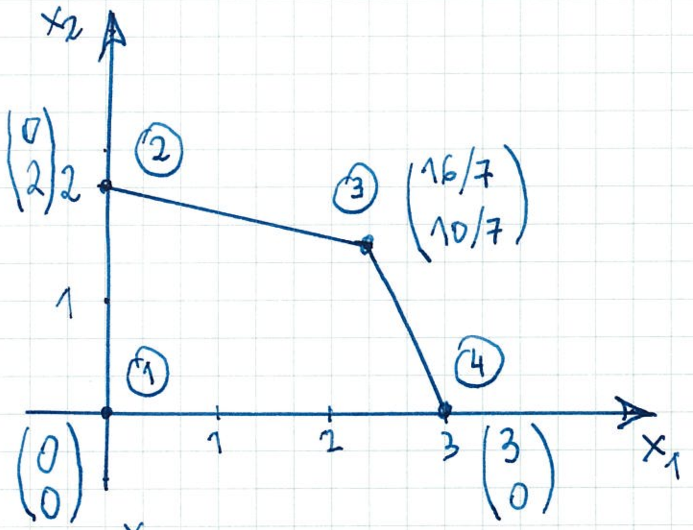
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

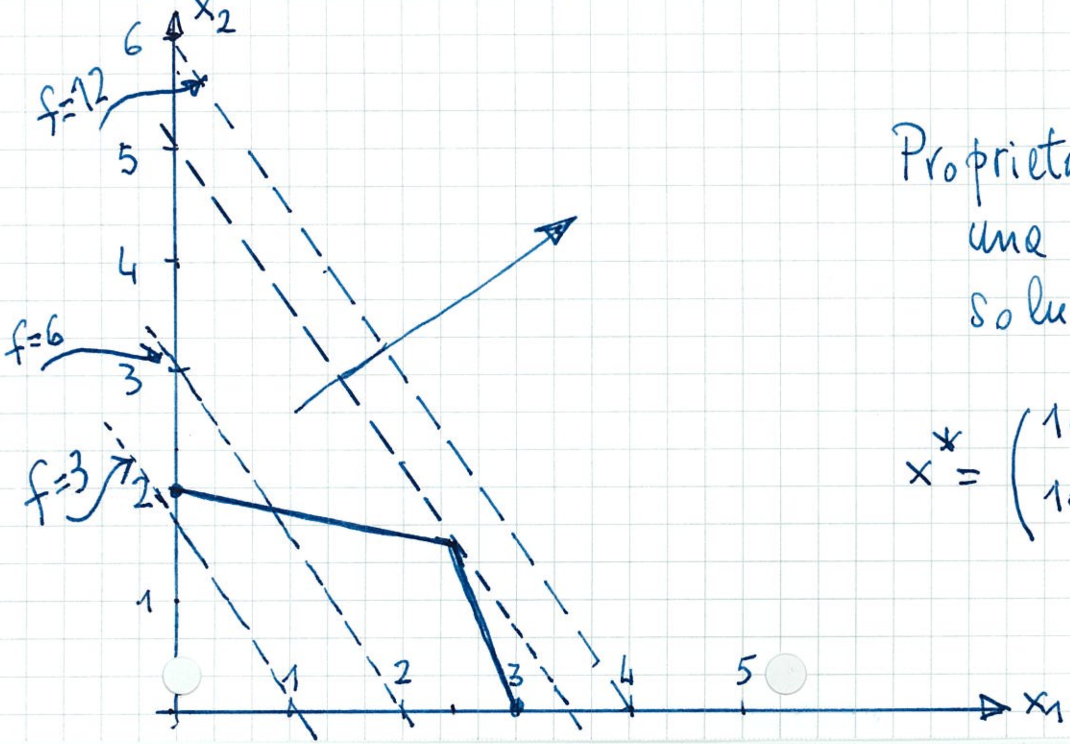


Proprietà dei vertici di Ω



$$f(0,0) = f^{(1)} = 0$$
$$f(0,2) = f^{(2)} = 4$$
$$f\left(\frac{16}{7}, \frac{10}{7}\right) = f^{(3)} = \frac{68}{7} \cong 9.7$$
$$f(3,0) = f^{(4)} = 9$$

Rette di "isocosto": su ciascuna retta il valore della funzione obiettivo è costante.



Proprietà della PL: se il problema ammette una soluzione ottima, allora ci sarà una soluzione ottima su un vertice.

$$x^* = \begin{pmatrix}16/7\\10/7\end{pmatrix} \; ; \; f^* = 9.7$$

Analisi critica del paradigma dell'ottimizzazione

1: Non è sempre vero che nel prendere una decisione si abbia in mente un unico obiettivo.

Esempio. Un viaggio da Cosenza a Roma con quattro soluzioni ammissibili: treno, aereo, auto, calesse.
Si vuole spendere poco e viaggiare in fretta (Costo e tempo)

Treno $\begin{pmatrix} 40\,€ \\ 6 \text{ ore} \end{pmatrix}$ Aereo $\begin{pmatrix} 120\,€ \\ 3 \text{ ore} \end{pmatrix}$ Auto $\begin{pmatrix} 70\,€ \\ 5 \text{ ore} \end{pmatrix}$ Calesse $\begin{pmatrix} 400\,€ \\ 20 \text{ ore} \end{pmatrix}$

- Non esiste una soluzione che al tempo stesso minimizzi costo e tempo.
- La soluzione "calesse" è una soluzione dominata: esistono soluzioni migliori di lei rispetto ad entrambi gli obiettivi
- Le tre soluzioni "Treno", "Aereo", "Auto" sono non dominate (Pareto-ottime): per ciascuna di esse non esiste alcuna altra soluzione che sia
  a) migliore su un obiettivo b) non peggiore su l'altro

(OTTIMIZZAZIONE MULTI-OBIETTIVO

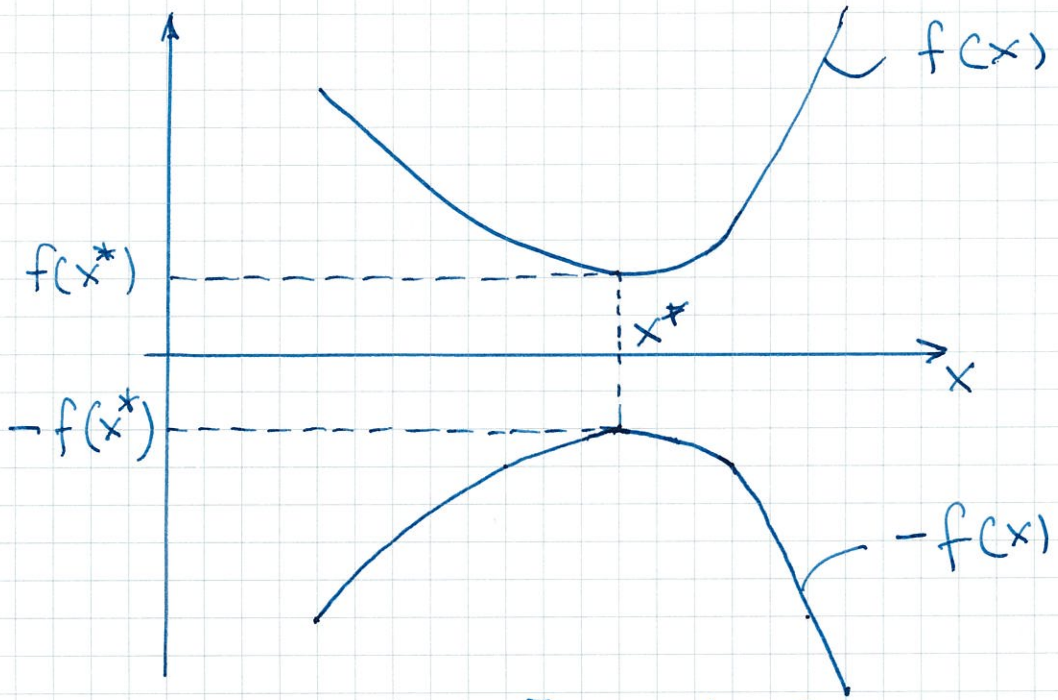
2. E' sempre possibile associare ad una decisione x un costo (o un profitto) $f(x)$?
In molti casi ad una decisione x corrisponde un costo del tipo $f(x, y)$ dove y è la decisione presa da un altro soggetto decisore, che opera autonomamente.

Es. Un giornalaio acquista e mette in vendita x copie di un certo quotidiano. Il profitto che otterrà a fine giornata dipende da x, ma anche da y, la domanda di giornali espressa dal "mercato", che lui non può prevedere esattamente.

Ottimizzazione dei processi decisionali quando esistono più decisori che operano simultaneamente: TEORIA dei GIOCHI

- Giochi a somma nulla (oppure costante)
- Giochi non-cooperativi
- Giochi cooperativi

Equivalenza tra problemi di minimo e massimo



a) $\min f(x) = -\max\left[-f(x)\right]$ b) $x^* = \arg\min f(x) = \arg\max\left[-f(x)\right]$

Se dispongo di un SW che calcola il max di una funzione ed ho, invece, da determinare il min di una data funzione, è sufficiente dare in input la funzione cambiata di segno

Alcuni richiami di algebra lineare (I vettori di $\mathbb{R}^n$ sono <u>vettori colonna</u>)

Prodotto scalare: $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\quad a^T b = b^T a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Prodotto matrice per vettore: $y = Ax$, $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sia $a^{(j)}$ la colonna j-ma della matrice $\quad a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$y = Ax$ può essere interpretato come la <u>combinazione lineare</u> delle n colonne di A mediante i coefficienti x_j, $j = 1, \ldots, n$

$$y = \sum_{j=1}^{n} a^{(j)} x_j$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad Ax = \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Come interpretare il prodotto di un vettore riga per una matrice?

$y = x^T A \qquad x \in \mathbb{R}^m, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\qquad y$ è un vettore riga ad n componenti ($y^T \in \mathbb{R}^n$)

Prodotto incrociato $\; x^T A x \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T A x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$x^T A x$ è uno scalare che definisce una funzione quadratica

Es $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad x^T A x = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 =$

$= x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$

$$A' = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

A non è simmetrica

A' è simmetrica

Consideriamo ora $x^T A' x = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x^2 =$

$= x^T A x$

E' sempre possibile simmetrizzare una forma quadratica

$\Rightarrow$ Non c'è perdita di generalità se si considerano esclusivamente forme quadratiche associate a matrici simmetriche