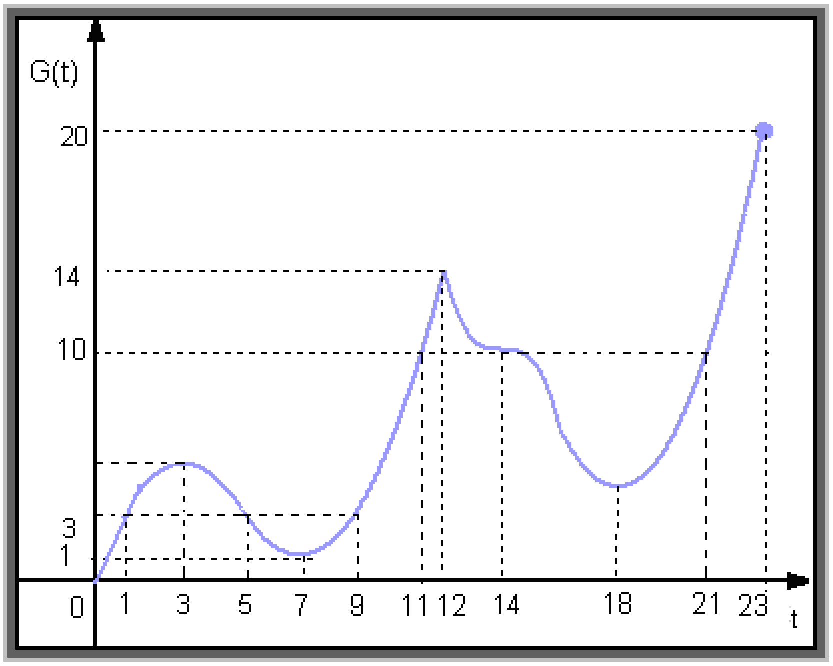
1. El siguiente gráfico representa las ganancias totales (G), medidas en millones de pesos, de la corporación Arctic Air dedicada a la fabricación de aparatos de aire acondicionado para automóviles, en función de la variable t, cantidad de años transcurridos desde 1988.



a. ¿Hasta qué año registra el gráfico información sobre las ganancias de la empresa?
b. ¿Cuál fue la ganancia de la empresa en el año 2002?
c. ¿En qué año/s las ganancias totales fueron de 3 millones de pesos?
d. Señalar en el gráfico el/los período/s en los que las ganancias de la empresa superaron los diez millones de pesos.
e. ¿Cuál fue la mayor ganancia obtenida en el período 1988 – 1994? ¿En qué año se registró dicha ganancia?

2. A pesar de los esfuerzos por lograr una reducción de gastos, el costo de los programas de apoyo médico en Argentina se está incrementando con rapidez. Dos de las principales razones para este incremento son el aumento de la población de edad avanzada y el constante desarrollo y amplio uso de nuevas tecnologías por parte de los médicos. Con base en datos suministrados por el Ministerio de Salud, el gasto en salud hasta el año 2011 se puede estimar mediante la siguiente relación

$$G(t) = 14t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{t^3}{4} + 10$$

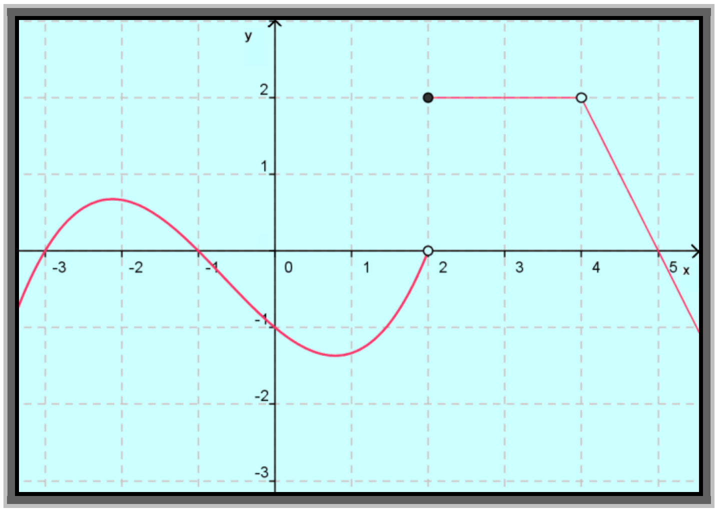
siendo G el gasto en millones de pesos y *t* el tiempo transcurrido desde 2001, medido en años.

a. ¿Cuánto dinero se invirtió en salud en el año 2005? ¿Y en el año 2004?
b. ¿En qué año/s la inversión en salud fue de diez millones de pesos?

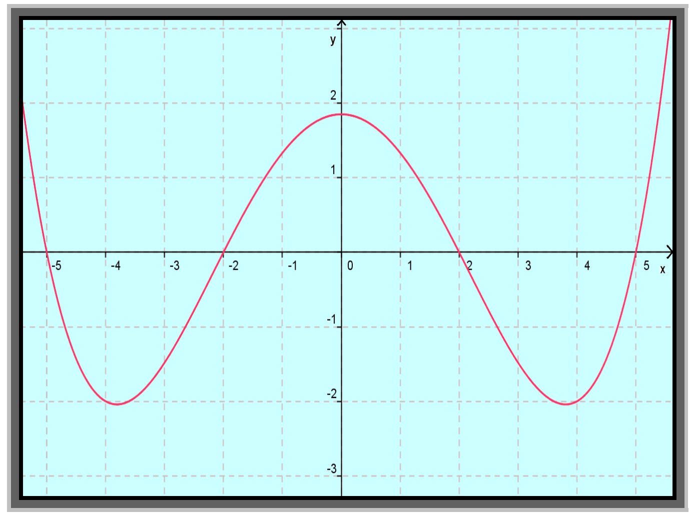
3. A continuación, se presentan dos gráficos de funciones f: $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada uno de ellos se pide:

a. Indicar el dominio y el conjunto imagen.
b. Determinar el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad.
c. Señalar en el gráfico el conjunto A = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > 1\}$

i.



ii.



4. Dadas las siguientes funciones $f: A \subseteq R \rightarrow R$

a. $f(x) = 3x - 4$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x+3} - \sqrt{x+3}$

c. $f(x) = 3(x-1)(x+2)$

d. $f(q) = \dfrac{3(q-2)}{(q^2-4)(q^2+9)}$

e. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$

f. $f(t) = \dfrac{(t^2-9)\sqrt{t-2}}{3t-7}$

Se pide:

i. Determinar el conjunto A, dominio de la función f.
ii. Considerando el dominio hallado en el ítem i., determinar analíticamente el conjunto de ceros de cada función.
iii. Determinar analíticamente los conjuntos de positividad y de negatividad de las funciones de los ítems a y c.
iv. Para la función del ítem a:
   - Decidir si $5 \in Imf$
   - Hallar f (6)
   - ¿Es cierto que el punto (2, 2) pertenece al gráfico de f?
   - Si el punto (4, *a*) pertenece al gráfico de f, calcular el valor de "*a*".

5. Sea q la cantidad de unidades vendidas de un cierto producto por un determinado comerciante. La **función de ingreso** I = I(q) representa los ingresos totales del comerciante por la venta de q unidades del producto. Si llamamos p al precio unitario del producto el ingreso total I logrado con la venta de q unidades se formula como el producto de p y q; es decir, I(q) = p.q (precio unitario por cantidad de unidades).

Sea C = C(q) la función de **costo total** de fabricación de q unidades del producto. La **función de beneficio** B=B(q) expresa la ganancia (o pérdida) total obtenida por la fabricación y venta de q unidades del producto; se calcula como la diferencia entre los ingresos obtenidos y el costo de fabricación; es decir B(q) = I(q) – C(q).

Resolver:

a. Un comerciante paga mensualmente $5000 por el alquiler del local, $575 por energía eléctrica y $500 por otros gastos fijos. Cada una de las mesas que fabrica lleva $150 de materiales. Si se expresa el costo mensual

C del comerciante en términos de la cantidad q de mesas que fabrica, comprobar que se obtiene una función lineal. ¿Qué significado económico tienen en este caso la pendiente y la ordenada al origen?

b. Si el comerciante del problema anterior puede vender cada una de las mesas a $600.
   i. ¿Cuál será su función de ingreso y de beneficio mensual?
   ii. Si al finalizar el mes solamente vendió 40 unidades, ¿cuál fue su beneficio?
   iii. ¿Cuántas mesas debe vender en el mes para no tener pérdidas?

6. El costo fijo de producción de cierto artículo es $10, en tanto que el costo variable por artículo producido es $0,5. Cada artículo es vendido a $3.

a. Obtener las funciones de ingreso y costo total.
b. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.
c. Analizando el gráfico realizado en el apartado anterior, ¿cuántos artículos deben producirse y venderse para que el beneficio sea cero? Si se venden 5 artículos, ¿hay pérdida o ganancia?

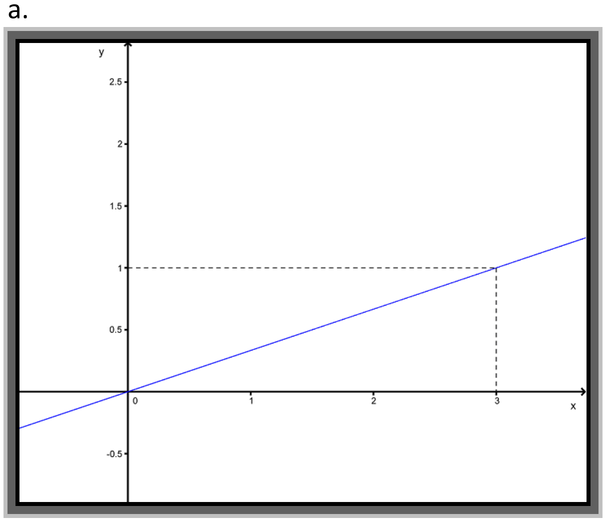
7. En Argentina se utiliza la escala de grados centígrados (°C) para expresar la temperatura, mientras que en otros países se utiliza la escala de grados Fahrenheit (°F).
La siguiente tabla muestra la temperatura en grados centígrados y la correspondiente conversión a grados Fahrenheit:

Temperatura en grados centígrados (°C)	Temperatura en grados Fahrenheit (°F)
35	95
10	50

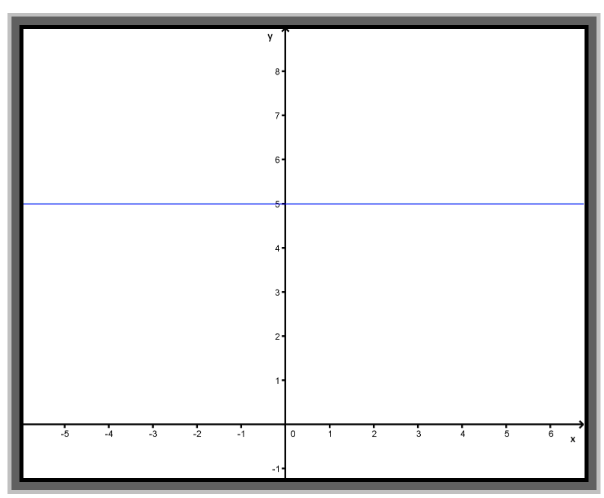
Si la relación de conversión entre ambas escalas es lineal, se pide:
a. Dar la fórmula de la función que, dada la temperatura en grados centígrados, permite obtener su correspondiente expresión en grados Fahrenheit.
b. ¿Cuál es la temperatura en grados centígrados que equivale a 0 ° F?
c. ¿Cuál es la temperatura en grados Fahrenheit que equivale a 0 ° C?

8. Dadas las siguientes rectas, obtener la expresión de la función lineal correspondiente (utilizar los conceptos de ordenada al origen y pendiente).

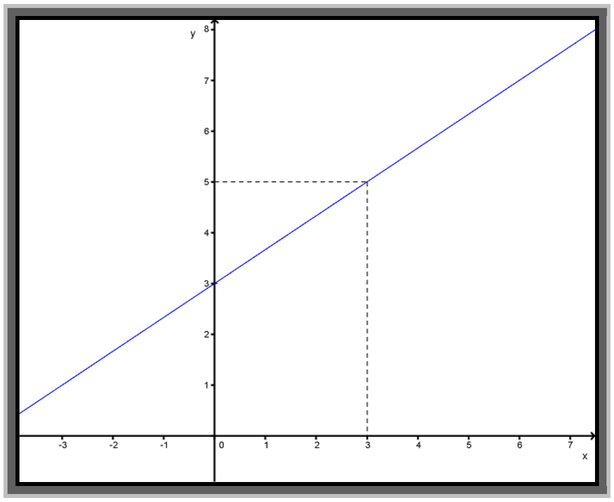
a.



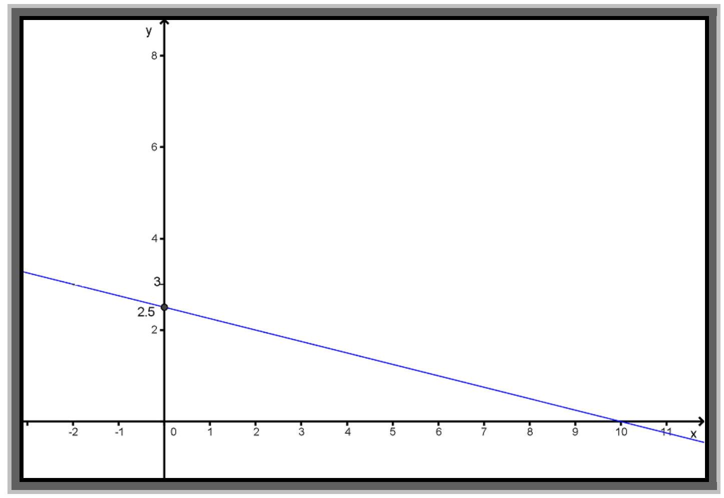
b.



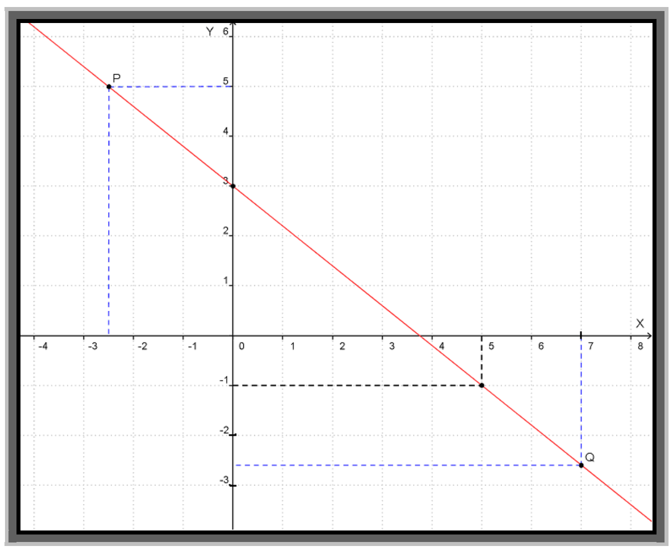
c.



d.



9. El siguiente gráfico corresponde a una función lineal f:R→R. Como puede verse, la recta pasa por el punto $(5,-1)$ y f(0)=3. Calcular las coordenadas de los puntos P y Q indicados en el gráfico.



10. (*) Hallar en cada caso, si existe, la fórmula de una función lineal f:R→R que satisfaga las condiciones pedidas:

a. f(1)=5 y f(-3)=11

b. Responde a la siguiente tabla de valores:

x	f(x)
-1	1
1/2	4
3	8

(*) Resuelto al final de este trabajo práctico

c. El conjunto de positividad de f es $(-2;+\infty)$ y $f(-3)=-5$

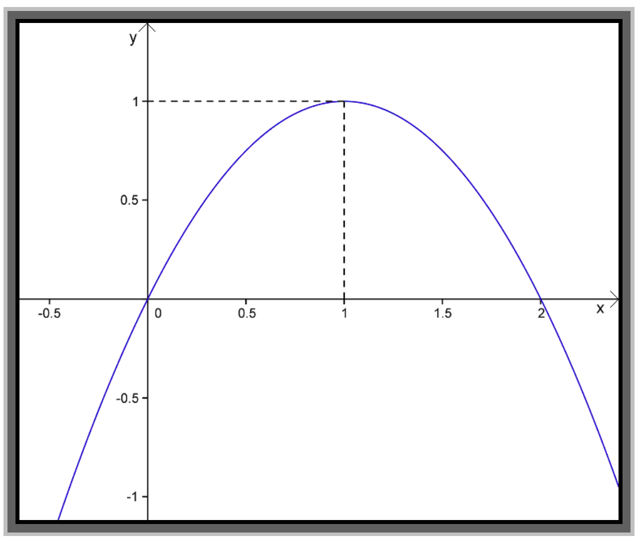
11. (*) En cada caso, hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones pedidas. Representar gráficamente cada recta.

i. Pasa por el punto (-1,3) y es paralela a la recta de ecuación y= -x-2.
ii. Pasa por el punto (-8,1) y es perpendicular a la recta de ecuación 2y-8 = 0.
iii. Pasa por el origen de coordenadas y por la intersección de las rectas y-2x+3=0; y+2x-9=0.
iv. Pasa por la intersección de las rectas x + y = 2, x - y =0 y por la de las rectas 2x + y = 7; -x + 2y = 4.

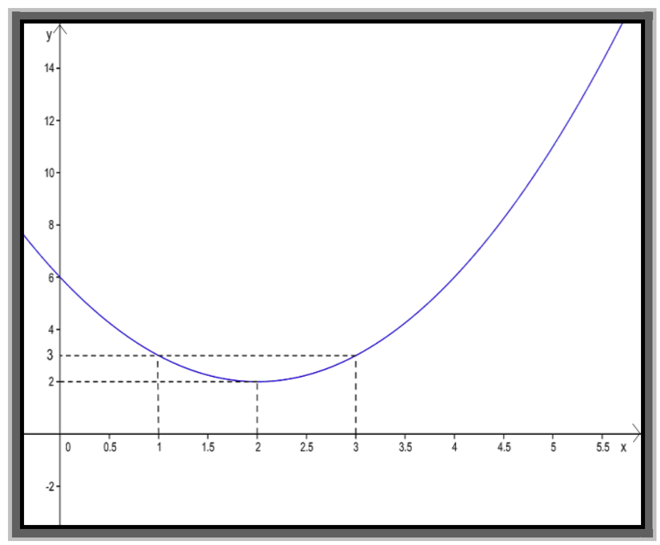
12. Para cada una de las parábolas representadas a continuación se pide:

a. Determinar las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
b. Escribir la expresión de la función cuadrática correspondiente exhibiendo en dicha expresión las coordenadas del vértice de la parábola.
c. Determinar, a partir del gráfico, el conjunto de ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de cada una de las correspondientes funciones cuadráticas.
d. Determinar el conjunto imagen de cada una de las funciones cuadráticas.

i.



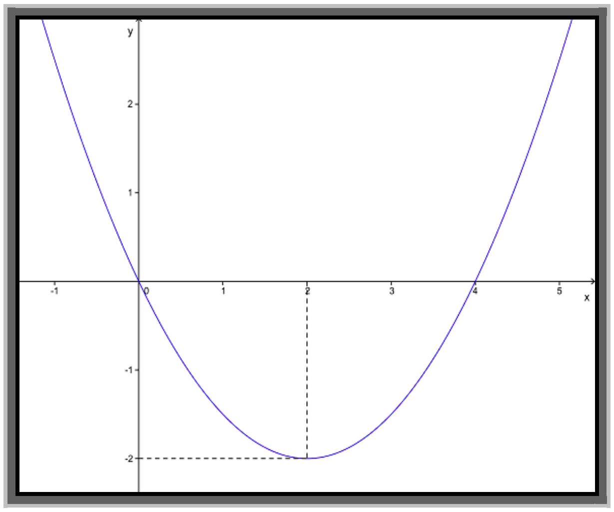
ii.

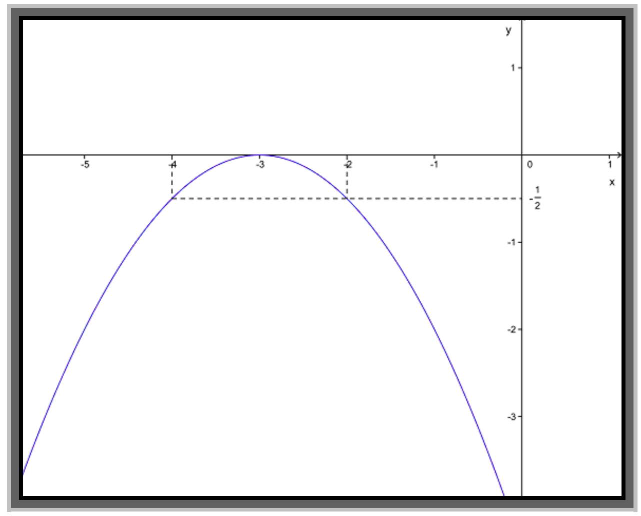


iii.

iv.

(*) Resuelto al final de este trabajo práctico





13. Representar gráficamente las siguientes parábolas determinando previamente la ecuación del eje de simetría, el vértice y las intersecciones con los ejes.

a. $y = x^2 - 6x$

b. $y = -(x-1)(x-3)$

c. $y = x^2 - 2x + 1$

d. $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$

14. La relación entre el precio p de un producto (en pesos) y la cantidad q (en miles de unidades) demandadas por parte de los consumidores está dada por $p = 100 - 5q$,

a. ¿Cuál es el ingreso si se demandan quince mil unidades del producto?

b. Representar gráficamente la función $I = I(q)$. ¿Tiene sentido que q sea mayor que veinte?

c. ¿Cuál es la cantidad demandada que produce el mayor ingreso? ¿Cuál es el valor del máximo ingreso?

d. ¿Qué cantidad de unidades son demandadas si el ingreso es de 455 pesos?

15. El costo C=C(x), en pesos, de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 10$. ¿Cuántas unidades deben producirse para obtener un costo mínimo? ¿Cuál es dicho costo?

16. La cantidad de entradas demandadas para el recital de Roger Waters en Argentina está estimada por la expresión $q = 90000 - 40p$, siendo p el precio de cada localidad y q la cantidad demandada. El estadio tiene capacidad para 50000 espectadores.

a. ¿Cuál es el precio que debe fijarse a las entradas para que el estadio se llene?

b. ¿Cuál es el precio al que debe venderse cada entrada para maximizar los ingresos totales?

c. Si se colocara un precio máximo de $1300, ¿cuánta gente se esperaría que estuviera dispuesta a asistir al concierto?

17. Hallar en cada caso, si existe, la intersección entre los gráficos de las siguientes funciones $f: R \to R$, $g: R \to R$. Hallar la respuesta trabajando

i. en forma gráfica
ii. en forma analítica

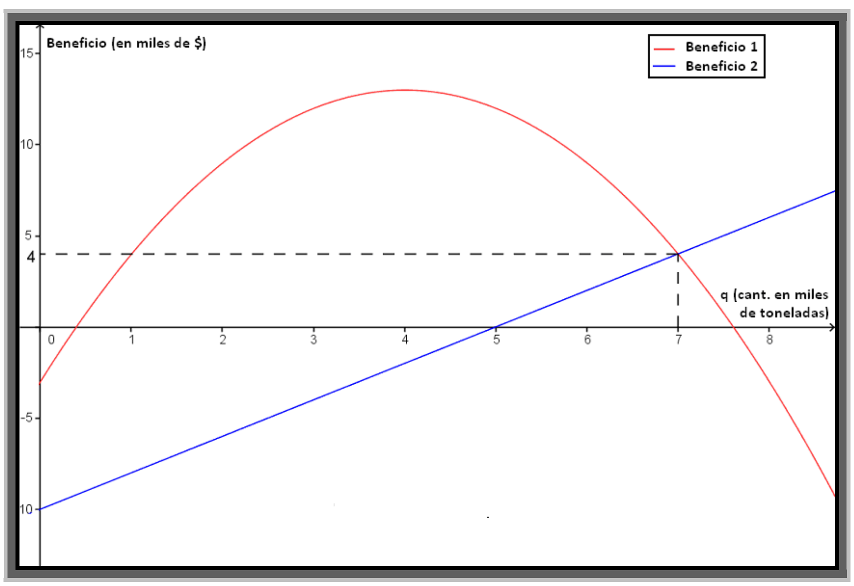
a. $f(x) = x - 3$, $g(x) = 4x^2 - x - 9$
b. $f(x) = 3x^2 - 1$, $g(x) = 12x - 13$.
c. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$, $g(x) = -1$

18. Un matrimonio está planificando sus vacaciones y debe decidir entre dos propuestas de alquiler en un mismo centro turístico:
Propuesta 1: \$200 por cada día de estadía más un adicional fijo de \$240.
Propuesta 2: \$224 por cada día de estadía.

a. Obtener, para cada propuesta, la función que permite calcular el costo de alquiler (en pesos) a partir de la cantidad de días que dure su estadía.
b. ¿Qué opción le conviene más al matrimonio si planean estar una semana? ¿Y si planea una estadía de 15 días?
c. ¿Para qué cantidad de días le conviene la opción 1? ¿Para qué cantidad la opción 2 es la más conveniente?

19. Cuando se produce una cantidad q (en miles de toneladas) de una cierta mercadería dos productores reciben un beneficio mensual (en miles de pesos) de $B_1(q) = -q^2 + 8q - 3$ y $B_2(q)$ respectivamente.
Analizar el gráfico que se muestra a continuación y responder:

a. ¿Cuántas toneladas debe producir cada productor para obtener la misma ganancia? ¿Cuál es dicha ganancia?
b. Comprobar analíticamente que las respuestas dadas en el ítem a son correctas.
c. ¿A partir de qué cantidad de toneladas producidas el beneficio del productor 2 supera al del productor 1?
d. ¿Cuántas toneladas debe producir cada productor para no tener pérdidas?



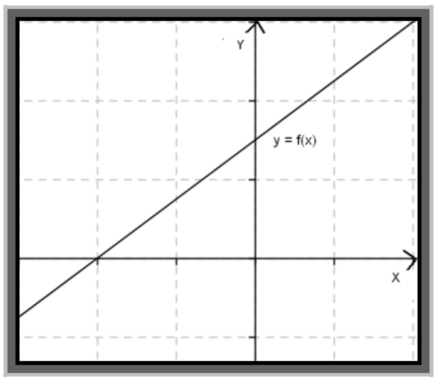
20. La empresa Electra se dedica a la fabricación de calculadoras programables. La gerencia determina que el costo diario C(q), en cientos de pesos, de producción de estas calculadoras es $C(q) = 2000 + 50q + q^2$.

a. Calcular el costo de fabricar 20 calculadoras.
b. Calcular el costo de fabricar la vigésima calculadora.

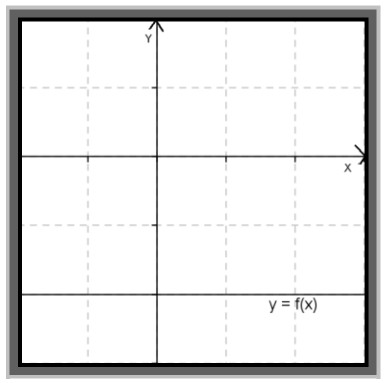
21. Sea $f(x) = ax + b$

a. Determinar la expresión del incremento de la función, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para cualquier valor de $\mathbf{x_0}$ y cualquier valor de Δx.
b. En los siguientes casos, si se considera $\Delta x > 0$, decidir si $\Delta y > 0$, $\Delta y < 0$ o $\Delta y = 0$

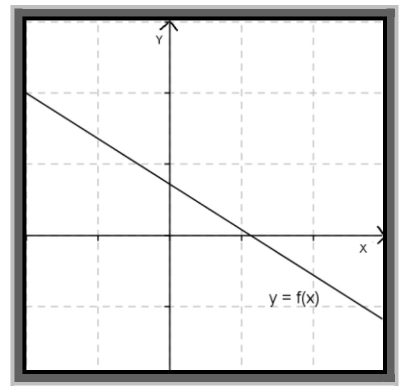
i.



ii.



iii.



22. Dadas las siguientes funciones:

i. $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}3$

ii. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ $\quad x_0 = 2,\ \Delta x = 1$

iii. $f(x) = x^2 + 1$ $\quad x_0 = 1,\ \Delta x = -1$

Se pide:

a. Representar gráficamente cada función.
b. Calcular el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para los valores de x_0 y Δx dados en cada caso.
c. Señalar en el gráfico realizado x_0, Δx, $x_0 + \Delta x$, Δy.

23. En una estación de servicio, la cantidad de nafta q (en litros) vendida en un día depende del precio por litro del combustible. Si p es el precio por litro de combustible, se sabe que la cantidad vendida es $q = 450(100 - p)$. Calcular el incremento que se produce en las ventas cuando el precio por litro aumenta de 6$ a 6.5$. Interpretar el resultado obtenido en términos del problema.

Tasa de cambio promedio

La **tasa de cambio promedio** representa la variación promedio por unidad que sufre y = f(x) cuando la variable independiente x sufre una variación Δx. Se define como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Es posible interpretar esta tasa de cambio de acuerdo con lo que representen x y la función. Por ejemplo, si la función C = C(q) es el costo de producir q artículos de un determinado producto, la tasa de cambio promedio $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}$ representa el costo promedio por cada unidad adicional cuando la producción se incrementa de q a $q+\Delta q$ unidades.

24. (*) El editor de una revista estima que si fija un precio de $4 a su revista, vende 100 ejemplares en una semana; sin embargo, si el precio fijado es de $5, venderá 80 revistas. Suponiendo que la función que relaciona el precio con la cantidad de unidades demandadas es lineal, responder las siguientes preguntas.

a. Si en una semana el número de revistas vendidas se incrementó de 150 a 155, ¿qué incremento se produjo en el precio? Interpretar el resultado en términos del problema.

b. Determinar el incremento promedio en el precio por unidad cuando el número de revistas vendidas se incrementa de 150 a 155. Interpretar el resultado obtenido en términos del problema.

25. Un fabricante de productos advierte que el costo semanal de producir *x* kilos de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20000 + 40x$ pesos y el ingreso obtenido por la venta de *x* kg por semana está dado por $I(x) = 100x - 0.01x^2$.
Si actualmente la compañía produce 3100 kg por semana, pero está pensando incrementar la producción a 3200 kg.

a. Calcular los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y el beneficio. ¿Le conviene económicamente a la empresa tal incremento en la producción? Justificar la respuesta

b. Determinar la tasa de cambio promedio del beneficio por los kilogramos extras producidos.

26. La demanda anual de la maderera “Los Pinos” está dada por la relación p + 4q = 120, siendo q la cantidad de madera demandada (medida en miles de m^3) y p el precio que se paga por 1000 m^3 de madera. La función de costo de dicha empresa es C(q)= 6000 + 10q.

a. Determinar el incremento en el beneficio cuando los m^3 de madera demandada se incrementa de 2000 a 3000.

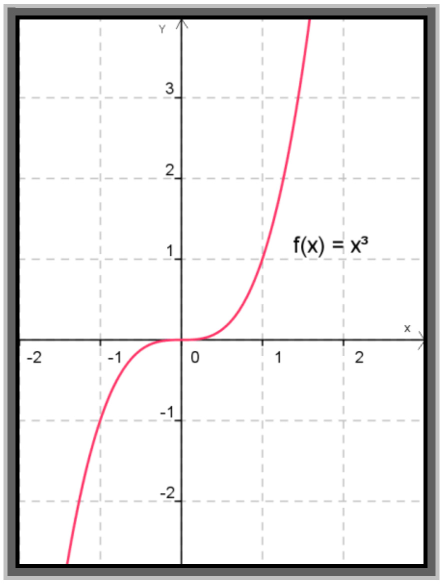
b. Determinar la tasa de cambio promedio del beneficio cuando la cantidad de m^3 de madera demandada se incrementa de 2000 a 3000.

c. Interpretar en términos del problema los resultados anteriores

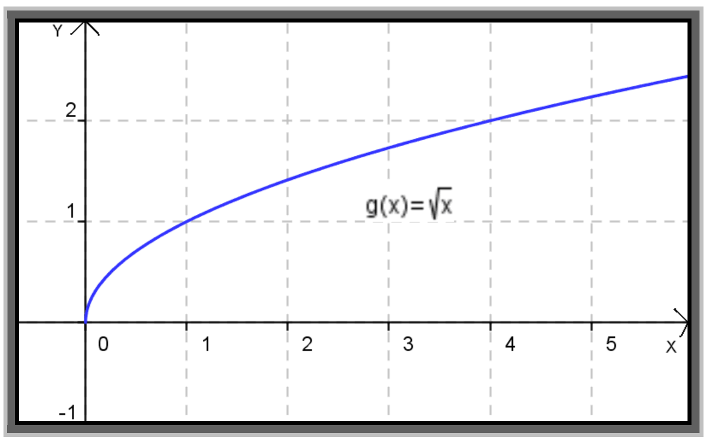
27. A continuación se presentan los gráficos de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \sqrt[3]{x}$:

$f(x) = x^3$

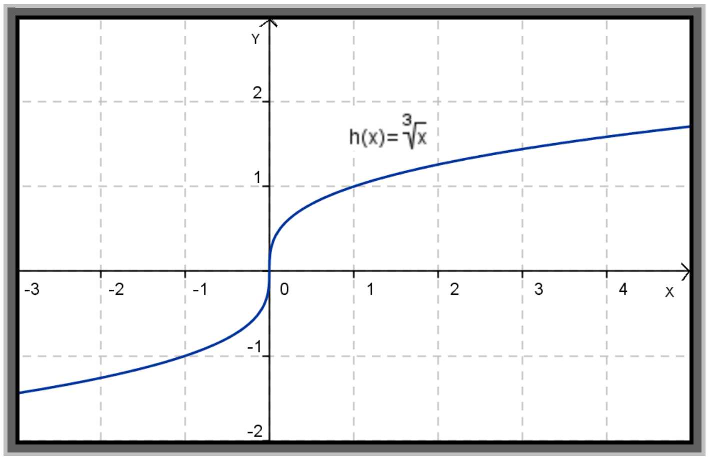
(*) Resuelto al final de este trabajo práctico



$g(x)=\sqrt{x}$



$h(x)=\sqrt[3]{x}$



A partir de los gráficos anteriores, representar las siguientes funciones mediante desplazamientos, hallando previamente dominio y conjunto de ceros. A partir del gráfico realizado, determinar conjunto de positividad, conjunto de negatividad y el conjunto imagen de cada una de ellas.

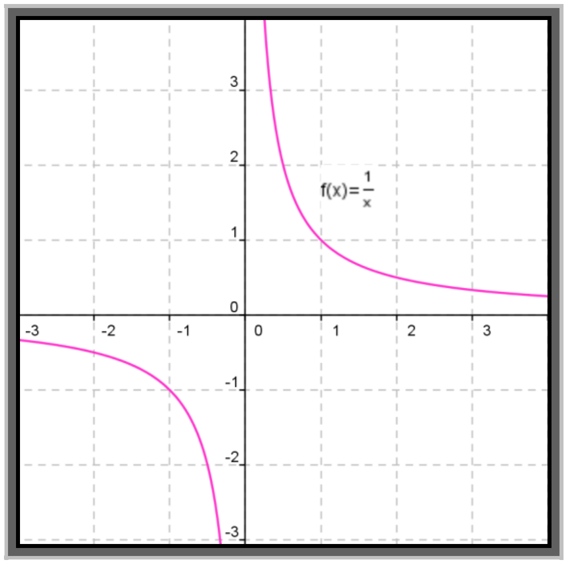
a. $f(x) = 2x^3 + 1$
b. $f(x) = -(x + 1)^3$
c. $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 + 1$
d. $f(x) = \sqrt{x+3}$
e. $f(x) = -\sqrt{x+2} + 4$
f. $f(x) = \sqrt[3]{x-2} - 1$
g. $f(x) = -\sqrt[3]{x+1} - 3$

Sugerencia: Podrán revisar el trabajo realizado en este ejercicio utilizando algún programa graficador o bien la simulación que se encuentra en Web Campus, en la sección de recursos digitales de Matemática I.

28. Para un fabricante la función de ingreso total es $I(q) = 2\sqrt{q}$ y la función de costo total es $C(q) = q + 1$, donde q representa la cantidad (en miles) de unidades producidas y vendidas. Hallar la cantidad de unidades que deberán producirse y venderse para que el ingreso sea igual al costo. Representar gráficamente ambas funciones.

29. Se presenta a continuación el gráfico de la función homográfica $f: R - \{0\} \to R \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$:

$f(x) = \frac{1}{x}$



A partir del gráfico anterior, representar las siguientes funciones utilizando desplazamientos. Hallar previamente el dominio y las intersecciones con los ejes coordenados. Determinar, a partir del gráfico realizado, los conjuntos de positividad, de negatividad y la imagen de cada función.

a. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

b. $f(x)=-\dfrac{1}{x}+3$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$

30. En cada caso, hallar en forma analítica y gráfica el o los puntos de intersección de las siguientes curvas

a. $\begin{cases} y=\sqrt{x+1}-4 \\ -x+y=-5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y=x+17 \\ y-12=\sqrt[3]{x+5} \end{cases}$ c. $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=x^2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} y=2\sqrt[3]{x-6} \\ y=x-6 \end{cases}$

31. Graficar las siguientes funciones, determinando previamente su dominio y su conjunto de ceros.

a. $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

c. $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$

d. $f(x)=\dfrac{12x^2-27}{6x+9}$

32. (*) Una empresa de energía eléctrica cobra a las pequeñas industrias un cargo fijo mensual de \$200 y un cargo variable según su consumo mensual. Este cargo variable es de \$0.8 por Kw/h por los primeros 50 Kw/h. consumidos; \$0.6 por Kw/h. que excedan los 50 Kw/h.

a. Expresar la función de costo de la energía eléctrica para las industrias en función del consumo.
b. ¿Cuál es el costo en energía eléctrica si se consumen 200 Kw/h? ¿Y si se consumen 43 Kw/h?
c. ¿Cuántos Kw/h se consumieron si el costo fue de \$363,8?
d. Representar gráficamente la función.

33. a. Determinar el dominio, hallar analíticamente el conjunto de ceros y representar la gráfica de las siguientes funciones.

i) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2} & \text{si } x>-2\\ x+1 & \text{si } x\le -2\end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{si } x<1\\ -(x-1)^2-1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{si } x\neq 1\\ -1 & \text{si } x=1\end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\le -1\\ x^2-3 & \text{si } -1<x<2\\ 7-2x & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

v) $f(x) = |x+5|$

vi) $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<1\\ x-1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

b. A partir de los gráficos realizados, determinar el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad y el conjunto imagen de cada una de las funciones.

34. Obtener, aplicando reglas de derivación, las funciones derivadas de:

a. $f(x) = x^5 + 4x^3 - x$
b. $f(x) = x^2+2x+1$
c. $f(t)=500+30t^5-3t^2$
d. $f(x)=\dfrac{e^{\pi}}{\pi+2}$
e. $f(x)=(x^2-3+x)(5x^{27}-\frac{1}{2}x^{10}-\sqrt{5})$
f. $f(x)=\dfrac{x^2x^5.x}{x^4}$
g. $f(x)=\sqrt{2}\,x-1+(x^2-4)(-x^3+1)$
h. $f(s)=\dfrac{2}{3s-8}+(8s^5-3).\,9s^{11}$
i. $f(t)=\dfrac{t^2+5}{t^2+2t+4}$

(*) Resuelto al final de este trabajo práctico

j. $f(x) = \dfrac{0{,}2x^3 + 0.5x^4 - \sqrt[3]{2}}{3x - 1} - \dfrac{1}{x}$

k. $f(x) = \dfrac{(2x - 6)(3x + 8)}{x^2 - 9}$

l. $f(q) = \dfrac{q^2 - 2q + 1}{3} - (4q - 5)q^3$

m. $f(t) = 0{,}2t^{14} - \dfrac{t + 1}{\sqrt{2}}$

n. $f(x) = (5x)^3 . (49x^2 - 28x + 4) + (-x)^4$

o. $f(s) = \dfrac{4s^5 - 1}{s^3} + 3\sqrt[3]{2}$

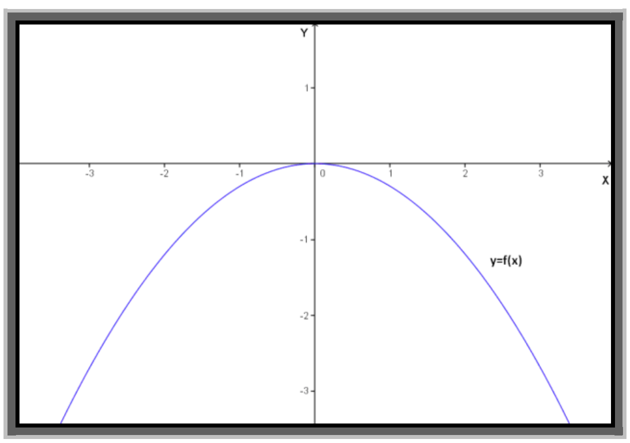
p. $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - (\dfrac{1}{4}x + 1)$

q. $f(t) = \left(4t^9 - t\right)\dfrac{1}{t + 2}$

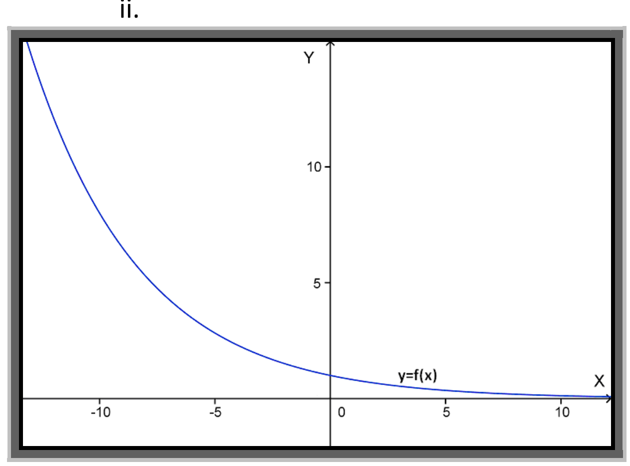
35. Dadas las siguientes gráficas de funciones $f: R \to R$.

Indicar cuáles corresponden a funciones biyectivas. En esos casos trazar sus simétricas respecto a la recta y = x (es decir, construir la gráfica de la función inversa).

i.

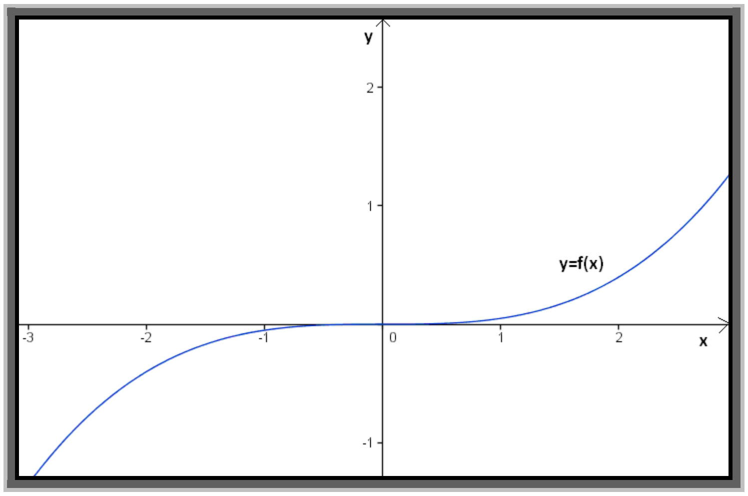


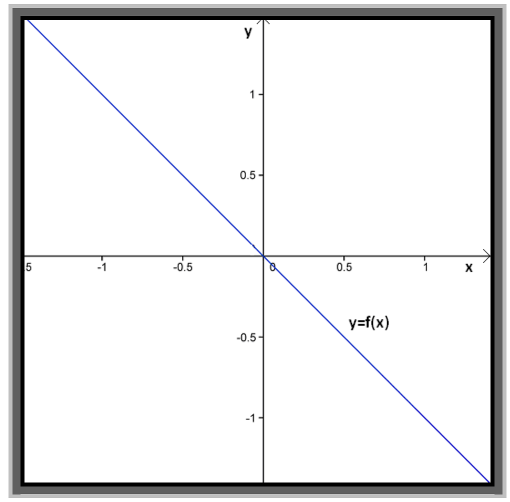
ii.



iii.

iv.





36. Dadas las siguientes funciones $f: D_f \rightarrow I_f$ analizar cuáles son biyectivas. Para aquellas que lo sean, hallar la fórmula de $f^{-1}(x)$. Luego graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos.

a. $f(x) = 2x^3 + 1$

b. $f(x) = \sqrt{x+1}$

c. $f(x) = x^2 + 3$

d. $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

e. $f(x) = \dfrac{2}{x-5} + 1$

37. Dadas las siguientes funciones, hallar los dominios de f y de g, para que sea posible efectuar las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Luego, hallar dichas funciones compuestas.

a. $f(x) = \sqrt[3]{x-7}$ $\quad$ $g(x) = 4x^2 - 3$

b. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $g(x) = 2x^2 + 1$

c. $f(x) = 2x - 5$ $\quad$ $g(x) = x^3 + 1$

d. $f(x) = 2x - 10$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 5$

38. La cantidad de unidades demandada de cierto artículo está dada por $q = 300 - 2p$, donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual **I** obtenido por las ventas de este artículo está dado por $I = 300p - 2p^2$.

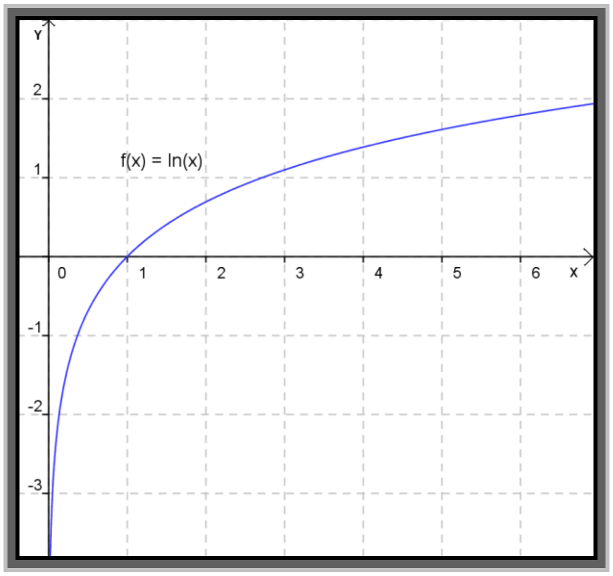
a. Expresar el ingreso obtenido por las ventas en función de la cantidad q de unidades demandadas.

b. ¿Cuál será el ingreso si se demandan 50 unidades?

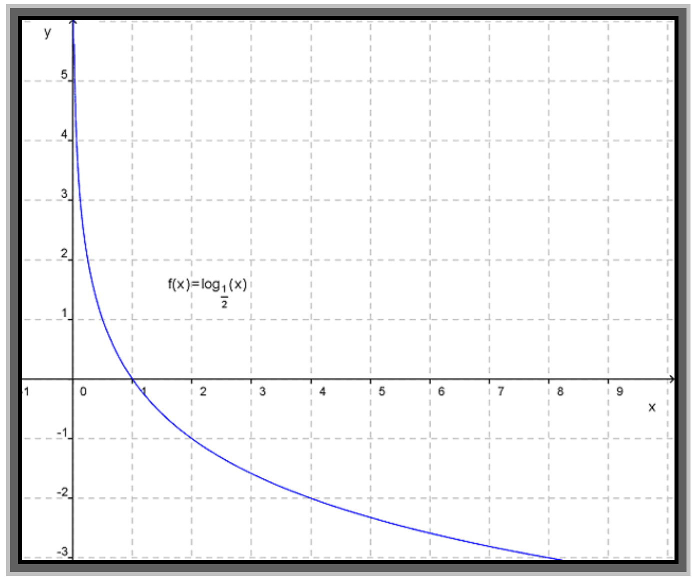
39. El ingreso **I** por cierto artículo depende del precio **p** por unidad y está dado por la función $I = g(p) = 100 - p^2$. El precio **p** fijado por unidad está dado por $p = f(x) = 150 - x$, donde x es la cantidad de unidades demandada. Obtener $g \circ f(x)$ e interpretar el resultado.

40. A continuación se presentan los gráficos de las funciones $f: R^{+} \to R, f(x) = \log_a(x)$ y $h: R \to R^{+}$, $h(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, para algunos valores de a.

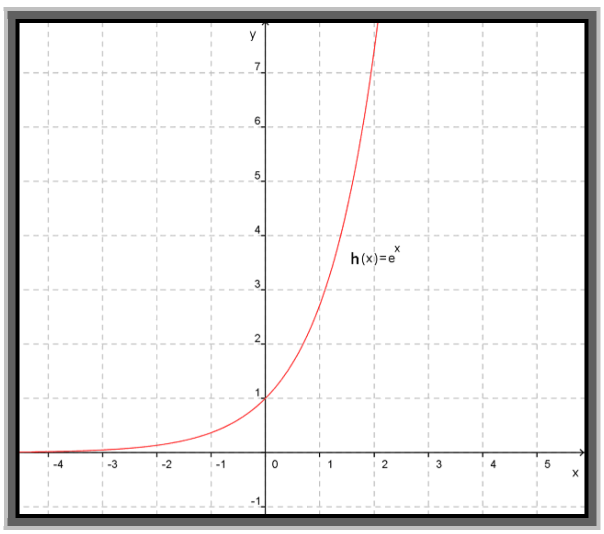
$f(x) = \ln(x)$



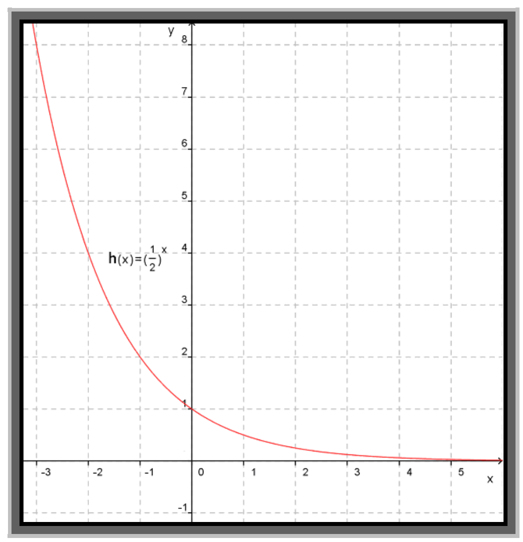
$f(x) = \log_{1/2}(x)$



$h(x) = e^x$



$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



i. Representar gráficamente las siguientes funciones hallando previamente su dominio.

a. $f(x) = 2^{x-1}$

b. $f(x) = \ln x - 2$

c. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

d. $f(x) = \log_{1/2}(x+4)$

e. $f(x) = e^{-x}$

f. $f(x) = \log(x+5) - 3$

ii. Para las funciones de los ítems b., c. y f. corroborar a partir del gráfico que f: $D_f \to I_f$ es biyectiva y hallar la fórmula de la función inversa f^{-1}: $I_f \to D_f$.

41. El valor de reventa V de una máquina agrícola está dado por la función $V(t) = 500000e^{-0.05t}$, donde t representa la cantidad de años transcurridos desde la compra original.

a. ¿Cuál era el valor original de la máquina agrícola?
b. ¿Cuál será el valor de reventa después de 10 años?
c. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el valor de reventa sea la cuarta parte del valor original?

Resolución del ejercicio 10)

Hallar en cada caso, si existe, la fórmula de una función lineal f: R→R que satisfaga las condiciones pedidas:

a. f(1)=5 y f(-3)=11

La fórmula de la función lineal es f: R→R/ f(x) = a.x+b

A partir de los datos, sabemos que el gráfico de la función lineal pasa por los puntos (1, 5) y (-3, 11).

Dados estos dos puntos, podemos hallar los valores de a y b.

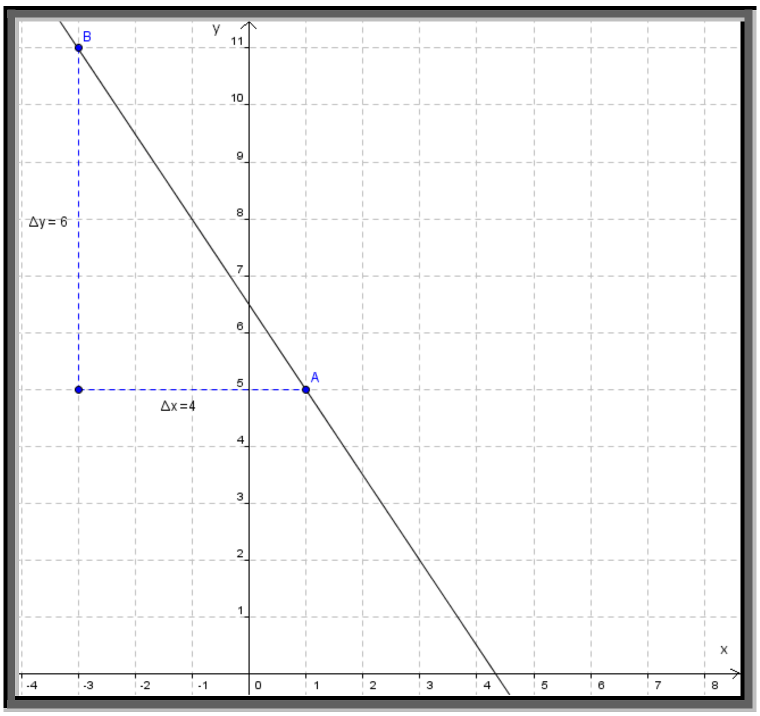
Recordemos que dados (x_1,y_1), (x_2,y_2), donde $x_1 \neq x_2$, podemos calcular la pendiente utilizando la fórmula

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En nuestro caso:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{-3-1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

Esto puede verse gráficamente



Calculemos el b. Hasta el momento, la fórmula es $f(x) = -\frac{3}{2}x + b$.

Como f(1)=5,

$$5 = f(1) = -\frac{3}{2}.1 + b$$

$$5 = -\frac{3}{2} + b$$

$$5 + \frac{3}{2} = b$$

$$\frac{13}{2} = b$$

Luego, la fórmula es $f: R \to R / f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$.

b. Responde a la siguiente tabla de valores:

x	f(x)
-1	1
1/2	4
3	8

Si existiera una función lineal que responda a esta tabla, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendría que ser constante. Sin embargo, en este caso

$\Delta x = \frac{3}{2}$ $\Delta y = 3$

$\Delta x = \frac{5}{2}$ $\Delta y = 4$

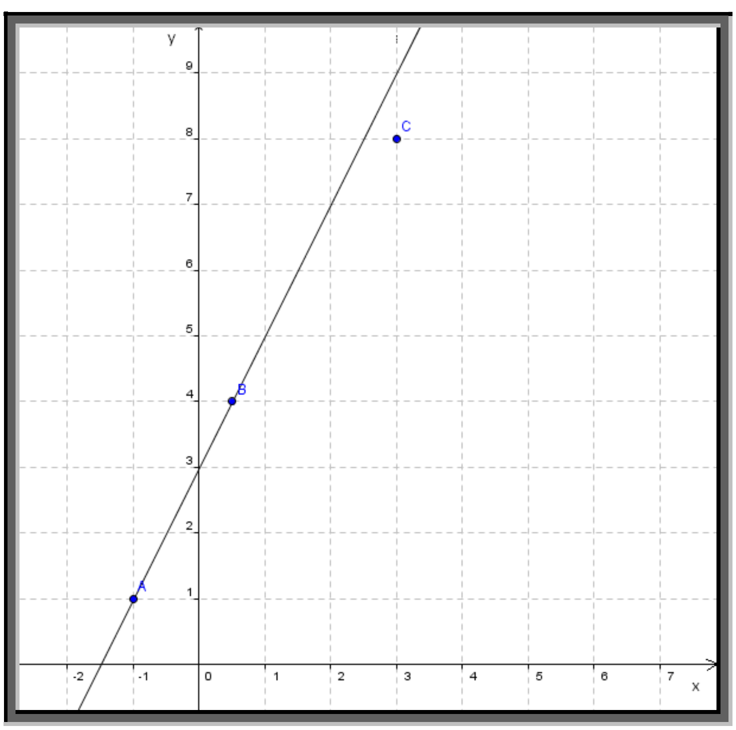
x	f(x)
-1	1
1/2	4
3	8

entre (-1, 1) y (1/2, 4), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

y entre (1/2, 4) y (3, 8), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}$

Como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no permanece constante, la tabla no responde a ninguna función lineal.

Otra forma de ver que no existe una función lineal que responda a la tabla es ubicar los tres puntos en el plano real, trazar la recta que pasa por dos de ellos (recordar que dos puntos determinan una recta) y comprobar que el tercero no pertenece a dicha recta, es decir, los tres puntos no están alineados.



c. El conjunto de positividad de f es $(-2;+\infty)$ y $f(-3)=-5$

Si el conjunto de positividad es $(-2;+\infty)$, entonces f(-2)=0.

Luego, sabemos que el gráfico de la función lineal, en caso de existir, debería pasar por los puntos (-2, 0) y (-3, -5).

Procedemos como en el ítem a)

$f: R \to R / f(x) = ax + b$

Calculemos la pendiente

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-0}{-3-(-2)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Calculemos el b. Hasta el momento, la fórmula es $f(x) = 5x + b$.

Como f(-2)=0,

$0 = f(-2) = 5.(-2) + b$

$0 = -10 + b$

$10 = b$

Luego, la fórmula es $f: R \to R / f(x) = 5x + 10$.

<u>Resolución del ejercicio 11)</u>

En cada caso, hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones pedidas. Representar gráficamente cada recta.

i. Pasa por el punto (-1,3) y es paralela a la recta de ecuación y= -x-2.

Recordemos que dos rectas no verticales son paralelas si tienen la misma pendiente. Luego, como la pendiente de y=-x-2 es a = -1, la pendiente de la recta pedida debe ser -1.

Así que la ecuación de la recta es de la forma y = -x+b y debe pasar por el punto (-1, 3).

Reemplacemos el punto en la ecuación y calculemos b:

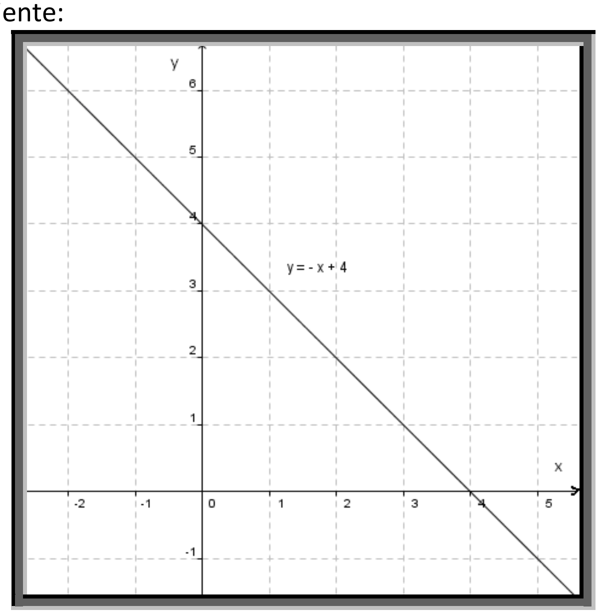
$y = -x + b$

$3 = -1 + b$

$4 = b$

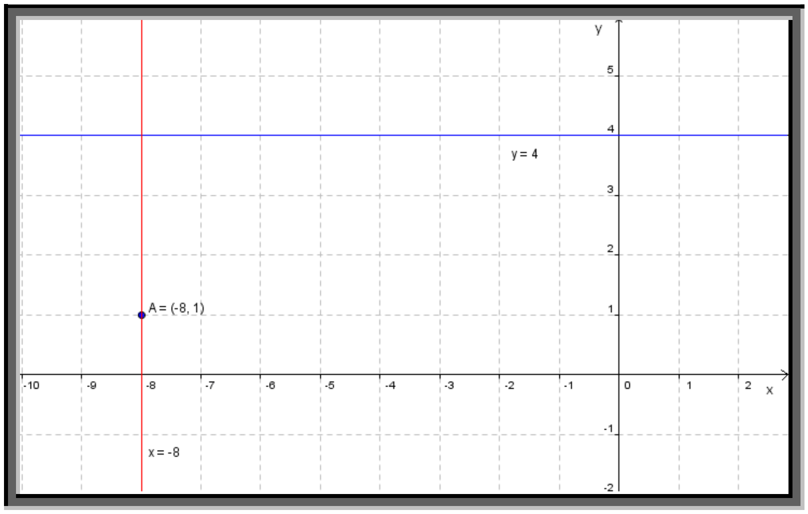
Luego, la ecuación de la recta que satisface las condiciones pedidas es $y = -x + 4$.

Su representación gráfica es la siguiente:



ii. Pasa por el punto (-8,1) y es perpendicular a la recta de ecuación 2y-8 = 0.

La recta 2y - 8 = 0 es equivalente a y = 4, por lo tanto se trata de una recta horizontal.
Buscamos una recta perpendicular a la recta y=4 que pase por el punto (-8, 1), entonces dicha recta tendrá que ser una recta vertical que pase por (-8, 1). Gráficamente:



Luego, la ecuación de la recta que satisface lo pedido es x = -8.

iii. Pasa por el origen de coordenadas y por la intersección de las rectas y-2x+3=0; y+2x-9=0.

Primero hallemos el punto de intersección entre las rectas dadas:

$y-2x+3=0 \Leftrightarrow y=2x-3$

$y+2x-9=0 \Leftrightarrow y=-2x+9$

Igualamos

$2x-3=-2x+9$

$4x=12$

$x=3$

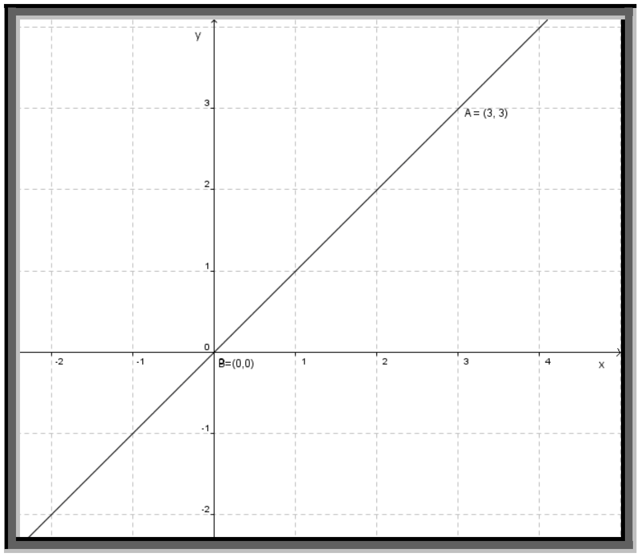
Hasta aquí hemos hallado la abscisa del punto de intersección, nos falta hallar su correspondiente ordenada.
Reemplazamos x = 3 en

$y=2x-3$

$y=2.3-3$

$y=3$

Luego, el punto de intersección entre las rectas es (3, 3).
Ahora resta obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 0) (origen de coordenadas) y (3, 3).
Como pasa por (0, 0), la ordenada al origen es b=0.
Luego y = a.x+0.
Además, sabemos que debe pasar por (3, 3), entonces 3 = a.3, es decir, a=1.
La ecuación de la recta pedida es y=x.



iv. Pasa por la intersección de las rectas $x + y = 2$, $x - y = 0$ y por la de las rectas $2x + y = 7$; $-x + 2y = 4$.

Nos piden la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

- uno de ellos se obtiene de la intersección entre las rectas $x + y = 2$, $x - y = 0$
- el otro se obtiene de la intersección entre las rectas $2x + y = 7$; $-x + 2y = 4$

Intersección entre

$x + y = 2 \to y = 2-x$

$x - y = 0$ (usando lo anterior)$\to x-(2-x)=0$

$$2x-2=0$$

$$x=1$$

Entonces $y=2-1=1$.

El punto de intersección es (1, 1).

Intersección entre

$2x + y = 7 \to y = 7 - 2x$

$-x + 2y = 4$ (usando lo anterior)$\to -x+2.(7-2x)=4$

$$-x+14-4x=4$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2$$

Entonces $y=7-2.2=3$.

El punto de intersección es (2, 3).

Luego, tenemos que hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (2, 3).

Calculemos la pendiente

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Calculemos el b. Hasta el momento, la fórmula es $y = 2x + b$.

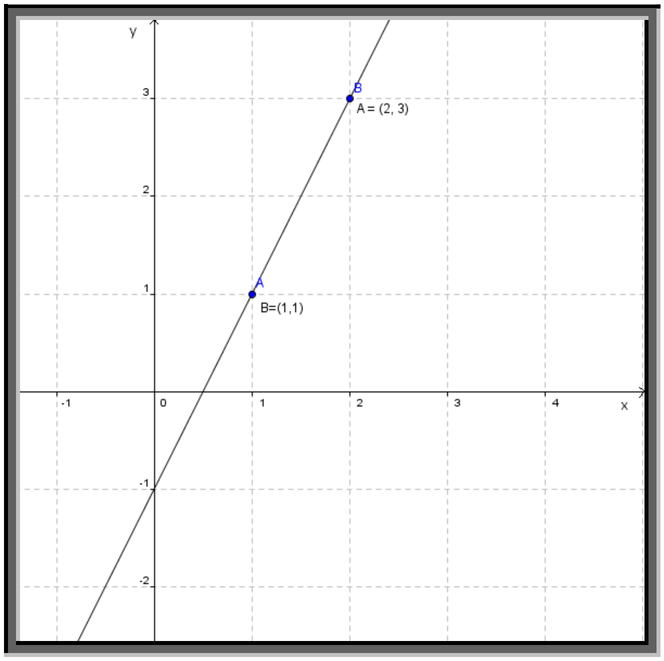
Como pasa por el (1, 1),

$1 = 2.1 + b$

$1 = 2 + b$

$-1 = b$

Luego, la ecuación de la recta que satisface lo pedido es y = 2x-1.



Resolución del ejercicio 24

El editor de una revista estima que si fija un precio de $4 a su revista, vende 100 ejemplares en una semana; sin embargo, si el precio fijado es de $5, venderá 80 revistas. Suponiendo que la función que relaciona el precio con la cantidad de unidades demandadas es lineal, responder las siguientes preguntas.

d. Si en una semana el número de revistas vendidas se incrementó de 150 a 155, ¿qué incremento se produjo en el precio? Interpretar el resultado en términos del problema.

e. Determinar el incremento promedio en el precio por unidad cuando el número de revistas vendidas se incrementa de 150 a 155. Interpretar el resultado obtenido en términos del problema.

En principio calculemos la función lineal que relaciona precio con cantidad. Ésta será de la forma f(x)=mx+b, donde x representa el número de ejemplares, y deberá cumplir que f(100)=4 y f(80)=5.
La pendiente es m=(5-4)/(80-100)=-1/20 y usando que f(100)=40, resulta b=9. Luego f(x)=-1/20.x+9.

a. El incremento que se produjo en el precio si el número de revistas vendidas se incremetó de 150 a 155 será

$$\Delta f = f(155) - f(150) = -0.25$$

Es decir, el precio disminuye 25 centavos si se produce dicho incremento en la cantidad de revistas vendidas.

b. El incremento promedio en el precio por unidad cuando el número de revistas vendidas se incrementa de 150 a 155 es $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-0.25}{5} = -\frac{1}{20}$.

Resolución del ejercicio 32

Una empresa de energía eléctrica cobra a las pequeñas industrias un cargo fijo mensual de $200 y un cargo variable según su consumo mensual. Este cargo variable es de $0.8 por Kw/h por los primeros 50 Kw/h. consumidos; $0.6 por Kw/h. que excedan los 50 Kw/h.

a. Expresar la función de costo de la energía eléctrica para las industrias en función del consumo.
b. ¿Cuál es el costo en energía eléctrica si se consumen 200 Kw/h? ¿Y si se consumen 43 Kw/h?
c. ¿Cuántos Kw/h se consumieron si el costo fue de $363,8?
d. Representar gráficamente la función.

a. La función de costo de energía eléctrica será

$$C(x)=\begin{cases} 0.8x+200 & \text{si } 0\le x\le 50 \quad \text{(cantidad de kw/h consumido por el costo por kw/h más el costo fijo)} \\ 0.6(x-50)+240 & \text{si } x>50 \quad \text{(cantidad kw/h que exceden los 50 kw/h por el costo de cada kw/h que excedente, más el costo fijo y el costo de los primeros 50 kw/h consumidos)} \end{cases}$$

b. El costo en energía eléctrica si se consumen 200 kw/h será C(200)=330. Y el de 43 kw/h, C(43)=234,4.

c. Si el costo fue de $272,4 entonces habrá que averiguar para qué valor de x, C(x)=272,4. Observar que tendremos que considerar la segunda rama ya que el mayor costo que se obtiene para la primera es de 240 pesos. Luego, resolviendo la ecuación 0.6(x-50)+240=272.4 se obtiene que el consumo deberá ser 104 kw/h.

d.