11 nov 2025

Análisis Matemático (4/8) - a241b25

Invitados merrazquin@fi.uba.ar Análisis Matemático - CEIA 24Co2025

Archivos adjuntos Análisis Matemático (4/8) - a241b25

Registros de la reunión Transcripción Grabación

Resumen

Ise posgrados, Cristian A. Aballay, Tomas Mc Nally, Lucia T. Capon Paul, Leonardo Villalva, y Gabriel Quiroga discutieron las ventajas y desventajas del formato de video pregrabado, destacando la eficiencia de la virtualidad, aunque algunos como Lucia T. Capon Paul y Leonardo Villalva expresaron reservas sobre la atención y el formato. Ise posgrados presentó la Descomposición en Valores Singulares (DVS) como generalización de la diagonalización, explicando sus variantes (Compacta, Reducida y Truncada), su aplicación en la pseudoinversa de Moore-Penrose, y su uso en la compresión de imágenes. También se cubrieron otras factorizaciones auxiliares como LU, QR y Cholesky, sus beneficios en estabilidad numérica y eficiencia computacional, y Ise posgrados recordó a los estudiantes, incluyendo a Cesar Orellana y Alejandro Valle, los detalles del Trabajo Práctico opcional y la importancia de prepararse para las próximas clases más densas.

Detalles

- **Comentarios Iniciales y Formato de Video** Ise posgrados inició la sesión esperando a más participantes y preguntó por la experiencia general consumiendo los videos pregrabados. Cristian A. Aballay y Tomas Mc Nally indicaron que se sintieron cómodos con el formato de video, ya que los ejemplos fueron útiles y les permitieron pausar para entender o repasar temas. Lucia T. Capon Paul, aunque valoró la posibilidad de manejar la velocidad de reproducción, expresó que ver clases por video le parece "pésimo" y que la virtualidad no se adapta a su forma de aprender, aunque reconoció que da más posibilidades para cursar (00:00:00) (00:06:58).

- **Ventajas y Desventajas de la Virtualidad** Ise posgrados debatió las ventajas de la virtualidad en términos de eficiencia, como evitar el tiempo de viaje, aunque reconoció que personalmente prefiere el aprendizaje en vivo y presencial (00:05:32). Leonardo Villalva y Gabriel Quiroga coincidieron en que poder detener y revisar el video es beneficioso para la absorción de contenido, pero también sienten que en la virtualidad no prestan tanta atención como en las clases en vivo (00:06:58). Leonardo Villalva sugirió que un curso de ese nivel y costo podría no depender únicamente del video, aunque reconoció su valor como soporte (00:08:44).
- **Disponibilidad de Grabaciones y Motivación de los Videos** Leonardo Villalva preguntó sobre la duración de la disponibilidad de las grabaciones de las clases, a lo que Ise posgrados respondió que cree que son "ad Eternum". Ise posgrados explicó que la intención de los videos era tener la grabación de la clase antes de la clase para abordar la naturaleza secuencial de las matemáticas, donde perderse un tema afecta la comprensión de los siguientes (00:10:20). Tener la "grabación antes de la clase" busca eficientizar el tiempo de las sesiones en vivo y permitir a los estudiantes prepararse mejor, aunque la etapa presencial con el docente es fundamental (00:11:36).
- **Metodología de Repaso y Descomposición en Valores Singulares (DVS)** Ise posgrados propuso que la sesión en vivo funcionara como una revisión rápida de las diapositivas para motivar preguntas sobre dudas específicas, asumiendo que los temas ya fueron vistos en los videos (00:12:50). El tema principal abordado fue la Descomposición en Valores Singulares (DVS), que se presenta como una generalización de la diagonalización, buscando resolver las limitaciones de esta última, como requerir matrices cuadradas y que estas sean diagonalizables (00:14:42). Ise posgrados explicó el concepto de un "pseudo cuadrado" de una matriz rectangular (A transpuesta por A o A por A transpuesta) para que resulten cuadradas, simétricas y diagonalizables, lo cual permite calcular la raíz cuadrada de sus autovalores (00:15:47).
- **Valores Singulares Compartidos y Consulta Bibliográfica** Ise posgrados afirmó que si se ordenan los autovalores de esos "pseudo cuadrados" de mayor a menor, los primeros P valores, donde P es el mínimo entre las dimensiones M y N, serán compartidos por ambas construcciones (00:16:57). Alejandro Valle preguntó por qué estos primeros P autovalores son compartidos, a lo que Ise posgrados respondió que se considera "magia matemática" para los fines del curso, pero que sí existe una demostración

(00:18:10). Leonardo Villalva sugirió a Alejandro Valle usar herramientas como Chat GPT para complementar las demostraciones en libros como el de Grossman (00:19:44).

- **Valores Singulares y Definición de DVS** lse posgrados aclaró que la garantía de los autovalores es que los restantes a los primeros P valen cero, aunque los primeros P también podrían valer cero (00:21:01). Los valores singulares se definen como la raíz cuadrada real no negativa del autovalor del "cuadrado trucho" de la matriz. La DVS de una matriz A se define como $U \Sigma V^T$, donde U y V son matrices ortogonales que actúan como matrices de cambio de base, y Σ es una matriz diagonal con los valores singulares (00:22:14).
- **Estructura de la Matriz Sigma y la Adición de Ceros** lse posgrados explicó que las matrices U y V deben ser cuadradas para ser matrices de cambio de base en sus respectivos espacios R^M y R^N, forzando a la matriz Σ a ser rectangular con una porción diagonal y el resto rellenado con ceros (00:25:53). Alejandro Valle cuestionó la necesidad de agregar columnas o filas de ceros a Σ si son "inservibles", a lo que lse posgrados respondió que son esenciales para que las dimensiones del producto matricial calcen (00:27:05).
- **DVS Compacta y DVS Reducida** lse posgrados presentó la DVS Compacta como una forma de "sacar la grasa a la carne," eliminando las filas o columnas de ceros de Σ que son producto de igualar las dimensiones, resultando en que Σ sea una matriz cuadrada de $P \times P$ (00:29:45) (00:33:10). Cristian A. Aballay preguntó si se puede reducir fila o columna de U y V^T simultáneamente, y lse posgrados aclaró que la DBS Compacta solo requiere matar columnas a U o filas a V^T, nunca a ambas, para que Σ se vuelva cuadrada (00:32:04). Posteriormente, lse posgrados introdujo la DVS Reducida, la cual se encarga de eliminar filas y columnas correspondientes a valores singulares que son estrictamente cero, manteniendo la igualdad matemática sin pérdida de información, y llevando a Σ a ser una matriz de $R \times R$, donde R es el rango de A (00:34:14).
- **DVS Truncada y Pseudoinversa de Moore-Penrose** La DVS Truncada se describió como una compresión "con pérdida," donde se deciden arbitrariamente cuántos valores singulares se conservan, con la lógica de descartar aquellos que, aunque no son matemáticamente cero, son computacionalmente despreciables (00:37:03). lse posgrados introdujo la pseudoinversa de Moore-Penrose, que se basa en la DVS Reducida porque esta última garantiza que la matriz Σ sea invertible al ser cuadrada y

no tener ceros en la diagonal (00:38:27). La pseudoinversa proporciona la aproximación de mínimos cuadrados en el caso de matrices sobredeterminadas y la solución de mínima norma euclídea para matrices subdeterminadas (00:41:16).

- **Detalles del Trabajo Práctico (TP)** lse posgrados mencionó que el TP es opcional y se puede entregar en partes, donde las partes resueltas suman puntos (00:41:16). El plazo de entrega coincide con las autoevaluaciones, y se debe enviar el notebook o el código bien documentado, con un enlace a un repositorio o drive, y especificando los puntos resueltos (00:43:08). El objetivo del TP es expandir el conocimiento en la eficiencia de código y la traducción de fórmulas matemáticas a código, lo cual incluye el análisis de métricas como tiempo y memoria (00:44:26).
- **Estructura del TP y Recomendaciones de Trabajo en Grupo** lse posgrados mostró la consigna del TP, que contiene ejercicios que se vuelven "cuentosos" a propósito, y sugiere que la mayor parte del código se puede realizar con tres o cuatro operaciones clave (00:45:46) (00:49:50). lse posgrados recomendó que el TP, que puede ser realizado por hasta cinco personas, no se haga solo debido a la carga de trabajo, y sugirió el trabajo colaborativo para maximizar el aprendizaje, como la discusión punto por punto en un *meet*. Finalmente, lse posgrados mencionó que se ofrecen dos variantes de estructura inicial (repo y notebook) y compartió una utilidad para evitar problemas al subir notebooks a GitHub (00:49:50) (00:53:09).
- **Receso y Contenido Opcional** lse posgrados propuso un breve receso de 5 o 10 minutos, con Gabriel Quiroga sugiriendo 10 a 15, y se decidió retomar a las 20 (00:56:48). Luego, lse posgrados mencionó contenido opcional para profundizar en otras factorizaciones, aparte de la diagonalización y la Descomposición de Valores Singulares (DVS), citando un video de Shilver Strong sobre "Five Key Factorizations of the Matrix" (01:09:50).
- **Factorizaciones Clave (LU, QR, Cholesky)** lse posgrados introdujo factorizaciones auxiliares que se usan internamente en operaciones como la inversión de matrices (por ejemplo, en `numpy.invert`) sin que la persona usuaria se entere, mencionando que tienen aplicaciones en Machine Learning (01:11:11). Explicó la factorización LU (Lower y Upper) como un producto de matrices triangulares, útil para resolver sistemas de ecuaciones tipo $A \cdot x = b$ de manera eficiente, especialmente cuando se reutiliza la matriz A (01:12:15). También mencionó la factorización QR, que convierte la matriz A en una base ortonormal, útil para la ortogonalización y para resolver $A \cdot x = b$ (01:13:35). Finalmente, lse posgrados describió la factorización de Cholesky, que se usa en el TP para matrices cuadradas, simétricas y

semidefinidas positivas ($A = L \cdot L^T$) y resulta útil en el contexto de matrices de covarianza (01:15:00) (01:18:11).

- **Complejidad Computacional de las Factorizaciones** Ise posgrados detalló la ventaja de la factorización de Cholesky sobre el cálculo de la inversa de la matriz A para resolver $A \cdot x = b$, señalando que el cálculo de la inversa es de orden $2n^3$. Por el contrario, obtener la factorización de Cholesky es de orden $1/3 n^3$, resultando en un *speedup* significativo a pesar de mantener la misma complejidad Big O (01:19:31). Ise posgrados enfatizó que las factorizaciones generalmente mejoran la complejidad computacional y son más eficientes en términos de cálculos (01:22:05).

- **Estabilidad Numérica de las Factorizaciones** Gabriel Quiroga preguntó sobre el impacto en la precisión al usar una inversa calculada de otra manera versus una factorización, a lo que Ise posgrados respondió que usar la factorización generalmente resulta en mayor precisión y estabilidad numérica. Ise posgrados también mencionó que una de las razones por las que se prefiere usar factorizaciones es la ganancia en estabilidad (01:22:05).

- **Aplicación de DVS en Compresión de Imágenes** Ise posgrados presentó el uso de la DVS truncada para la compresión de imágenes, comenzando con una imagen a color (tensor RGB) que se convirtió a escala de grises (matriz) para el análisis (01:23:26). Ise posgrados utilizó la función `linalg.svd` de Numpy con `full_matrices=False` para obtener la DVS compacta, donde la matriz sigma se devuelve como un *array* de la diagonal (01:27:08). La DVS compacta mata columnas a U para que coincida con el mínimo de filas/columnas de la matriz original A (01:28:12).

- **Análisis de Valores Singulares y Compresión** Al observar la distribución de los valores singulares, Ise posgrados y Gabriel Quiroga notaron que los primeros valores eran significativamente más grandes que los demás, lo que llevó a usar una escala logarítmica para ver los "codos" en la distribución (01:29:39). Esto fue una justificación para usar la DVS truncada, ya que aunque ningún valor singular es cero, se pueden descartar valores mucho más pequeños (01:32:26). La DBS truncada se construyó con los primeros K valores singulares y las correspondientes columnas y filas de U y V^T (01:33:45).

- **Resultados de Compresión de Imágenes con DVS Truncada** Al usar $K=10$ (menos del 2% de los valores singulares), Ise posgrados mostró que el perro ya se llegaba a ver, aunque con mala calidad, y que el manchón de luz se veía muy mal (01:35:01). Con $K=100$ (menos del 20%), el perro ya se veía bien, pero el manchón de luz seguía viéndose mal. Con $K=300$ (más de la mitad), la imagen era casi indistinguible de la original (01:37:53). Ise posgrados concluyó que los primeros 100 vectores (las componentes de baja frecuencia) contenían la mayor parte de la información del perro, y los 200 vectores adicionales se gastaron principalmente en corregir el manchón de luz (las variaciones de color, que son antinaturales en este ejemplo) (01:39:18).

- **Energía de la Matriz y Selección de K** Para cuantificar la compresión, Ise posgrados definió la energía de la matriz como la suma de los valores singulares y la fracción de energía recuperada como la suma de los primeros K valores singulares dividida por la suma total. Se observó que $K=10$ recuperaba aproximadamente dos tercios de la energía, y $K=100$ alcanzaba el 90% (01:40:50). Esta curva permite seleccionar el valor de K que mejor se ajuste a las necesidades de la persona usuaria, priorizando la minimización de espacio o la calidad de la imagen (01:43:17).
- **Relación con Análisis de Componentes Principales (PCA)** Cesar Orellana preguntó si el uso de la DVS truncada era similar al Análisis de Componentes Principales (PCA), donde K sería la cantidad de atributos elegidos. Ise posgrados confirmó que la cantidad de componentes principales es equivalente al K de la DVS truncada y que la PCA utiliza la DVS por debajo para buscar combinaciones lineales de columnas que maximicen la varianza (01:44:44).
- **Dudas sobre la DVS Compacta y Reducida** Lucia T. Capon Paul preguntó sobre si la función de Numpy entregaba la DVS compacta o reducida. Ise posgrados confirmó que con `full_matrices=False` se obtiene la compacta (01:46:15). Explicó que la forma reducida se obtiene luego de aplicar la compacta y eliminar explícitamente los valores singulares iguales a cero (cuyo número es el rango de la matriz R), lo que resulta en un *array* de largo R (01:47:33).
- **Recordatorio sobre el Trabajo Práctico (TP)** Ise posgrados enfatizó a las personas estudiantes que no debían descuidar el Trabajo Práctico (TP), ya que requiere esfuerzo y tiempo, especialmente con la proximidad de la temporada navideña (01:50:12). Ise posgrados aclaró que el TP no es obligatorio y que la condición para la aprobación de la materia es aprobar las autoevaluaciones. Ise posgrados también aconsejó prepararse para las clases 5 y 6, las cuales serán las más densas y difíciles, cubriendo desde campos vectoriales hasta *backpropagation* y métodos de optimización (01:53:05).

Pasos siguientes recomendados

- [ ] Alejandro Valle buscará la razón matemática de por qué los primeros valores P de autovalores de la descomposición en valores singulares son compartidos.
- [ ] Ise posgrados compartirá la herramienta para borrar campos correctos del punto IP para que GitHub lo visualice sin errores.