1. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. π es un número irracional.
b. 5 no es un número racional.
c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un número racional.
d. 0 es un número natural.
e. Todo número entero o bien es positivo o bien es negativo.
f. 0.13 es racional.

2. Responder:
a. ¿Cuántos números naturales hay mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 1?
b. ¿Cuántos números enteros hay mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 1?
c. ¿Cuántos números reales hay mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 1?
d. Mencionar dos números racionales que se encuentren entre 2 y 3.

3. Completar con “<”, “>” o “=” :

a. $(2.\,3)^2 .....2^2.\,3^2$
b. $(2 + 3)^2 .... 2^2 + 3^2$
c. $-(2)^4 \; ..... \; (-2)^4$
d. $4.\frac{3}{4} .....3$
e. $2.\frac{10}{9} .....\frac{20}{18}$
f. $-\frac{1}{5} .....\frac{1}{-5}$
g. $\sqrt{2} .....1{,}42$
h. $\frac{7+3}{6+3} \; ..... \; \frac{7}{6}+1$
i. $(19^2)^5 ...... 19^7$
j. $-\frac{4+5}{3} \; ..... \; \frac{1}{3}$

4. ([1])
a. ¿Qué condiciones deben cumplir dos números reales a, b para que $\frac{a}{b}=0$?

b. ¿Para qué valores de x se verifica la igualdad $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2$?

5. a) Verificar que $\sqrt[3]{5}$ es solución de la ecuación $x^6 - 2x^3 - 15 = 0$
b) Verificar que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es solución de la ecuación $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

6. Sabiendo que $a^2 - b^2 = 12$, y que $a - b = 4$, calcular:

i) $2(a+b)$ ii) $(a+b)^{-1}$ iii) $a^2 + b^2 + 2ab$

([1]) Resuelto al final de este trabajo práctico

7. ([2]) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) $(x+9)^2 = x^2 + 81$, para cualquier número real x.
b) $-a$ es un número negativo, para cualquier número real a.
c) $x^2 \geq x$ para cualquier número real x.
d) Para dos números reales cualesquiera x, y: $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$
e) Para dos números reales no negativos cualesquiera x, y: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
f) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, (cualesquiera $a \neq -b, a \neq 0, b \neq 0$)
g) $(a\,b)^2 = a\,b^2$ para valores reales cualesquiera de *a* y *b*.
h) $\frac{c+d}{a+d} = \frac{c}{a}$, $(a+d \neq 0, a \neq 0)$.
i) La expresión $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$ $(h \neq 0)$ es equivalente a $2a+h$.
j) La expresión $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0, y>0)$ es equivalente $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

8. La suma de dos números naturales a y b es 38 y su producto es igual a 360. ¿A qué es igual la suma de sus inversos $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$? ¿Se puede calcular dicha suma sin averiguar los números?

9. Operar y expresar el resultado utilizando propiedades de manera que quede indicado con un único exponente ($x \neq 0$).

a. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ b. $\frac{3}{x^4} . \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ c. $x^{-\frac{1}{2}} . \frac{1}{x^2}$ d. $\left[\left(x^{-7} : x^{\frac{6}{4}}\right) . x^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

10. Calcular aplicando propiedades

i. $4^n + 3.\ 2^{n+1} - \left(2^n + 1\right)^2$

ii. $\left(3^{n-1} + \frac{1}{9^n} . 3^{3n-2} - 3^4 . 3^{-5+n}\right)^4 : \left(\frac{1}{3^{-n+1}}\right)^4$

iii. $\left(5^{3(n-1)} .\ 5^{-2(n-1)} + 5^{n-1}\right)^{-1}$

11. ([3]) Simplificar la escritura y eliminar los exponentes negativos ($x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$):

([2]) Resuelto al final de este trabajo práctico
([3]) Resuelto al final de este trabajo práctico

a. $\dfrac{(3x)^2 y^{-3}}{2x^3(2y)^{-4}}$ b. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}x\right)^3 y^5 x^{-2}}{\left(\frac{1}{4}y\right)^2}$ c. $\dfrac{(2x+y)^2-4xy}{x^2y^2}$ d. $\dfrac{x+y}{x^{-1}+y^{-1}}$ e. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^2+y^2}$

12.

a. Una vendedora cobra por mes un sueldo básico de 3000$ más un 10% de comisión sobre el monto total de las ventas realizadas ese mes. Escribir la expresión algebraica que permite calcular el sueldo de la vendedora de acuerdo a las ventas realizadas en un determinado mes.

b. Juan decide invertir sus ahorros en un plazo fijo. El banco le ofrece una tasa de interés del R% anual. Si tiene 2500$, escribir la expresión algebraica que representa el dinero que tiene Juan al cabo de un año.

c. Un comerciante compró 1000 cabezas de ganado a 150$ cada una. Vendió 400 de ellas obteniendo una ganancia del 25% sobre el precio de compra. Si las restantes 600 cabezas las vende a un precio unitario de p pesos, escribir la expresión algebraica que permite conocer la ganancia del comerciante por la venta de todas las unidades adquiridas.

13. Relacionar cada uno de los siguientes enunciados con la expresión algebraica correspondiente. Para los enunciados a los que no le corresponda ninguna de las expresiones dadas, indicar cuál sería la expresión correspondiente.

Enunciados

a. La diferencia entre el doble de un número entero a y su anterior.
b. El doble del siguiente de un número entero a.
c. El siguiente del doble de un número entero a.
d. El cuadrado de la diferencia entre dos números a y b.
e. La diferencia entre los cuadrados de dos números a y b.
f. La diferencia entre el cuadrado del siguiente de un número y el cuadrado de su anterior
g. El cuadrado de la suma de dos números a y b

Expresiones algebraicas

1. $2a + 1$
2. $a^2 - b^2$
3. $2(a + 1)$
4. $2a - (a - 1)$
5. $(a - b)^2$

14. Realizar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma simplificada.

a. $(1 - 3x)^2 - 9x(x + 3) - 2[x^3 + \frac{1}{2} - 18x]$

b. $(a^{124} - 9)^2 - (a^{124} + 9)^2$

c. $(-\frac{3}{4}x + \sqrt{5})(\sqrt{5} + \frac{3}{4}x) + \frac{1}{16}x(x - 32)$

d. $(-\dfrac{2}{5}x^4 + \dfrac{5}{2}x^4)^3$

15. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones en el conjunto numérico indicado en cada caso. Verificar el resultado obtenido.

a. $3.(x+1)-5=8$

b. $\frac{5}{4}\left(x+\frac{1}{5}\right)+4=\frac{1}{3}$

Considerando cada una de las ecuaciones anteriores, ¿en qué conjunto/s numéricos la ecuación no tiene solución?

c. $2(x-1)+\frac{5}{3}(x+3)=3+\frac{11}{3}x$ en R

d. $3x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ en R

e. $x^2-2x=0$ en R

f. $3(x-5)(x^2-2)=0$ en R

g. $2x^2-8x=6$ en R

h. $(x-2).\sqrt{x-3}=0$ en N y en R

i. $\sqrt{x}=x$ en R

j. $\frac{x^2-1}{x-1}=0$ en R

16. Factorizar las siguientes expresiones algebraicas.

a. $3x^2+21x+36$

b. $x^3-\frac{1}{9}x$

c. $(x+1)(x+2)-3(x+1)$

17. ([4]) Realizar las operaciones indicadas en las siguientes expresiones algebraicas, factoreando y simplificando convenientemente. Indicar previamente para qué conjunto de números reales las expresiones dadas en cada caso están definidas.

a. $\frac{x^2-36}{2x^2+6x-36}:\frac{6-x}{4x^2-12x}$

b. $\frac{2a^2+2a+1}{a^2-a}-\frac{a+4}{a-1}$

c. $\frac{x^3-x}{x}.\frac{x-5}{3x^2-3x-6}.\frac{1}{x^2-25}$

d. $\frac{x^3-1}{x-1}$

e. $\frac{2x^3-x-1}{x^4-x^3}.\frac{4}{2x^2+2x+1}$

18. ([5]) Hallar el conjunto solución las siguientes ecuaciones, verificando el resultado obtenido.

([4]) Resuelto al final de este trabajo práctico

([5]) Resuelto al final de este trabajo práctico

a. $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{(x+1)+(x+1)^2}=-1$

b. $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+1}{2-x}=0$

c. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{3}{4}$

19.

a. Hallar los números enteros que verifican que el triple de su cuadrado más la mitad de su siguiente es igual a $\frac{1}{2}$.

b. Hallar todos los números enteros que verifican que el cuadrado de su consecutivo es igual a la suma entre su doble y diez.

20. Si el precio de un alquiler es $ 1238 en el mes de diciembre y $1522.74 en el mes de enero, ¿cuál fue el porcentaje de aumento?

21. ([6]) Al comprar en un comercio, quienes pagan en efectivo pagan un 21% de impuesto al valor agregado (IVA). Los clientes que pagan con tarjeta de débito pagan lo mismo pero reciben, al mes siguiente, una devolución del 5% del precio sin IVA ¿Qué porcentaje del precio pagado con la tarjeta de débito reciben como devolución?

22. ([7]) Un producto aumenta de precio el día 2 del mes, y luego, el día 15, baja un 20%, llegando a un precio que es un 12% inferior al del día 1 ¿Cuál fue el porcentaje de aumento del día 2?

23. La señora Juana recibe una herencia de 250.000$. Luego de analizar varias opciones, decide colocar el dinero en distintos fondos de inversión. De esta manera, una parte del monto de la herencia la destina al Fondo de Inversión I, que le ofrece una tasa de interés del 4% anual y el resto del dinero lo destina al Fondo de Inversión II que le paga un 6% de interés anual.
Si Juana desea recibir, en concepto de intereses, un total de 13000$ ¿cuánto dinero tiene que depositar en cada uno de los fondos de inversión?

24. Martín invirtió sus 400$ de ahorro en un plazo fijo en un banco que le ofrece una tasa de interés del R% anual. Al finalizar el año decide renovar el plazo fijo, dejando el capital inicial y el interés obtenido depositado en el banco durante un año más con tasa de interés del R%. Si al final del segundo año Martín contaba con 484$ ¿cuál fue la tasa de interés que le otorgó el banco?

25. ([8]) Hallar analíticamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Representar el conjunto solución en la recta numérica.

a. $2x+5<-\frac{3}{2}x+4$

b. $(2x+3)(3x+2)>0$

c. $\frac{11(x-1)+7x}{2}\geq-\frac{5+2(5-9x)}{2}$

([6]) Resuelto al final de este trabajo práctico
([7]) Resuelto al final de este trabajo práctico
([8]) Resuelto al final de este trabajo práctico

d. $\frac{1}{2}(7+4x)+9<2(x+3)-\frac{1}{6}$

e. $x.(x-1)>x^2+2x$

26. El gerente de una pequeña fábrica de zapatos sabe que a un precio de p pesos pueden venderse x pares de cierto modelo al mes. La relación entre precio y pares vendidos está dada por $p=640-2x$. Además, el precio de cada par no puede ser inferior a \$200. ¿Cuántos pares debe vender para obtener un ingreso mensual de al menos \$12000?

27. Dado un número real x, se define el **módulo o valor absoluto** de x como la distancia de x al cero. Notación: $|x|$. Calcular:

a) $|3|$ b) $|-3|$ c) $|12,5|$ d) $|-1/2|$ e) $|-2+4|-|-1|+|0|$

28. Escribir los siguientes enunciados utilizando la notación de módulo:

a. La distancia de un número real x al cero es igual a 6.
b. La distancia entre un número real x y -2 es igual a 6
c. La distancia entre un número real x y 6 es igual a 0.
d. La distancia entre un número real x y 4 es igual a 2.

De acuerdo a las respuestas anteriores y utilizando el concepto de valor absoluto o módulo, ¿de qué manera podría expresarse la distancia entre dos números?

29. ([9]) Resolver geométrica y analíticamente:

a) $|x| = -2$ b) $|x| = 4$ c) $|x+3|=5$ d) $|x| \le 1$ e) $|x - 1| \ge 3$ f) $|x+1|<2$

30. Completar la siguiente tabla. La información volcada en la primera fila puede resultar una guía para completar las filas restantes.

Módulo	Distancia	Desigualdades	Intervalo o unión de intervalos	Gráfico
$\|x-3\| \le 2$	d(x, 3) $\le$ 2	$1 \le x \le 5$	[1. 5]	---[-----------]---- 1 5
$\|x+2\| \ge 1$				
	d(x, -1) > 2			
		$-3 \le x \le 2$		
			[-4, 4]	
				----[----------]- -1 4

31. Según la revista "*Tecnología hoy*", el precio p, en pesos, de una netbook durante el corriente año estará dado por

([9]) Resuelto al final de este trabajo práctico

$$\left|p-2300\right|\leq 600$$

Determinar el precio máximo y el precio mínimo que tendrá una netbook durante el año.

32. Hallar el conjunto solución. Representar en la recta real el conjunto obtenido.

a. $\left|\dfrac{x-3}{5}\right|\leq 1$

b. $x^2 - 5 = 0$

c. $(x^2 + 1)|x - \pi| = 0$

d. $|2 - 3x| > 8$

<u>Algunos ejercicio resueltos</u>

4.

a. ¿Qué condiciones deben cumplir dos números reales a, b para que $\frac{a}{b}=0$?

b. ¿Para qué valores de x se verifica la igualdad $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2$?

Resolución ejercicio 4:

a) En primer lugar, por tratarse de una división, debemos tener en cuenta que el denominador no puede ser igual a cero (ya que la división por cero no está definida). Por otro lado, el único caso en que el resultado de una división es igual a cero es cuando el numerador (o sea, "a") es cero.

b) Sabemos que la expresión $\sqrt{x^2}$ está definida para cualquier valor real de *x* ya que x^2 es siempre un número positivo o cero y la raíz cuadrada de un número no negativo siempre se puede calcular. Por otro lado, la expresión $(\sqrt{x})^2$ está definida sólo cuando *x* toma valores mayores o iguales a cero. En este caso, la igualdad entre ambas expresiones es verdadera.
Para convencernos, supongamos que *x* = -1. Entonces, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ mientras que $(\sqrt{-1})^2$ no se puede calcular dentro del conjunto de los números reales.

7. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) $(x+9)^2 = x^2 + 81$, para cualquier número real *x*.
Falsa. Para demostrarlo basta encontrar un valor de x en el que no se verifique la igualdad. Si tomamos, por ejemplo, *x* = 1,
$(1 + 9)^2 = 10^2 = 100 \neq 1^2 + 81 = 82$.
Lo correcto es $(x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81$.

b) - *a* es un número negativo, para cualquier número real a.
Falso. Si *a* es un número real positivo es cierto que –*a* es un número negativo. Pero lo anterior no es cierto si *a* es negativo. Basta encontrar un contraejemplo: si *a* = -3, -*a* = -(-3) = 3 que es un número positivo.

c) $x^2 \geq x$ para cualquier número real x.

Falso. Para demostrarlo, basta encontrar un caso en el que la desigualdad no se cumpla. Tomemos *x* = $\frac{1}{2}$. Entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ por lo que en este caso la desigualdad del enunciado no es cierta. Aclaramos que, si bien hay valores de *x* que cumplen la desigualdad (por ejemplo *x* = 2) para que la afirmación dada resulte verdadera, la desigualdad debe ser cierta <u>para todos</u> los números reales *x* y hemos hallado al menos uno que no la cumple (*x* = $\frac{1}{2}$).

d) Para dos números reales cualesquiera x, y: $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$
Falso. Tomemos x = -1, y = -2. Tenemos que -1> -2. Pero $(-1)^2 = 1 < (-2)^2 = 4$, por lo que la desigualdad no se cumple.

e) Para dos números reales no negativos cualesquiera x, y: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
Falso. Tomemos x = 9, y = 1 entonces $\sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3.16 \neq \sqrt{9} + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4$.

f) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, (cualesquiera $a \neq -b, a \neq 0, b \neq 0$)
Falso. Tomemos a = 1, b = 1. Entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$ mientras que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Ya habíamos visto que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$.

g) $(a\,b)^2 = a\,b^2$ para valores reales cualesquiera de *a* y *b*.
Falso. La potencia se puede distribuir respecto de la multiplicación. De esta manera $(ab)^2 = a^2b^2$.

h) $\dfrac{c+d}{a+d}=\dfrac{c}{a}$, $(a+d\neq 0, d\neq 0)$.

Falso. Para demostrarlo, basta tomar un caso en el que la igualdad no se cumple. Por ejemplo, con c = 3, d = 1 y a = 2:

$\dfrac{c+d}{a+d}=\dfrac{3+1}{2+1}=\dfrac{4}{3}$ mientras que $\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{4}{3}$

i) La expresión $\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$ $(h\neq 0)$ es equivalente a $2a+h$

Verdadera. Si desarrollamos la expresión $(a+h)^2$ tenemos que $(a+h)^2=(a+h)(a+h)=a^2+ah+ha+h^2=a^2+2ah+h^2$. Por lo tanto, para $h\neq 0$:

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{(a^2+2ah+h^2)-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=\frac{h(2a+h)}{h}=2a+h$$

$a^2-a^2=0$

Primero sacamos factor común *h.*
Después simplificamos

j) La expresión $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0, y>0)$ es equivalente a $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

Verdadera. Para trabajar con la expresión $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (que tiene sentido cuando tanto *x* como *y* son mayores a cero) debemos racionalizar. La racionalización consiste en eliminar las raíces del denominador, para lo cual debemos multiplicar numerador y denominador por una expresión conveniente.

Para racionalizar, hay que tener en cuenta la igualdad conocida como diferencia de cuadrados: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ya que la idea consiste en "transformar" el denominador en una diferencia de cuadrados. Entonces:

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

Diferencia de cuadrados:
$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y$,
x> 0, y> 0

Simplificamos

11. Simplificar la escritura y eliminar los exponentes negativos ($x\neq 0, y\neq 0$):

a. $\dfrac{(3x)^2y^{-3}}{2x^3(2y)^{-4}}$ b. $\dfrac{\left(\frac{3}{2}x\right)^3y^5x^{-2}}{\left(\frac{1}{4}y\right)^2}$ c. $\dfrac{(2x+y)^2-4xy}{x^2y^2}$ d. $\dfrac{x+y}{x^{-1}+y^{-1}}$ e. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^2+y^2}$

Resolución ejercicio 11:

a) $\dfrac{(3x)^2 y^{-3}}{2x^3(2y)^{-4}} = \dfrac{9x^2y^{-3}}{2x^3 2^{-4} y^{-4}} = \dfrac{9}{2.2^{-4}}.\dfrac{x^2}{x^3}.\dfrac{y^{-3}}{y^{-4}} = \dfrac{9}{2^{-3}}.x^{2-3}.\,y^{-3-(-4)} = 72.x^{-1}.y = \dfrac{72y}{x}$

Propiedad distributiva de la potencia con respecto a la multiplicación

$\dfrac{9}{2^{-3}} = \dfrac{9}{(\frac{1}{2})^3} = \dfrac{9}{(\frac{1}{8})} = 9:\dfrac{1}{8} = 9.\dfrac{8}{1} = 72$

b) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}x\right)^3 y^5x^{-2}}{\left(\frac{1}{4}y\right)^2} = \dfrac{\frac{9}{4}x^3y^5x^{-2}}{\frac{1}{16}y^2} = \dfrac{36x\,y^5}{y^2} = 36xy^3$

Propiedad distributiva de la potencia con respecto a la multiplicación

- $\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{16}} = \dfrac{9}{4}.\,16 = 9.4 = 36$
- $x^3.\ x^{-2} = x^{3-2} = x$

$\dfrac{y^5}{y^2} = y^3$

c) $\dfrac{(2x+y)^2 - 4xy}{x^2y^2} = \dfrac{4x^2 + 4xy + y^2 - 4xy}{x^2y^2} = \dfrac{4x^2 + y^2}{x^2y^2} = \dfrac{4}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}$

$(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2.\,2x\,.\,y + y^2$
$= 4x^2 + 4xy + y^2$

Propiedad distributiva de la suma con respecto a la división.

d) $\dfrac{x+y}{x^{-1}+y^{-1}} = \dfrac{x+y}{\left(\frac{y+x}{xy}\right)} = (x+y).\dfrac{xy}{y+x} = xy$

$x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y+x}{xy}$

División de fracciones:
$\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}.\dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}\quad b\neq 0, d\neq 0, c\neq 0$

e) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y^2+x^2}{x^2y^2}\right).\dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{x^2y^2}$

$x^{-2} + y^{-2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{y^2+x^2}{x^2y^2}$

17. Se pide realizar las operaciones indicadas, factoreando y simplificando convenientemente, indicando previamente para qué conjunto de números reales están definidas las expresiones.

a. $\dfrac{x^2-36}{2x^2+6x-36} : \dfrac{6-x}{4x^2-12x}$

Comenzamos factorizando numeradores y denominadores:

$$\frac{x^2-36}{2x^2+6x-36} : \frac{6-x}{4x^2-12x} = \frac{(x-6).(x+6)}{2.(x-3).(x+6)} : \frac{6-x}{4.x.(x-3)}$$

Antes de simplificar, analicemos para qué valores de x está definida la esta expresión:

En las expresiones $\dfrac{(x-6).(x+6)}{2.(x-3).(x+6)}$ y $\dfrac{6-x}{4.x.(x-3)}$ el denominador no puede ser cero, por lo tanto $x \neq 3$ y $x \neq -6$, en la primera, y $x \neq 3$ y $x \neq 0$, en la segunda.

Además, $\dfrac{6-x}{4.x.(x-3)}$ divide a la primera expresión, por lo tanto no puede valer cero, es decir, $x \neq 6$.

Luego, la expresión está definida para todo x perteneciente a R-{-6, 0, 3, 6}.

Ahora, simplificamos la expresión y realizamos las operaciones indicadas

$$\frac{x^2-36}{2x^2+6x-36} : \frac{6-x}{4x^2-12x} = \frac{(x-6).(x+6)}{2.(x-3).(x+6)} : \frac{6-x}{4.x.(x-3)} = \underbrace{\frac{(x-6)}{2.(x-3)} : \frac{6-x}{4.x.(x-3)}}_{\text{Simplificamos}} = \underbrace{\frac{(x-6)}{2.(x-3)} . \frac{4.x.(x-3)}{6-x}}_{\text{Recordemos } \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}} = \frac{(x-6)}{2} . \frac{4.x}{6-x} = \underbrace{\frac{(x-6)}{2} . \frac{4.x}{-(x-6)}}_{6-x=-(x-6)}$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{4.x}{-1} = -2x$$

b. $\dfrac{2a^2+2a+1}{a^2-a} - \dfrac{a+4}{a-1}$

En el primer término, sacamos factor común "a" y luego tomamos a(a-1) como común denominador entre las dos fracciones

$$\underbrace{\frac{2a^2+2a+1}{a.(a-1)} - \frac{a+4}{a-1}}_{\text{Los valores que no puede tomar x son 0 y 1}} = \frac{2a^2+2a+1-(a+4).a}{a.(a-1)} = \frac{2a^2+2a+1-a^2-4a}{a.(a-1)} = \underbrace{\frac{a^2-2a+1}{a.(a-1)}}_{\text{factorizamos el numerador}} = \underbrace{\frac{(a-1)^2}{a.(a-1)}}_{\text{Simplificamos}} = \frac{a-1}{a}$$

La expresión está definida para todo x perteneciente a R-{0, 1}.

c. $\dfrac{x^3-x}{x} . \dfrac{x-5}{3x^2-3x-6} . \dfrac{1}{x^2-25}$

Factorizamos numeradores y denominadores

$$\underbrace{\frac{x^3-x}{x} . \frac{x-5}{3x^2-3x-6} . \frac{1}{x^2-25}}_{\text{factor común diferencia de cuadrados}} = \frac{x.(x-1).(x+1)}{x} . \frac{x-5}{3(x+1).(x-2)} . \frac{1}{(x-5).(x+5)}$$

Analicemos para qué valores está definida la expresión algebraica.

Como podemos observar en la factorización, los valores de x que anulan los denominadores son -5, -1, 0, 2 y 5.

Por lo tanto, esos valores no deben estar en el dominio de definición de la expresión.

$x \in R - \{-5, -1, 0, 2, 5\}$

$$\frac{x^3 - x}{x} \cdot \frac{x-5}{3x^2 - 3x - 6} \cdot \frac{1}{x^2 - 25} = \frac{x.(x-1).(x+1)}{x} \cdot \frac{x-5}{3(x+1).(x-2)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Simplificamos}}}{\frac{1}{(x-5).(x+5)}} = \frac{1.(x-1)}{1} \cdot \frac{1}{3.(x-2)} \cdot \frac{1}{(x+5)} = \frac{x-1}{3.(x-2).(x+5)}$$

d. $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Factorizamos el numerador utilizando la regla de Ruffini. Sabemos que $x = 1$ es una raíz o cero del polinomio $x^3 - 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Entonces $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1\ ,\ x \neq 1$

e. $\dfrac{2x^3 - x - 1}{x^4 - x^3} \cdot \dfrac{4}{2x^2 + 2x + 1}$

Como $x = 1$ anula $2x^3 - x - 1$, utilizando Ruffini, resulta que es posible factorizar la expresión de la siguiente forma:

$2x^3 - x - 1 = (x - 1).(2x^2 + 2x + 1)$

Por otro lado, sacando factor común x^3,

$x^4 - x^3 = x^3.(x - 1)$

Luego, la expresión algebraica original se puede reescribir

$$\frac{2x^3 - x - 1}{x^4 - x^3} \cdot \frac{4}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1).(2x^2 + 2x + 1)}{x^3.(x-1)} \cdot \frac{4}{2x^2 + 2x + 1}$$

Antes de simplificar, analicemos para qué valores de x está definida la expresión.

La única restricción que tenemos en este caso es que los denominadores no pueden ser cero.

Luego, $x^3.(x-1) \neq 0$ y $2x^2 + 2x + 1 \neq 0$. Con lo cual $x \neq 0$ y $x \neq 1$ (de la primera desigualdad, notar que la segunda no se anula para ningún x).

Ahora sí, simplificamos las expresiones $x - 1$ y $2x^2 + 2x + 1$

$$\frac{2x^3 - x - 1}{x^4 - x^3} \cdot \frac{4}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1).(2x^2 + 2x + 1)}{x^3.(x-1)} \cdot \frac{4}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{x^3} \quad \text{si } x \in R - \{0, 1\}$$

18. Se pide hallar el conjunto solución de cada ecuación.

a. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)+(x+1)^2}=-1$

En principio, buscaremos un denominador común. Para ello será conveniente factorizar el denominador del segundo suma

$(x+1)+(x+1)^2=(x+1).[1+(x+1)]$ (SACAMOS FACTOR COMÚN $(x+1)$)

$=(x+1).(x+2)$

Luego,

$$\frac{x}{x+1}+\frac{1}{(x+1)+(x+1)^2}=-1$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{1}{(x+1).(x+2)}=-1$$

$$\frac{x.(x+2)+1}{(x+1).(x+2)}=-1$$

$$x.(x+2)+1=-1.(x+1).(x+2)$$

$x^2+2x+1=-(x^2+3x+2)$ (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

$$2x^2+5x+3=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos $x=-1$ y $x=-\dfrac{3}{2}$.

Observemos que $x=-1$ no es solución ya que anula los denominadores. Por lo tanto el conjunto soluc
$S=\{-3/2\}$

b. $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{2-x}=0$

Buscamos común denominador

$$\frac{(x+2).(2-x)+(x+1).(x-1)}{(x-1).(2-x)}=0$$

Usando que (a+b) . (a-b) = a^2-b^2

$$\frac{2^2-x^2+x^2-1^2}{(x-1).(2-x)}=0$$

$\dfrac{3}{(x-1).(2-x)}=0$ (recordemos que $\dfrac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b\neq 0$)

Entonces $3=0 \wedge (x-1).(2-x)\neq 0$, pero esto es un absurdo.

Luego, no existe ningún valor de x que verifique la ecuación. Por lo tanto S=$\emptyset$.

c. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{\underbrace{x^2-4}_{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}}=\dfrac{3}{4}$

Factoricemos el denominador del segundo término del miembro de la izquierda

$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{(x-2).(x+2)}=\dfrac{3}{4}$ (Observar que x= -2 y x=2 no podrían ser solución de la ecuación pues anulan los denominadores)

Tomamos (x-2).(x+2) como común denominador y realizamos la suma

$$\frac{(x-2)+1}{(x-2).(x+2)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{3}{4}$$

$$(x-1).4 = 3.(x^2-4)$$

$$4x-4 = 3x^2-12$$

$$-3x^2+4x+8=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior, obtenemos que x= $\frac{4+\sqrt{112}}{6}$ $\vee$ x= $\frac{4-\sqrt{112}}{6}$. Luego, S={ $\frac{4+\sqrt{112}}{6}$, $\frac{4-\sqrt{112}}{6}$ }

21. Al comprar en un comercio, quienes pagan en efectivo pagan un 21% de impuesto al valor agregado (IVA). Los clientes que pagan con tarjeta de débito pagan lo mismo pero reciben, al mes siguiente, una devolución del 5% del precio sin IVA ¿Qué porcentaje del precio pagado con la tarjeta de débito reciben como devolución?

<u>Resolución</u>: Llamemos x al precio sin IVA. Cuando pagamos con tarjeta de débito (o en efectivo) estamos pagando un 21% de IVA; es decir, pagamos x + $\frac{21}{100}$ x = x + 0,21x = 1,21x.

Ahora bien: con tarjeta de débito nos devuelven un 5% del precio sin IVA (un 5% de x) es decir. nos devuelven 0,05x. Si el precio que pagamos con tarjeta de débito (1,21x) representa el 100% entonces el dinero que nos devuelven (0.05x) es aproximadamente un 4,13% de lo pagado.

22. Un producto aumenta de precio el día 2 del mes, y luego, el día 15, baja un 20%, llegando a un precio que es un 12% inferior al día 1 ¿Cuál fue el porcentaje de aumento del día 2?

<u>Resolución:</u> Supongamos que nuestro producto cuesta \$30. El día dos del mes el precio aumenta en un cierto porcentaje que no conocemos (y qué es el que queremos averiguar); si llamamos *x* al porcentaje de aumento, entonces del día dos al quince nuestro producto costará $30 + \frac{x}{100}30 = 30\ \ 1+\frac{x}{100}$.

El día quince el producto baja un 20% por lo que el precio del producto será:

$$\underbrace{30\left(1+\frac{x}{100}\right)}_{\text{Precio día 15}} \underbrace{-\frac{20}{100}.30\left(1+\frac{x}{100}\right)}_{\text{20\% de descuento}} = (1-0.20)\,30\left(1+\frac{x}{100}\right) = 0{,}8.\,30\left(1+\frac{x}{100}\right)$$

Este último precio es un 12% inferior al precio del día uno, es decir, un 12% inferior a 30. Por lo tanto este último precio es igual a 30 – 0,12. 30 = (1 – 0,12). 30 = 0,88. 30. Por lo tanto, para hallar el porcentaje de aumento del día dos tenemos que plantear:

$$0{,}8.\,30\left(1+\frac{x}{100}\right) = 0{,}88.\,30$$

$$1+\frac{x}{100} = \frac{0{,}88.\,30}{0{,}8.\,30}$$

$$1+\frac{x}{100} = 1{,}1$$

$$x=10$$

O sea que el porcentaje de aumento del día dos fue del 10%. Notemos que el mismo procedimiento es válido si, en lugar de \$30, el precio del producto hubiese sido cualquier otro valor P (P > 0).

25. Hallar analíticamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Representar el conjunto solución en la recta numérica.

a. $2x+5<-\frac{3}{2}x+4$

b. $(2x+3)(3x+2)>0$

c. $\frac{11(x-1)+7x}{2}\geq-\frac{5+2(5-9x)}{2}$

d. $\frac{1}{2}(7+4x)+9<2(x+3)-\frac{1}{6}$

e. $x.(x-1)>x^2+2x$

Resolución

a. $2x+5<-\frac{3}{2}x+4 \leftrightarrow 2x+\frac{3}{2}x<4-5 \leftrightarrow \frac{7}{2}x<-1 \leftrightarrow x<-\frac{2}{7}$. Por lo tanto los valores de *x* que verifican la desigualdad $2x+5<\frac{3}{2}x+4$ son los que pertenecen al intervalo $(-\infty;-\frac{2}{7})$.

b. $(2x + 3)(3x + 2) > 0$. Tenemos un producto que tiene que ser positivo; para que esta condición se cumpla ambos factores deben tener el mismo signo. En decir, ser ambos positivos o ambos negativos. Debemos considerar entonces dos posibles casos:

- *Ambos factores positivos*: $2x + 3 > 0$ y $3x + 2 > 0$. De la primera desigualdad obtenemos que $x > -\frac{3}{2}$ mientras que de la segunda desigualdad obtenemos que $x > -\frac{2}{3}$. La intersección entre estas dos condiciones es el intervalo $(-\frac{2}{3},+\infty)$.
- *Ambos factores negativos*: $2x + 3 < 0$ y $3x + 2 < 0$. De la primera desigualdad obtenemos que $x < -\frac{3}{2}$ mientras que de la segunda desigualdad obtenemos $x < -\frac{2}{3}$. La intersección entre estas dos condiciones es el intervalo $(-\infty;-\frac{3}{2})$.

La solución final es la unión de las dos soluciones parciales. Es decir, $(2x + 3).(3x + 2) > 0$ si *x* pertenece al conjunto $(-\infty;-\frac{3}{2}) \cup (-\frac{2}{3},+\infty)$.

c. $\frac{11(x-1)+7x}{2}\geq-\frac{5+2(5-9x)}{2}$. Si multiplicamos por 2 ambos lados de la desigualdad se tiene $11(x-1)+7x\geq-[5+2(5-9x)]$.

Aplicamos propiedad distributiva, $11x-11+7x \geqslant -[5+10-18x] \Leftrightarrow 18x-11 \geqslant -15+18x \Leftrightarrow 18x-18x \geqslant -15+11 \Leftrightarrow 0 \geqslant -4$.

Como la última desigualdad se verifica independientemente del valor de x, el conjunto solución de la inecuación es S=R.

d. $\frac{1}{2}(7+4x)+9<2(x+3)-\frac{1}{6}$

Aplicamos propiedad distributiva:

$\frac{7}{2}+2x+9<2x+6-\frac{1}{6}$

$2x-2x<6-\frac{1}{6}-\frac{7}{2}-9$

$0<-\frac{40}{6}$

Como ésta última desigualdad es falsa, no existe ningún valor de x que verifique la inecuación original. Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\phi$.

e. $x.(x-1)>x^2+2x \leftrightarrow x^2-x> \leftrightarrow x^2+2x \leftrightarrow -x-2x>x^2-x^2 \leftrightarrow -3x>0 \leftrightarrow x<0$

$-3 < 0 \rightarrow$ Se invierte la desigualdad al dividir por -3

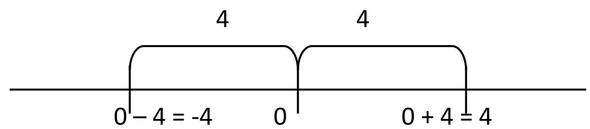
Por lo tanto, el conjunto solución es S=(-∞, 0).

29. Resolver geométrica y analíticamente:

a) |x| = -2 b) |x| = 4 c) $|x+3|=5$ d) $|x| \le 1$ e) |x - 1| ≥ 3 f) $|x+1|<2$

<u>Resolución ejercicio 29:</u>

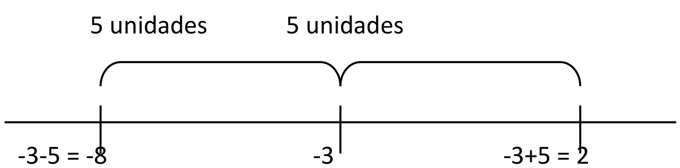
a) Sabemos que el módulo de un número, por ser una distancia, es siempre positivo o cero. Por lo que la ecuación |x| = -2 no tiene solución.
b) Geométricamente, buscamos los valores de x que están a distancia cuatro del cero:



Es decir que los números que están a distancia cuatro del cero son 4 y -4.

Para la resolución analítica tenemos que tener en cuenta que: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Entonces, si |*x*| = 4, *x* = 4 (*x* ≥ 0) o *x* = -4 (*x* < 0).

c) Buscamos los números cuya distancia al -3 es igual a 5. Geométricamente:

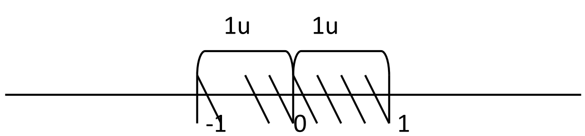


Las soluciones que buscamos son -8 y 2.

Analíticamente, sabemos que $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x+3 \ge 0 \\ -(x+3) & \text{si } x+3 < 0 \end{cases}$. Como queremos resolver la ecuación |x+3| = 5, podemos igualar a cinco cada una de las ramas y verificar que el valor de x que obtengamos se encuentre en la rama correspondiente:

- x + 3 = 5 → x = 2. Como 2+3 ≥ 0, entonces x = 2 es solución.
- -(x+3) = 5 → x+3=-5 → x = -8. Dado que -8+3< 0, x = -8 es solución.

d) $|x| \le 1$. Geométricamente, tenemos que encontrar aquellos números cuya distancia al 0 es menor o igual a uno. Sabemos que -1 y 1 están a distancia exactamente uno del 0. Cualquier número que tomemos entre -1 y 1 dista del 0 en menos que uno.



Es decir que los x tales que |x| ≤ 1 son los pertenecientes al intervalo [-1, 1].

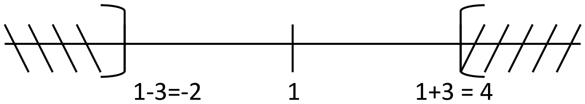
Analíticamente, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Entonces:

Si x ≥ 0 → |x| = x. Por lo que |x| ≤ 1 equivale a pedir que x ≤ 1. La solución parcial está formada por la intersección de las dos condiciones: x ≥ 0 y x ≤ 1; es decir, el intervalo [0,1].

Si x < 0 → |x| = - x. Por lo tanto, tenemos que resolver la inecuación – x ≤ 1, o sea x ≥ -1. La solución parcial es la intersección de ambas condiciones: x < 0 y x ≥-1 es decir, el intervalo [-1,0).

La solución final es la unión de ambas soluciones parciales: [-1, 0) U [0, 1] = [-1, 1].

e) Geométricamente, buscamos los números cuya distancia al uno es tres o más. El -2 y el 4 distan del uno en exactamente tres unidades. Cualquier valor que tomemos a la derecha del 4 o cualquier valor a la izquierda de -2 va a distar del uno en más de tres unidades.



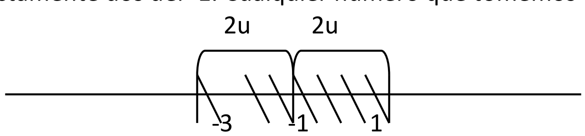
Por lo tanto los valores de x tales que |x - 1| ≥ 3 son los pertenecientes al conjunto $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$.

Analíticamente, $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$. Entonces, para resolver la inecuación |x - 1| ≥ 3 debemos considerar dos posibles casos:

- Si $x - 1 \geq 0 \rightarrow |x-1| = x - 1$. Por lo que $|x - 1| \geq 3$ equivale a pedir $x - 1 \geq 3$ o sea $x \geq 4$. Por lo tanto, la solución en este caso está formada por la intersección de ambas condiciones: $x - 1 \geq 0$ y $x \geq 4$. Las dos condiciones se verifican a la vez cuando $x \geq 4$.
- Si $x - 1 < 0 \rightarrow |x-1| = -(x - 1)$. Por lo que $|x - 1| \geq 3$ equivale a pedir $-(x - 1) \geq 3 \rightarrow$ $x - 1 \leq -3$. es decir $x \leq -2$ (recordemos que, al resolver una inecuación, cuando pasamos multiplicando o dividiendo un número negativo, la desigualdad se invierte). La solución de este caso es la intersección de las dos condiciones: $x < 1$ y $x \leq -2$; o sea $x \leq -2$.

La solución final es la unión de ambas soluciones parciales: $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$.

f) Geométricamente, tenemos que encontrar aquellos números cuya distancia al -1 es menor a dos. Sabemos que -3 y 1 están a distancia exactamente dos del -1. Cualquier número que tomemos entre -3 y 1 dista del -1 en menos que dos.



Es decir que los x tales que |x + 1| < 2 son los pertenecientes al intervalo (-3; 1).

Analíticamente, $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0 \end{cases}$. Entonces:

- Si $x + 1 \geq 0 \rightarrow |x + 1| = x + 1$. Por lo que $|x + 1| < 2$ equivale a pedir que $x + 1 < 2$, o sea $x < 1$. La solución parcial está formada por la intersección de las dos condiciones: $x \geq -1$ y $x < 1$; es decir, el intervalo [-1, 1).
- Si $x + 1 < 0 \rightarrow |x + 1| = -(x + 1)$. Por lo tanto, tenemos que resolver la inecuación $-(x + 1) < 2$, o sea $x + 1 > -2$ por lo que $x > -3$. La solución parcial es la intersección de ambas condiciones: $x < -1$ y $x > -3$ es decir, el intervalo (-3, -1).

La solución final es la unión de ambas soluciones parciales: (-3, -1) U [-1, 1) = (-3, 1).