Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Dualidad

Dualidad en Optimización: Problema dual

Dado el problema primal:

$$\begin{gathered} \min\ f(x_1, ..., x_n) \\ s.t.\ g(x_1, ..., x_n) \leqslant b \\ x_i \geqslant 0 \end{gathered}$$

Tenemos el problema dual:

$$\begin{gathered} \max\ D(\lambda_1, ..., \lambda_m) \\ s.t.\ h(\lambda_1, ..., \lambda_m) \geqslant b \\ \lambda_j \leqslant 0 \end{gathered}$$

- Se define $D(\lambda_1, ..., \lambda_m) \doteq \inf_{\bar{x}} \mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{x})$.
- Dualidad débil: Si $\bar{x}^*$ es una solución factible del problema primal e $\bar{\lambda}^*$ es una solución del dual entonces $f(\bar{x}^*) \geqslant D(\bar{\lambda}^*)$.
- Si un problema no tiene un óptimo finito entonces el otro no es factible.

Ejemplo (1/2)

Sea

$$\begin{gathered} \min \; 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ s.t. \; -2x_1 - 1x_2 - x_3 + 7 \leq 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 8 \leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{gathered}$$

El lagrangiano resulta:

$$\mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \lambda_1(-2x_1 - 1x_2 - x_3 - 7) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 8)$$

de donde para que $D(\lambda_1, \lambda_2)$ no pueda valer $-\infty$ los términos de $x_1, \ldots, x_3$ deben ser no negativos, resultando en el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \\ 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 0 \\ 5 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo (2/2)

Luego, como el mínimo de $\mathscr{L}$ se da para $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, resulta $D(\lambda_1, \lambda_2) = \mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{0}) = 7\lambda_1 + 8\lambda_2$.

Teniendo entonces las formulaciones de D y las restricciones, reformulamos el problema:

$$\begin{gathered}
\max\ 7\lambda_1 + 8\lambda_2 \\
s.t.\ 3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \\
4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 0 \\
5 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 0 \\
\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0
\end{gathered}$$

Nota: en estos casos de problemas lineales se da la condición de *dualidad fuerte*, por la cual el óptimo del dual coincide con el óptimo del primal.