EPFL - Analyse III GC/SIE - Marco Picasso - Automne 2015

Exercise collection

Question 1 **01.001 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et soient $\vec{u}, \vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs vectoriels respectivement de classes C^1 et C^2 . Démontrer les formules suivantes :
- $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = 0$,
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = -\Delta \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{v}$,
- $\operatorname{div} (f\vec{u}) = f \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$,
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, (f\vec{u}) = f\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \times \vec{u}$.

Question 2 **01.001a – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et soient $\vec{u}, \vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs vectoriels respectivement de classe C^1 et C^2. Démontrer les formules suivantes :

(a) $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = 0$,

(b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = -\Delta \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{v}$,

(c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, (f\vec{u}) = f\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \times \vec{u}$.

Question 3 **01.002 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = r^n \vec{r},$$

où n est un entier positif, $\vec{r} = x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} + z\, \vec{k}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démontrer que $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = Cr^n$ où C est une constante à définir.

Question 4 **01.002a – corrected**

(a) On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r},$$

où $\vec{r} = x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} + z\, \vec{k}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Démontrer que

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{C}{r},$$

où C est une constante à définir.

(b) Soit $f : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calculer $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$ et Δf.

Question 5 **01.003 – corrected**

a. Soit $f : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et Δf.

b. Idem avec le champ scalaire $g : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Question 6 **01.004 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et soient $\vec{u}, \vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs vectoriels de classe C^1.
Démontrer les formules suivantes :
- $\text{div}\,(f\vec{u}) = f \text{div}\,\vec{u} + \vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f$,
- $\text{div}\,(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} - \vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$,
- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\times\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + \vec{v}\times\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$,
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\vec{u}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f\times\vec{u}$,
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\ \text{div}\ \vec{v} - \vec{v}\ \text{div}\ \vec{u} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$.

Question 7 **01.005 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^2.
Démontrer les formules suivantes :
- $\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0$,
- $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = -\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{v}$.

Question 8 **01.006 – corrected**

a. Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}.$$

Représenter $\vec{v}$ dans le plan Oxy (vous pouvez utiliser la fonction `fieldplot3d` du logiciel `maple`). Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ et div $\vec{v}$. Si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$, pouvez-vous trouver un champ scalaire $f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$? Si div $\vec{v} = 0$, pouvez-vous trouver un champ vectoriel $\vec{\psi} : E \to \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\psi}$?

b. Idem avec

$$\vec{v}(x,y,z) = y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}.$$

Question 9 **01.007 – corrected**

a. Soit $f : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et Δf.

b. Idem avec le champ scalaire $g : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Question 10 **01.008 – corrected**

a. Montrer que $2ab \le a^2 + b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
b. En déduire que $|\vec{x}.\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.
c. En déduire que $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

Question 11 **01.009 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et soient $\vec{u}, \vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs vectoriels respectivement de classe C^1 et C^2 . Démontrer les formules suivantes :
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = -\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v}$,
- $\text{div}\,(f\vec{u}) = f\text{div}\,\vec{u} + \vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,f$,
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\vec{u}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \times \vec{u}$.

Question 12 **01.010 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire C^1, Σ une surface de paramétrisation lisse

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k}, \tag{1}$$

et ℓ la fonction définie par

$$\ell(u,v) = f(\vec{r}(u,v)). \tag{2}$$

Calculer $\dfrac{\partial \ell}{\partial u}(u,v)$.

Question 13 **01.011 – not corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire défini par :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

L'isosurface 1 de f (c'est-à-dire $\{(x,y,z) \in E; f(x,y,z) = 1\}$) est :

♢ ***a.*** le cylindre de centre 0, de rayon 1 et de hauteur 1

♢ ***b.*** la sphère de centre 0 et de rayon 1

♢ ***c.*** le cube de centre 0 et de côté 1

♢ ***d.*** l'ensemble $\{(x,y,z) \in E; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Question 14 **01.012 – not corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2.
On a :

♢ ***a.*** $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0$

♢ ***b.*** $\text{div}\,(f\vec{v}) = f\text{div}\,\vec{v} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\vec{v}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + \vec{v} \times \overrightarrow{\text{grad}}\,f$

♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v}$

Question 15 **01.013 – not corrected**

Soit $\vec{v} : E\diagdown\{0\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = r^n\vec{r}$$

où n est un entier positif, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On a $\text{div}\,\vec{v}(x,y,z) = Cr^n$ où C vaut :

♢ ***a.*** n

♢ ***b.*** 3

♢ ***c.*** $3 + n$

♢ ***d.*** 1

Question 16 **01.014 – corrected**

Un matériau élastique homogène isotrope soumis à une force volumique $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ se déforme et on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ le déplacement par rapport à l'état naturel. Le tenseur des contraintes $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ issu de ce déplacement est défini par

$$\begin{array}{lll}
\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) & \sigma_{xy} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) & \sigma_{xz} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}) \\
\sigma_{yx} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}) & \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) & \sigma_{yz} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}) \\
\sigma_{zx} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}) & \sigma_{zy} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}) & \sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}).
\end{array}$$

On a la relation div $\sigma + \vec{f} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + f_y = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + f_z = 0.
\end{aligned}$$

On a alors

1)

♢ ***a.*** $\mu\Delta\vec{u} + \lambda \ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***b.*** $(\mu+\lambda)\Delta\vec{u} + \lambda \ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***c.*** $\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***d.*** $(\lambda+\mu)\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu) \ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

Parmi les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ suivantes, cochez celles qui sont telles que $\Delta f = 0$

2)

♢ ***a.*** $f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 \qquad (x,y,z) \in E$

♢ ***b.*** $f(x,y,z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad (x,y,z) \in E$

♢ ***c.*** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x,y,z) \in E \setminus \{0\}$

♢ ***d.*** $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y,z) \in E \setminus \{Oz\}$

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \forall (x,y,z) \in E.$$

f est continue sur E
3)

♢ ***a.*** Vrai
♢ ***b.*** Faux

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est continue sur E
4)

♢ ***a.*** Vrai
♢ ***b.*** Faux

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ et $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\rho > 0$ donné, p représente la pression, $\vec{v}$ la vitesse et ρ la densité d'un fluide incompressible. On a $\overrightarrow{\text{grad}}\,(p + \frac{1}{2}\rho\,\vec{v}.\vec{v}) =$
5)

♢ ***a.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho\,(\text{div } \vec{v})\,\vec{v}$
♢ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho\,(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,)\,\vec{v}$
♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho\,((\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} + \vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v})$
♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho\,\vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

où on a noté $(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Question 17 **01.014b – corrected**

Un matériau élastique homogène isotrope soumis à une force volumique $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ se déforme et on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ le déplacement par rapport à l'état naturel. Le tenseur des contraintes $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ issu de ce déplacement est défini par

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) \qquad \sigma_{xy} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \qquad \sigma_{xz} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x})$$
$$\sigma_{yx} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}) \qquad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) \qquad \sigma_{yz} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$$
$$\sigma_{zx} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}) \qquad \sigma_{zy} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}) \qquad \sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}).$$

On a la relation div $\sigma + \vec{f} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + f_y = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + f_z = 0.$$

On a alors

$\diamondsuit$ ***a.*** $\mu\Delta\vec{u} + \lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

$\diamondsuit$ ***b.*** $(\mu+\lambda)\Delta\vec{u} + \lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

$\diamondsuit$ ***c.*** $\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

$\diamondsuit$ ***d.*** $(\lambda+\mu)\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

Question 18 **01.014c – corrected**

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ et $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ deux champs de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\rho > 0$ donné, p représente la pression, $\vec{v}$ la vitesse et ρ la densité d'un fluide incompressible. On a $\overrightarrow{\text{grad}}\,(p + \frac{1}{2}\rho\,\vec{v}.\vec{v}) =$

$\diamondsuit$ ***a.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \rho\,(\text{div}\ \vec{v})\,\vec{v}$

$\diamondsuit$ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \rho\,(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,)\,\vec{v}$

$\diamondsuit$ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \rho\,((\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} + \vec{v}\times\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v})$

$\diamondsuit$ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \rho\,\vec{v}\times\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

où on a noté $(\vec{v}\,.\ \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Question 19 **01.014d – corrected**

Un matériau élastique homogène isotrope soumis à une force volumique $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ se déforme et on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ le déplacement par rapport à l'état naturel. Le tenseur des contraintes $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ issu de ce déplacement est défini par

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) \qquad \sigma_{xy} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \qquad \sigma_{xz} = \mu(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x})$$
$$\sigma_{yx} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}) \qquad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}) \qquad \sigma_{yz} = \mu(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$$
$$\sigma_{zx} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}) \qquad \sigma_{zy} = \mu(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}) \qquad \sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}).$$

On a la relation $\text{div}\ \sigma + \vec{f} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + f_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + f_z = 0. \end{aligned}$$

On a alors

♢ ***a.*** $\mu\Delta\vec{u} + \lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***b.*** $(\mu+\lambda)\Delta\vec{u} + \lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***c.*** $\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

♢ ***d.*** $(\lambda+\mu)\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\ \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

Question 20 **01.014e – corrected**

Parmi les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ suivantes, cochez celles qui sont telles que $\Delta f = 0$

♢ ***a.*** $f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 \qquad (x,y,z) \in E$

♢ ***b.*** $f(x,y,z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad (x,y,z) \in E$

♢ ***c.*** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x,y,z) \in E \setminus \{0\}$

♢ ***d.*** $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y,z) \in E \setminus \{Oz\}$

Question 21 **01.015 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On a

- f est continue (en tout point $P \in E$) ☐ oui ☐ non
- f est $\mathcal{C}^1(E)$ ☐ oui ☐ non
- Pour tout $(x,y,z) \in E \setminus \{0\}$, on a $\Delta f(x,y,z) = 0$ ☐ oui ☐ non

Soit $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. On a

- $\Delta f(x,y,z) = 0$ ☐ oui ☐ non

Soit $\vec{u} : E \to \mathbb{R}^3$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\vec{u}.\vec{\nabla} = \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur défini par

$$(\vec{u}.\vec{\nabla})f = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = u_x\partial_x f + u_y\partial_y f + u_z\partial_z f.$$

On note aussi $(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = \begin{pmatrix} (\vec{u}.\vec{\nabla})u_x \\ (\vec{u}.\vec{\nabla})u_y \\ (\vec{u}.\vec{\nabla})u_z \end{pmatrix}$. On a

☐ ***a.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}.\vec{u}) = 2\ (\vec{u} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u})$

☐ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}.\vec{u}) = 2\ (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} \times \vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u})$

☐ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}.\vec{u}) = 2\ (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$

☐ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}.\vec{u}) = 2\ (\vec{u} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u})$

☐ ***e.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u}.\vec{u}) = 2\ (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} \times \vec{u})$

Question 22 **01.016 – corrected**

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} : E \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note :

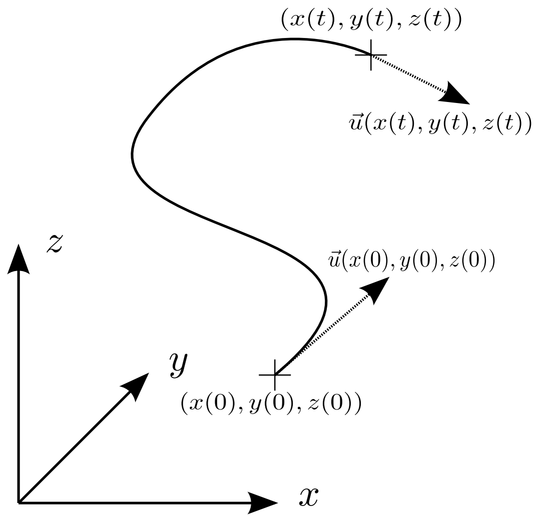
$$x : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto x(t) \end{array} \ , \ y : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto y(t) \end{array} \quad \text{et} \quad z : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto z(t) \end{array} \quad \text{solutions des équations différentielles}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= u_x(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) &= u_y(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) &= u_z(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} E \times [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \mapsto & f(x,y,z,t) \end{array}$ solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) + u_x(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) + u_y(..)\frac{\partial f}{\partial y}(..) + u_z(..)\frac{\partial f}{\partial z}(..) = 0 \qquad (x,y,z) \in E,\ t > 0.$$

Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $f(x(t), y(t), z(t), t) = f(x(0), y(0), z(0), 0)$. Puisque $(x(t), y(t), z(t))$ sont les trajectoires d'une particule ayant la vitesse $\vec{u}$, on dit que f est constante le long des trajectoires.



Indication : Poser $l(t) = f(x(t), y(t), z(t), t)$ et calculer $l'(t)$.

Montrer que si $u_x = 1$ et $u_y = u_z = 0$, on obtient $f(x,y,z,t) = f(x-t, y, z, 0)$. Illustrer le résultat ainsi obtenu dans le cas où $f(x,y,z,0) = e^{-x^2}$.

Question 23 **01.017 – corrected**

Rappel : Chain rule / Règle de dérivation composée :

Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit trois applications $\mathcal{C}^1$:

$$x : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto x(t) \end{array} \ , \ y : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto y(t) \end{array} \quad \text{et} \quad z : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto z(t) \end{array} .$$

On veut montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\ y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\ z'(t)}$$ **A connaitre ! !**

On rappelle que $x'(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$ et que $\forall h > 0$:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + o(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

On rappelle que, pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

et que, $\forall h > 0$: $f(x+h, y, z) = f(x, y, z) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + o(h)$.
<u>Application :</u>
Soit

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

et

$$x(t) = cos(t), \quad y(t) = sin(t), \quad z(t) = e^t.$$

Calculer $\dfrac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$ à l'aide de la règle de dérivation composée, puis par un calcul direct.

Question 24 **02.001 – corrected**

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ, soumis à un champ de force $\vec{f}$ est régi par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
&\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} - \mu\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{f}, \\
&\text{div } \vec{v} = 0,
\end{aligned}$$

où $\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes v_x, v_y, v_z correspondant à la vitesse du fluide et p est le champ scalaire correspondant à la pression du fluide. Sachant que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})v_x$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})v_y$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})v_z$, ces équations s'écrivent encore

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \mu\Delta v_x + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x, \tag{3}$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \mu\Delta v_y + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y, \tag{4}$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \mu\Delta v_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

On considère les deux cas suivants.
a) Fluide au repos : le fluide occupe le demi-espace

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \leq 0\}$$

et le champ de force est donné par $\vec{f} = -\rho g\vec{k}$, g étant la gravité. Vérifier que

$$\begin{aligned}
v_x(x, y, z) &= 0, \\
v_y(x, y, z) &= 0, \\
v_z(x, y, z) &= 0, \\
p(x, y, z) &= -\rho g z + C,
\end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, C étant une constante arbitraire.
b) Ecoulement de Poiseuille : le fluide est confiné entre deux plans horizontaux et le champ de force est donné par $\vec{f} = \vec{0}$. Vérifier que

$$\begin{aligned}
v_x(x, y, z) &= \frac{\alpha}{\mu}z^2 + \beta z + \gamma, \\
v_y(x, y, z) &= 0, \\
v_z(x, y, z) &= 0, \\
p(x, y, z) &= 2\alpha x + C
\end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, α, β, γ et C étant des constantes arbitraires.

Question 25 **02.001a – corrected**

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ, soumis à un champ de force $\vec{f}$, est régi par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}&\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v}-\mu\Delta\vec{v}+\overrightarrow{\text{grad}}\,p=\vec{f},\\&\text{div }\vec{v}=0,\end{aligned}$$

où $\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes v_x, v_y, v_z correspondant à la vitesse du fluide et p est le champ scalaire correspondant à la pression du fluide. Sachant que $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,)v_x$, $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,)v_y$, $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,)v_z$, ces équations s'écrivent encore

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_x+\frac{\partial p}{\partial x}=f_x, \tag{7}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_y+\frac{\partial p}{\partial y}=f_y, \tag{8}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_z+\frac{\partial p}{\partial z}=f_z, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{10}$$

On pose $\vec{f}=\vec{0}$. Les champs suivants sont-ils des solutions des équations de Navier-Stokes ?

(a) $\vec{v}(x,y,z)=\frac{z^2}{\mu}\vec{\imath}$, $\quad p(x,y,z)=2x$,

(b) $\vec{v}(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{\mu}\vec{k}$, $\quad p(x,y,z)=4z$,

(c) $\vec{v}(x,y,z)=\sin(x)\cos(y)\vec{\imath}+\cos(x)\sin(y)\vec{\jmath}$, $\quad p(x,y,z)=2\cos(x)\cos(y)$.

Question 26 **02.002 – corrected**

On définit le champ scalaire f :

$$f(x,y,z)=x^2+z^2+yz.$$

Si Γ est l'arc lisse formé du segment de droite d'origine $P=(0,-1,5)$ et d'extrémité $Q=(3,-5,5)$, calculer les quantités suivantes :

a) $\int_\Gamma ds$,

b) $\int_\Gamma f\,ds$.

Question 27 **02.003 – corrected**

On considère l'arc lisse Γ paramétré par :

$$\vec{r}(t)=\cos t\;\vec{i}+\sin t\;\vec{j}+t\vec{k},\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Si $\vec{v}$ est le champ vectoriel donné par :

$$\vec{v}(x,y,z)=(x^2+y^2)\;\vec{i}+z\;\vec{j}+x\;\vec{k},$$

calculer les quantités suivantes :

a) $\int_\Gamma\; ds$,

b) $\int_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{dr}$,

c) $\int_\Gamma \vec{v}\times\vec{dr}$,

d) $\int_\Gamma \vec{v}\,ds$.

Question 28 **02.003a – corrected**

On considère l'arc Γ paramétré par :

$$\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j} + t\vec{k}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

et $\vec{v}$ le champ vectoriel donné par :

$$\vec{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\ \vec{i} + z\ \vec{j} + x\ \vec{k}.$$

2.1) $\int_\Gamma ds$ vaut :

♢ ***a.*** π
♢ ***b.*** $\sqrt{2}\pi$
♢ ***c.*** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
♢ ***d.*** $\frac{\pi}{2}$

2.2) $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r}$ vaut :

♢ ***a.*** 1
♢ ***b.*** $\frac{\pi}{2}$
♢ ***c.*** $\frac{\pi}{2} + 1$
♢ ***d.*** $\frac{\pi}{2} - 1$

Question 29 **02.004 – corrected**

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ, soumis à un champ de force $\vec{f}$ est régi par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}&\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} - \mu\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,p = \vec{f},\\ &\text{div}\ \vec{v} = 0,\end{aligned}$$

où $\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes v_x, v_y, v_z correspondant à la vitesse du fluide et p est le champ scalaire correspondant à la pression du fluide. Sachant que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_x$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_y$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_z$, ces équations s'écrivent encore

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_x + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x, \tag{11}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_y + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y, \tag{12}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{14}$$

On considère les deux cas suivants.
a. Fluide au repos : le fluide occupe le demi-espace

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \leq 0\}$$

et le champ de force est donné par $\vec{f} = -\rho g\vec{k}$, g étant la gravité. Vérifier que

$$\begin{aligned}&v_x(x, y, z) = 0,\\ &v_y(x, y, z) = 0,\\ &v_z(x, y, z) = 0,\\ &p(x, y, z) = -\rho gz + C,\end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, C étant une constante arbitraire.

b. Ecoulement de Poiseuille : le fluide est confiné entre deux plans horizontaux et le champ de force est donné par $\vec{f} = \vec{0}$. Vérifier que

$$\begin{aligned} v_x(x,y,z) &= \frac{\alpha}{\mu} z^2 + \beta z + \gamma, \\ v_y(x,y,z) &= 0, \\ v_z(x,y,z) &= 0, \\ p(x,y,z) &= 2\alpha x \end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, α, β, γ étant des constantes arbitraires.

Question 30 **02.005 – corrected**

Soit $\vec{r}(t) = cos(t)\vec{i} + sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$, la paramétrisation lisse d'une hélice Γ.
a. Calculer $\int_\Gamma ds$.
b. Calculer $\int_\Gamma f ds$ où $f : E \to \mathbb{R}$ est le champ scalaire défini par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Question 31 **02.006 – corrected**

On définit le champ scalaire f et le champ vectoriel $\vec{v}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + z + yz, \\ \vec{v}(x,y,z) &= x^2\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + z\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Si Γ est l'arc lisse formé du segment de droite d'origine $P = (1,2,3)$ et d'extrémité $Q = (5,2,0)$, calculer les quantités suivantes :

a. $\int_\Gamma ds$,

b. $\int_\Gamma f\, ds$,

c. $\int_\Gamma \vec{v} \cdot \vec{dr}$.

Question 32 **02.007 – corrected**

a. Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^2. Montrer que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = -\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v}.$$

b. Soit $\vec{u} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1 et $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1. Montrer que

$$\text{div}\,(f\vec{u}) = f\text{div}\,\vec{u} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,f.$$

c. Soient $\vec{v}$ et $\vec{u} : E \to \mathbb{R}^3$ des champs vectoriels de classe C^1. Montrer que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + \vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}.$$

Question 33 **02.008 – corrected**

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ, soumis à un champ de force $\vec{f}$ est régi par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} &\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} - \mu\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\,p = \vec{f}, \\ &\text{div}\,\vec{v} = 0, \end{aligned}$$

où $\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes v_x, v_y, v_z correspondant à la vitesse du fluide et p est le champ scalaire correspondant à la pression du fluide. Sachant que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_x$,

$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})v_y$, $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})v_z$, ces équations s'écrivent encore

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_x+\frac{\partial p}{\partial x}=f_x, \tag{15}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_y+\frac{\partial p}{\partial y}=f_y, \tag{16}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\mu\Delta v_z+\frac{\partial p}{\partial z}=f_z, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{18}$$

On considère les deux cas suivants.

a) Fluide au repos : le fluide occupe le demi-espace

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z\leq 0\}$$

et le champ de force est donné par $\vec{f}=-\rho g\vec{k}$, g étant la gravité. Vérifier que

$$\begin{aligned}
&v_x(x,y,z)=0,\\
&v_y(x,y,z)=0,\\
&v_z(x,y,z)=0,\\
&p(x,y,z)=-\rho g z+C,
\end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, C étant une constante arbitraire.

b) Ecoulement de Poiseuille : le fluide est confiné entre deux plans horizontaux et le champ de force est donné par $\vec{f}=\vec{0}$. Vérifier que

$$\begin{aligned}
&v_x(x,y,z)=\frac{\alpha}{\mu}z^2+\beta z+\gamma,\\
&v_y(x,y,z)=0,\\
&v_z(x,y,z)=0,\\
&p(x,y,z)=2\alpha x
\end{aligned}$$

satisfont les équations de Navier-Stokes, α, β, γ étant des constantes arbitraires.

Question 34 **02.009 – corrected**

On considère l'arc lisse Γ paramétré par :

$$\vec{r}(t)=\cos t\ \vec{i}+\sin t\ \vec{j}+t\vec{k},\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Si $\vec{v}$ est le champ vectoriel donné par :

$$\vec{v}(x,y,z)=(x^2+y^2)\ \vec{i}+z\ \vec{j}+x\ \vec{k},$$

calculer les quantités suivantes :

$$\text{a)}\ \int_\Gamma ds,\qquad \text{b)}\ \int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r},\qquad \text{c)}\ \int_\Gamma \vec{v}\times d\vec{r},\qquad \text{d)}\ \int_\Gamma \vec{v}\,ds.$$

Question 35 **02.009a – corrected**

On considère l'arc lisse Γ paramétré par :

$$\vec{r}(t)=\cos t\ \vec{i}+\sin t\ \vec{j}+t\vec{k},\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Si $\vec{v}$ est le champ vectoriel donné par :

$$\vec{v}(x,y,z)=(x^2+y^2)\ \vec{i}+z\ \vec{j}+x\ \vec{k},$$

calculer les quantités suivantes :

(a) $\int_\Gamma \; ds$,

(b) $\int_\Gamma \vec{v} \cdot \vec{dr}$,

(c) $\int_\Gamma \vec{v} \times \vec{dr}$,

Question 36 **02.010 – corrected**

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ, soumis à un champ de force $\vec{f}$ est régi par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
&\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v} - \mu\Delta\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{f},\\
&\text{div } \vec{v} = 0,
\end{aligned}$$

où $\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes v_x, v_y, v_z correspondant à la vitesse du fluide et p est le champ scalaire correspondant à la pression du fluide. Sachant que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{v}$ est le champ vectoriel de composantes $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_x$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_y$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)v_z$, ces équations s'écrivent encore

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_x + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x, \tag{19}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_y + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y, \tag{20}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \mu\Delta v_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Pour cet exercice, prenons un champ de force nul $\vec{f} = \vec{0}$. Les champs suivants sont des solutions des équations de Navier-Stokes :

♢ ***a.*** $\vec{v}(x, y, z) = \vec{0}\,,\; p(x, y, z) = C,\; C \in \mathbb{R}$

♢ ***b.*** $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{z^2}{\mu}\vec{i}\,,\; p(x, y, z) = 2x + C,\; C \in \mathbb{R}$

♢ ***c.*** $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{x^2}{\mu}\vec{i}\,,\; p(x, y, z) = 2z + C,\; C \in \mathbb{R}$

♢ ***d.*** $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{y^2}{\mu}\vec{i}\,,\; p(x, y, z) = 2x + C,\; C \in \mathbb{R}$

Question 37 **02.011 – corrected**

Soit Γ un arc lisse paramétré par :

$$\vec{r}(t) = x(t)\;\vec{i} + y(t)\;\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Soit f un champ scalaire, on a $\int_\Gamma f\; ds =$

♢ ***a.*** $\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\; dt$

♢ ***b.*** $\int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}(t)\|\; dt$

♢ ***c.*** $\int_a^b f(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; dt$

♢ ***d.*** $\int_a^b f(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)\; dt$

Question 38 02.012 – not corrected

Soit Γ un arc lisse de paramétrisation $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$.
On a :

♢ ***a.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t))x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t))y'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t))z'(t)$

♢ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t) = \dfrac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t))$

♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t) = g'(t)$ avec $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$

♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t) = \text{div}\ (\ f(\vec{r}(t))\vec{r}(t)\ )$

Question 39 02.013 – corrected

Soit Γ un arc lisse de paramétrisations

$$\begin{aligned} \vec{r} : [a, b] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \vec{\rho} : [\alpha, \beta] &\to \mathbb{R}^3 \\ \tau &\mapsto \vec{\rho}(\tau) \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.3 du polycopié, il existe

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\to [\alpha, \beta] \\ t &\mapsto \varphi(t) = \tau \end{aligned}$$

telle que $\vec{\rho}(\varphi(t)) = \vec{r}(t) \quad t \in [a, b]$.
On a

♢ ***a.*** $\displaystyle\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt$

♢ ***b.*** $\displaystyle\int_\Gamma f ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{\rho}(\tau))\|\vec{\rho}\,'(\tau)\|d\tau$

♢ ***c.*** $d\tau = \varphi\,'(t)dt$

♢ ***d.*** $\vec{\rho}\,'(\varphi(t))\varphi\,'(t) = \vec{r}\,'(t)$

♢ ***e.*** $\vec{\rho}\,'(\tau)d\tau = \vec{r}\,'(t)dt$

♢ ***f.*** $\displaystyle\int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{\rho}(\tau))\|\vec{\rho}\,'(\tau)\|d\tau$

Question 40 02.014 – corrected

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Soit Γ un arc lisse de paramétrisation $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.
On a

♢ ***a.*** $\dfrac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$

♢ ***b.*** $\dfrac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x'(t), y'(t), z'(t))x(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x'(t), y'(t), z'(t))y(t) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x'(t), y'(t), z'(t))z(t)$

♢ ***c.*** $\dfrac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)$

♢ ***d.*** $\dfrac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}\,'(t)).\vec{r}(t)$

Question 41 02.015 – corrected

Soit Γ le cercle de centre O et rayon 1 dans le plan Oxy, soit $\epsilon > 0$ et Γ_ϵ l'arc lisse de paramétrisation

$$\vec{r}_\epsilon : [0, 2\pi - \epsilon] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \vec{r_\epsilon}(t) = \cos t\, \vec{\imath} + \sin t\, \vec{\jmath}$$

Montrer que $\lim_{\epsilon \to 0} \text{longueur}(\Gamma_\epsilon) = 2\pi$.

Soit $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation (non-lisse) de Γ. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\| dt$. Conclure.

Question 42 **02.016 – corrected**

On définit le champ scalaire f par la relation suivante :

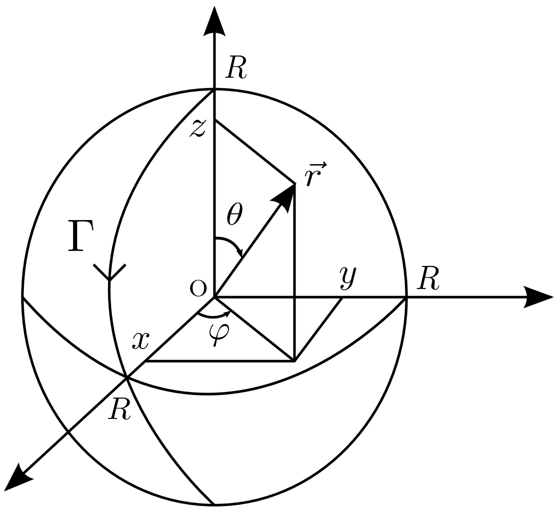
$$f(x, y, z) = x^2 + z + yz$$

Si Γ est l'arc lisse formé du segment de droite d'origine $P = (1, 2, 3)$ et d'extrémité $Q = (5, 2, 0)$, calculer les quantités suivantes :

a. $\int_\Gamma ds$,

b. $\int_\Gamma f\, ds$,

Question 43 **02.017 – corrected**



En coordonnées sphériques, un point de la sphère de rayon R est paramétré par

$$\begin{cases} x = R\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ y = R\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ z = R\ \cos\theta \end{cases}$$

Soit Γ l'arc correspondant au méridien de Greenwich ($\varphi = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Calculer :

(a) $\displaystyle\int_\Gamma ds$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma f\ ds$ où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r}$ et $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\ ds$ où $\vec{v}(x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Question 44 **03.001 – corrected**

Donner une paramétrisation d'arc lisse pour $\Gamma = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ z \leq 1\}$.

Question 45 03.001a – corrected

Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \,:\, z = x^2 + y^2,\, x + y = 1,\, z \leq 1\}$.
– Représenter graphiquement Γ
– Donner une paramétrisation de Γ

Question 46 03.002 – corrected

Soit $\Gamma \subset E$ un arc. On suppose que cet arc représente un fil dont la densité linéique au point $P \in \Gamma$ est donnée par $\rho(P) = \rho(\vec{r})$ si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Le centre de gravité C de ce fil est donné par :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\int_\Gamma \rho\, \vec{r}\, ds}{\int_\Gamma \rho\, ds}.$$

Calculer la position du centre de gravité C pour les deux arcs Γ suivant :

(a) Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ y \geqslant 0\}$ un fil homogène de densité ρ.

(b) Soit Γ la réunion des trois arcs Γ_1, de densité ρ_1, Γ_2, de densité ρ_2, Γ_3, de densité ρ_3 où ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des constantes positives et Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont définis par les arcs lisses formés respectivement des segments de droites P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 avec $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1)$ et $P_3 = (1, 0, 0)$.

Question 47 03.002a – corrected

Soit Γ un arc représentant un fil de densité linéique constante. Le centre de gravité C de Γ est donné par :

$$\overrightarrow{OC} \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \vec{r}\, ds.$$

Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ y \geqslant 0\}$. Le centre de gravité C est le point de coordonnées :

♢ ***a.*** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***b.*** $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***c.*** $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***d.*** $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 48 03.003 – corrected

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ de vitesse donné. On définit les lignes de courant de $\vec{v}$ comme les courbes sur lesquelles $\vec{v}$ est tangent à la courbe. Soit Γ une ligne de courant de $\vec{v}$, $\vec{r}$ une paramétrisation de Γ. On a par définition

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = \alpha \vec{r}\,'(t), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

où $\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$.

(a) On considère le cas où

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} - x\ \vec{j}.$$

Représenter graphiquement le champ $\vec{v}$ et montrer que les lignes de courant sont des cercles :

$$x^2(t) + y^2(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) On considère le cas où

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j}.$$

Représenter graphiquement le champ $\vec{v}$ et montrer que les lignes de courant sont des hyperboles :

$$x^2(t) - y^2(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Question 49 **03.003a – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ de vitesse donné. On définit les lignes de courant de $\vec{v}$ comme les courbes sur lesquelles $\vec{v}$ est tangent à la courbe. Soit Γ une ligne de courant de $\vec{v}$, de paramétrisation $\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$.

4.1) On a :

◇ ***a.*** $\vec{v}(\vec{r}(t)) = \alpha\vec{r}(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
◇ ***b.*** $\vec{v}(\vec{r}(t)) = \alpha\vec{r}\,'(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
◇ ***c.*** $\vec{v}(\vec{r}\,'(t)) = \alpha\vec{r}(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
◇ ***d.*** $\vec{v}(\vec{r}\,'(t)) = \alpha\vec{r}\,'(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

4.2) On considère le cas où

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} - x\ \vec{j}.$$

Les lignes de courant sont :

◇ ***a.*** des droites
◇ ***b.*** des cercles
◇ ***c.*** des hyperboles
◇ ***d.*** des ellipses

4.3) Même question avec :

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j}.$$

Question 50 **03.004 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \setminus \{Oz\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$$

et soit Γ le cercle unité dans le plan Oxy. À une constante multiplicative près, $\vec{v}$ est le champ magnétique produit par un courant continu qui circule dans un fil placé sur l'axe Oz.
(a) Calculer $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$.
(b) En déduire que $\vec{v}$ ne dérive pas d'un potentiel.
Indication : *par l'absurde, supposer qu'il existe $\phi \in C^1(E \setminus \{Oz\})$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\,\phi$ et utiliser le théorème 1.4.*
(c) Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ et en déduire que le résultat suivant est faux : *Soit $\vec{v} : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in C^1(\Omega)^3$ tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$. Alors, il existe un champ scalaire $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^2(\Omega)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\,\phi$.*
Remarque : Le résultat est vrai si on ajoute l'hypothèse « Ω simplement connexe par arcs fermés »(*cf.* polycopié p. 16).

Question 51 **03.005 – corrected**

Soit $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ orienté tel que $\vec{n} \cdot \vec{k} \leqslant 0$. Etablir une paramétrisation lisse de Σ et calculer son aire.

Question 52 **03.006 – corrected**

Soit $\Gamma \subset E$ un arc. On suppose que cet arc représente un fil dont la densité linéique au point $P \in \Gamma$ est donnée par $\rho(P) = \rho(\vec{r})$ si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Le centre de gravité C de ce fil est donné par :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\int_\Gamma \rho\,\vec{r}\,ds}{\int_\Gamma \rho\,ds}.$$

On définit Γ_1, Γ_2, Γ_3 les arcs lisses formés respectivement des segments de droites P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 avec $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (0,0,1)$ et $P_3 = (1,0,0)$. Soit Γ la réunion des trois arcs Γ_1, de densité ρ_1, Γ_2, de densité ρ_2, Γ_3, de densité ρ_3 où ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des constantes positives. Calculer la position du centre de gravité C.

Question 53 **03.007 – corrected**

En géométrie cylindrique, un point P est repéré par ses coordonnées cylindriques notées (r,θ,z), où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta \in [0,2\pi]$ est tel que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Soit $\Sigma = \{(r,\theta,z) : (r-4)^2 + z^2 = 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ z \geqslant 0\}$ orienté de telle sorte que la normale unité vérifie $\vec{n}\cdot\vec{k} \geqslant 0$.

a) Etablir une représentation graphique et une paramétrisation lisse de Σ.
b) Calculer l'aire de Σ.

Question 54 **03.008 – corrected**

On définit le champ scalaire f et le champ vectoriel $\vec{v}$ par les relations suivantes :

$$\vec{v}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Si Γ est l'arc lisse formé du segment de droite d'origine $P = (1,2,3)$ et d'extrémité $Q = (5,2,0)$, calculer les quantités suivantes :

a. $\int_\Gamma ds$,

b. $\int_\Gamma f\,ds$,

c. $\int_\Gamma f\,dy$,

d. $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$,

e. $\int_\Gamma \vec{v}\times d\vec{r}$,

f. $\int_\Gamma \vec{v}\,ds$.

Question 55 **03.009 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

et soit

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 = 1, z = 0, y \geqslant 0\right\}.$$

On note A l'origine de Γ et B son extrémité. Montrer que, dans ce cas, on a bien

$$\int_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

Question 56 **03.010 – corrected**

On considère la courbe Γ correspondant à la trajectoire d'une particule de masse m, soumise à un champ de force $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^3$ sur l'intervalle de temps $a \leqslant t \leqslant b$. On note $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, $a \leqslant t \leqslant b$, la trajectoire de la particule ; $\vec{r}(t)$ est donc une paramétrisation de Γ qu'on suppose lisse et de classe C^2.
Ecrire les équations de Newton pour cette particule et montrer qu'on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(a)\|^2 = \int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Question 57 **03.010a – corrected**

On considère la courbe Γ correspondant à la trajectoire d'une particule de masse m, soumise à un champ de force $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^3$ sur l'intervalle de temps $a \leqslant t \leqslant b$. On note $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, $a \leqslant t \leqslant b$, la trajectoire de la particule ; $\vec{r}(t)$ est donc une paramétrisation de Γ qu'on suppose lisse et de classe C^2.
Avec les équations de Newton pour cette particule, nous avons prouvé le théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(a)\|^2 = \int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Que devient cette égalité s'il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$?

Que vaut φ dans les deux cas suivants ?

- $\vec{f}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ (force due à l'attraction terrestre)
- $\vec{f}(x,y,z) = k(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$ (force due à un ressort de raideur k)

Question 58 **03.011 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \setminus \{Oz\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$$

et soit Γ le cercle unité dans le plan Oxy orienté dans le sens trigonométrique (anti-horaire). A une constante multiplicative près, $\vec{v}$ est le champ magnétique produit par un courant continu qui circule dans un fil placé sur l'axe Oz.

2.1) On a :

♢ ***a.*** $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2$
♢ ***b.*** $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = \pi$
♢ ***c.*** $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi$
♢ ***d.*** $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = -2\pi$

2.2) On a :

♢ ***a.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$
♢ ***b.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$
♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\vec{k}$
♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}\vec{k}$

2.3) On suppose qu'il existe $\varphi : E \setminus \{Oz\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$. On en déduit que :

♢ ***a.*** $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi$

◇ **b.** $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$
◇ **c.** $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = -2\pi$
◇ **d.** $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = \pi$

2.4) On déduit de 1 et 3 que :

◇ **a.** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$
◇ **b.** $\varphi = 0$
◇ **c.** $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$
◇ **d.** Il n'existe pas de φ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$

Question 59 **03.012 – not corrected**

Soit un arc Γ d'origine A et d'extrêmité B et de paramétrisation lisse $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.
Si $f : E \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire $\mathcal{C}^1$ alors on a :

◇ **a.** $\displaystyle\int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt = f(B) - f(A)$
◇ **b.** $\displaystyle\int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)dt = f(B) - f(A)$
◇ **c.** $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t))x'(t)dt = f(B) - f(A)$
◇ **d.** $\displaystyle\int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)\|\vec{r}\,'(t)\|dt = f(B) - f(A)$

Question 60 **03.013 – corrected**

On considère une particule ponctuelle soumise à un champ de force donné $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^3$ dont la trajectoire satisfait les équations de Newton :

$$m\vec{r}\,''(t) = \vec{f}(\vec{r}(t))$$

Ici l'extrêmité du vecteur $\vec{r}(t)$ décrit la position de la particule au temps t, Γ est la courbe paramétrisée par $\vec{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (on suppose $\vec{r}(t)$ une paramétrisation lisse).
On effectue le produit scalaire de cette équation avec $\vec{r}\,'(t)$, on intègre entre $t = a$ et $t = b$ et on obtient le théorème de l'énergie cinétique, à savoir :

◇ **a.** $\frac{1}{2}m\left[\|\vec{r}\,'(t)\|^2\right]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)dt$
◇ **b.** $\frac{1}{2}m\left[\|\vec{r}\,'(t)\|^2\right]_{t=a}^{t=b} = \int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}$
◇ **c.** $\frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(t)\|^2 = \int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}$
◇ **d.** $\frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{r}\,'(a)\|^2 = \vec{f}(\vec{r}(b)).\vec{r}(b) - \vec{f}(\vec{r}(a)).\vec{r}(a)$

Question 61 **03.014 – corrected**

Soit $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ un arc d'origine $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'extrêmité $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ représentant deux portions de fil de densités linéiques constantes. La densité linéique du fil sur Γ est ρ où $\rho = \begin{cases} \rho_1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \rho_2 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$.

Les deux portions de fil sont $\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in E,\ y = z = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et $\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in E,\ x = z = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Le centre de gravité C de Γ est donné par :

$$\overrightarrow{OC} \int_\Gamma \rho\, ds = \int_\Gamma \rho\, \vec{r}\, ds.$$

Le centre de gravité C est le point de coordonnées :

♢ ***a.*** $\begin{pmatrix} \frac{\rho_1}{2(\rho_1+\rho_2)} \\ \frac{-\rho_2}{2(\rho_1+\rho_2)} \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***b.*** $\begin{pmatrix} \frac{\rho_1}{2} \\ \frac{\rho_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***c.*** $\begin{pmatrix} \rho_1+\rho_2 \\ \rho_1+\rho_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

♢ ***d.*** $\begin{pmatrix} \frac{\rho_1}{2(\rho_1+\rho_2)} \\ \frac{\rho_2}{2(\rho_1+\rho_2)} \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 62 **03.015 – corrected**

Soit

$$\begin{aligned} \Gamma =& \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ =& \{(x,y,z) \in E;\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0, \quad z = 0\} \\ & \cup \{(x,y,z) \in E;\ x = 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad z = 0\} \\ & \cup \{(x,y,z) \in E;\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1, \quad z = 0\} \\ & \cup \{(x,y,z) \in E;\ x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad z = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Représenter Γ, choisir une orientation.

(b) Expliciter $\vec{r_i}$ une paramétrisation lisse de Γ_i, $i = 1,2,3,4$.

(c) Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\vec{v}(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r}$.

Question 63 **04.001 – corrected**

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) : 9x^2 + 16y^2 = 25,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ une surface orientée de telle façon que $\vec{n} \cdot \vec{\imath} \geqslant 0$. Etablir une paramétrisation lisse de Σ et une paramétrisation de son bord Γ.

Question 64 **04.002 – corrected**

Soit Σ le triangle de sommets $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (2,5,6)$ et $P_3 = (0,3,4)$ orienté de manière à ce que $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{n} > 0$. Calculer $\iint_\Sigma f\, d\sigma$ lorsque $f(x,y,z) = xy$.

Question 65 **04.002a – corrected**

Soit Σ le triangle de sommets $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (2,5,6)$ et $P_3 = (0,3,4)$ orienté de manière à ce que $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{n} > 0$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par $f(x,y,z) = xy$.

Que vaut $\iint_\Sigma f\, d\sigma$?

♢ ***a.*** $\sqrt{2}$

♢ ***b.*** $5\sqrt{2}$

◊ ***c.*** $2\sqrt{2}$
◊ ***d.*** $7\sqrt{2}$

Question 66 **04.003 – corrected**

En géométrie cylindrique, un point P est repéré par ses coordonnées cylindriques notées (r, θ, z), où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ est tel que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Soit $\Sigma = \{(r, \theta, z) : (r-4)^2 + z^2 = 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ z \geqslant 0\}$ orienté de telle sorte que la normale unité vérifie $\vec{n} \cdot \vec{k} \geqslant 0$. Soit encore le vectoriel défini par $\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}$.

a. Etablir une représentation graphique et une paramétrisation lisse de Σ.
b. Calculer l'aire de Σ.
c. Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.

Question 67 **04.004 – corrected**

Soit Σ le triangle de sommets $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (2, 5, 0)$ et $P_3 = (0, 3, 4)$ orienté de manière à ce que $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{n} > 0$. Calculer $\iint\limits_\Sigma f\, d\sigma$ lorsque $f(x, y, z) = xy$.

Question 68 **04.005 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}.$$

Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ orienté tel que $\vec{n} \cdot \vec{i} \geqslant 0$.

a. Établir une paramétrisation lisse de Σ.
b. Calculer l'aire de Σ.
c. Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.
d. Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{\sigma}$.

Question 69 **04.006 – corrected**

En géométrie cylindrique, un point P est repéré par ses coordonnées cylindriques notées (r, θ, z), où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ est tel que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Soit $\Sigma = \{(r, \theta, z) : (r-4)^2 + z^2 = 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ z \geqslant 0\}$ orienté de telle sorte que la normale unité vérifie $\vec{n} \cdot \vec{k} \geqslant 0$. Soient encore les champs scalaire et vectoriel définis par $f(x, y, z) = x + y + z^2$ et $\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}$.

Calculer les quantités suivantes :

a. $\iint_\Sigma f d\sigma$.
b. $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.
c. $\iint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{\sigma}$.

Question 70 **05.001 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire donné de classe C^1. Pour $C \in \mathbb{R}$ donné, on définit l'isosurface $\Sigma = \{(x, y, z) \in E : f(x, y, z) = C\}$. On suppose que f et C sont tels que Σ est un morceau de surface lisse de paramétrisation $\vec{r}(u, v)$ et de normale $\vec{n}$.

Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur Σ est colinéaire à la normale $\vec{n}$.

Question 71 05.001a – corrected

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire donné de classe C^1. Pour $C \in \mathbb{R}$ donné, on définit l'isosurface $\Sigma = \{(x,y,z) \in E : f(x,y,z) = C\}$. On suppose que f et C sont tels que Σ est un morceau de surface lisse de paramétrisation $\vec{r}(u,v)$ et de normale $\vec{n}$.

1) On a :

♢ ***a.*** $\dfrac{\partial}{\partial u} f(\vec{r}(u,v)) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(u,v)).\dfrac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)$

♢ ***b.*** $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} f(\vec{r}(u,v)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$

♢ ***c.*** $\dfrac{\partial}{\partial u} f(\vec{r}(u,v)) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial z}$

♢ ***d.*** $\dfrac{\partial}{\partial u} f(\vec{r}(u,v)) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(u,v))\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(u,v))\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(u,v))\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)$

2) On en déduit que :

♢ ***a.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur Σ est perpendiculaire à $\vec{n}$

♢ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur Σ est colinéaire à $\vec{n}$

♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(u,v)).\vec{n} = 0$

♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(u,v)) \times \vec{n} = 0$

Question 72 05.002 – corrected

Le champ électrique créé par une surface Σ uniformément chargée est proportionnel à

$$\iint_\Sigma \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|^3}\, d\sigma,$$

où P est un point de Σ. Calculer cette intégrale lorsque $\Sigma = \{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Question 73 05.003 – corrected

Le centre de gravité d'un morceau de surface Σ de densité constante est le point $C \in E$ tel que

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\text{Aire}(\Sigma)} \iint_\Sigma \vec{r}\, d\sigma.$$

Calculer le centre de gravité C du triangle de sommets $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (1,1,0)$ et $P_3 = (0,2,1)$. Vérifier que C est le point d'intersection des médianes.

Indication : Les médianes d'un triangle se coupent aux 2/3 de leurs longueurs (à partir des sommets).

Question 74 05.004 – corrected

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath} + y\ \vec{k}.$$

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Vérifier le théorème de Stokes pour ce morceau de surface Σ et le champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

où Γ est la frontière de Σ.

Question 75 **05.005 – corrected**

Soit le $\frac{1}{8}$e de tore $\Sigma = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}-4)^2 + z^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$ orienté de telle sorte que la normale unité vérifie $\vec{n} \cdot \vec{k} \geqslant 0$. Soit le champ vectoriel défini par $\vec{v}(x,y,z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}$.

Vérifier le théorème de Stokes pour ce morceau de surface Σ et le champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

où Γ est la frontière de Σ.

Question 76 **05.006 – corrected**

On définit le champ scalaire f suivant :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$ orienté tel que $\vec{n} \cdot \vec{i} \geqslant 0$.

a. Établir une paramétrisation lisse de Σ.
b. Calculer l'aire de Σ.
c. Calculer $\iint_\Sigma f d\sigma$.

Question 77 **05.006a – corrected**

On définit le champ scalaire f suivant :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$ orienté tel que $\vec{n} \cdot \vec{i} \geqslant 0$.

On a :

♢ **a.** $\displaystyle\iint_\Sigma f d\sigma = \frac{\pi}{4}$

♢ **b.** $\displaystyle\iint_\Sigma f d\sigma = \frac{\pi}{2}$

♢ **c.** $\displaystyle\iint_\Sigma f d\sigma = \pi$

♢ **d.** $\displaystyle\iint_\Sigma f d\sigma = 2\pi$

Question 78 **05.007 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}.$$

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.
(a) Établir une paramétrisation lisse de Σ.

(b) Calculer l'aire de Σ.

(c) Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.

(d) Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{\sigma}$.

(e) Vérifier le théorème de Stokes pour ce morceau de surface Σ et le champ vectoriel $\vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

où Γ est la frontière de Σ.

Question 79 05.008 – corrected

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire donné de classe C^1. Pour $C \in \mathbb{R}$ donné, on définit l'isosurface $\Sigma = \{(x, y, z) \in E : f(x, y, z) = C\}$. On suppose que f et C sont tels que Σ est un morceau de surface lisse de paramétrisation $\vec{r}(u, v)$ et de normale $\vec{n}$.

Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur Σ est colinéaire à la normale $\vec{n}$.

Indication : Dériver f par rapport à u et à v.

Question 80 05.009 – corrected

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + y\ \vec{k}.$$

Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ orienté tel que $\vec{n} \cdot \vec{i} \geqslant 0$.

(a) Calculer l'aire de Σ.

(b) Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.

(c) Calculer $\iint_\Sigma \vec{v} \times d\vec{\sigma}$.

Question 81 05.010 – corrected

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x, y, z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}, \tag{23}$$

et soit

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in E; x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\Big\}. \tag{24}$$

(a) Représenter Σ et sa frontière Γ.

(b) Vérifier le théorème de Stokes pour cette surface Σ et ce champ $\vec{v}$. Orienter la normale de sorte que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geqslant 0$. On rappelle

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

Question 82 05.011 – corrected

Démontrer le lemme suivant.

Lemme (Formule de Green-Riemann)

Soit D un domaine du plan Ouv de frontière C orientée dans le sens positif de la trigonométrie. Soit encore $g(u, v)$ et $h(u, v)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a

$$\iint_D \left(\partial_u g(u,v) - \partial_v h(u,v)\right)\, du\; dv = \int_C h\; du + g\; dv.$$

Indications :

- Il a été démontré en cours que $\displaystyle\iint_D \partial_v h(u,v)\; du\; dv = -\int_C h\; du$. Permuter les rôles de u et de v pour démontrer que $\displaystyle\iint_D \partial_u g(u,v)\; du\; dv = \int_C g\; dv$ et conclure.

Question 83 **06.001 – corrected**

On suppose l'espace E occupé par un fluide de masse volumique ρ constante. Soit un volume V immergé dans ce fluide et S la frontière de V. La force totale $\vec{F}$ exercée sur V par un champ de pression p est donnée par

$$\vec{F} = \iint_S -p\; d\vec{\sigma},$$

où $p(x,y,z) = -\rho g z$. Calculer la force totale $\vec{F}$ exercée sur une sphère de rayon $R > 0$ immergée dans ce fluide.

Question 84 **06.002 – corrected**

Soit $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_k\vec{k}$ un champ vectoriel de classe C^1 tel que $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. On considère la surface fermée S donnée par les six faces du cube unité $\{(x,y,z) \in E : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Montrer que $\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = 0$.

Indication : Considérer deux faces opposées Σ_1 et Σ_2 du cube et calculer

$$\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}.$$

Faire de même avec les deux paires de faces opposées restantes et conclure.

Question 85 **06.003 – corrected**

On considère le morceau de surface Σ défini par

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

et le champ vectoriel $\vec{v}$ défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = (x^2 - y^2)\vec{k}.$$

Vérifier par le calcul le théorème de Stokes pour ce morceau de surface Σ et ce champ vectoriel $\vec{v}$.

Question 86 **06.004 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2\,(x\;\vec{\imath} + y\;\vec{\jmath} + z\;\vec{k}).$$

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\iiint_V \operatorname{div}\,\vec{v}\,dV = \iint_S \vec{v}\cdot\, d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 87 06.005 – corrected

Soit un volume V contenant un fluide de densité ρ constante, vitesse $\vec{v}$ et pression p solution des équations d'Euler

$$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{0} \tag{25}$$
$$\text{div } \vec{v} = 0. \tag{26}$$

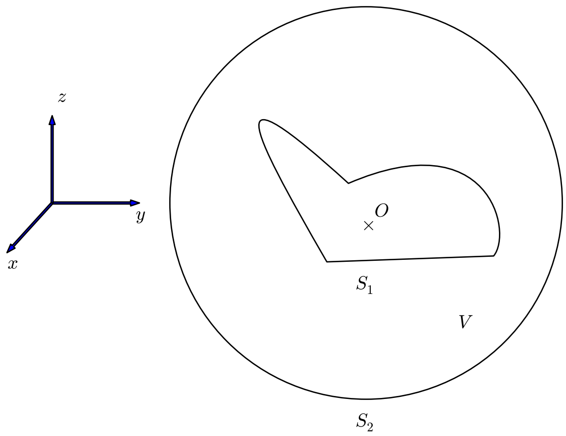
Soit S la frontière de V. Montrer que $\displaystyle\iint_S (\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n}) + p\vec{n})d\sigma = \vec{0}$.

Indication : Ecrire la première composante de (25) explicitement, intégrer sur V puis utiliser un théorème du cours pour se ramener à une intégrale sur S.

Question 88 06.006 – corrected

Paradoxe de D'Alembert :

Soit S_1 une surface fermée (correspondant à un avion par exemple) contenant l'origine O et soit S_2 la sphère de centre O et de rayon R (R grand devant la dimension de l'avion).
On note V le volume contenu entre S_1 et S_2, $\vec{n}$ la normale unité extérieure.



On suppose que V contient un fluide de densité constante, vitesse $\vec{v}$ et pression p qui satisfait les équations d'Euler

$$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{0}$$
$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

- On suppose que sur S_2, la vitesse $\vec{v}$ est égale à une vitesse $\vec{U}$ constante et que la pression est constante. Montrer que $\displaystyle\iint_{S_2} (\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n}) + p\vec{n})d\sigma = \vec{0}$.
- On suppose que $\vec{v}.\vec{n} = 0$ sur S_1. En déduire que

$$\iint_{S_1} p\vec{n}d\sigma = \vec{0}$$

et donc la portance due à S_1 est nulle.

Question 89 06.007 – corrected

Soit $V = \{(x, y, z) \in E; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$ de frontière S et soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{v}(x, y, z) = \vec{\imath}$.
On a $\displaystyle\iint_S \vec{v}.\vec{n}d\sigma =$

☐ ***a.*** 2π
☐ ***b.*** π
☐ ***c.*** 0
☐ ***d.*** $-\pi$
☐ ***e.*** -2π

Question 90 **07.001 – corrected**

On définit le champ scalaire f suivant :

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème du gradient pour ce volume V et ce champ f, c'est à dire :

$$\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, dV = \iint_S f\, d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 91 **07.002 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2\, (x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} + z\, \vec{k}).$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \text{div}\ \vec{v}\, dV = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 92 **07.003 – corrected**

Soit V le volume défini par :

$$V = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq 4, \qquad 0 \leq z \leq 3\}$$

et soit $\vec{v}$ le champ vectoriel donné par :

$$\vec{v}(x, y, z) = 4x\, \vec{\imath} - 2y\, \vec{\jmath} + z^2\, \vec{k}.$$

Vérifier le théorème de la divergence pour le volume V et le champ vectoriel $\vec{v}$.

Question 93 **07.004 – corrected**

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $a : E \to \mathbb{R}$ deux champs scalaires donnés. On suppose que f est de classe C^0 et que a est de classe C^1. On suppose aussi qu'il existe une constante strictement positive α qui satisfait :

$$a(P) \geqslant \alpha > 0, \quad \forall P \in E.$$

Soit encore V un volume dans E de frontière S. On cherche alors à déterminer un champ scalaire u de classe C^2 qui satisfait :

$$-\text{div}\ \Big(a(P)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u(P)\Big) = f(P), \quad \forall P \in V, \tag{27}$$

$$u(P) = 0, \quad \forall P \in S. \tag{28}$$

a. Démontrer que si u satisfait l'équation (1), alors, quelque soit le champ scalaire v de classe C^1, on a :

$$\iiint_V a \ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, v \, dV = \iiint_V f v \, dV + \iint_S a \ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \vec{n} \ v \, d\sigma,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur à S.

b. Démontrer que si u et $\tilde{u}$ sont solutions de (1) et (2), alors $u = \tilde{u}$. Ceci montre que le problème (1)-(2) a au plus une solution.

Question 94 **07.005 – corrected**

Soit $\vec{v}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2} \qquad \forall (x,y,z) \in E \setminus \{0\}. \tag{29}$$

(a) Calculer div $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$.

(b) Existe-t-il un champ scalaire ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$? Si oui, expliciter ϕ.

(c) Soit V le volume défini par

$$V = \{(x,y,z) \in E; \frac{1}{4} \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\} \tag{30}$$

et S sa frontière. Vérifier le théorème de la divergence dans ce volume pour le champ $\vec{v}$.

Question 95 **07.006 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = (1 - x^2 - y^2)\vec{k}, \tag{31}$$

et soit

$$V = \{(x,y,z) \in E; x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\} \tag{32}$$

un volume de frontière S.

(a) Représenter S et le champ $\vec{v}$ sur S.

(b) Calculer

$$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}. \tag{33}$$

Question 96 **07.007 – corrected**

Cette question est un QCM. Indiquer la/les réponses correctes.

On considère un fluide compressible de vitesse $\vec{v}(x,y,z)$ et de densité $\rho(x,y,z)$ remplissant l'espace E tel que div $(\rho\vec{v}) = 0$.
Soit $V \subset E$ un volume quelconque, de frontière S. On pose $\vec{n}$ la normale unité extérieure à S et on suppose que S est une surface lisse de paramétrisation

$$\vec{r} : (u,v) \in D \mapsto \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k} \in S$$

On suppose $\vec{v}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\vec{\imath}$. En intégrant div $(\rho\vec{v}) = 0$ dans le volume V et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient les formules suivantes :

♢ ***a.*** $\iint_S \rho\vec{v}.\vec{n} d\sigma = 0$

♢ ***b.*** $\iint_S \rho v_x.n_x d\sigma = 0$

♢ ***c.*** $\iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) v_x(\vec{r}(u,v))(\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y)(u,v) dudv = 0$

♢ ***d.*** $\iint_D \rho(\vec{r}(u,v))\vec{v}(\vec{r}(u,v)).(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})(u,v) dudv = 0$

Question 97 **08.001 – corrected**

Les équations qui régissent l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{x},t)$, le champ électrique $\vec{E}(\vec{x},t)$, le champ magnétique $\vec{H}(\vec{x},t)$ et le déplacement électrique $\vec{D}(\vec{x},t)$ ($\vec{x} \in E$, t est le temps) sont les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} & = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} & = \rho, \\ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} & = \vec{0}, \\ -\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{H} & = \vec{j}, \end{cases}$$

où ρ est la densité de charge électrique et $\vec{j}$ la densité de courant électrique. Les équations constitutives sont données par $\vec{B} = \mu\vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ où μ est la perméabilité et ϵ est la permittivité du milieu. Démontrer que, si μ et ϵ sont des constantes positives et si ρ est nul, $\vec{B}$ et $\vec{E}$ satisfont les équations des ondes suivantes :

$$\begin{cases} \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = \mu\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{j}, \\ \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \end{cases}$$

Question 98 **08.002 – corrected**

Soient V un volume dont la frontière est une surface fermée S de normale unité $\vec{n}$ dirigée vers l'exterieur de V et $\vec{v} = v\ \vec{\imath}$ où v est un champ scalaire C^1.

Vérifier, par le calcul, le théorème du rotationnel pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$.

Indication : Utiliser le lemme du paragraphe 1.4 du polycopié.

Question 99 **08.003 – corrected**

Soient V le volume défini par

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

et $\vec{v}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = z(z-1)\ \vec{\imath} + xyz\ \vec{k}.$$

Vérifier, par le calcul, le théorème du rotationnel pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$.

Question 100 **08.004 – corrected**

Soit $\vec{v}$, $\vec{w} : E \to \mathbb{R}^3$ les champs vectoriels définis par $\vec{w} = z^2\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath} + y^2\vec{k}$ et $\vec{v} = 2y\vec{\imath} + 2z\vec{\jmath} + 2x\vec{k}$.

(a) Vérifier que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ et que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{w} = \vec{v}$.

(b) Appliquer la formule du théorème 1.12 du polycopié afin de trouver un champ vectoriel $\vec{\psi}$ tel que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\psi} = \vec{v}$.

(c) Conclure.

Question 101 **08.005 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\ \vec{k}.$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = 0$ et que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$ où $\phi : E \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

b. Retrouver ϕ en utilisant le théorème 1.11 du polycopié.

Question 102 **08.006 – corrected**

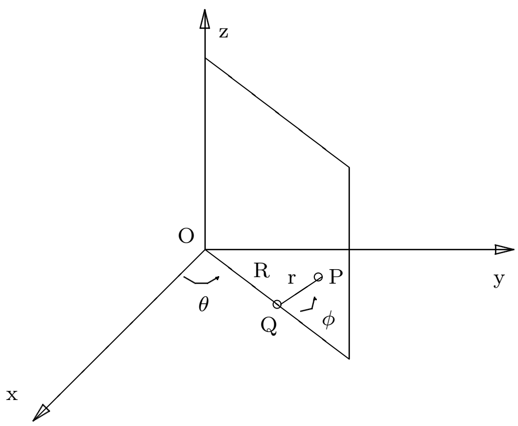
Soit $A = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \eta > 0\}$ et $B = E - \Sigma$ où E est l'espace euclidien et $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x \geqslant 0\}$. On considère l'application $F : A \to B$ définie par les trois fonctions des trois variables (ξ, η, ζ) :

$$\begin{cases} x(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \\ y(\xi,\eta,\zeta) = \xi\eta, \\ z(\xi,\eta,\zeta) = \zeta, \end{cases} \qquad \text{où } (\xi,\eta,\zeta) \in A.$$

a. Démontrer que F est une application bijective de A sur B.
b. Démontrer que F définit un système de coordonnées curvilignes orthogonal appelé "système de coordonnées cylindro-paraboliques".
c. Dessiner une ligne de coordonnée ξ, une ligne de coordonnée η et une ligne de coordonnée ζ.
d. Si $\varphi(x, y, z)$ est un champ scalaire de classe C^2 sur A et si $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ est la fonction de (ξ, η, ζ) qui décrit ce champ scalaire en coordonnées cylindro-paraboliques, exprimer $\Delta\Phi$.

Question 103 **08.007 – corrected**

On considère le système de coordonnées curvilignes torique suivant :
Si R est un nombre positif donné, on repère le point P par les quantités (r, θ, ϕ) (cf figure) où Q est le point du demi plan azimutal contenant P et placé à une distance R de l'origine dans le plan Oxy, θ est l'angle que fait l'axe Ox avec le vecteur $\overrightarrow{OQ}$, $r = \|\overrightarrow{QP}\|$ et ϕ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ avec le vecteur $\overrightarrow{QP}$.
a. Expliciter les domaines de définition $A \subset \mathcal{E}$ et $B \subset E$ définis en cours.



b. Expliciter les valeurs h_r, h_θ, h_ϕ et les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\phi$. Donner une représentation graphique.
c. Démontrer que le système de coordonnées curvilignes torique est orthogonal. Représenter les lignes de coordonnées et les surfaces de coordonnées r, θ, ϕ.
d. Si $\psi : B \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire C^1 et $\Psi : A \to \mathbb{R}$ sa représentation dans le système de coordonnées curvilignes torique, exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$.

Question 104 **08.008 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \left(= \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \right).$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0$ et que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ où $\phi : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\phi(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \left(= -\frac{1}{\|\vec{r}\|} \right).$$

b. Peut-on utiliser la formule du théorème 1.11 du polycopié pour calculer ϕ ?

Question 105 08.009 – corrected

Soit Σ un morceau de surface de frontière Γ ne contenant pas l'origine O. On appelle « angle solide sous lequel on voit Σ de l'origine » la quantité

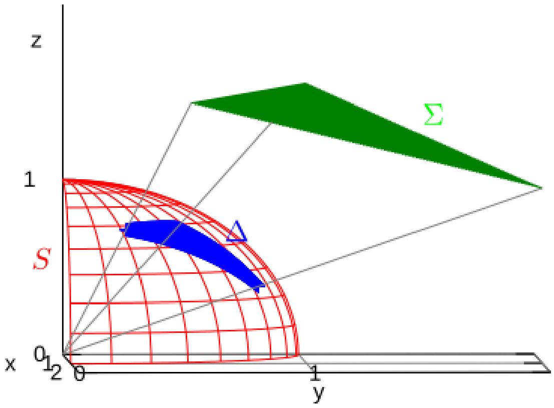
$$A(\Sigma) = \iint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\sigma}, \qquad \text{avec } r = \|\vec{r}\|.$$

(a) Montrer que si Δ est le morceau de surface de la sphère unité

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

intercepté par le cône C de sommet O et de génératrices prenant appui sur Γ, alors

$$|A(\Sigma)| = \text{Aire}(\Delta).$$



(b) Supposons maintenant que Σ soit une surface fermée de normale extérieure $\vec{n}$. Montrer que

$$A(\Sigma) = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } \Sigma \text{ entoure l'origine } O \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 106 08.010 – corrected

Soient $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel C^1 et $\phi : E \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$\phi(x, y, z) = \int_{\overline{OQ}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \forall (x, y, z) \in E, \tag{34}$$

où Q est le point de coordonnées (x, y, z) et $\overline{OQ}$ désigne le segment d'origine O et d'extrémité Q.

(a) Montrer que

$$\phi(x, y, z) = \int_0^1 \Big(x v_x(tx, ty, tz) + y v_y(tx, ty, tz) + z v_z(tx, ty, tz) \Big) \mathrm{d}t. \tag{35}$$

(b) Supposons que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$. Montrer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^1 \Big(v_x(tx, ty, tz) + tx \frac{\partial v_x}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty \frac{\partial v_x}{\partial y}(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial v_x}{\partial z}(tx, ty, tz) \Big) \mathrm{d}t. \tag{36}$$

(c) Calculer $\frac{\partial}{\partial t}\Big(t v_x(tx, ty, tz) \Big)$.

(d) Montrer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = v_x(x, y, z). \tag{37}$$

Question 107 08.011 – corrected

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$, $p : E \to \mathbb{R}$ et $\rho : E \to \mathbb{R}$ trois champs de classe $\mathcal{C}^1$ correspondant à la vitesse, pression et densité d'un gaz remplissant l'espace. On suppose que, pour tout volume V de frontière une surface fermée S on a

$$\iint_S (\rho \vec{v}(\vec{v}.\vec{n}) + p\vec{n}) d\sigma = \vec{0} \qquad \text{(Conservation de la quantité de mouvement)} \tag{38}$$

$$\iint_S \rho \vec{v}.\vec{n} d\sigma = 0. \qquad \text{(Conservation de la masse)} \tag{39}$$

Montrer que

- $\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z) + \partial_x p = 0$

- $\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$
- $\rho v_x \dfrac{\partial}{\partial x}(v_x) + \rho v_y \dfrac{\partial}{\partial y}(v_x) + \rho v_z \dfrac{\partial}{\partial z}(v_x) + \partial_x p = 0$
- $\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla} p = \vec{0}$
- $\text{div }(\rho \vec{v}) = 0.$

Question 108   08.012 – corrected

Soit $T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$ le tenseur des contraintes d'un matériau occupant l'espace, où T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz}, $T_{zz} : E \to \mathbb{R}$ sont des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $\rho > 0$ la densité (supposée constante) du fluide et soit $g = 9.81 m/s^2$ l'accéleration terrestre. On suppose que, pour tout volume V de frontière une surface fermée S, on a

$$\iint_S T\vec{n} d\sigma + \iiint_V -\rho g \vec{k} = \vec{0}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{yz} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} = \rho g. \end{aligned}$$

Question 109   09.001 – corrected

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $a : E \to \mathbb{R}$ deux champs scalaires donnés. On suppose que f est de classe C^0 et que a est de classe C^1. On suppose aussi qu'il existe une constante strictement positive α qui satisfait :

$$a(P) \geqslant \alpha > 0, \quad \forall P \in E.$$

Soit V un volume dans E de frontière S. On cherche alors à déterminer un champ scalaire u de classe C^2 qui satisfait :

$$-\text{div } \left(a(P) \overrightarrow{\text{grad}}\, u(P) \right) = f(P), \quad \forall P \in V, \tag{40}$$

$$u(P) = 0, \quad \forall P \in S. \tag{41}$$

(a) Démontrer que si u satisfait l'équation (1), alors, quelque soit le champ scalaire v de classe C^1, on a :

$$\iiint_V a\ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, v\, dV = \iiint_V f v\, dV + \iint_S a\ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \vec{n}\ v\, d\sigma,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur à S.

(b) Démontrer que si u et $\tilde{u}$ sont solutions de (1) et (2), alors $u = \tilde{u}$. Ceci montre que le problème (1)-(2) a au plus une solution.

Question 110   09.002 – corrected

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}.$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \text{div } \vec{v}\ dV = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 111 **09.003 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tel que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. On définit le champ $\vec{w}$ par :

$$\vec{w}(x,y,z) = \int_0^1 t\vec{v}(tx,ty,tz) \times (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})dt.$$

Démontrer que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{w} = \vec{v}$.

Question 112 **09.004 – corrected**

Soit $\Omega = E \setminus \{O\}$ et soit $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par :

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r^4}, \quad \text{où} \ \ \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \text{et} \ \ r = \|\vec{r}\|.$$

(a) Existe-t-il $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$? Si oui, expliciter ϕ. Si non, justifier votre réponse.

(b) Existe-t-il $\vec{\psi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\psi}$? Si oui, expliciter $\vec{\psi}$. Si non, justifier votre réponse.

Question 113 **09.005 – corrected**

Soit $R > 0$ donné, on considère le système de coordonnées curvilignes torique suivant :

$$\begin{cases} x(r,\theta,\varphi) = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \\ y(r,\theta,\varphi) = (R + r\cos\varphi)\sin\theta, \qquad r \in]0,R[,\ \theta \in]0,2\pi[,\ \varphi \in]0,2\pi[. \\ z(r,\theta,\varphi) = r\sin\varphi. \end{cases}$$

(a) Donner une représentation graphique de l'application $F : A \to B$ telle que $F(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$ où

$$A = \{(r,\theta,\varphi) : 0 < r < R,\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

et

$$B = \{(x,y,z) : 0 < (\rho - R)^2 + z^2 < R^2,\ \rho^2 = x^2 + y^2\}.$$

(b) Expliciter les valeurs h_r, h_θ, h_φ et les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.

(c) Démontrer que le système de coordonnées curvilignes torique est orthogonal. Représenter les lignes de coordonnées.

Question 114 **09.006 – corrected**

Soit $\Omega \subset E$ un domaine ouvert, simplement connexe par arcs fermés. Démontrer l'affirmation suivante : "Si $\vec{v}$ est un champ vectoriel à la fois irrotationnel et solénoidal dans Ω, alors $\vec{v}$ dérive d'un potentiel harmonique".

Question 115 **09.007 – corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ et S la frontière de V.

a. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 1,\ \text{dans } V, \\ u = 0,\ \text{sur } S. \end{cases}$$

b. Trouver $u : \mathbb{R}^3 \setminus V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus V, \\ u = 1,\ \text{sur } S, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to +\infty} u(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Question 116 **09.008 – corrected**

Soit $R > 0$ donné, on considère le système de coordonnées curvilignes torique suivant :

$$\begin{cases} x(r,\theta,\varphi) = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \\ y(r,\theta,\varphi) = (R + r\cos\varphi)\sin\theta, \\ z(r,\theta,\varphi) = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad r \in]0, R[,\ \ \theta \in]0, 2\pi[,\ \ \varphi \in]0, 2\pi[.$$

a. Donner une représentation graphique de l'application $F : A \to B$ telle que $F(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$ où $A = \{(r,\theta,\varphi) : 0 < r < R,\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ et $B = \{(x,y,z) : 0 < (\rho - R)^2 + z^2 < R^2,\ \rho^2 = x^2 + y^2)\}$.
b. Expliciter les valeurs h_r, h_θ, h_φ et les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.
c. Démontrer que le système de coordonnées curvilignes torique est orthogonal. Représenter les lignes de coordonnées.
d. Si $\psi : B \to \mathbb{R}$ et $\vec{v} : B \to \mathbb{R}^3$ sont un champ scalaire et un champ vectoriel C^2 donnés et si $\Psi : A \to \mathbb{R}$ et $\vec{V} : A \to \mathbb{R}^3$ sont leur représentation dans le système de coordonnées curvilignes torique, exprimer :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi \quad \text{et} \quad \text{div}\,\vec{V}.$$

Question 117 **09.009 – corrected**

(a) Soit V un volume dans $\mathbb{R}^3$ de frontière S. Soit $u : V \to \mathbb{R}$ et $\vec{v} : V \to \mathbb{R}^3$ des fonctions de classe C^1. On suppose que div $\vec{v} = 0$ dans V et $u = 0$ sur S.
Montrer que

$$\iiint_V (\vec{v}.\vec{\nabla}u)u dV = 0.$$

Indication : Considérer div $\left(\vec{v}\frac{u^2}{2}\right)$ *et intégrer sur* V*.*

(b) Soit V un volume dans $\mathbb{R}^3$ de frontière S. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\vec{v} : V \to \mathbb{R}^3$ telle que div $\vec{v} = 0$. Soit $u : V \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{v}.\vec{\nabla}u &= f \quad \text{dans } V \\ u &= 0 \quad \text{sur } S. \end{cases} \tag{42}$$

Montrer que, si u existe, alors on a

$$\iiint_V \|\vec{\nabla}u\|^2 dV = \iiint_V fu dV.$$

Indication : multiplier (42) *par u, intégrer sur* V *et utiliser une formule de Green.*

Question 118 **09.010 – corrected**

Soit $\rho(x,y,z,t)$ la densité d'un fluide occupant l'espace E et soit $\vec{v}(x,y,z,t)$ sa vitesse. On suppose

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \text{dans } E. \tag{43}$$

Soit V un volume quelconque inclus dans E, de frontière S. De (43), on déduit la loi de conservation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V ???\ \mathrm{d}V + \iint_S ???\ \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{44}$$

Compléter et justifier (44).

Question 119 **09.011 – corrected**

On admet que la température $T(x,y,z,t)$ dans un matériau remplissant $\mathbb{R}^3$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \triangle T. \tag{45}$$

Soit V un volume de $\mathbb{R}^3$ de frontière S. On intègre l'équation ci-dessus sur V et on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V ???\ \mathrm{d}V = \iint_S ???\ \mathrm{d}\sigma. \tag{46}$$

Compléter l'égalité ci-dessus.

Question 120 09.012 – corrected

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. Trouver, en fonction de (x,y,z), $u : V \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\triangle u(x,y,z) = & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \forall (x,y,z) \in V \\ u(x,y,z) = & 1 & \forall (x,y,z) \in S. \end{array}\right. \tag{47}$$

Question 121 09.013 – corrected

Soit V un volume de frontière une surface fermée S. Soit $a : V \to R$ un champ donné de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $a(x,y,z) \geqslant 1$. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ un champ donné de classe $\mathcal{C}^0$ et soit $u : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rl} -\mathrm{div}\ (a\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u) & = f \quad \text{dans } V \\ u & = 0 \quad \text{sur } S. \end{array}\right. \tag{48}$$

Montrer que la solution du problème, si elle existe, satisfait

$$\iiint_V \| \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u\|^2 dV \leqslant \iiint_V f u dV$$

et est unique.

Question 122 09.014 – corrected

Soit V un volume de frontière une surface fermée S. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ un champ donné de classe $\mathcal{C}^0$ et soit $u : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que

$$\begin{array}{rl} -\Delta u = f & \text{dans } V \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u.\vec{n} = 0 & \text{sur } S. \end{array}$$

Montrer que la solution du problème, si elle existe, satisfait

$$\iiint_V \| \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u\|^2 dV = \iiint_V f u dV$$

et n'est pas unique.

Question 123 09.015 – corrected

Soit $\vec{v} : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\imath} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\jmath} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

- Calculer div $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$.
- Vérifier que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi$ où $\varphi(x,y,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- Soit S la sphère de centre O et rayon 1. Calculer $\displaystyle\iint_S \vec{v}.d\vec{\sigma}$.
- Soit $\vec{\psi} : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\psi}.d\vec{\sigma}$.
- En déduire qu'il n'existe pas de $\vec{\psi} : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\psi}$.

Question 124 09.016 – corrected

Démonstration du théorème 1.11

Soit Ω un ouvert étoilé de E et soit $\vec{v}$ un champ vectoriel défini sur Ω de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = 0$ dans Ω, alors il existe un champ scalaire φ appelé potentiel de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi$. On suppose que O est centre d'étoile de Ω, et P le point de coordonnées (x,y,z).

Montrer que $\varphi(x,y,z) = \displaystyle\int_{\overline{OP}} \vec{v}.d\vec{r}$ satisfait $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi$.

Question 125 **10.001 – corrected**

Les ensembles suivants sont-ils simplement connexes par arcs fermés, par surfaces fermées ?

a) $\{(x, y, z) : x^2 > 0\}$
b) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 0\}$
c) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$
d) $E - \{(0, 0, z) : \ z \geq 0\}$
e) l'intérieur d'un tore
f) $\{(x, y, z) : \ 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$

Question 126 **10.002 – corrected**

Soient $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$ et $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

où $\vec{r} = x \ \vec{\imath} + y \ \vec{\jmath} + z \ \vec{k}$.

a) Le domaine Ω est il simplement connexe par arcs fermés, par surfaces simples fermées ?
b) Est-ce que $\vec{v}$ est un champ solénoidal dans Ω ?
c) Existe-t-il un potentiel vecteur $\vec{\Phi}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \ \vec{\Phi}$? Si oui, expliciter $\vec{\Phi}$.
d) Est-ce que $\vec{v}$ est un champ irrotationnel ?
e) Existe-t-il un potentiel scalaire ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \, \phi$? Si oui, expliciter ϕ.

Question 127 **10.003 – corrected**

Même exercice que le précédent avec

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 0\}$$

et

$$\vec{v}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \ \vec{\imath} + \frac{x}{x^2 + y^2} \ \vec{\jmath}.$$

Question 128 **10.004 – corrected**

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. On note $S = S_1 \cup S_2$ avec

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = 1\}$$

et

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1, \ x^2 + y^2 = 1/4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1, \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = 1, & \forall (x, y, z) \in V, \\ u(x, y, z) = 0, & \forall (x, y, z) \in S_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = 0, & \forall (x, y, z) \in S_1. \end{cases}$$

Question 129 **10.004b – corrected**

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. On note $S = S_1 \cup S_2$ avec

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = 1\}$$

et

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1, \ x^2 + y^2 = 1/4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1, \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = (x^2+y^2)^{k/2}, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_2, \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, u.\vec{n} = \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_1 \end{cases}$$

où k est un entier fixé tel que $k \neq -2$.

Question 130 **10.005 – corrected**

On considère le morceau de surface Σ défini par

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z\ \sqrt{x^2+y^2} = 1,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$$

orienté tel que sa normale unité $\vec{n}$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$. Soit encore $\vec{v}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = -y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}.$$

a. Donner une représentation graphique de Σ et préciser sur la figure où se trouve la frontière de Σ.
b. Paramétrer Σ.
c. Vérifier, par le calcul, le théorème de Stokes pour ce morceau de surface Σ et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

où Γ est la frontière de Σ.

Question 131 **10.006 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = (1 - x^2 - y^2)\ \vec{k}.$$

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \text{div}\ \vec{v}\ dV = \iint_S \vec{v} \cdot\ d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 132 **10.008 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + x\vec{k}, \tag{49}$$

et soit

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in E; z^2 = x^2+y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\Big\}. \tag{50}$$

(a) Représenter Σ et sa frontière Γ.
(b) Vérifier le théorème de Stokes pour la surface Σ et le champ $\vec{v}$.

Question 133 **10.009 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + x\vec{k}, \tag{51}$$

et soit

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in E; z^4 = x^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\Big\}. \tag{52}$$

(a) Représenter Σ et sa frontière Γ.

(b) Vérifier le théorème de Stokes pour la surface Σ et le champ $\vec{v}$.

Question 134 **10.010 – corrected**

Soit $\vec{u}(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\imath} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\jmath} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$.

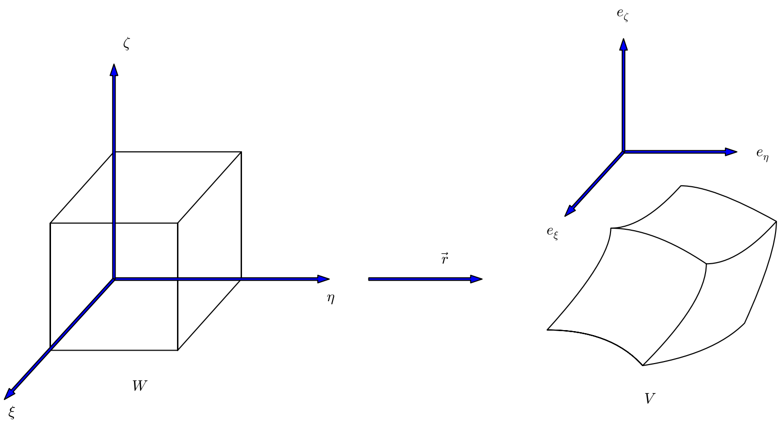
- Calculer div $\vec{u}$.

  On considère le système de coordonnées sphériques r, θ, φ. Soit $\vec{U}(r,\theta,\varphi)$ défini par

$$\vec{U}(r,\theta,\varphi) = \vec{u}(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)).$$

- Calculer div $\vec{U}$.
- Vérifier que les deux expressions coincident.

Question 135 **10.011 – corrected**



Soit V un volume dont la frontière est une surface fermée de normale unité extérieure $\vec{n}$. Supposons que V soit l'image d'un volume W de l'espace des paramètres par l'application

$$\begin{aligned} \vec{r} : W &\to V \\ (\xi,\eta,\zeta) &\mapsto \vec{r}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\imath} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\jmath} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{k} \end{aligned}$$

où $W = [\xi_{min}, \xi_{max}] \times [\eta_{min}, \eta_{max}] \times [\zeta_{min}, \zeta_{max}]$; cf figure.

On suppose le système de coordonnées curviligne orthogonal. Soit $\vec{u} : E \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel $\mathcal{C}^1$ et soit $\vec{U}$ défini par

$$\vec{U}(\xi,\eta,\zeta) = \vec{u}(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)).$$

On veut montrer que div $\vec{U} = \dfrac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta \vec{U}.\vec{e_\xi}) + \dfrac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta \vec{U}.\vec{e_\eta}) + \dfrac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta \vec{U}.\vec{e_\zeta})\right)$ en utilisant le théorème de la divergence

$$\iiint_V \text{div } \vec{v}\; dV = \iint_S \vec{v}.\vec{n}\; d\sigma.$$

- Montrer que
$$\iiint_V \text{div } \vec{v}\ dV = \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} \text{div } \vec{U}(\xi,\eta,\zeta) h_\xi h_\eta h_\zeta\ d\xi d\eta d\zeta.$$
- On note $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_6$ où $S_1 = \{(x,y,z) \in E;\ x = x(\xi_{max},\eta,\zeta),\ \eta_{min} \leqslant \eta \leqslant \eta_{max},\ \zeta_{min} \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{max}\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in E;\ x = x(\xi_{min},\eta,\zeta),\ \eta_{min} \leqslant \eta \leqslant \eta_{max},\ \zeta_{min} \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{max}\}$.
  Montrer que
$$\iint_{S_1} \vec{v}.d\vec{\sigma} = \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} (\vec{U}.\vec{e_\xi} h_\eta h_\zeta)(\xi_{max},\eta,\zeta)\ d\eta d\zeta$$
  et que
$$\iint_{S_2} \vec{v}.d\vec{\sigma} = -\int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} (\vec{U}.\vec{e_\xi} h_\eta h_\zeta)(\xi_{min},\eta,\zeta)\ d\eta d\zeta.$$
- En déduire que
$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{v}.d\vec{\sigma} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial \xi}(\vec{U}.\vec{e_\xi} h_\eta h_\zeta)\ d\xi d\eta d\zeta.$$
- Conclure.

Question 136 **11.001 – corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$ et S la frontière de V.

(a) Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S. \end{cases}$$

(b) Trouver $u : \mathbb{R}^3 \setminus V \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus V, \\ u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in S, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to +\infty} u(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Question 137 **11.002 – corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 1\}$ et S la frontière de V. On note $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ avec
$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1,\ z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1,\ z = 1\},$$
$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2+y^2 = 1/2\}$ et $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2+y^2 = 1\}$.

a. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_2 \cup S_3, \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \vec{n} = 0, & \forall (x,y,z) \in S_1, \end{cases}$$
où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur.

b. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_2, \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \vec{n} = 0, & \forall (x,y,z) \in S_1 \cup S_3, \end{cases}$$
où $\vec{n}$ est le vecteur normal extérieur.

Question 138 11.003 – corrected

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues et de dérivées $f'(t)$ et $g'(t)$ continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, montrer que l'on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = -\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Vérifier cette formule pour $a=-1$, $b=2$, $f(t)=|t|$ et $g(t)=|1-t|$.

Question 139 11.004 – corrected

Soient ϕ et ψ deux champs scalaires de classe C^2 définis dans E. Soit V un volume de E dont la frontière S est une surface fermée et $\vec{n}$ la normale unité extérieure à V définie sur S.
Démontrer la formule de Green suivante :

$$\iiint_V (\phi\ \Delta\psi - \psi\ \Delta\phi)\,dV = \iint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Question 140 11.005 – corrected

Soit $\vec{u} : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{u}(x,y,z) = \frac{x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\ \vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Calculer div $\vec{u}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques.

Question 141 11.006 – corrected

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(t) = t$ si $t \in [0,\pi]$, $f_1(t)$ est paire et 2π-périodique,
$f_2(t) = t$ si $t \in [0,\pi[$, $f_2(\pi) = 0$, $f_2(t)$ est impaire et 2π-périodique.

a) Calculer les séries de Fourier de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

b) Dessiner le graphe des $N-$ièmes sommes partielles de ces séries pour $N = 4, 6, 8, 16$.

c) Que peut-on dire de la convergence de ces séries ?

Question 142 11.007 – corrected

Démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue périodique de période T alors :

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Question 143 11.008 – corrected

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on cherche $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) &=& f(x), \qquad \text{pour } x \in]0,1[, \\ u(0) &=& 0, \\ u(1) &=& 0. \end{cases}$$

1) Pour une fonction f donnée ci-dessous, la fonction u est-elle solution du problème ?

☐ **a.** $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \qquad u(x) = \sin(\pi x)$
☐ **b.** $f(x) = \pi^2 \cos(\pi x) \qquad u(x) = \cos(\pi x)$
☐ **c.** $f(x) = k^2\pi^2 \sin(k\pi x) \qquad u(x) = \sin(k\pi x)$, $\quad k$ entier positif fixé
☐ **d.** $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k k^2\pi^2 \sin(k\pi x) \qquad u(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x)$, $\quad N$ entier positif fixé
☐ **e.** $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k k^2\pi^2 \cos(k\pi x) \qquad u(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x)$, $\quad N$ entier positif fixé

2) On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ deux fois continue et dérivable (par rapport à x et t) tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0, \qquad \text{pour } x \in]0,1[,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad x \in]0,1[\\ u(0,t) &= 0, \qquad t > 0 \\ u(1,t) &= 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

Pour une fonction f donnée ci-dessous, la fonction u est-elle solution du problème ?
☐ **a.** $f(x) = \sin(\pi x) \qquad u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$
☐ **b.** $f(x) = \cos(\pi x) \qquad u(x,t) = \cos(\pi x)e^{-\pi^2 t}$
☐ **c.** $f(x) = \sin(k\pi x) \qquad u(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$, $\quad k$ entier positif fixé
☐ **d.** $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x) \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$, $\quad N$ entier positif fixé
☐ **e.** $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x) \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$, $\quad N$ entier positif fixé

Question 144 **11.009 – corrected**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période T et

$$p_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(\frac{2k\pi x}{T}) + b_k \sin(\frac{2k\pi x}{T}) \right).$$

Démontrer que si

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2k\pi x}{T}) + b_k \sin(\frac{2k\pi x}{T}) \right)$$

converge uniformément vers f alors f est continue.

<u>**Indication :**</u> Utiliser l'inégalité triangulaire sur $|f(x)-p_N(x)+p_N(x)-p_N(y)+p_N(y)-f(y)|$ puis utiliser la définition de la continuité de p_N et de la convergence uniforme.

Question 145 **11.010 – corrected**

Soit f une fonction périodique de période T et continue par morceaux.
a) Démontrer que si

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2k\pi x}{T}) + b_k \sin(\frac{2k\pi x}{T}) \right)$$

converge uniformément vers f alors

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2k\pi x}{T}$$

b) Démontrer que si f est impaire, alors sa série de Fourier est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi x}{T} \qquad \textit{avec } b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{T}\, dx,\ k = 1, 2, ..$$

Question 146 11.011 – corrected

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} u(x) &= x(1-x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(x) &= -u(-x) \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ u &:= \text{prolongée par 2-périodicité sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Représenter u, u', u''. Les fonctions u, u', u'' sont-elles continues ? Sont-elles continues par morceaux ?

Question 147 11.012 – corrected

Démontrer le théorème du cours suivant

Theorem 3.2 *Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux et soit*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x)$$

une série trigonométrique qui converge uniformément vers $f(x)$ alors f est nécessairement continue.

Question 148 11.013 – corrected

Les séries suivantes sont convergentes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

☐ Vrai ☐ Faux

Question 149 12.001 – corrected

On considère l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau cylindrique d'axe Oz. D'après le cours, la vitesse U_z selon Oz et la pression P doivent satisfaire l'équation

$$-\mu \Delta U_z + \partial_z P = 0,$$

où U_z ne dépend que de r et P ne dépend que de z.

a. Montrer que l'équation ci-dessus correspond aux deux équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{r} \partial_r (r \partial_r U_z(r)) & = C_1, \\ \partial_z P(z) & = C_1, \end{cases}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

b. Résoudre ces deux équations différentielles et utiliser le fait que $U_z(r = 1) = 0$ pour obtenir

$$U_z(r) = -\frac{C_1}{4\mu}(1 - r^2) \quad \text{et} \quad P(z) = C_1 z + C_2,$$

où C_2 est une constante arbitraire.

Question 150 **12.002 – corrected**

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, une fonction continue. On cherche $u :]0,1[\to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable, telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) &=& f(x), \qquad \text{pour } x \in]0,1[, \\ u(0) &=& 0, \\ u'(1) &=& 0. \end{cases}$$

Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier. Pour cela prolonger u par symétrie par rapport à l'axe $x = 1$ sur]1,2[, par imparité sur]-2,0[et 4-périodicité sur $\mathbb{R}$.

Question 151 **12.002b – corrected**

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, une fonction continue. On cherche $u :]0,1[\to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable, telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) &=& f(x), \qquad \text{pour } x \in]0,1[, \\ u(0) &=& 0, \\ u(1) &=& 0. \end{cases}$$

(a) Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier. Pour cela prolonger par imparité sur]-1,0[et 2-périodicité sur $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre le problème en prenant $f(x) = \sin \pi x$.

Question 152 **12.003 – corrected**

Etant donné deux fonctions continues $f : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, on cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = f(x,t), & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

a. Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier.
b. Soit $f = 0$ et $u_0(x) = \sin(\pi x)$, vérifier que $u(x,t) = e^{-(1+\pi^2)t} \sin(\pi x)$ est solution du problème précédent et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 153 **12.004 – corrected**

On considère une fonction g continue par intervalles sur $[0,1]$. Si λ est un paramètre réel, on cherche une fonction u continue et de première dérivée continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) - \lambda u(x) = g(x), \qquad \text{pour } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

a. Montrer que u peut être écrite comme limite uniforme d'une série trigonométrique en sinus telle que $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$, pour $x \in [0,1]$. Exprimer les coefficients b_k en fonction des coefficients β_k définis par $\beta_k = 2\int_0^1 g(x)\sin(k\pi x)$

b. Pour quelles valeurs de λ obtient-on une solution unique ?

c. S'il existe un entier positif j tel que $\lambda = j^2\pi^2$, quelle condition doit satisfaire g pour qu'il existe au moins une solution ?

d. Application : Prendre $g(x) = 1$, pour $x \in [0,1]$, et discuter de l'existence d'une solution u en fonction de λ.

Question 154 **13.001 – corrected**

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(t) = t$ si $t \in [0, \pi]$, $f_1(t)$ est paire et 2π-périodique,
$f_2(t) = t$ si $t \in [0, \pi[$, $f_2(\pi) = 0$, $f_2(t)$ est impaire et 2π-périodique.

a. Calculer les séries de Fourier de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

b. Utiliser le programme Matlab ou Octave suivant pour dessiner le graphe des $N-$ièmes sommes partielles de ces séries pour $N = 4, 6, 8, 16$.

Par exemple pour f_1 :

```
function y = f_1(x)
     N = 16;  % rang de la somme partielle
     y =  pi/2;
     for k=1:N
         y = y+2/(pi*k*k)*((-1)^k-1)*cos(k*x);
     end
end
```

Ensuite on trace le graphe de la fonction avec :

```
fplot('f_1',[-pi pi]);
```

c. Que peut-on dire de la convergence de ces séries ?

Question 155 **13.002 – corrected**

On cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \forall x \in]0,1[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

Vérifier que $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$ est solution du problème ci-dessus et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 156 **13.002b – corrected**

Etant donné $c > 0$ et une fonction $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, on cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall x \in]0,1[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

(a) On suppose $w(0) = w(1) = 0$, on prolonge w sur $\mathbb{R}$ par imparité sur $[-1, 0]$ et par 2-périodicité sur $\mathbb{R}$, on note W la fonction ainsi obtenue. Vérifier que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(W(x - ct) + W(x + ct))$$

est solution du problème. Dans le cas où $w(x) = \sin \pi x$, vérifier que $u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi ct$.

(b) Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier.

(c) Dans le cas où $w(x) = \sin \pi x$, calculer explicitement la série de Fourier de u et vérifier que $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct)$.

Question 157 **13.003 – corrected**

Etant donné deux fonctions continues $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $u_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x,t), & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in]0,1[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier.

Question 158 **13.004 – corrected**

On cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = x(1-x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases} \tag{53}$$

(a) On prolonge u_0 par imparité et 2-périodicité. On note U_0 la fonction ainsi obtenue.

(a.1) Représenter U_0, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U_0$ et $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U_0$.

(a.2) Calculer la série de Fourier de U_0.

(a.3) Que peut-on dire à propos de la convergence de cette série ?

(b) Trouver u solution de l'équation différentielle ci-dessus en utilisant les séries de Fourier. Ecrire u sous la forme

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(t)\cos(\omega_k x) + b_k(t)\sin(\omega_k x)\Big), \tag{54}$$

où ω_k, $a_0(t)$, $a_k(t)$ et $b_k(t)$ sont à expliciter et l'égalité à justifier.

Question 159 **13.005 – corrected**

Démontrer le théorème du cours suivant :

Théorème : Soit k et ℓ des entiers. On pose $\omega_k = \dfrac{2k\pi}{T}$. Les fonctions $1, \sin \omega_k x$ et $\cos \omega_k x$ vérifient les propriétés, dites relations d'orthogonalité, suivantes :

$$\int_0^T \sin\omega_k x\ .1\ dx = \int_0^T \cos\omega_k x\ .1\ dx = 0, \quad \forall k \geqslant 1;$$
$$\int_0^T \sin\omega_k x\ \sin\omega_\ell x\ dx = \int_0^T \cos\omega_k x\ \cos\omega_\ell x\ dx = 0 \text{ si k} \neq \ell, \quad k,\ell \geqslant 0$$
$$\int_0^T \cos\omega_k x\ \sin\omega_\ell x\ dx = 0 \quad \forall k,\ell \geqslant 0$$
$$\int_0^T (\cos\omega_k x)^2\ dx = \int_0^T (\sin\omega_k x)^2\ dx = \frac{T}{2} \quad \forall k \geqslant 1, \quad \int_0^T (1)^2\ dx = T$$

Question 160 **13.006 – corrected**

Soit N un entier positif et soit $T, a_0, a_1, ..., a_N, b_0, b_1, ..., b_N$ des nombres réels positifs. Soit $p_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$p_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(\frac{2k\pi x}{T}) + b_k \sin(\frac{2k\pi x}{T}) \right). \tag{55}$$

Montrer que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p_N(x)\ dx \tag{56}$$
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T p_N(x)\cos\frac{2k\pi x}{T}\ dx, \quad k \geqslant 1 \tag{57}$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T p_N(x)\sin\frac{2k\pi x}{T}\ dx, \quad k \geqslant 1 \tag{58}$$

Indication :

Intégrer (1) entre $t = 0$ et $t = T$.
Multiplier (1) par $\cos\frac{2\ell\pi x}{T}$ $\quad \ell \in \mathbb{N}$ et intégrer entre $t = 0$ et $t = T$.

Question 161 **13.007 – corrected**

On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois en temps, telle que :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \cos(\dfrac{\pi}{2}x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

- Prolonger u sur $[1,2]$ de la manière suivante : $U(1+x,t) = -U(1-x,t) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
- Montrer que U' est continue en $x = 1$
- Prolonger U par parité sur $[-2,0]$ puis par 4-périodicité sur $\mathbb{R}$
- Résoudre (1) avec les séries de Fourier

Question 162 **13.008 – corrected**

On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois en temps, telle que :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(1,t) = 1, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\dfrac{\pi}{2}x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

Résoudre (2) avec les séries de Fourier.

Indication : Introduire $v(x,t) = u(x,t) - x$.

Question 163 **13.009 – corrected**

- Démontrer que $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x) \sin \omega_k x \, dx$ dans le théorème 3.2 du cours.
- Démontrer le point ii) du théorème 3.3.

Question 164 **13.010 – corrected**

Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(x) = x(1-x)$ si $x \in [0,1]$, f_1 est impaire et 2-périodique,
$f_2(x) = x(1-x)$ si $x \in [0,1]$, f_2 est paire et 2-périodique.
$f_3(x) = x(1-x)$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, f_3 est impaire et 1-périodique.

a. Dessiner les fonctions f_1, f_2 et f_3 et discuter de la convergence de leurs séries de Fourier.

b. Calculer les séries de Fourier de f_1, f_2 et f_3.

c. Utiliser le programme Matlab ou Octave suivant pour dessiner le graphe des $N-$ièmes sommes partielles de ces séries pour $N = 4, 8, 16$.

Par exemple pour f_1, complétez puis sauvegardez le script suivant dans un fichier $f1.m$:

```
function y = f1(x)
     N = 16;  % rang de la somme partielle
     a0 = ...;
     y =  a0;
     for k=1:N
         ak = ...;
         bk = ...;
         wk = ...;
         y = y+ak*cos(wk*x) + bk*sin(wk*x);
     end
end
```

Ensuite tracez le graphe de la fonction en tapant la commande suivante dans la ligne de commande Matlab ou Octave :

```
fplot(@f1,[-2 2]);
```

Question 165 **13.011 – corrected**

Etant donné une fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable et $c \in \mathbb{R}$, on cherche $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geqslant 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Vérifier que $u(x,t) = w(x - ct)$ est solution du problème ci-dessus.

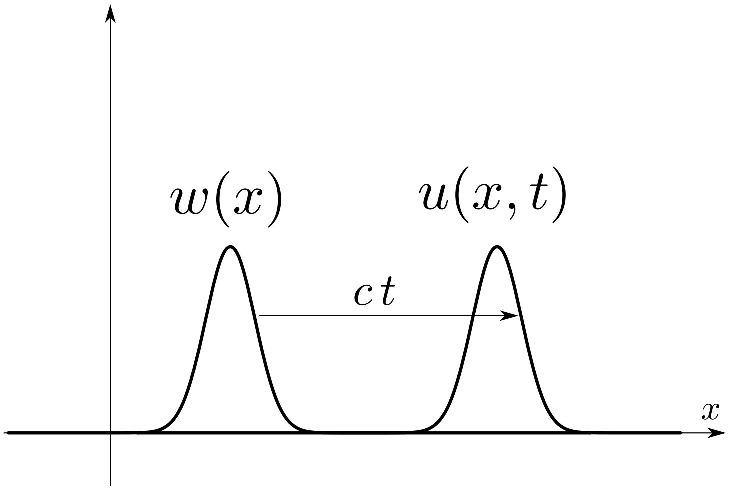


FIGURE 1 – Condition initiale et solution du problème de transport.

(b) Supposons maintenant u et w 1-périodiques. Les séries de Fourier de u, w sont définies par

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos 2k\pi x + b_k(t) \sin 2k\pi x)$$

$$w(x) = a_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^0 \cos 2k\pi x + b_k^0 \sin 2k\pi x\right)$$

où les coefficients a_k^0, b_k^0 sont connus et les coefficients $a_k(t)$ et $b_k(t)$ sont inconnus.
Vérifier que $a_0(t) = a_0^0$ et

$$\begin{cases} a_k'(t) + c\ 2k\pi b_k(t) = 0 \\ b_k'(t) - c\ 2k\pi a_k(t) = 0 \end{cases}$$

avec $a_k(0) = a_k^0$, $b_k(0) = b_k^0$, $k = 1, 2, ...$ Expliciter la solution du problème.

(c) Soit $w(x) = \sin 2\pi x$. Calculer explicitement la série de Fourier de u et vérifier que $u(x,t) = \sin 2\pi(x - ct)$.

Question 166 **14.001 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = yz\vec{\imath} + xz\vec{\jmath} + xy\vec{k}.$$

Existe-t-il un champ scalaire ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$? Si oui, utiliser un théorème du cours pour calculer ϕ.

Question 167 **14.002 – not corrected**

On définit le champ vectoriel suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k},$$

et le morceau de surface Σ

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in E : x+y+z=1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

Vérifier par le calcul le théorème de Stokes

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r},$$

où Γ désigne la frontière de Σ.

Question 168 — 14.003 – corrected

Soit $\vec{v} : \Omega \subset E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}). \tag{59}$$

(a) Quel est le domaine de définition Ω ? Est-il étoilé ?

(b) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$.

(c) Existe-t-il un champ scalaire φ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$? Justifier votre réponse et expliciter φ s'il existe.

Question 169 — Ex.01 – not corrected

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(x\ \vec{\imath}+y\ \vec{\jmath}+z\ \vec{k}).$$

Calculer div $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$.

Question 170 — Ex.02 – not corrected

Soient $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $\vec{\psi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ les champs vectoriels définis par :

$$\vec{v}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\ \vec{\imath}+\frac{x}{x^2+y^2}\ \vec{\jmath}$$

et

$$\vec{\psi}(x,y,z) = -\ln(\sqrt{x^2+y^2})\ \vec{k}.$$

- Préciser le domaine de définition Ω de $\vec{v}$.
- Calculer div $\vec{v}$. Que peut-on en déduire ?
- Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\psi}$. Que peut-on en déduire ?
- Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in E : x^2+y^2=1,\ z=0\}$. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ et $\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$. Que peut-on en déduire ?

Question 171 — Ex.03 – corrected

Soit $V = \{(x,y,z) \in E : \frac{1}{4} < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ et S la frontière de V. On note $S = S_1 \cup S_2$ avec

$$S_1 = \{(x,y,z) \in E : x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}\}$$

et

$$S_2 = \{(x,y,z) \in E : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = 0 & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 1 & \forall (x,y,z) \in S_1, \\ u(x,y,z) = 2 & \forall (x,y,z) \in S_2. \end{cases}$$

Question 172 **Ex.04 – corrected**

Etant données deux fonctions continues $f : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, on cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = 0;\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

a. Résoudre ce problème en utilisant les séries de Fourier.
b. Soit $f(x,t) = 0$ et $u_0(x) = \sin(\pi x/2)$. Vérifier que $e^{-\pi^2 t/4}\sin(\pi x/2)$ est solution du problème et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 173 **Ex.05 – not corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v}$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}.$$

Soit $V = \{(x,y,z) \in E : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ et S la frontière de V. Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\ dV = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}.$$

Question 174 **Ex.06 – not corrected**

On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

Vérifier que $u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-(\pi^2+1)t}$ est solution du problème ci-dessus et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 175 **Ex.07 – not corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right).$$

Existe-t-il un champ scalaire $f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$? Si oui, expliciter f en utilisant un théorème du cours.

Question 176 **Ex.08 – not corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = r^n\vec{r},$$

où n est un entier positif, $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

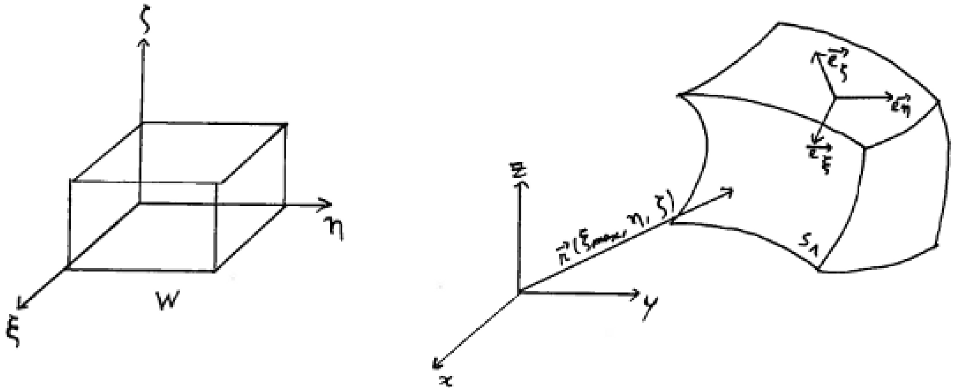
Démontrer que $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = Cr^n$ où C est une constante à définir.

Question 177 **Ex.09 – corrected**

On veut montrer la formule p.20 du polycopié

$$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left(\partial_\xi(h_\eta h_\zeta U_\xi) + \partial_\eta(h_\xi h_\zeta U_\eta) + \partial_\zeta(h_\xi h_\eta U_\zeta)\right)$$

On considère un système de coordonnées curvilignes orthogonal conforme au schéma suivant :



On note

$$W = [\xi_{\min}, \xi_{\max}] \times [\eta_{\min}, \eta_{\max}] \times [\zeta_{\min}, \zeta_{\max}].$$

Soit $\vec{u}: \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \vec{u}(x,y,z) \end{array}$ et soit $\vec{U}: \begin{array}{ccc} W & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\xi,\eta,\zeta) & \mapsto & \vec{U}(\xi,\eta,\zeta) \end{array}$

défini par $\vec{U}(\xi,\eta,\zeta) = \vec{u}(\vec{r}(\xi,\eta,\zeta))$ où on a noté

$$\vec{r}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\imath} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\jmath} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{k}.$$

- Montrer que $\displaystyle\iiint_V \text{div } \vec{u}\, dV = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}}\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \text{div } \vec{U}(\xi,\eta,\zeta) h_\xi h_\eta h_\zeta \; d\xi\; d\eta\; d\zeta$
- On note S la frontière de V, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$.

  Lorsque η et ζ varient, l'extrêmité de $\vec{r}(\xi_{\max},\eta,\zeta)$ décrit S_1 et l'extrêmité de $\vec{r}(\xi_{\min},\eta,\zeta)$ décrit S_2, voir le schéma.

  Montrer que $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{u}.d\vec{\sigma} = \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \vec{U}.\vec{e}_\xi h_\eta h_\zeta(\xi_{\max},\eta,\zeta)\; d\eta d\zeta$

  et $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{u}.d\vec{\sigma} = -\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \vec{U}.\vec{e}_\xi h_\eta h_\zeta(\xi_{\min},\eta,\zeta)\; d\eta d\zeta.$

  En déduire que $\displaystyle\iint_{S_1\cup S_2} \vec{u}.d\vec{\sigma} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}}\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \frac{\partial}{\partial\xi}(U_\xi h_\eta h_\zeta)\; d\xi d\eta d\zeta.$
- Procéder de la mème manière sur les autres faces de V pour obtenir

$$\iint_S \vec{v}.d\vec{\sigma} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}}\int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \left(\partial_\xi(h_\eta h_\zeta U_\xi) + \partial_\eta(h_\xi h_\zeta U_\eta) + \partial_\zeta(h_\xi h_\eta U_\zeta)\right)\; d\xi\; d\eta\; d\zeta.$$

- Utiliser le théorème de la divergence pour conclure.

Question 178 **Ex.10 – corrected**

On considère un cylindre infiniment long selon Oz de rayon 1 dans le plan Oxy, rempli d'un fluide Newtonien incompressible de densité ρ et viscosité μ. Le champ de vitesse $\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$ et le champ de pression p satisfont les équations de Navier-Stokes :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(u_x\partial_x u_x + u_y\partial_y u_x + u_z\partial_z u_x) - \mu\Delta u_x + \partial_x p = 0, \\ \rho(u_x\partial_x u_y + u_y\partial_y u_y + u_z\partial_z u_y) - \mu\Delta u_y + \partial_y p = 0, \\ \rho(u_x\partial_x u_z + u_y\partial_y u_z + u_z\partial_z u_z) - \mu\Delta u_z + \partial_z p = 0, \\ \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0. \end{array}\right.$$

- On suppose $u_x = u_y = 0$. Que deviennent ces équations ? En déduire que u_z est une fonction de x, y uniquement et p une fonction de z uniquement.
- Soit U_z défini par $U_z(r, \theta) = u_z(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta)$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1$.
En supposant que U_z ne dépend que de r, montrer que :
$$\mu \Delta U_z(r) = \partial_z p(z) = C.$$
- En déduire que
$$U_z(r) = \frac{C}{\mu}\frac{r^2}{4} + D \ln r + E, \quad D, E \in \mathbb{R}.$$
- Utiliser le fait que $U_z(r = 1) = 0$ pour obtenir
$$U_z(r) = \frac{C}{4\mu}(r^2 - 1).$$
- On impose le débit dans le cylindre. Expliciter $U_z(r)$ et $p(z)$.

Question 179 **Exa.2012 – not corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ de déformation $\mathcal{C}^2$ d'un matériau élastique homogène isotrope. Le champ vectoriel $\vec{v}$ est solution des équations suivantes
$$\mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{f} = \vec{0} \tag{1}$$
où λ, μ sont 2 réels positifs (coefficients de Lamé), $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$, $\Delta\vec{v} = \Delta v_x\vec{\imath} + \Delta v_y\vec{\jmath} + \Delta v_z\vec{k}$, $\Delta = \operatorname{div}\ \overrightarrow{\text{grad}}$, $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^3$ est le champ de forces volumiques. Les champs suivants sont solution de l'équation (**??**)

0)
♢ ***a.*** $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{\imath}, \quad \vec{f}(x, y, z) = \vec{0}$
♢ ***b.*** $\vec{v}(x, y, z) = z\vec{\jmath}, \quad \vec{f}(x, y, z) = \vec{0}$
♢ ***c.*** $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\lambda + 2\mu} z^2\vec{k}, \quad \vec{f}(x, y, z) = -\vec{k}$
♢ ***d.*** $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\lambda + 2\mu} z^2\vec{\imath}, \quad \vec{f}(x, y, z) = -\vec{\imath}$

Question 180 **Exa.2012 – not corrected**

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux champs $\mathcal{C}^2$, on a

0)
♢ ***a.*** $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$
♢ ***b.*** $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = g\ \overrightarrow{\text{grad}} f + f\ \overrightarrow{\text{grad}} g$
♢ ***c.*** $\overrightarrow{\text{grad}}(f^2) = 2f\ \overrightarrow{\text{grad}} f$
♢ ***d.*** $\overrightarrow{\text{grad}}(f^2 - g^2) = 2f\ \overrightarrow{\text{grad}} f - 2g\ \overrightarrow{\text{grad}} g$

Question 181 **Exa.2012 – corrected**

Soit $a, b > 0$ et soit Σ définie par $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in E;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ z = 0\right\}$. Calculer l'aire de Σ.

Question 182 **Exa.2012 – corrected**

Soit $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in E;\ \dfrac{1}{4} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\right\}$ et soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ défini par $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}$. Vérifier le théorème de Stokes $\left(\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}.d\vec{\sigma} = ...\right)$ pour ce champ $\vec{v}$ et cette surface Σ.

Question 183 — Exa.2012 – corrected

Soit $f : E \setminus 0 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et soit $V = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.
Calculer $\displaystyle\iiint_V f\, dV$.

Question 184 — Exa.2012 – not corrected

Les deux prochaines questions sont liées.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. On prolonge f par imparité sur $[-1,0]$ puis par 2-périodicité sur $\mathbb{R}$. On note $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi obtenue et $a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$ la série de Fourier de F. On a

0)
♢ ***a.*** la série de Fourier de F converge ponctuellement vers F
♢ ***b.*** la série de Fourier de F converge uniformément vers F
♢ ***c.*** $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |F(x) - p_N(x)| \leqslant \epsilon$, où $p_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$
♢ ***d.*** $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant N_0 \quad |F(x) - p_N(x)| \leqslant \epsilon$, où $p_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x))$

On a pour $k = 1, 2..$

0)
♢ ***a.*** $a_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \quad a_k = 2\int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)dx \quad b_k = 0$
♢ ***b.*** $a_0 = 0 \quad a_k = 0 \quad b_k = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx$
♢ ***c.*** $a_0 = \dfrac{1}{2} \quad a_k = \dfrac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) \quad b_k = 0$
♢ ***d.*** $a_0 = 0 \quad a_k = 0 \quad b_k = -\dfrac{2}{k\pi}(-1)^k$

Question 185 — Exa.2012 – corrected

On cherche $\begin{array}{rcl} u :]0,1[\times]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t) \end{array}$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = x & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Expliciter la solution du problème ci-dessus en utilisant les séries de Fourier. On demande d'expliciter le calcul des coefficients de Fourier.
Indication : pour $a, b \in \mathbb{R}$, la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + a\, y(t) = b & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est donnée par $y(t) = \dfrac{b}{a}(1 - e^{-at})$.

Question 186 **Exa.2012 – corrected**

Soit $V = \{(x, y, z) \in E;\ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ de frontière S et soit $u : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \in V \\ u(x, y, z) = 0 & (x, y, z) \in S \end{cases}$$

Trouver u.

Indication : On pourra utiliser le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ). Soit U définie par

$$U(r, \theta, \varphi) = u(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)),$$

on a

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r U) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta U) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_{\varphi\varphi}U.$$

Question 187 **Exa.2012 – not corrected**

On suppose que E est rempli d'un fluide de densité $\rho(x, y, z, t)$ et vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$, où t est le temps. Soit V un volume quelconque inclus dans E, de frontière S, et de normale unité $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur de V. On suppose que l'on a

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV + \iint_S \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, d\sigma = 0.$$

On en déduit que ρ et $\vec{v}$ satisfont :

0)

♢ ***a.*** $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \text{ div } \vec{v} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho = 0$

♢ ***b.*** $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho = 0$

♢ ***c.*** $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \text{ div } \vec{v} = 0$

♢ ***d.*** $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } (\rho\vec{v}) = 0$

Question 188 **Exa.2012 – not corrected**

Les deux prochaines questions sont liées.

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v}(x, y, z) = g(x, y, z)\vec{\imath}$ où $g : E \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Soit Σ une surface lisse de paramétrisation

$$\begin{aligned} \vec{r} : D &\longrightarrow \Sigma \\ (u, v) &\longmapsto \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k} \end{aligned}$$

On a :

0)

♢ ***a.*** $$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{aligned}[t] &[\,\partial_z g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u z\partial_v x - \partial_u x\partial_v z)(u, v) \\ &+ \partial_y g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u y\partial_v x - \partial_u x\partial_v y)(u, v)\,]\,du\,dv \end{aligned}$$

♢ ***b.*** $$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{aligned}[t] &[\,\partial_z g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u x\partial_v y - \partial_u y\partial_v x)(u, v) \\ &+ \partial_y g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u z\partial_v x - \partial_u x\partial_v z)(u, v)\,]\,du\,dv \end{aligned}$$

♢ ***c.*** $$\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{aligned}[t] &[\,\partial_z g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u x\partial_v z - \partial_u z\partial_v x)(u, v) \\ &+ \partial_y g(\vec{r}(u, v))\,(\partial_u y\partial_v x - \partial_u x\partial_v y)(u, v)\,]\,du\,dv \end{aligned}$$

♢ ***d.*** $\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}.d\vec{\sigma} = 0$

Soit C la frontière de D orientée dans le sens direct, on suppose C un arc lisse fermé et sa paramétrisation est donnée par

$$(u, v) = (u(t), v(t)) \qquad 0 \leqslant t \leqslant b.$$

La paramétrisation de Γ devient alors

$$\begin{cases} x &= x(u(t), v(t)) \\ y &= y(u(t), v(t)) \\ z &= z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

On a

0)

♢ ***a.*** $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = \int_a^b g\Big(\, x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t))\,\Big)\Big(\partial_u x(u(t), v(t))\, u'(t) + \partial_v x(u(t), v(t))\, v'(t)\Big)\, dt$

♢ ***b.*** $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = \int_a^b g\Big(\, x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t))\,\Big)\Big(\partial_u y(u(t), v(t))\, u'(t) + \partial_v y(u(t), v(t))\, v'(t)\Big)\, dt$

♢ ***c.*** $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = \int_a^b g\Big(\, x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t))\,\Big)\Big(\partial_u z(u(t), v(t))\, u'(t) + \partial_v z(u(t), v(t))\, v'(t)\Big)\, dt$

♢ ***d.*** $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = 0$

Question 189 **Exa.2012 – not corrected**

Les cinq prochaines questions sont liées.

Soit $\vec{u} : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{u}(x, y, z) = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

On a

0)

♢ ***a.*** $\text{div}\ \vec{u}(x, y, z) = 0$

♢ ***b.*** $\text{div}\ \vec{u}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

♢ ***c.*** $\text{div}\ \vec{u}(x, y, z) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

♢ ***d.*** $\text{div}\ \vec{u}(x, y, z) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

On exprime $\vec{u}$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} \vec{U}(r, \theta, \varphi) &= \vec{u}(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) \\ &= U_r(r, \theta, \varphi)\vec{e_r} + U_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e_\theta} + U_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

On a

0)

♢ ***a.*** $U_r(r, \theta, \varphi) = 1, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0$

♢ ***b.*** $U_r(r, \theta, \varphi) = r, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0$

♢ ***c.*** $U_r(r, \theta, \varphi) = \dfrac{1}{r}, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0$

♢ ***d.*** $U_r(r, \theta, \varphi) = r^2, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0$

En utilisant la formule $\operatorname{div} \vec{U}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}(\partial_r(r^2 \sin\theta\, U_r) + \partial_\theta(r \sin\theta\, U_\theta) + r\partial_\varphi U_\varphi)$,
on obtient

0)

♢ ***a.*** $\operatorname{div} \vec{U}(r,\theta,\varphi) = 0$

♢ ***b.*** $\operatorname{div} \vec{U}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{r}$

♢ ***c.*** $\operatorname{div} \vec{U}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{2}{r}$

♢ ***d.*** $\operatorname{div} \vec{U}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{3}{r}$

Soit $V = \{(x,y,z) \in E;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$. On a

0)

♢ ***a.*** $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} \vec{u}\, dV = 0$

♢ ***b.*** $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} \vec{u}\, dV = 2\pi$

♢ ***c.*** $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} \vec{u}\, dV = 4\pi$

♢ ***d.*** $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} \vec{u}\, dV = 6\pi$

Soit S la frontière de V, $\vec{n}$ la normale unité dirigée vers l'extérieur. On a

0)

♢ ***a.*** $\displaystyle\iint_S \vec{u}.\vec{n}\, d\sigma = 0$

♢ ***b.*** $\displaystyle\iint_S \vec{u}.\vec{n}\, d\sigma = 2\pi$

♢ ***c.*** $\displaystyle\iint_S \vec{u}.\vec{n}\, d\sigma = 4\pi$

♢ ***d.*** $\displaystyle\iint_S \vec{u}.\vec{n}\, d\sigma = 6\pi$

Question 190 **Exam1.01 – corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S. \end{cases}$$

Question 191 **Exam1.02 – not corrected**

On définit le champ scalaire $f : E \to \mathbb{R}$ suivant :

$$f(x,y,z) = \ln r,$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Montrer que $\Delta f(x,y,z) = r^n$ où n est un nombre à définir.

Question 192 **Exam1.03 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\ \vec{k}.$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème du rotationnel pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\; dV = -\iint_S \vec{v} \times d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 193 **Exam1.03b – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x, y, z) = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}.$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème du rotationnel pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} dV = -\iint_S \vec{v} \times d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 194 **Exam1.04 – not corrected**

On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

On note F la fonction obtenue en prolongeant f par parité sur $[-1, 1]$ puis par 2-périodicité sur tout $\mathbb{R}$.

a. Calculer les coefficients de la série de Fourier de F.
b. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de F ? Justifiez votre réponse.

Question 195 **Exam1.05 – not corrected**

On cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & \forall x \in]0, 1[, \forall t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

Vérifier que $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$ est solution du problème ci-dessus et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 196 **Exam2.01 – not corrected**

On cherche $u : [0, 1] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & \forall x \in]0, 1[, \forall t > 0, \\ u(0, t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & \forall x \in]0, 1[. \end{cases}$$

Vérifier que $u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(\pi t)$ est solution du problème ci-dessus et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 197 **Exam2.02 – not corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = x^2\ \vec{\imath} + y^2\ \vec{\jmath} + z^2\ \vec{k}.$$

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\ dV = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 198 **Exam2.03 – not corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S. \end{cases}$$

Question 199 **Exam2.04 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = 0$ et que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$ où $\phi : E \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\phi(x,y,z) = x + y + z.$$

b. Retrouver ϕ en utilisant le théorème 1.11 du polycopié.

Question 200 **Exam2.05 – not corrected**

Soient le champ vectoriel $\vec{v} : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

et le champ scalaire $f : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{r}$$

où $\vec{r} = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\ \vec{k}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Calculer $\operatorname{div} \vec{v}$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$ et Δf.

Question 201 **Exam.02 – not corrected**

On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable en espace et en temps, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \forall x \in]0,1[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \forall x \in]0,1[. \end{cases}$$

Vérifier que $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$ est solution du problème ci-dessus et retrouver cette solution en utilisant les séries de Fourier.

Question 202 **Exam.03 – corrected**

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. On note F la fonction obtenue en prolongeant f par parité sur $[-1,1]$ puis par 2-périodicité sur tout $\mathbb{R}$.

(a) Calculer les coefficients de sa série de Fourier.

(b) Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de F ? Justifiez votre réponse.

Question 203 **Exam.04 – corrected**

On définit le champ vectoriel $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\vec{v}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + z\ \vec{k}.$$

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

Vérifier, par le calcul, le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\ dV = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

où S est la frontière de V.

Question 204 **Exam.05 – corrected**

On définit le champ scalaire $f : E \to \mathbb{R}$ suivant :

$$f(x,y,z) = \ln\Big((x^2 + y^2)^{n/2}\Big),$$

où n est un entier positif. Calculer Δf.

Question 205 **Exam.06 – not corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ et S la frontière de V. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S. \end{cases}$$

Question 206 **Exam.07 – corrected**

On considère le champ vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{v}: \quad E &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) &\longmapsto \vec{v}(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right).\end{aligned}$$

Existe-t-il un champ scalaire ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$? Si oui, utiliser un théorème du cours pour calculer ϕ.

Question 207 **Exam.08 – corrected**

Soit

$$\begin{aligned}g: \quad E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y,z) &\longmapsto g(x,y,z)\end{aligned} \tag{60}$$

un champ scalaire de classe C^1. Soit Σ une surface lisse de paramétrisation

$$\begin{cases} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v).\end{cases} \tag{61}$$

On suppose que Γ, la frontière de Σ, est un arc lisse de paramétrisation

$$\begin{cases} x\Big(u(t),v(t)\Big)\\ y\Big(u(t),v(t)\Big)\\ z\Big(u(t),v(t)\Big),\end{cases} \tag{62}$$

où $a \leqslant t \leqslant b$. Soit $\ell : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\ell(t) = g\Big(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t))\Big). \tag{63}$$

Calculer $\ell'(t)$.

Question 208 **Exam.09 – corrected**

Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}. \tag{64}$$

Soit

$$V = \Big\{(x,y,z) \in E; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\Big\}, \tag{65}$$

et S sa frontière. Vérifier par le calcul le théorème de la divergence pour ce volume V et ce champ vectoriel $\vec{v}$:

$$\iiint_V \operatorname{div}\, \vec{v}\; dV = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\; d\sigma. \tag{66}$$

Question 209 **Exam.10 – not corrected**

Soit le volume

$$V = \left\{(x,y,z) \in E; \frac{1}{4} < x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$$

et S sa frontière. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\triangle u = 1 \qquad \text{dans } V, \tag{67}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } S. \tag{68}$$

Question 210 **Exam.11 – corrected**

Soit

$$
\begin{aligned}
f :]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto 1.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

On prolonge la fonction f par imparité sur l'intervalle $]-1;0[$, puis par 2-périodicité sur $\mathbb{R}$.

(a) *(a.1)* Représenter graphiquement la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi obtenue.

(a.2) Calculer la série de Fourier de F (on demande d'expliciter le calcul des coefficients de Fourier).

(a.3) Que peut-on dire à propos de la convergence de cette série de Fourier ?

(b) On cherche $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable en espace et une fois continûment dérivable en temps telle que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x) && 0 < x < 1, \quad t > 0, && (70)\\
u(0,t) = u(1,t) &= 0 && t > 0, && (71)\\
u(x,0) &= 0 && 0 < x < 1, && (72)
\end{aligned}
$$

où f est la fonction définie par (**??**). Résoudre ce problème en utilisant les séries de Fourier.

Question 211 **Exam.12 – not corrected**

Soit Σ la surface définie par

$$
\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in E; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\Big\}. \tag{73}
$$

(a) Représenter graphiquement Σ et sa frontière Γ.

(b) Soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$
\vec{v}(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}. \tag{74}
$$

Calculer $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$.

Indication : on pourra utiliser un théorème du cours pour simplifier les calculs.

Question 212 **T1.01 – not corrected**

On définit le champ scalaire $f : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ suivant :

$$
f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2)^{n/2},
$$

où n est un entier positif. Calculer Δf.

Question 213 **T1.02 – not corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 \leqslant z, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Calculer le volume de V.

Question 214 **T1.03 – corrected**

On considère la surface Σ définie par

$$
\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}
$$

orienté tel que sa normale unité $\vec{n}$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{k} \geqslant 0$. Soit encore $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$
\vec{v}(x,y,z) = y\ \vec{\imath} + z\ \vec{\jmath} + x\ \vec{k}.
$$

Vérifier, par le calcul, le théorème de Stokes pour la surface Σ et le champ vectoriel $\vec{v}$, c'est à dire :

$$
\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},
$$

où Γ est la frontière de Σ.

Question 215 **T1.04 – not corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in E : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ et S la frontière de V. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = 1, & \forall (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S. \end{cases}$$

Question 216 **T1.05 – not corrected**

Soit $\vec{v} : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

où $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

a. Calculer div $\vec{v}$.

b. Calculer $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ où $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

c. Que peut-on en déduire ? Justifier votre réponse.

Question 217 **T1.06 – corrected**

Soient $\phi : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1 et $\ell : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\ell(t) = t\,\phi(tx, ty, tz)$$

où $(x,y,z) \in E$.

Calculer $\ell'(t)$.

Question 218 **T1.07 – not corrected**

Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par $f(x,y,z) = xy$. Calculer $\int_\Gamma f\ ds$.

Question 219 **T1.08 – not corrected**

Soit $\vec{v} : E \setminus \{Oz\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par :

$$\vec{v}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}.$$

a. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. Que peut-on en déduire ?
b. Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$. Calculer $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$. Que peut-on en déduire ?

Question 220 **T1.09 – not corrected**

Soit $V = \{(x,y,z) \in E : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ de frontière S et soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = x(x^2+y^2)\,\vec{\imath} + y(x^2+y^2)\,\vec{\jmath}.$$

a. Calculer <u>explicitement</u> $\iiint_V \text{div}\,\vec{v}\,dV$.
b. Calculer <u>explicitement</u> $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.
c. Conclure.

Question 221 T1.10 – corrected

Soit Γ un arc fermé et soit $f : E \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^1. Soit

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{\imath} + y(t)\ \vec{\jmath} + z(t)\ \vec{k}, \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

une paramétrisation de classe C^1 de Γ et soit $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}$ défini par $\ell(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

(a) Calculer $\ell'(t)$.

(b) Montrer que $\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot d\vec{r} = \ell(b) - \ell(a)$.

(c) En déduire que $\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot d\vec{r} = 0$.

Question 222 T1.11 – not corrected

Soit $V = \{(x, y, z) \in E : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ et S la frontière de V. Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = 1, & \forall (x, y, z) \in V, \\ u(x, y, z) = 1, & \forall (x, y, z) \in S. \end{cases}$$

Question 223 T1.12 – not corrected

Soit $V = \{(x, y, z) \in E : x^2 + y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Calculer le volume de V.

Question 224 T1.13 – not corrected

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < 1\}$ et S la frontière de V. On note $S = S_1 \cup S_2$ avec

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1/2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$$

et

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2 + y^2 = 1/2\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Trouver $u : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = 1, & \forall (x, y, z) \in V, \\ u(x, y, z) = 0, & \forall (x, y, z) \in S_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = 0, & \forall (x, y, z) \in S_1. \end{cases}$$

Question 225 Test.2012 – not corrected

Les hypothèses suivantes sont valables de la question **0**) à la question **0**).
Soit $\vec{v} : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{v}(x, y, z) = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ le volume de frontière S, la normale étant orientée vers l'extérieur.

0) On a :

☐ ***a.*** $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi$

☐ ***b.*** $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -2\pi$

☐ ***c.*** $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$

☐ ***d.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi$

☐ ***e.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi$

0) On a :

☐ ***a.*** $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

☐ ***b.*** $\operatorname{div} \vec{v} = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

☐ ***c.*** $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

☐ ***d.*** $\operatorname{div} \vec{v} = -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

☐ ***e.*** $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{-3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

0) On suppose qu'il existe $\vec{\phi} : E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}$. On déduit du théorème de Stokes que :

☐ ***a.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi$

☐ ***b.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -2\pi$

☐ ***c.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$

☐ ***d.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi$

☐ ***e.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi$

0) On déduit de **0**) et **0**) que :

♢ ***a.*** $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ sur V

♢ ***b.*** $\vec{\phi} = \vec{0}$ sur V

♢ ***c.*** $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$

♢ ***d.*** Il n'existe pas de $\vec{\phi}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\phi}$

Question 226 **Test.2012 – not corrected**

0) Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ et soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{v}(x,y,z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

On a :

☐ ***a.*** $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -\pi$

☐ ***b.*** $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -1$

☐ ***c.*** $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$

☐ ***d.*** $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 1$

☐ ***e.*** $\iint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \pi$

0) Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2+z^2=1,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$. La frontière Γ de Σ est donnée par :

♢ ***a.*** $\Gamma = \emptyset$
♢ ***b.*** $\Gamma = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2=1,\ z=0\}$
♢ ***c.*** $\Gamma = \{(x,y,z) \in E;\ y^2+z^2=1,\ x=0\}$
♢ ***d.*** $\Gamma = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2=1,\ x \geqslant 0,\ z=0\} \cup \{(x,y,z) \in E;\ y^2+z^2=1,\ z \geqslant 0,\ x=0\}$

0) L'aire de Σ défini à la question **0**) vaut :

♢ ***a.*** 0
♢ ***b.*** π
♢ ***c.*** 2π
♢ ***d.*** 3π

0) Soit $f : E \to \mathbb{R}$, on rappelle $\Delta f = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$. Soit $r : E \to \mathbb{R}$ définie par $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
On a :

☐ ***a.*** $\Delta r(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
☐ ***b.*** $\Delta r(x,y,z) = 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
☐ ***c.*** $\Delta r(x,y,z) = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
☐ ***d.*** $\Delta r(x,y,z) = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$
☐ ***e.*** $\Delta r(x,y,z) = 0$

Question 227 Test.2012 – not corrected

0) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = g(x)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, soit Σ une surface lisse de paramétrisation $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k},\ u,v \in D$.
On a :

♢ ***a.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(u,v))(\partial_u z \partial_v y - \partial_u y \partial_v z)(u,v)\, du\, dv$
♢ ***b.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(u,v))(\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y)(u,v)\, du\, dv$
♢ ***c.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D g'(x(u,v))(\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y)(u,v)\, du\, dv$
♢ ***d.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D g'(x(u,v))(\partial_u z \partial_v y - \partial_u y \partial_v z)(u,v)\, du\, dv$

0) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = \ell(y)$ où $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit Γ un arc lisse de paramétrisation $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k},\ a \leqslant t \leqslant b$.
On a :

♢ ***a.*** $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f . d\vec{r} = \ell(y(b)) - \ell(y(a))$
♢ ***b.*** $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f . d\vec{r} = \int_a^b \ell'(x(t))x'(t)dt$
♢ ***c.*** $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f . d\vec{r} = \int_a^b \ell'(y(t))y'(t)dt$
♢ ***d.*** $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} f . d\vec{r} = \ell(x(b)) - \ell(x(a))$

0) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y,z) = h(z)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, soit Σ une surface lisse de paramétrisation $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k},\ u,v \in D$.
On a :

$\diamondsuit$ ***a.*** $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(f(\vec{r}(u,v))\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{r}(u,v)).\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v)$

$\diamondsuit$ ***b.*** $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(f(\vec{r}(u,v))\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{r}(u,v)\right)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{r}(u,v)\right)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(\vec{r}(u,v)\right)\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)$

$\diamondsuit$ ***c.*** $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(f(\vec{r}(u,v))\right) = h'(z(u,v))\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)$

$\diamondsuit$ ***d.*** $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(f(\vec{r}(u,v))\right) = h'(z(u,v))(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v))$

Question 228 **Test.2012 – not corrected**

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ x \geqslant 0\}$ orienté de sorte que $\vec{n}.\vec{\imath} \geqslant 0$ et soit Γ la frontière de Σ, orientée selon la règle d'Ampère et soit $\vec{v} : E \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{v}(x,y,z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

0) On a :

☐ ***a.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = -4$

☐ ***b.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = -2$

☐ ***c.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = 0$

☐ ***d.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = 2$

☐ ***e.*** $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = 4$

0) On a :

☐ ***a.*** $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = -4$

☐ ***b.*** $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = -2$

☐ ***c.*** $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$

☐ ***d.*** $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 2$

☐ ***e.*** $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 4$

0) On suppose que E est rempli d'un matériau de température $T(x,y,z,t)$ où t est le temps. Soit V un volume quelconque inclus dans E, de frontière S et de normale unité $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur de V.
On suppose que l'on a

$$\frac{d}{dt}\iiint_V T dV + \iint_S \left(Tn_x - (\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \frac{\partial T}{\partial y}n_y + \frac{\partial T}{\partial z}n_z)\right) d\sigma = 0.$$

On en déduit que T satisfait :

☐ ***a.*** $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$

☐ ***b.*** $\dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

☐ ***c.*** $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

☐ ***d.*** $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{\partial T}{\partial x} - (\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}) = 0$

☐ ***e.*** $\frac{\partial T}{\partial x} - (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}) = 0$

Question 229 **Test.2012 – not corrected**

0) Soit $V = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ et soit S la frontière de V, $S = S_1 \cup S_2$ où :

$$S_1 = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2 \leqslant 1;\ z=0\} \cup \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2 \leqslant 1;\ z=1\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in E;\ x^2+y^2 = 1;\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

Soit $u : V \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}, & \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_2, \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in S_1. \end{cases}$$

Que vaut $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$?

☐ ***a.*** $\frac{8-\sqrt{2}}{36}$

☐ ***b.*** $\frac{4-4\ln\sqrt{2}-\sqrt{2}}{36}$

☐ ***c.*** $\frac{1-\sqrt{2}}{18}$

☐ ***d.*** $\frac{2-2\ln\sqrt{2}-\sqrt{2}}{18}$

☐ ***e.*** $\frac{4-\sqrt{2}}{36}$

On rappelle que $\Delta u = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u$. Le laplacien en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\Delta U = \frac{1}{r}(\partial_r(r\partial_r U) + \frac{1}{r}\partial^2_{\theta\theta}U + r\partial^2_{zz}U)$$

où U est défini par :

$$U(r,\theta,z) = u(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z))$$

Question 230 **Test.2012 – not corrected**

Question 231 **Test.2012 – not corrected**

Question 232 **Test.2012 – not corrected**

Question 233 **Test.2012 – not corrected**