Vectores

1. Dados en el plano los puntos P= (1, -3), Q = (-3, -1) se pide:

a. Calcular la longitud de los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ siendo O el origen de coordenadas.

b. Hallar la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$. Interpretar el resultado obtenido en término de distancia entre dos puntos.

2. Sean los vectores del plano: $\bar{v}_1 = (3, 2)$, $\bar{v}_2 = (0, -2)$ y $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Realizar las siguientes operaciones e interpretarlas geométricamente.

i. $3\bar{v}_1$ ii. $-\frac{1}{2}\bar{v}_2$ iii. $\bar{v}_2 + \bar{v}_3$ iv. $\bar{v}_1 - \bar{v}_3$

3. Dados los vectores del espacio: $\bar{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{w}_2 = (3, 0, 0)$ y $\bar{w}_3 = (2, 1, ½)$ realizar las siguientes operaciones e interpretarlas geométricamente.

i. $\bar{w}_1 + \bar{w}_2$ ii. $2\bar{w}_3$ iii. $-\frac{1}{3}\bar{w}_2$

4. Consideremos una economía en la que existen tres industrias (carbón, electricidad y acero) y tres consumidores (1, 2 y 3). La demanda (en las unidades correspondientes) de carbón, electricidad y acero de cada consumidor está dada por los siguientes vectores:

$$D_1 = (3 \quad 2 \quad 5)\ ;\ D_2 = (0 \quad 17 \quad 1)\ ;\ D_3 = (4 \quad 6 \quad 13)$$

Calcular la demanda total de los consumidores para cada uno de estos bienes.

5. Un comerciante posee 6 cajas de alfajores de chocolate blanco, 11 de chocolate negro y 4 de alfajores de fruta. La caja de alfajores de chocolate blanco le cuesta 300$, la de chocolate negro 250$ y la de fruta 150 $. Cada alfajor lo vende a 6$ y cada caja contiene 20 alfajores

Si un mes determinado vendió todos los alfajores, utilizar operaciones entre vectores para calcular la ganancia por cada tipo de alfajor que obtuvo el comerciante.

Matrices

6. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

i. Efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados. De no ser posible realizar la operación, explicar por qué.

a. BA
b. AB
c. BC^t
d. CB
e. FD
f. ED
g. $BA-C$
h. $(EA)^t+D$
i. DF
j. $AE+3C$

ii. Hallar, si es posible, una matriz X, que cumpla las condiciones pedidas en cada caso:

a. $X+D=EA$
b. $X-3E=A$

7. Un fabricante necesita ruedas, ejes, asientos y pedales para tres tipos de rodados que fabrica: A, B y C. La siguiente tabla indica las necesidades de partes para cada rodado

	A	**B**	**C**
ruedas	3	4	3
ejes	1	2	2
asientos	1	1	1
pedales	2	2	2

Los pedidos de cada tipo de rodado para los primeros seis meses son

	Enero	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
A	100	80	70	50	40	90
B	50	50	50	20	30	50
C	60	40	30	20	30	40

Usar multiplicación matricial para obtener las necesidades de partes para cada mes.

8. Para las unidades de tres alimentos, la siguiente matriz indica los correspondientes contenidos de vitaminas en unidades apropiadas

Vitaminas / **Alimentos**	**A**	**B**	**C**	**D**
1	0,5	0,3	0.1	0
2	0,3	0,1	0	0,3
3	0,2	0,4	0,6	0,1

a. ¿Qué alimento no contiene vitamina C? ¿Y vitamina D? ¿Qué alimento contiene igual cantidad de vitamina A y D?
b. ¿Cuánto se consume de cada tipo de vitamina si se comen 4 unidades del alimento 1; 5 unidades del alimento 2 y 12 unidades del alimento 3?
c. Si sólo se paga por el contenido vitamínico de cada alimento y se han abonado respectivamente 15 unidades monetarias (u.m.), 10 u.m., 18 u.m. y 20 u.m. por las unidades de las cuatro vitaminas, ¿Cuánto cuesta la unidad de cada tipo de alimento?
d. Calcular por dos caminos distintos el costo total del alimento que hemos consumido.

9. Calcular **x** e **y** en cada caso, para que se cumpla la igualdad:

a. $\begin{pmatrix} 3x & 2 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$

b. $A^2 = A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4x \\ y & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. Calcular del modo más "económico" posible el determinante de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

11. Calcular el determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Desarrollando por la primera fila

b. Desarrollando por la segunda columna

12. Determinar los valores de k para los cuales el determinante de la matriz A es nulo.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & k+4 \\ k-2 & -8 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3k & 1 & 2 \\ 0 & k^2-4 & 3 \\ 0 & 0 & k^3-2k-1 \end{pmatrix}$

13. Usando propiedades, calcular el determinante de la matriz B, a partir del valor del determinante de A en cada uno de los siguientes casos

a) $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 9 \\ b & -1 & 0 \\ c & 4 & -6 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 255$ $B = \begin{pmatrix} a & 3 & 3 \\ b & -1 & 0 \\ c & 4 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det(A) = 24$

i) $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 4a_{21}+a_{11} & 4a_{22}+a_{12} \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_{12} & a_{11} \\ \frac{3}{4}a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^6)$, $\det(A^4B - A^4)$.

15. Hallar la adjunta de la matriz A y verificar, en cada una de los siguientes casos, que A.Adj(A) = Adj(A).A = det (A).I

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

16. Para cada una de las siguientes matrices analizar si existe la matriz inversa y en caso afirmativo hallarla.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0\\ 7 & -6 & 0.5 & 1\\ 2 & -4 & -3 & 0\end{pmatrix}$

17. En cada uno de los siguientes ítems, hallar todos los valores reales de k para los cuales la matriz resulta inversible:

a) $\begin{pmatrix}k+1 & 2\\ 2 & k-2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & k & k+1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}k+1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & k-4\end{pmatrix}$

18. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una propiedad, definición o contraejemplo, según corresponda.

a) Sabiendo que $A \in R^{3x3}$ y $|A| = 3$ entonces $|4A| = 12$

b) Dada una matriz cuadrada A si $|A| = 5$ entonces $|A^t| = -5$

c) Si $A \in R^{3x3}$ entonces $|A.A^{-1}| = 1$

d) $\begin{vmatrix}1 & m & p\\ x & y & z\\ 6x & 6y & 6z\end{vmatrix}=0$

19. Sea $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$ y $B \in R^{3x3}$ tal que $\det(AB)=6$. Calcular $\det(B^{-1})$.

20. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ determinar, aplicando la definición, los valores de las constantes a y b para que la matriz $\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$ sea la inversa de A.

21. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}-x+2y+z=2\\ x+3y-w=0\\ 2x+3z+w=-1\end{cases}$$

Indicar, sin resolver el sistema, si cada una de las siguientes cuaternas es solución del sistema dado. Justificar.

a) (2, 2, 1, 0) b) (1, 1, 1, 4) c) (0, 0, 0, 0) d) (-2, -5/3, 10/3, -7) e) (-1, 1/3, 1/3, 0)

22. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Clasificarlos según su conjunto solución. Representar gráficamente e interpretar geométricamente los resultados obtenidos analíticamente.

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -6x+8y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=3 \\ 6x+3y=-3 \end{cases}$

23. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss. Clasificarlos según su conjunto solución.

a) $\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ x-y+z=2 \\ x-3y+2z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y-z=2 \\ x-3y+z=1 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y=0 \\ y+4z=1 \\ 5x+y+z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y-2x+z=5 \\ 6x=3(y+z)-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x-y=-3z+9 \\ -z=7-3x \\ 3y+2z=15 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=1 \\ -x+2y=3 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

24. Una fábrica produce 3 artículos, A, B y C, que son procesados por 3 máquinas, I, II y III.
Una unidad del artículo A requiere 2 horas de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 3 horas en la máquina III.
Una unidad del artículo B requiere una hora en cada máquina.
Una unidad del artículo C requiere 1 hora de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 4 horas en la máquina III.
Se dispone de la máquina I por 68 horas, de la máquina II por 53 horas y de la máquina III por 146 horas.
¿Cuántas unidades de cada artículo deberán producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas?

25. Una empresa de camiones transportó tres tipos de carga. El espacio requerido por cada unidad de los tres tipos de carga eran de 5, 2 y 4 m^3, respectivamente. El peso de cada unidad de carga era 2, 3 y 1 kilogramos, respectivamente; mientras que los valores unitarios de los tres tipos de carga fueron \$10, \$40 y \$60, respectivamente.
Determinar la cantidad de unidades de cada tipo de carga transportada si el valor total de la carga fue de \$7250, el espacio total ocupado fue de 503 m^3 y el peso total fue de 443 kilogramos.

26. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, cuando sea posible, por el método matricial

a) $\begin{cases} 2x+2y-z=7 \\ x-y+z=1 \\ x-3y+2z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 4x+2y-z=z \\ 7x-y+5z=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x+2y+z=5 \\ 2x-y+3z=2 \\ x-3y+2z=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 4x-2+3z=8y \\ \frac{1}{2}x-y+z=1 \end{cases}$

Algunos ejercicios resueltos

Resolución de ejercicio 4)

Calcular **x** e **y** en cada caso, para que se cumpla la igualdad:

a. $\begin{pmatrix} 3x & 2 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$

Primero observemos que el producto indicado es posible el primer factor es una matriz de orden 1x3 y el segundo factor es una matriz de orden 3x2. Por lo tanto el producto será de orden 1x2.
Realicemos el producto:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{3x+2.(-2)+(-y).5}_{\text{Fila 1 x Columna 1}} & \underbrace{3x.2+2.1+(-y).(-2)}_{\text{Fila 1 x Columna 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x-4-5y & 6x+2+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Como dos matrices son iguales si lo son elemento a elemento, la igualdad anterior es equivalente a

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} 3x-4-5y=5 \\ 6x+2+2y=-2 \end{cases}$$

Luego, para calcular los valores de x y de y que cumplen la igualdad inicial, bastará con resolver el sistema de ecuaciones (A)

$$\begin{cases} 3x-4-5y=5 \\ 6x+2+2y=-2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=9 & \text{(I)} \\ 6x+2y=-4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación (II)

$6x+2y=-4$

$2y=-4-6x$

$y=-2-3x$

Reemplazamos y en la ecuación (I)

$3x-5.(-2-3x)=9$

$18x+10=9$

$18x=-1$

$x=-\dfrac{1}{18}$

Finalmente, obtenemos el valor de y reemplazando $x=-\dfrac{1}{18}$ en $y=-2-3x$:

$$y=-2-3.\left(-\frac{1}{18}\right)=-2+\frac{1}{6}=-\frac{11}{6}$$

Luego, los valores que verifican la igualdad inicial son

$x = -\frac{1}{18}, \; y = -\frac{11}{6}$

b. $A^2 = A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$

Recordemos que $A^2 = A.A$, luego la igualdad $A^2 = A$ es equivalente a $A.A = A$

Calculemos A.A

$$A.A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 - 1.x & 3.(-1) - 1.y \\ x.3 + y.x & x.(-1) + y.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - x & -3 - y \\ 3x + y.x & -x + y^2 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que hallar los valores de x e y que verifiquen

$$A^2 = A$$

$$\begin{pmatrix} 9 - x & -3 - y \\ 3x + y.x & -x + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Lo que equivale a resolver el siguiente sistema

$$9 - x = 3 \leftrightarrow x = 6$$

$$-3 - y = -1 \leftrightarrow y = -2$$

Comprobemos que los valores hallados verifican las últimas dos ecuaciones

$3x + y.x = x \rightarrow 3.6 + (-2).6 = 6$ (se verifica)

$-x + y^2 = y \rightarrow -6 + (-2)^2 = -2$ (se verifica)

Luego, los valores son x = 6, y = - 2

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4x \\ y & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Realicemos las operaciones indicadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4x \\ y & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4x \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y + 1 \\ -3x - y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4x \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores de x e y que verifican la igualdad inicial, bastará con resolver las siguientes ecuaciones

$$\begin{matrix} x + 2y + 1 = 3 + 4x \\ -3x - y - 2 = 3y - 2 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} -3x + 2y = 2 \\ -3x - 4y = 0 \end{matrix}$$

Si restamos las dos ecuaciones

$$-\begin{array}{r} -3x+2y=2 \\ -3x-4y=0 \\ \hline -6y=-2 \end{array}$$

Por lo tanto, $y=\frac{1}{3}$.

Reemplacemos finalmente en -3x-4y=0

$$-3x-4\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

$$-3x=\frac{4}{3}$$

$$x=-\frac{4}{9}$$

Luego, los valores que cumplen la igualdad son $x=-\frac{4}{9}$, $y=\frac{1}{3}$.

Resolución del ejercicio 9)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^6)$, $\det(A^4B-A^4)$.

Cálculo de det(A.B)

Una posible resolución es realizar primero el producto de las dos matrices y luego calcular el determinante de la matriz resultante.

Otra resolución posible requiere la utilización de la siguiente propiedad del determinante:

(∗) si A y B son dos matrices de orden n, el det(A.B)=det(A).det(B)

Desarrollaremos la última opción.

Calculemos el det(A) utilizando el método de Laplace (Recordar que, por tratarse de una matriz de orden 3, también podría utilizarse la regla de Sarrus para calcular el determinante). Desarrollamos por la fila 3 que tiene mayor cantidad de ceros para que resulte más económico el cálculo.

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=(-1).(-1)^{3+2}.\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=(-1).(-1).[1.4-(-1).2]=6$$

Calculemos el det(B) utilizando el método de Laplace. Desarrollamos por la fila o columna que tiene mayor cantidad de ceros, en este caso elegimos la columna 3.

$$\det(B)=\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=1.(-1)^{1+3}.\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+1.(-1)^{3+3}.\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=(4.3-2.0)+[3.2-(-2).4]=12+14=26$$

Luego, det(A.B)=det(A).det(B)=6.26=156

Cálculo de det(A+B)

En este caso, primero debemos realizar la suma de matrices y luego calcular el determinante de la matriz obtenida.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 1-2 & -1+1\\ 2+4 & 1+2 & 4+0\\ 0+0 & -1+3 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 6 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Calculemos el det(A+B)

$$\det(A+B)=\det\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 6 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\underset{\uparrow}{=}4.(-1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}+6.(-1)^{2+1}.\det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Desarrollamos por la columna 1

$$=4.[3.1-4.(-2)]-6.[-1.1-0.(-2)]$$
$$=50$$

Luego, det(A+B)=50.

Cálculo de det(A^6)

En lugar de calcular A^6, es decir A.A.A.A.A.A, lo cual sería muy engorroso, utilizaremos la siguiente propiedad del determinante:

(∗∗) si A es una matriz de orden n, $\det(A^k)=[\det(A)]^k$

Como det(A)=6, se tiene $\det(A^6)=[\det(A)]^6=6^6$ = 46656

Cálculo de det(A^4B-A^4)

Observemos que $A^4B-A^4 = A^4.(B-I)$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Por lo tanto, $\det(A^4B-A^4) = \det(A^4.(B-I)) \underset{\uparrow}{=} \det(A^4).\det(B-I) \underset{\uparrow}{=} [\det(A)]^4.\det(B-I) = 6^4.\det(B-I) = 6^4 . 12 = 15552$

Propiedad (∗) Propiedad (∗∗)

Calculemos det(B-I)

$$\det(B-I)=\det\left[\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\underset{\uparrow}{=}1.(-1)^{1+3}.\det\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=12$$

Desarrollamos por columna 3

<u>Resolución del ejercicio 12)</u>

En cada uno de los siguientes ítems, hallar todos los valores reales de k para los cuales la matriz resulta inversible:

a) $\begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} k+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & k-4 \end{pmatrix}$

Recordemos que si A es una matriz cuadrada de orden n, A es inversible si y sólo si det(A)≠0.
Luego, en cada caso calcularemos el determinante de la matriz y veremos para qué valores de k dicho determinante es distinto de 0.

a) $\det\begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix} = (k+1).(k-2)-4 = k^2-k-6 \neq 0 \Leftrightarrow (k+2).(k-3)\neq 0$

Ahora, el último producto es distinto de 0 si y sólo si $k \neq -2 \wedge k \neq 3$.

Luego, la matriz resulta inversible para todo k∈R-{-2,3}.

b) Como es una matriz de orden 3, podemos utilizar la regla de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix} = [2.2.(k+1)+(-1).k.2+1.3.4]-[2.2.1+4.k.2+(k+1).3.(-1)]$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$= [4k+4-2k+12]-[4+8k-3k-3]$$

$$= -3k+15 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 5$$

Luego, la matriz resulta inversible para todo k∈R-{5}.

c) Como es una matriz de orden 3, podemos utilizar la regla de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & k-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & k-4 \end{pmatrix} = [(k+1).1.(k-4)+2.1.3+(-2).(-1).(-2)]-[3.1.(-2)+(-2).1.(k+1)+(k-4).(-1).2]$$

$$\begin{matrix} k+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= [k^2-3k-2]-[-4k] = k^2+k-2 = (k-1).(k+2) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1 \wedge k \neq -2$$

Luego, la matriz resulta inversible para todo k∈R-{-2, 1}.

Resolución del ejercicio 14)

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \in R^{3x3}$ tal que $\det(AB)=6$. Calcular $\det(B^{-1})$.

Si conocemos el det(B), podemos calcular lo pedido pues

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$$

Como det(A.B)=det(A).det(B) y det(A.B)=6, resulta que det(A).det(B)=6.
Calculemos el det(A), por el método de Laplace, desarrollando por la primera columna.

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-1&1\\3&4&3\end{pmatrix}=2.(-1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix}-1&1\\4&3\end{pmatrix}+3.(-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=2.(-3-4)+3.[0-(-1)]$$
$$=-11$$

Entonces

$$\det(A).\det(B)=6\Leftrightarrow -11.\det(B)=6\Leftrightarrow \det(B)=-\frac{6}{11}$$

Luego,

$$\det\left(B^{-1}\right)=\frac{1}{\det(B)}=\frac{1}{-\frac{6}{11}}=-\frac{11}{6}$$

Resolución del ejercicio 17)

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Clasificarlos según su conjunto solución. Representar gráficamente e interpretar geométricamente los resultados obtenidos analíticamente.

a) $\begin{cases}2x+y=4\\x+2y=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-4y=1\\-6x+8y=-2\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+y=1\\x+y=3\\6x+3y=-3\end{cases}$

a) Escribimos el sistema con notación matricial

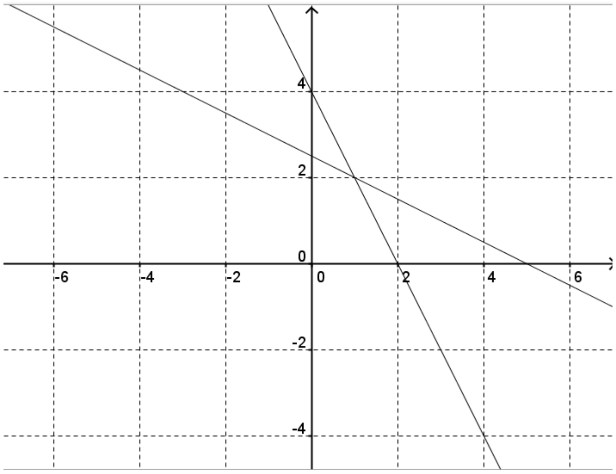
$$\begin{cases}2x+y=4\\x+2y=5\end{cases}\rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}2&1&4\\1&2&5\end{array}\right)}_{\text{Matriz ampliada del sistema}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&4\\1&2&5\end{array}\right)\underset{F_2\to 2F_2-F_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}2&1&4\\0&3&6\end{array}\right)\underset{F_2\to \frac{1}{3}F_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}2&1&4\\0&1&2\end{array}\right)\underset{\text{Volvemos a las ecuaciones}}{\longrightarrow}\begin{cases}2x+y=4\\y=2\end{cases}$$

Reemplazando x=2 en la primera ecuación, 2.x+2 = 4⇔ x = 1.

Luego, el conjunto solución del sistema inicial es S={(1,2)}. El sistema es compatible determinado.

Gráficamente, cada ecuación representa una recta y el punto (1,2) es el punto de intersección entre ambas rectas.



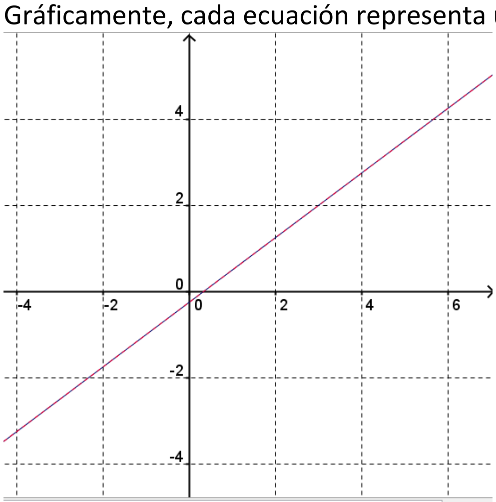
b) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -6x+8y=-2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{array}\right)$ Matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Volvemos a las ecuaciones}]{} \begin{cases} 3x-4y=1 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \rightarrow y=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x,\ \ x\in R$$

Luego, para cada valor de x real, tenemos un valor de y, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

El conjunto solución es $S=\left\{(x,y)\,/\,y=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x,\ x\in R\right\}$

Gráficamente, cada ecuación representa una recta y ambas rectas resultan ser coincidentes.



c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=3 \\ 6x+3y=-3 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -3 \end{array}\right)}_{\text{Matriz ampliada del sistema}}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to 2F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Volvemos a las ecuaciones}]{} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 5 \\ 0 = -6 \;\; \text{Absurdo} \end{cases}$$

Al triangular la matriz, llegamos a un absurdo, por lo tanto el sistema inicial no tiene solución. El sistema es incompatible.

Gráficamente, cada ecuación representa una recta. Como se puede observar en el gráfico, no existe ningún punto en el que se intersequen las tres rectas simultáneamente.