


31 oct 2025

Análisis Matemático (2/8) - a241b25

Invitados merrazquin@fi.uba.ar Análisis Matemático - CEIA 24Co2025

Archivos adjuntos  Análisis Matemático (2/8) - a241b25

Registros de la reunión  Transcripción  Grabación

Resumen

La reunión comenzó con Ise posgrados confirmando la inscripción en el campus y resolviendo la consulta de Lucia T. Capon Paul sobre la autoevaluación y el uso permitido de NumPy para la generación de conjuntos linealmente dependientes. Ise posgrados cubrió en detalle la definición y propiedades del producto interno, la norma de un vector, y la ortogonalidad, respondiendo a preguntas de Gabriel Quiroga sobre proyecciones y la discusión de ortogonalidad con Cesar Orellana. Finalmente, Ise posgrados introdujo un modelo de factorización de matrices para sistemas de recomendación, donde se explicó la función de costo, el método de cuadrados mínimos alternantes (ALS), la necesidad de matrices definidas positivas (relacionada con la pregunta de Lucia T. Capon Paul sobre sus propiedades constructivas) y la inicialización de vectores aleatorios, respondiendo a una pregunta de Tomas Mc Nally. Los participantes que agradecieron y se despidieron fueron Alejandro Valle, Agustin Biancardi, Alan Vignolo, Cesar Orellana, Gabriel Quiroga y Tomas Mc Nally.

Detalles

- **Inscripción y Autoevaluación** Ise posgrados comenzó la reunión verificando que todos los participantes se hubieran inscrito en el campus, asumiendo un sí dado el silencio. Luego, abordó la duda de Lucia T. Capon Paul sobre la autoevaluación, en particular, cómo seleccionar un vector para generar un

conjunto linealmente dependiente (LD), y ella explicó que intentó calcular determinantes quitando un vector a la vez ([00:00:00](#)). Ise posgrados confirmó que usar NumPy (NP) para estos cálculos está permitido y que en la práctica profesional no se calculan determinantes a mano ([00:02:29](#)).

- **Manejo de NumPy y Determinantes** Ise posgrados advirtió que al usar NumPy, especialmente al resolver sistemas de ecuaciones, el *software* podría trabajar con columnas en lugar de filas (o viceversa), actuando como si usara la transpuesta de una matriz cuadrada. En cuanto a los conjuntos LD, Ise posgrados señaló que al remover un vector, un conjunto podría seguir siendo LD ([00:03:46](#)), lo que podría ser la razón por la cual el intento de Lucia T. Capon Paul falló ([00:05:11](#)).
- **Espacio Vectorial y Producto Interno** Ise posgrados recordó que un espacio vectorial es técnicamente una cuádruple de un conjunto de vectores, una operación de suma, un conjunto de escalares y una operación de producto por un escalar. Se propuso añadir un quinto elemento: una función de producto interno, el cual no es estrictamente necesario para un espacio vectorial ([00:07:00](#)).
- **Números Complejos y Norma** Ise posgrados introdujo los números complejos ($a + i \cdot b$) como vectores en \mathbb{R}^2 y mencionó su utilidad en aplicaciones como la electrónica para simplificar cálculos ([00:07:00](#)). Distinguió entre la norma de un complejo (módulo) y la norma de un vector, enfatizando que para los fines de la clase se tratarán como conceptos separados, siendo la norma de un complejo la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$ ([00:08:51](#)). Ise posgrados también repasó la conjugación de un complejo, que es multiplicar la parte imaginaria por -1 , y señaló que conjugar dos veces devuelve el número original ([00:10:37](#)).
- **Definición de Producto Interno** Ise posgrados definió una función de producto interno que toma dos vectores y devuelve un escalar. Las condiciones que debe cumplir son: ser lineal sobre el primer argumento, lo que implica ser distributiva con respecto a la suma y compatible con el producto por un escalar ([00:14:01](#)); ser simétrica o conjugada-simétrica, donde $\varphi(u, v)$ es igual al conjugado de $\varphi(v, u)$ ([00:15:26](#)); y que el producto interno de un vector consigo mismo sea siempre mayor o igual a cero (un real no negativo), siendo cero si y solo si el vector es el vector cero ([00:16:57](#)).
- **Espacios Euclídeos y Unitarios** Ise posgrados estableció que si el conjunto de escalares K es el de los números reales, el espacio vectorial con producto interno se llama espacio euclídeo, y si K es el de los complejos, se llama

espacio unitario. El producto interno es una generalización del producto escalar ([00:21:12](#)).

- **Ejemplo de Producto Interno en Espacios de Funciones** Ise posgrados presentó un ejemplo de un espacio vectorial de funciones continuas y propuso un producto interno definido por una integral ([00:22:37](#)). Se demostró que esta función cumple la condición de linealidad en el primer argumento al aplicar la distributividad de la integral sobre la suma ([00:25:58](#)). También se comprobó la condición de conjugación-simetría y la condición de no negatividad para el producto interno de una función consigo misma, lo que se relaciona con la norma al cuadrado del complejo ([00:29:44](#)).
- **Norma de un Vector y Ángulo entre Vectores** Ise posgrados definió la norma de un vector como la raíz cuadrada del producto interno del vector consigo mismo ([00:35:54](#)). Además, se presentó la fórmula para calcular el coseno del ángulo entre dos vectores, que es el producto interno dividido por el producto de las normas ([00:37:40](#)). Ise posgrados explicó que el producto interno depende tanto de la magnitud de cada vector como del ángulo entre ellos ([00:40:49](#)).
- **Propiedades de la Norma y Desigualdad de Cauchy-Schwarz** Ise posgrados repasó las propiedades de la norma, incluyendo su no negatividad y que es cero si y solo si el vector es el vector cero ([00:42:10](#)). Se presentó la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la cual establece que el módulo del producto interno entre dos vectores es siempre menor o igual al producto de sus normas ([00:43:54](#)). Adicionalmente, se mencionó la desigualdad triangular como la generalización de la propiedad geométrica donde la suma de las distancias de dos lados de un triángulo es mayor o igual a la distancia del tercer lado ([00:45:35](#)).
- **Ortogonalidad y Teorema de Pitágoras** Ise posgrados definió que dos vectores son ortogonales si su producto interno es igual a cero ([00:47:09](#)). También mencionó que el teorema de Pitágoras, en su versión generalizada, aplica a cualquier par de vectores ortogonales, estableciendo que la norma al cuadrado de su suma es igual a la suma de las normas al cuadrado ([00:48:51](#)).
- **Conjuntos Ortogonales y Ortonormales** Ise posgrados definió que un conjunto de vectores es ortogonal si todos los pares de vectores en el conjunto son ortogonales entre sí ([00:50:12](#)). Un conjunto es ortonormal si, además de ser ortogonal, la norma de cada vector es igual a uno. En un conjunto ortonormal, la matriz de productos internos de todos los pares es la matriz identidad ([00:52:05](#)).

- Proyección Ortogonal** Ise posgrados definió la proyección ortogonal de un vector \vec{B} sobre un vector \vec{U} como la componente de \vec{B} que corre sobre \vec{U} , que es una operación asimétrica ([00:53:51](#)). La fórmula se construye usando el versor de \vec{U} (dirección y sentido con norma uno) multiplicado por la magnitud y sentido que se obtiene del producto interno de \vec{B} con \vec{U} y las normas ([00:55:12](#)). Gabriel Quiroga preguntó sobre la deducción de la magnitud de la proyección, y Ise posgrados aclaró que las diferentes expresiones son cuentas equivalentes ([00:57:53](#)).
- Ortogonalidad y Proyección de Vectores** Gabriel Quiroga y Cesar Orellana discutieron la definición de orthogonalidad. Ise posgrados explicó que dos vectores no nulos son ortogonales si su producto interno es cero, lo que en el contexto geométrico (R^2) significa que el ángulo entre ellos es de 90 grados ([00:59:33](#)). Ise posgrados enfatizó que esto se generaliza a cualquier espacio vectorial con producto interno definido, donde la condición es que el producto interno dé cero ([01:02:19](#)).
- Interpretación del Vector Ortogonal ("Bemonio")** Alejandro Valle preguntó sobre la aplicación de la orthogonalidad y la ortonormalidad en machine learning ([01:03:28](#)). Ise posgrados explicó que un vector ortogonal a una proyección ("Bemonio", $\vec{B} - \text{Proyección}_U \vec{B}$) representa la parte de información que no es redundante con respecto al vector sobre el que se proyecta. El "Bemonio" es lo que hace que un vector \vec{B} sea linealmente independiente (LI) de \vec{U} , y cuanto más grande sea, menos información en común tienen los vectores ([01:06:40](#)) ([01:09:59](#)).
- Ortogonalidad como la Forma más Pura de Independencia Lineal** Se concluyó que la orthogonalidad es una condición más fuerte que la independencia lineal (LI), ya que los vectores ortogonales son "cero redundantes" y no comparten información ([01:08:32](#)) ([01:13:04](#)). Ise posgrados ilustró que, al ortogonalizar, se puede tener la misma capacidad representativa con vectores que tienen una norma estrictamente menor ([01:11:20](#)). La redundancia de información es representada por la parte superpuesta de los vectores, y la parte útil es el componente ortogonal ([01:08:32](#)).
- Bases Ortonormales y Preservación de Distancias** Ise posgrados definió una base ortogonal como una base que también es un conjunto ortogonal, y una base ortonormal como una base que es un conjunto ortonormal. Se destacó que una base ortonormal preserva las distancias, lo que significa que la norma de los vectores permanece igual en las coordenadas de cualquiera de esas bases ([01:13:04](#)). Gabriel Quiroga preguntó sobre las bases normales, y Ise posgrados respondió que para preservar la norma se requiere que la base sea ortogonal y que los vectores tengan norma uno ([01:16:40](#)).

- Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt** Ise posgrados introdujo el algoritmo de Gram-Schmidt, el cual permite tomar una base y convertirla en una base ortonormal (BON). El proceso de normalizar los vectores (dividir por su norma) es sencillo, mientras que el desafío es lograr que los vectores sean ortogonales entre sí ([01:18:32](#)). El método consiste en construir iterativamente un conjunto de vectores ortogonales ($\{K_i\}$), asegurándose de que cada nuevo vector agregado sea ortogonal a todos los vectores previamente incluidos, restándole las proyecciones ortogonales correspondientes ([01:19:59](#)).
- Complemento Ortogonal** Se discutió el concepto de complemento ortogonal de un subespacio S (S^\perp), donde el producto interno de cualquier vector de S y cualquier vector de S^\perp es siempre cero. Ise posgrados mencionó que esto se utiliza en el modelado de algunos modelos clásicos, a pesar de que no existe una "aplicación directa" inmediata para este concepto ([01:26:31](#)). Tras esta discusión, Lucia T. Capon Paul solicitó un receso de 10 minutos ([01:28:36](#)).
- Relación entre Producto Interno, Norma y Distancia** Ise posgrados explicó que un producto interno define automáticamente una norma, y esta norma, a su vez, permite definir una función de distancia como la norma de la resta de dos vectores. La función de distancia debe cumplir con ser no negativa, ser cero si y solo si los vectores son los mismos, ser simétrica y cumplir con la desigualdad triangular ([01:41:54](#)). La "magia" en la definición de la distancia radica en cómo se calcula la norma, lo cual depende del producto interno subyacente ([01:43:22](#)).
- Matrices Definidas Positivas y Formas Cuadráticas** Ise posgrados introdujo el concepto de matriz definida positiva (DP), la cual debe ser cuadrada y simétrica. Además, la forma cuadrática ($x^T A x$) debe ser estrictamente positiva para todo vector x distinto de cero ([01:46:16](#)). Si la forma cuadrática es no negativa, se le llama semidefinida positiva ([01:47:35](#)).
- Teorema de la Equivalencia entre Producto Interno y Matrices Definidas Positivas** Ise posgrados presentó un teorema clave que relaciona el producto interno con las matrices definidas positivas. Este teorema establece que una función es un producto interno si y solo si existe una base B y una matriz definida positiva A tal que el producto interno se calcula como una forma cuadrática utilizando la matriz A y las representaciones de los vectores en la base B . Esto es potente porque cualquier matriz definida positiva define un producto interno sobre ese espacio vectorial, lo cual es más fácil de encontrar que buscar funciones ([01:51:22](#)) ([01:54:55](#)).

- Definición de Producto Interno y Matrices Definidas Positivas** Ise posgrados explicó que las matrices definidas positivas construyen un producto interno ([01:58:29](#)). Las matrices definidas positivas pueden usarse como producto interno, lo que es clave para ciertos modelos. Lucia T. Capon Paul preguntó si la construcción de dicha matriz implica cumplir con las propiedades de un producto interno, y Ise posgrados aclaró que el desafío radica en garantizar constructivamente que la matriz sea definida positiva y simétrica, ya que la inicialización aleatoria de matrices no lo garantiza ([02:00:22](#)).
- Garantía Matemática de Inversibilidad de Matrices** Ise posgrados enfatizó la importancia de la base teórica para entender los modelos, citando un caso donde se necesita calcular una inversa de matriz y se requiere una garantía de que exista ([02:06:41](#)). Se mostró una demostración de que si una matriz es definida positiva, entonces tiene una inversa ([02:07:57](#)). La demostración se realiza por la negación de la consecuencia (método del absurdo), donde se demuestra que una matriz no definida positiva no tiene inversa ([02:09:18](#)).
- Construcción de Matrices Definidas Positivas** Ise posgrados presentó una construcción de matriz de la forma $A = x x^T + \lambda I$, donde x es un vector y λ es un escalar positivo, para mostrar que es definida positiva ([02:10:43](#)). Demostraron que esta construcción siempre da un resultado estrictamente positivo para la forma cuadrática con vectores no nulos, ya que el término con λ garantiza la positividad estricta. La conclusión es que este tipo de construcción resulta en una matriz definida positiva y, por lo tanto, inversible ([02:12:35](#)) ([02:15:43](#)).
- Introducción al Problema de Sistemas de Recomendación** Ise posgrados introdujo el problema de los sistemas de recomendación, mencionando el contexto del concurso Netflix Prize alrededor de 2007-2008 ([02:03:11](#)). Explicó que el problema se caracteriza por una matriz de calificaciones (ratings) extremadamente grande, donde la gran mayoría de los valores son desconocidos (hasta el 99%) ([02:19:09](#)). Esta matriz tiene usuarios en las filas e ítems (productos, películas, etc.) en las columnas, y el objetivo es predecir los valores desconocidos ([02:20:30](#)) ([02:23:02](#)).
- Modelo de Factorización de Matrices para Recomendaciones** Ise posgrados describió el modelo de factorización de matrices, donde cada usuario e ítem se describe como un vector de R^K , siendo K un hiperparámetro ([02:24:19](#)). La calificación predicha es el producto escalar entre el vector del usuario y el vector del ítem, lo que aproxima la matriz de calificaciones como el producto de dos matrices $R \approx U B$ ([02:25:32](#)).

- Función de Costo y Minimización para el Modelo** La función de costo J se define como la suma de los errores al cuadrado (diferencia entre la calificación real y la predicha) únicamente para los elementos conocidos, más un término de regularización (las normas al cuadrado de las matrices U y B) ([02:28:20](#)). Para optimizar los parámetros de las matrices U y B , se utiliza el método de cuadrados mínimos alternantes (ALS), donde se mantiene una matriz constante mientras se optimiza la otra de forma iterativa ([02:29:38](#)).
- Implementación del Método de Cuadrados Mínimos Alternantes (ALS)** Ise posgrados explicó que las matrices U y B se inicializan con valores aleatorios ([02:31:48](#)). La minimización de la función de costo se realiza a nivel de filas para U y columnas para B , aprovechando que los observados son los mismos para todas las *features* de un mismo usuario ([02:36:08](#)). El proceso implica derivar la función de costo e igualarla a cero para despejar el vector óptimo de la fila o columna respectiva ([02:34:46](#)) ([02:40:38](#)).
- Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales** Al despejar el vector U (o B), se obtiene un sistema lineal que involucra una matriz cuadrada que tiene la misma construcción de $X X^T + \lambda I$, que se demostró que es definida positiva y, por lo tanto, tiene inversa. La solución para el vector óptimo se obtiene multiplicando por la inversa de esta matriz, y la inversa de una matriz $K \times K$ es computacionalmente económica, independientemente del tamaño del *dataset* ([02:40:38](#)).
- Demostración Práctica y Hallazgos del Modelo** Ise posgrados mostró un ejemplo de implementación del algoritmo ALS con el *dataset* MovieLens, utilizando un criterio de convergencia simple basado en el número de iteraciones ([02:46:44](#)). Presentó curvas de pérdida, donde la pérdida de entrenamiento (curva roja) debe bajar, y la métrica de error en el set de validación (curva negra) indica si hay *overfitting* ([02:51:38](#)). A pesar de no haberle dado información de géneros, el modelo logró recomendar películas con géneros similares a los que le gustaban al usuario 120, demostrando que aprendió la estructura subyacente de los datos solo a partir de las calificaciones ([02:54:06](#)).
- Ajuste de Descriptores y Modelo de Ratings** Ise posgrados explicó que el modelo ajusta los vectores de descriptores de usuario (vectores de RK) para que los productos internos sean similares para usuarios con gustos parecidos, lo que resulta en ratings parecidos sobre las mismas películas. Señaló que el modelo aprende basándose en los ratings de otros usuarios con gustos parecidos, lo que actúa como un mecanismo de regularización.

Este modelo es potente porque aproxima los gustos de la gente sin entender conceptos como el género de la película o si son artículos de limpieza ([02:56:50](#)).

- **Factorization Machines y Fundamentos Teóricos** Ise posgrados mencionó que una "vuelta de rosca" para asociar 'features' se logra con 'factorization machines', que implica introducir una matriz de producto interno entre U y B . Destacó que, a pesar de la complejidad de su aplicación, los fundamentos del modelo son accesibles para quien haya tomado "dos clases de análisis matemático". Además, Ise posgrados indicó que la parte más complicada podría ser la optimización del modelo, pero lo que este plantea es bastante directo y se basa en lo visto en esa y la clase anterior ([02:58:25](#)).
- **Inicialización de Vectores de Longitud K** Tomas Mc Nally preguntó sobre los valores iniciales de los vectores de longitud K , a lo que Ise posgrados respondió que se inicializan de forma aleatoria, específicamente con un valor al azar entre 0 y 1 sobre la raíz de K . Ise posgrados explicó que esta técnica hace que la esperanza de la norma de los vectores sea cercana a uno. El objetivo de esta inicialización es empezar con valores razonables, no estrictamente cero, para que puedan actualizarse y evitar dificultades en el proceso de optimización, aunque la teoría sugiere que no importa el punto de partida, siempre se debe llegar a un lugar razonable.
- **Cierre de la Sesión** Antes de finalizar, Ise posgrados dejó disponible la encuesta de clase y se ofreció a quedarse para resolver dudas, deseando un buen fin de semana a los participantes que se iban. Alejandro Valle, Agustin Biancardi, Alan Vignolo, Cesar Orellana, Gabriel Quiroga y Tomas Mc Nally agradecieron y se despidieron ([03:00:00](#)). Mariano Jauffroy intentó hacer una pregunta antes de que Ise posgrados finalizara la reunión.

Pasos siguientes recomendados

No se encontraron próximos pasos sugeridos para esta reunión.

Revisa las notas de Gemini para asegurarte de que sean correctas. [Obtén consejos y descubre cómo toma notas Gemini](#)

Danos tu opinión sobre el uso de Gemini para tomar notas en una [breve encuesta](#).