4 nov 2025

Análisis Matemático (3/8) - a241b25

Invitados merrazquin@fi.uba.ar Análisis Matemático - CEIA 24Co2025

Archivos adjuntos Análisis Matemático (3/8) - a241b25

Registros de la reunión Transcripción Grabación

Resumen

Ise posgrados informó que la clase actual fue la última sesión 100% sincrónica, indicando la transición a la modalidad híbrida, donde los estudiantes deben ver videos pregrabados (disponibles desde la Clase 4 a la 8) antes de la sesión, utilizando los foros para dudas. Franco Curcho y Pa. Santiago Rodriguez Castro mencionaron problemas para acceder a la carpeta de videos, lo cual Federico G. Zacchigna sugirió resolver contactando a gestión académica. Ise posgrados introdujo el concepto de proyección como una transformación lineal, llegando a la derivación de la matriz de proyección ($P = B (B^T B)^{-1} B^T$) y su aplicación en la regresión lineal por mínimos cuadrados, respondiendo a Gabriel Quiroga sobre el uso de la proyección ortogonal. Finalmente, se introdujeron los conceptos de autovalores (λ) y autovectores, detallando el cálculo a través del polinomio característico y la importancia de la multiplicidad geométrica y algebraica para la diagonalización de matrices.

Detalles

- **Revisión del Progreso de la Cursada y Autoevaluaciones** Ise posgrados inició la reunión preguntando por el progreso general de las clases y las autoevaluaciones, notando que el ritmo de la materia es intenso. Recordó a los participantes que tienen tiempo para realizar "todos los intentos que ustedes quieran, de todas las autoevaluaciones que ustedes quieran hasta el final de la cursada".

- **Transición a la Modalidad Híbrida y Material de Video** Ise posgrados informó que la clase actual es la última sesión 100% sincrónica, ya que las siguientes cambiarán a la modalidad híbrida (00:00:00). Explicó que las primeras clases (de la 1 a la 3) fueron sincrónicas debido a un período de transición y la falta de producción de videos para esas sesiones, aunque existen videos pregrabados disponibles de la clase 4 a la 8 (00:03:24).
- **Acceso a las Grabaciones y Videos Pregrabados** Ise posgrados describió el proceso para acceder a la carpeta de grabaciones y videos pregrabados a través del link de la encuesta en la sección de "notas sella 24". Indicó que en la modalidad híbrida se espera que los estudiantes vean los videos pregrabados de la semana correspondiente (por ejemplo, semana 4) antes de la clase sincrónica (00:04:44). Franco Curcho y Pa. Santiago Rodriguez Castro mencionaron tener problemas de acceso a la carpeta de videos (00:06:36).
- **Resolución de Problemas de Acceso** Federico G. Zacchigna intervino para sugerir a Franco Curcho y Pa. Santiago Rodriguez Castro que envíen un correo electrónico directamente a gestión académica para resolver cualquier inconsistencia y obtener acceso a la planilla y la carpeta (00:07:55). Ise posgrados confirmó que esta acción "resuelve" el problema (00:09:28).
- **Dinámica de las Clases Sincrónicas en Modalidad Híbrida** Ise posgrados detalló la estructura de las clases sincrónicas futuras, las cuales comenzarán con una solicitud de retroalimentación general sobre los videos. Luego, se realizará un "repaso a quinta fondo" de las diapositivas para abordar dudas teóricas específicas (00:10:40). Finalmente, se revisará el contenido extra, como los *colabs* (aplicaciones en código) y material opcional (diapositivas en itálica), que se verán sincrónicamente.
- **Foros de Consultas para Dudas Teóricas** Para resolver dudas que surjan al ver los videos (antes de la clase sincrónica), Ise posgrados anunció que se han habilitado foros de consultas en el campus para cada semana (de la 4 a la 8) (00:12:06) (00:14:58). El objetivo es permitir a los estudiantes postear preguntas y resolverlas sin tener que esperar a la sesión del martes (00:13:53).
- **Consulta sobre Matrices Definidas Positivas y Métodos de Resolución** Gabriel Quiroga preguntó sobre la validez de usar el discriminante para definir si una matriz 2x2 es definida positiva y si existía un método estándar para matrices de mayor grado en las autoevaluaciones (00:14:58). Ise posgrados respondió que el foco de la materia es "lo conceptual y no en el método de

resolución," aunque sugirió el método de factorización (completar cuadrados) como un enfoque conceptual (00:16:47). Además, enfatizó que no existe un método estandarizado general, ya que las cuentas complejas serán realizadas por la computadora (00:18:11).

- **Introducción a la Proyección como Transformación Lineal** Ise posgrados comenzó la Clase 3 introduciendo el concepto de proyección como un tipo particular de transformación lineal (00:19:30). Definió la proyección (π) como una transformación lineal que mapea un espacio vectorial grande (B) a un subespacio (S). La característica clave de la proyección es que aplicarla dos veces es lo mismo que aplicarla una ($\pi(\pi(v)) = \pi(v)$) (00:21:00).
- **Proyección Ortogonal y la Necesidad de Producto Interno** La discusión avanzó a la proyección ortogonal, señalando que esta requiere un producto interno, ya que permite "medir longitudes" y distancias. La proyección ortogonal se define como encontrar el vector ($\hat{b}$) en el subespacio (S) que esté más cerca del vector original (B) (00:27:04). Ise posgrados aclaró el concepto de *arg min* como el valor de la variable de entrada (X) que produce el valor mínimo de la función (00:28:29) (00:31:39).
- **Teorema de Proyección y Unicidad** Ise posgrados presentó el teorema de proyección, destacando su importancia como "marco legal". Este teorema garantiza que, para un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y un subespacio, la proyección ortogonal "existe y es única" (00:34:18). La unicidad es poderosa porque permite buscar la proyección con la certeza de que siempre se encontrará un resultado, y será exactamente uno (00:35:57).
- **Derivación de la Matriz de Proyección** Se procedió a buscar una expresión para la matriz de proyección ortogonal (P) asumiendo una base para el subespacio (00:37:13). Utilizando la condición de que el vector de error ($B - \hat{B}$) es ortogonal a todos los vectores del subespacio, lo cual implica que el producto interno es cero, se estableció un sistema de ecuaciones (00:38:28) (00:41:45). La solución, expresada matricialmente, conduce a la matriz de proyección: $P = B (B^T B)^{-1} B^T$ (00:46:44).
- **Aplicación de la Proyección: Mínimos Cuadrados** Ise posgrados relacionó la matriz de proyección con el concepto de mínimos cuadrados, que se usa cuando un sistema de ecuaciones tiene más filas que columnas (sobredeterminado) y no tiene una solución exacta (00:48:34) (00:52:14). En el mundo real, los datos suelen tener un error, y los mínimos cuadrados buscan la recta que "minimice el error" (00:50:20). Geométricamente, esto

significa buscar el vector de pesos que fabrique una combinación lineal que sea la proyección ortogonal sobre el espacio de columnas de la matriz de entrada (00:53:51).

- **Regresión Lineal y Proyección Ortogonal** Ise posgrados explicó que la regresión lineal es un modelo de regresión simple donde el precio de algo se calcula como una combinación lineal de diferentes variables, cada una multiplicada por un peso. Los pesos o coeficientes del modelo se obtienen utilizando el concepto de proyección ortogonal para ajustar el modelo a los datos (00:58:51). Gabriel Quiroga confirmó que la proyección ortogonal es una manera de realizar la regresión lineal, lo que le aclaró el concepto (01:00:04).
- **Cálculo de Pesos (Betas)** Leonardo Villalva planteó la importancia del cálculo de los pesos (beta), a lo que Ise posgrados respondió que existe una fórmula directa que proporciona el valor único del vector de pesos, eliminando la necesidad de buscarlo repetidamente (01:00:04). La idea de Ise posgrados fue demostrar que la fórmula funciona y disipar el prejuicio de que los modelos lineales no pueden representar relaciones no lineales (01:01:51).
- **Demostración con Modelo Polinomial** Ise posgrados propuso usar un polinomio de grado dos ($ax^2 + bx + c$) como un producto escalar entre un vector de variables ($x^2, x, 1$) y un vector de pesos (a, b, c), para ilustrar que las relaciones no lineales entre variables se pueden manejar con un modelo lineal (01:01:51). Explicó que se generarían puntos (con o sin ruido) basados en valores conocidos de A, B y C, y luego se usaría el algoritmo para estimar estos coeficientes a partir de los puntos generados, demostrando la capacidad del modelo para "adivinar" los parámetros generadores (01:03:11). Los resultados mostraron que el modelo estimó perfectamente los parámetros en el caso sin ruido y los estimó "bastante bien" en el caso con ruido (01:08:14).
- **Estrategia para Relaciones No Lineales** La clave para modelar una relación no lineal entre x e y usando un modelo lineal es que la relación entre los pesos (betas) es lineal, aunque las variables de entrada pueden ser no lineales (ej. x^2 o $\cos(x)$) (01:09:45). Ise posgrados enfatizó que el modelo lineal solo está limitado en cómo combina las variables (solo combinaciones lineales), pero no en la naturaleza de las variables mismas, lo que es una capacidad "muy potente" (01:11:02).
- **Aclaración del Significado de los Betas** Gabriela Sol Salazar solicitó una explicación más sencilla sobre qué representan los betas a nivel matricial (01:12:36). Ise posgrados clarificó que el vector I (la salida) se busca como

una combinación lineal de los vectores columna de la matriz X (las entradas), y el vector de pesos (betas) contiene los coeficientes por los que se debe multiplicar cada columna de X para fabricar I con el menor error posible. Este proceso de minimizar el error para encontrar los coeficientes óptimos se realiza mediante cuadrados mínimos, que es la proyección ortogonal (01:14:20).

- **Confirmación de la Función de Minimización de Error** Gabriel Quiroga validó su entendimiento, confirmando que el vector beta obtenido es el que minimiza el error de las ecuaciones para cada una de las filas (puntos de datos), y que esto aprovecha el principio de la proyección ortogonal para minimizar la distancia. Ise posgrados confirmó la exactitud de su comprensión (01:15:37).
- **Introducción a Autovalores y Autovectores** Ise posgrados introdujo el nuevo tema de autovalores y autovectores, enfocándose en matrices cuadradas que mapean de R^N a R^N. Se recordó que un vector tiene magnitud, dirección y sentido (01:17:25). Se definió un autovalor (λ) y un autovector (x, no nulo) como un par que, al multiplicar x por la matriz A, el resultado es el mismo que multiplicar x por el escalar λ, lo que significa que la dirección del vector no cambia, solo su magnitud y sentido. Esto se interpreta como una "dirección invariante" de la matriz (01:32:10).
- **Propiedades de la Dirección del Autovector** Alejandro Valle consultó si el autovector es una característica inherente, a lo que Ise posgrados aclaró que los autovalores y autovectores son propiedades de la matriz A (01:37:42). Se demostró que cualquier vector i que sea un múltiplo escalar (k) del autovector x también es un autovector asociado al mismo autovalor λ. Esto significa que, de un autovector, lo único que importa es la dirección, no su magnitud o sentido (01:39:25) (01:43:30).
- **Significado del Autovalor (λ)** Mariano Jauffroy preguntó por la función de λ; Ise posgrados explicó que λ indica lo que le sucede al vector que corre en esa dirección, ya sea que se anule (si $\lambda=0$), quede igual (si $\lambda=1$), se invierta (si $\lambda=-1$) o se escale (01:43:30). Se mencionaron aplicaciones como en geometría, sistemas dinámicos y el algoritmo Page Rank de Google, que utiliza autovalores y autovectores en grafos, donde los autovectores con $\lambda < 1$ "mueren" y solo el autovector asociado a $\lambda=1$ sobrevive para describir la popularidad de las páginas (01:44:40).

- **Cálculo y Multiplicidad de Autovalores** Ise posgrados detalló el método para encontrar autovalores utilizando el polinomio característico, que es el determinante de $A - \lambda I$ igualado a cero. Las raíces de este polinomio de grado n son los autovalores (01:47:28). Se introdujeron los conceptos de multiplicidad algebraica (MA), que es la cantidad de veces que λ aparece como raíz, y multiplicidad geométrica (MG), que es la cantidad de direcciones linealmente independientes asociadas a ese λ, siendo siempre $MG \leq MA$ (01:48:47).
- **Ejemplo de Cálculo de Multiplicidades** Se presentó un ejemplo con una matriz A que resultó en un autovalor $\lambda=2$ con multiplicidad algebraica $MA=2$ (01:50:32). Para encontrar la multiplicidad geométrica, se resolvió el sistema $(A - \lambda I)x = 0$. La solución arrojó que el vector solución es de la forma $i(2, 1)$, indicando que solo hay una dirección (el vector $(2, 1)$) asociada a $\lambda=2$, por lo que la multiplicidad geométrica es $MG=1$ (01:52:12) (01:56:07). Cesar Orellana y Alejandro Valle pidieron aclaraciones sobre los pasos del cálculo, lo que fue explicado por Ise posgrados (01:54:00).
- **Conceptos de Autovectores y Autoespacios** Ise posgrados respondió una pregunta de Alejandro Valle sobre la multiplicidad geométrica de autovectores (01:57:21). También explicó que cualquier combinación lineal de autovectores con el mismo autovalor asociado, x_1 y x_2 linealmente independientes (LI), también es un autovector para ese autovalor. Este concepto lleva a la definición de autoespacio, donde todos los vectores dentro de ese espacio son autovectores del autovalor correspondiente, interesando solo las direcciones LI que forman una base (01:59:00).
- **Propiedades de los Autovectores y Autovalores** Ise posgrados presentó dos teoremas importantes sobre autovectores y autovalores. Primero, los autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz real son todos LI. En segundo lugar, si una matriz cuadrada es simétrica, existe una base ortonormal de autovectores, y los autovalores son reales (02:00:42). Menciona que no todas las matrices de valores reales tienen autovalores reales, citando como ejemplo las matrices de rotación, que tienen pares complejos conjugados como autovalores (02:02:40).
- **Relación entre Autovectores y el mismo Autovalor** Gabriel Quiroga preguntó cómo puede existir más de un autovector asociado a un mismo autovalor (λ). Ise posgrados explicó que esto puede ocurrir cuando existe más de un grado de libertad en la resolución, citando el ejemplo de la matriz identidad en R^2, donde el autovalor $\lambda=1$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 2, lo que resulta en dos direcciones LI

(x_1 y x_2) asociadas al mismo autovalor. Alejandro Valle aclaró que la multiplicidad geométrica no puede ser mayor que la algebraica, pero sí puede ser igual (02:04:04).

- **Multiplicidades Algebraicas y Geométricas** Mariano Jauffroy preguntó si la multiplicidad geométrica determina la cantidad de autovalores, a lo que Ise posgrados aclaró que el polinomio característico determina los autovalores, y la dimensión de la matriz ($n \times n$) determina el número de autovalores (contando repeticiones). Se utiliza la analogía de "sillas" para explicar que la multiplicidad algebraica es la cantidad de "sillas reservadas" por un autovalor, mientras que la geométrica es la cantidad de "sillas ocupadas" por autovectores LI (02:05:47). La condición de que todas las sillas estén ocupadas (suma de multiplicidades geométricas igual a n) es necesaria para que la matriz tenga n autovectores LI (02:08:21).
- **Ejemplo de Cálculo de Autovalores y Autovectores** Ise posgrados presentó un ejemplo con una matriz 2×2, encontrando dos autovalores distintos, $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=-4$, y sus respectivos autovectores (02:09:50). La suma de las multiplicidades geométricas es $1+1=2$, lo cual es igual a n, y esto define una base de R^2. Ise posgrados enfatizó que tener n autovalores distintos garantiza que los autovectores son LI y forman una base de R^n (02:12:12).
- **Interpretación Gráfica de Autovalores y Autovectores** Se presentó una interpretación gráfica de transformaciones en R^2 según sus autovalores y autovectores (02:13:49). Ise posgrados explicó que un autovalor mayor a uno provoca que la dirección asociada se expanda, mientras que un autovalor entre cero y uno hace que se contraiga (02:15:26). Se señaló que el determinante de la matriz es igual al producto de los autovalores y representa el área (02:16:37). Además, si un autovalor es cero, esa dirección "muere" o colapsa al cero, resultando en un área de cero (02:19:17).
- **Transformaciones y Autovectores** Alejandro Valle concluyó que encontrar autovectores y autovalores permite describir una transformación de manera simple. Ise posgrados profundizó en la interpretación gráfica de transformaciones, explicando a Mariano Jauffroy que la expansión o contracción es visible a lo largo de las direcciones de los autovectores (02:20:27). Se señaló un caso "raro" con una matriz que tiene multiplicidad algebraica 2, pero geométrica 1, que no tiene una base completa de autovectores y resulta en una transformación "torcida" (02:21:50).
- **Diagonalización de Matrices** Ise posgrados definió una matriz diagonalizable como aquella que puede escribirse como $A = S^{-1} D S$, donde D es una

matriz diagonal de autovalores y S es la matriz de cambio de base, que es la matriz de autovectores (02:25:39). Una matriz es diagonalizable si y solo si tiene exactamente n autovectores LI, es decir, cuando la suma de las multiplicidades geométricas es igual a n (02:27:49). Se explicó que diagonalizar es equivalente a aplicar la transformación A en la base de autovectores, donde se vuelve una transformación diagonal simple (02:31:12).

- **Ventajas de la Diagonalización** Gabriel Quiroga expresó preocupación sobre la eficiencia de reemplazar una multiplicación matricial por tres (02:32:29). Ise posgrados justificó la diagonalización señalando que simplifica operaciones como la elevación a potencias de la matriz (A^k), volviendo esta operación "básicamente gratis". Esto es porque A^k se convierte en $S^{-1} D^k S$, y D^k es simplemente elevar cada autovalor a la k (02:36:58).

- **Propiedades de Diagonalización y Matriz Hermítica** La diagonalización no es única, ya que el orden de los autovectores y autovalores puede reordenarse y los autovectores pueden escalarse (02:34:12). Se reiteró que la condición para la diagonalización es que la suma de las multiplicidades geométricas sea igual a n. Además, se mencionó que si una matriz compleja es hermítica o una matriz real es simétrica, siempre es diagonalizable y sus columnas forman una base ortonormal (02:35:40).

- **Instrucciones para Clases Futuras** Ise posgrados recordó a los estudiantes, incluido Mariano Jauffroy, que deben ver videos teóricos antes de cada clase (02:38:52). Estos videos sustituyen la explicación teórica extensa en clase, permitiendo que el tiempo de clase se dedique a la práctica y la resolución de dudas a través de un foro de consultas y un repaso en clase (02:40:43).

Pasos siguientes recomendados

- [ ] Franco Curcho y Pa. Santiago Rodriguez Castro enviarán un correo electrónico a gestión para obtener acceso a la carpeta de videos pregrabados y a la planilla de notas.
- [ ] Ise posgrados reanudará la reunión a las 19:30 para discutir los valores y vectores propios.

Danos tu opinión sobre el uso de Gemini para tomar notas en una [breve encuesta.](#)