

## Introducción a la Programación Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2024

Polimorfismo, Currificación y Recursión sobre enteros

- ▶ Se llama polimorfismo a una función que puede aplicarse a distintos tipos de datos (sin redefinirla).
- ▶ se usa cuando el comportamiento de la función no depende paramétricamente del tipo de sus argumentos
- ▶ lo vimos en el lenguaje de especificación con las funciones genéricas.
- ▶ En Haskell los polimorfismos se escriben usando **variables de tipo** y conviven con el tipado fuerte.
- ▶ Ejemplo de una función polimórfica: la función identidad.

1

## Variables de tipos

¿Qué tipo tienen las siguientes funciones?

```
identidad x = x
primero x y = x
segundo x y = y
constante5 x y z = 5
```

### Variables de tipo

- ▶ Son parámetros que se escriben en la signatura usando variables minúsculas
- ▶ En lugar de valores, denotan tipos
- ▶ Cuando se invoca la función se usa como argumento el tipo del valor

3

2

## Variables de tipo (cont.)

### Funciones con variables de tipo

```
identidad :: t -> t
identidad x = x

primero :: tx -> ty -> tx
primero x y = x

segundo :: tx -> ty -> ty
segundo x y = y

constante5 :: tx -> ty -> tz -> Int
constante5 x y z = 5

mismoTipo :: t -> t -> Bool
mismoTipo x y = True
```

Si dos argumentos deben tener el mismo tipo, se debe usar la misma variable de tipo

- ▶ Luego, primero `True 5 :: Bool`, pero mismoTipo `1 True 0` no tipa

4

## Clases de tipos

¿Qué tipo tienen las siguientes funciones?

```
triple x = 3*x

maximo x y | x >= y = x
           | otherwise = y

distintos x y = x /= y
```

### Clases de tipos

- Conjunto de tipos a los que se le pueden aplicar ciertas funciones
- Un tipo puede pertenecer a distintas clases
  - Los `Float` son números (`Num`), con orden (`Ord`), de punto flotante (`Floating`), etc.

### En este curso

- No vamos a evaluar el uso de clases de tipos, pero ...
- ... saber la mecánica permite comprender los mensajes del compilador de Haskell (GHCi)

## Clases de tipos (cont)

Las clases de tipos se describen como restricciones sobre variables de tipos

```
triple :: (Num t) => t -> t
triple x = 3*x

maximo :: (Ord t) => t -> t -> t
maximo x y | x >= y = x
           | otherwise = y

distintos :: (Eq t) => t -> t -> Bool
distintos x y = x /= y

— Cantidad de raíces de la ecuación: ax^2 + bx + c
cantidadDeSoluciones :: (Num t, Ord t) => t -> t -> t -> Int
cantidadDeSoluciones a b c | discriminante > 0 = 2
                           | discriminante == 0 = 1
                           | otherwise = 0
                           where discriminante = b^2 - 4*a*c

pepe :: (Floating t, Eq t, Num u, Eq u) => t -> t -> u -> Bool
pepe x y z = sqrt (x + y) == x && 3*z == 0
```

`(Floating t, Eq t, Num u, Eq u) => ...` significa que:

- la variable `t` tiene que ser de un tipo que pertenezca a `Floating` y `Eq`
- la variable `u` tiene que ser de un tipo que pertenezca a `Num` y `Eq`

## Clases de tipos (cont)

### Clase de tipos

- Conjunto de tipos de datos a los que se les puede aplicar un conjunto de funciones

### Algunas clases:

1. `Integral` := (`{ Int, Integer, ... }`, `{ mod, div, ... }`)
2. `Fractional` := (`{ Float, Double, ... }`, `{ (/), ... }`)
3. `Floating` := (`{ Float, Double, ... }`, `{ sqrt, sin, cos, tan, ... }`)
4. `Num` := (`{ Int, Integer, Float, Double, ... }`, `{ (+), (*), abs, ... }`)
5. `Ord` := (`{ Bool, Int, Integer, Float, Double, ... }`, `{ (<=), compare }`)
6. `Eq` := (`{ Bool, Int, Integer, Float, Double, ... }`, `{ (==), (/=) }`)

## Ejercitación conjunta

Averiguar el tipo asignado por Haskell a las siguientes funciones

```
f1 x y z = x**y + z <= x+y**z

f2 x y = (sqrt x) / (sqrt y)

f3 x y = div (sqrt x) (sqrt y)

f4 x y z | x == y = z
         | x ** y == y = x
         | otherwise = y

f5 x y z | x == y = z
         | x ** y == y = z
         | otherwise = z
```

¿Qué error ocurre cuándo ejecutamos `f4 5 5 True`? ¿Tiene sentido?

¿Y si ejecutamos `f5 5 5 True`? ¿Qué cambió?

# Nueva familia de tipos: Tuplas

## Tuplas

- ▶ Dados tipos  $A_1, \dots, A_k$ , el **tipo  $k$ -upla**  $(A_1, \dots, A_k)$  es el conjunto de las  $k$ -uplas  $(v_1, \dots, v_k)$  donde  $v_i$  es de tipo  $A_i$

```
(1, 2)      :: (Int, Int)
(1.1, 3.2, 5.0) :: (Float, Float, Float)
(True, (1, 2)) :: (Bool, (Int, Int))
(True, 1, 2)  :: (Bool, Int, Int)
```

- ▶ En Haskell hay infinitos tipos de tuplas

## Funciones de acceso a los valores de un par en Prelude

- ▶ `fst :: (a, b) -> a` Ejemplo: `fst (1 + 4, 2) ~ 5`
- ▶ `snd :: (a, b) -> b` Ejemplo: `snd (1, (2, 3)) ~ (2, 3)`

Ejemplo: suma de vectores en  $\mathbb{R}^2$

```
suma :: (Float, Float) -> (Float, Float) -> (Float, Float)
suma v w = ((fst v) + (fst w), (snd v) + (snd w))
```

Podemos usar *pattern matching* para acceder a los valores de una tupla

```
suma (vx, vy) (wx, wy) = (vx + wx, vy + wy)
```

# Pattern matching sobre tuplas

Podemos usar *pattern matching* sobre constructores de tuplas y números

```
esOrigen :: (Float, Float) -> Bool
esOrigen (0, 0) = True
esOrigen (_, _) = False

angulo0 :: (Float, Float) -> Bool
angulo0 (_, 0) = True
angulo0 (_, _) = False

{-
No podemos usar dos veces la misma variable
angulo45 :: (Float, Float) -> Bool
angulo45 (x,x) = True
angulo45 (_,_) = False
-}

angulo45 :: (Float, Float) -> Bool
angulo45 (x,y) = x == y

patternMatching :: (Float, (Bool, Int), (Bool, (Int, Float))) -> (Float, (Int, Float))
patternMatching (f1, (True, _), (_, (0, f2))) = (f1, (1, f2))
patternMatching (_, _, (_, (-, f))) = (f, (0, f))
```

9

10

# Parámetros vs. tuplas

¿Conviene tener dos parámetros escalares o un parámetro dupla?

```
suma :: (Float, Float) -> (Float, Float) -> (Float, Float)
suma (vx, vy) (wx, wy) = (vx + wx, vy + wy)
```

```
— normaVectorial2 x y es la norma de (x,y)
normaVectorial2 :: Float -> Float -> Float
normaVectorial2 x y = sqrt (x^2 + y^2)
```

```
— normaVectorial1 (x,y) es la norma de (x,y)
normaVectorial1 :: (Float, Float) -> Float
normaVectorial1 (x,y) = sqrt (x^2 + y^2)
```

```
norma1Suma :: (Float, Float) -> (Float, Float) -> Float
norma1Suma v1 v2 = normaVectorial1 (suma v1 v2)
```

```
norma2Suma :: (Float, Float) -> (Float, Float) -> Float
norma2Suma v1 v2 = normaVectorial2 (fst s) (snd s)
  where s = suma v1 v2
```

# Currificación

- ▶ Diferencia entre promedio1 y promedio2

- ▶ `promedio1 :: (Float, Float) -> Float`  
`promedio1 (x,y) = (x+y)/2`
- ▶ `promedio2 :: Float -> Float -> Float`  
`promedio2 x y = (x+y)/2`

## Curricación

- Diferencia entre promedio1 y promedio2
  - `promedio1 :: (Float, Float) -> Float`  
`promedio1 (x,y) = (x+y)/2`
  - `promedio2 :: Float -> Float -> Float`  
`promedio2 x y = (x+y)/2`
- solo cambia el tipo de datos de la función
  - promedio1 recibe un solo parámetro (una dupla)
  - promedio2 recibe dos Float separados por un espacio
  - para declararla, separamos los tipos de los parámetros con una flecha
  - tiene motivos teóricos y prácticos (que no veremos ahora)
- la notación se llama **curricación** en honor al matemático Haskell B. Curry
- para nosotros, alcanza con ver que evita el uso de varios signos de puntuación (comas y paréntesis)
  - `promedio1 (promedio1 (2, 3), promedio1 (1, 2))`
  - `promedio2 (promedio2 2 3) (promedio2 1 2)`

## Recurción

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en “expresiones sencillas”.

## Funciones binarias: notación prefija vs. infija

### Funciones binarias

- Notación prefija: función antes de los argumentos (e.g., `suma x y`)
- Notación infija: función entre argumentos (e.g. `x + y`, `5 * 3`, etc)
- La notación infija se permite para funciones cuyos nombres son operadores
- El nombre real de una función definido por un operador • es (•)
- Se puede usar el nombre real con notación prefija, e.g. `(+) 2 3`
- Haskell permite definir nuevas funciones con símbolos, e.g., `(**)` (no hacerlo!)
- Una función binaria `f` puede ser usada de forma infija escribiendo ‘`f`’

### Ejemplos:

```
(>=) :: Ord a => a -> a -> Bool
(>=) 5 3 —evalua a True
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
(==) 3 4 —evalua a False
(^) :: (Num a, Int b) => a -> b -> a
(^) 2 5 —evalua 32.0
mod :: (Integral a) => a -> a -> a
5 'mod' 3 —evalua 2
div :: (Integral a) => a -> a -> a
5 'div' 3 —evalua 1
```

## Recurción

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en “expresiones sencillas”.
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número  $n \in \mathbb{N}_0$ ?

## Recursión

- ▶ Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en “expresiones sencillas”.
- ▶ ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número  $n \in \mathbb{N}_0$ ?

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

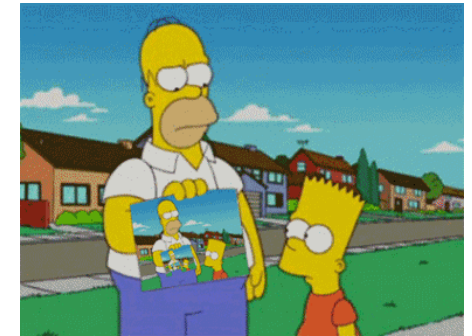
## Recursión

- ▶ Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en “expresiones sencillas”.
- ▶ ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número  $n \in \mathbb{N}_0$ ?

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de factorial involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Int -> Int
factorial n
  | n == 0 = 1
  | n > 0 = n * factorial (n-1)
```



14

14

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

15

15

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

factorial 3

15

15

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

$\text{factorial } 3 \rightsquigarrow 3 * \text{factorial } 2$

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

$\text{factorial } 3 \rightsquigarrow 3 * \text{factorial } 2 \rightsquigarrow 3 * 2 * \text{factorial } 1$

15

15

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

$\text{factorial } 3 \rightsquigarrow 3 * \text{factorial } 2 \rightsquigarrow 3 * 2 * \text{factorial } 1 \rightsquigarrow$   
 $\rightsquigarrow 6 * \text{factorial } 1$

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

$\text{factorial } 3 \rightsquigarrow 3 * \text{factorial } 2 \rightsquigarrow 3 * 2 * \text{factorial } 1 \rightsquigarrow$   
 $\rightsquigarrow 6 * \text{factorial } 1 \rightsquigarrow 6 * 1 * \text{factorial } 0$

15

15

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

```
factorial 3 ~> 3 * factorial 2 ~> 3 * 2 * factorial 1 ~>
~> 6 * factorial 1 ~> 6 * 1 * factorial 0 ~> 6 * factorial 0 ~>
~> 6 * 1
```

15

## Asegurarse de llegar a un caso base

Veamos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | n==0 = True
        | otherwise = esPar (n-2)
```

¿Qué problema tiene esta función?

16

## Recursión y reducción

¿Podemos definirla usando otherwise?

```
factorial :: Int -> Int
factorial n | n == 0 = 1
            | otherwise = n * factorial (n-1)
```

¿Podemos definirla usando *pattern matching*?

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

¿Cómo reduce la expresión factorial 3?

```
factorial 3 ~> 3 * factorial 2 ~> 3 * 2 * factorial 1 ~>
~> 6 * factorial 1 ~> 6 * 1 * factorial 0 ~> 6 * factorial 0 ~>
~> 6 * 1 ~> 6
```

15

## Asegurarse de llegar a un caso base

Veamos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | n==0 = True
        | otherwise = esPar (n-2)
```

¿Qué problema tiene esta función?

¿Cómo se arregla?

16



## Asegurarse de llegar a un caso base

Veamos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | n==0 = True
        | otherwise = esPar (n-2)
```

¿Qué problema tiene esta función?

¿Cómo se arregla?

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | n==0 = True
        | n==1 = False
        | otherwise = esPar (n-2)
```

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | n==0 = True
        | otherwise = not (esPar (n-1))
```

16

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- ▶ Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo factorial,
  - ▶ en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero? En este caso, suponemos ya calculado factorial (n-1) y lo combinamos multiplicándolo por n para lograr obtener factorial n.
  - ▶ además, identificamos el o los **casos base**. En el ejemplo de factorial, definimos como casos base la función sobre 0:  
factorial n | n == 0 = 1

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- ▶ Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo factorial,
  - ▶ en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero? En este caso, suponemos ya calculado factorial (n-1) y lo combinamos multiplicándolo por n para lograr obtener factorial n.

17

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- ▶ Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo factorial,
  - ▶ en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero? En este caso, suponemos ya calculado factorial (n-1) y lo combinamos multiplicándolo por n para lograr obtener factorial n.
  - ▶ además, identificamos el o los **casos base**. En el ejemplo de factorial, definimos como casos base la función sobre 0:  
factorial n | n == 0 = 1
- ▶ **Propiedades de una definición recursiva:**
  - ▶ las **llamadas recursivas** tienen que “acercarse” a un caso base.
  - ▶ tiene que tener uno o más **casos base** que dependerán del tipo de **llamado recursivo**. Un caso base, es aquella expresión que no tiene paso recursivo.

17

17

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- Casos bases: identificar el o los casos bases.
- Casos recursivos: **suponiendo que la llamada recursiva es correcta**, ¿qué tengo que hacer para completar la solución?

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- Casos bases: identificar el o los casos bases.
- Casos recursivos: **suponiendo que la llamada recursiva es correcta**, ¿qué tengo que hacer para completar la solución?

Otro Ejemplo:

```
sumaLosPrimerosNImpares :: Integer -> Integer
sumaLosPrimerosNImpares n
| n == 1 = 1
| n > 1 = ... sumaLosPrimerosNImpares (n-1) ...
```

- Verificar que (n==1) es el caso base, está bien definido y no hay otros.
- Si podemos dar una solución correcta en base a una llamada recursiva correcta entonces, por inducción, ¡todos van a ser correctos!

18

18

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- Casos bases: identificar el o los casos bases.
- Casos recursivos: **suponiendo que la llamada recursiva es correcta**, ¿qué tengo que hacer para completar la solución?

Otro Ejemplo:

```
sumaLosPrimerosNImpares :: Integer -> Integer
sumaLosPrimerosNImpares n
| n == 1 = 1
| n > 1 = ... sumaLosPrimerosNImpares (n-1) ...
```

- Verificar que (n==1) es el caso base, está bien definido y no hay otros.
- Si podemos dar una solución correcta en base a una llamada recursiva correcta entonces, por inducción, ¡todos van a ser correctos!

Con el paso anterior resuelto: ¿Qué falta para que el nuevo paso esté resuelto?

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- Casos bases: identificar el o los casos bases.
- Casos recursivos: **suponiendo que la llamada recursiva es correcta**, ¿qué tengo que hacer para completar la solución?

Otro Ejemplo:

```
sumaLosPrimerosNImpares :: Integer -> Integer
sumaLosPrimerosNImpares n
| n == 1 = 1
| n > 1 = ... sumaLosPrimerosNImpares (n-1) ...
```

- Verificar que (n==1) es el caso base, está bien definido y no hay otros.
- Si podemos dar una solución correcta en base a una llamada recursiva correcta entonces, por inducción, ¡todos van a ser correctos!

Con el paso anterior resuelto: ¿Qué falta para que el nuevo paso esté resuelto?

```
| n > 1 = n_esimoImpar + sumaLosPrimerosNImpares (n-1)
```

Cambiamos el problema: ahora sólo falta definir `n_esimoImpar`.

18

18

## ¿Cómo pensar recursivamente?

- Casos bases: identificar el o los casos bases.
- Casos recursivos: **suponiendo que la llamada recursiva es correcta**, ¿qué tengo que hacer para completar la solución?

Otro Ejemplo:

```
sumaLosPrimerosNImpares :: Integer -> Integer
sumaLosPrimerosNImpares n
| n == 1 = 1
| n > 1 = ... sumaLosPrimerosNImpares (n-1) ...
```

- Verificar que ( $n==1$ ) es el caso base, está bien definido y no hay otros.
- Si podemos dar una solución correcta en base a una llamada recursiva correcta entonces, por inducción, ¡todos van a ser correctos!

Con el paso anterior resuelto: ¿Qué falta para que el nuevo paso esté resuelto?

```
| n > 1 = n_esimoImpar + sumaLosPrimerosNImpares (n-1)
```

Cambiamos el problema: ahora sólo falta definir `n_esimoImpar`.

```
| n > 1 = n_esimoImpar + sumaLosPrimerosNImpares (n-1)
where n_esimoImpar = 2*n - 1
```

18

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Caso base en Haskell: `f 1 = 1`

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$

19

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Caso base en Haskell: `f 1 = 1`
- Supongo que vale  $P(n)$ , quiero probar  $P(n+1)$
- Supongo que ya sé calcular  $f(n-1)$ , quiero calcular  $f(n)$

19

19

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Supongo que vale  $P(n)$ , quiero probar  $P(n + 1)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^n (2i - 1) \right) + 2n + 1$$

- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Caso base en Haskell:  $f \ 1 = 1$
- Supongo que ya sé calcular  $f(n - 1)$ , quiero calcular  $f(n)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \right) + 2n - 1$$

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Supongo que vale  $P(n)$ , quiero probar  $P(n + 1)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^n (2i - 1) \right) + 2n + 1$$

- Uso la Hipótesis Inductiva  $P(n)$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Caso base en Haskell:  $f \ 1 = 1$
- Supongo que ya sé calcular  $f(n - 1)$ , quiero calcular  $f(n)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \right) + 2n - 1$$

- Uso la función que sé calcular:  
 $f(n) = f(n - 1) + 2n - 1$

En Haskell:  $f \ n = f \ (n-1) + 2*n - 1$

19

19

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Supongo que vale  $P(n)$ , quiero probar  $P(n + 1)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^n (2i - 1) \right) + 2n + 1$$

- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Caso base en Haskell:  $f \ 1 = 1$
- Supongo que ya sé calcular  $f(n - 1)$ , quiero calcular  $f(n)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \right) + 2n - 1$$

- Uso la Hipótesis Inductiva  $P(n)$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

- Uso la función que sé calcular:  
 $f(n) = f(n - 1) + 2n - 1$

En Haskell:  $f \ n = f \ (n-1) + 2*n - 1$

- ¿Pero cómo?! ¿Estoy usando lo que quiero probar?!

- ¿Pero cómo?! ¿Estoy usando la función que quiero definir?!

## Inducción vs. Recursión

- Probar por inducción  
 $P(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- Vale para  $n = 1 : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1^2$
- Supongo que vale  $P(n)$ , quiero probar  $P(n + 1)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^n (2i - 1) \right) + 2n + 1$$

- Uso la Hipótesis Inductiva  $P(n)$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

- ¿Pero cómo?! ¿Estoy usando lo que quiero probar?!

- Ah, claro... vale  $P(1)$  y  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ , entonces ¡vale para todo  $n$ !

- Implementar una función recursiva para  
 $f(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$
- Caso base en Haskell:  $f \ 1 = 1$
- Supongo que ya sé calcular  $f(n - 1)$ , quiero calcular  $f(n)$
- ¿Qué relación hay entre  $\sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1)$  y  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ ?

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \right) + 2n - 1$$

- Uso la función que sé calcular:  
 $f(n) = f(n - 1) + 2n - 1$

En Haskell:  $f \ n = f \ (n-1) + 2*n - 1$

- ¿Pero cómo?! ¿Estoy usando la función que quiero definir?!

- Ah, claro... está definido  $f(1)$  y con  $f(n - 1)$  sé obtener  $f(n)$ , entonces ¡puedo calcular  $f$  para todo  $n$ !

19

19

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores( $n : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere: { $n > 0$ }  
  asegura: { $res = \sum_{i=1}^n \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}$ }  
}
```

20

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores( $n : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere: { $n > 0$ }  
  asegura: { $res = \sum_{i=1}^n \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}$ }  
}
```

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores( $n : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere: { $n > 0$ }  
  asegura: { $res = \sum_{i=1}^n \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}$ }  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

20

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores(n : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {n > 0}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^n$  if (n mod i = 0) then i else 0 fi}  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

No hay ninguna relación sencilla entre `sumaDivisores n` y `sumaDivisores (n-k)` (para ningún  $k$  particular).

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores(n : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {n > 0}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^n$  if (n mod i = 0) then i else 0 fi}  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

No hay ninguna relación sencilla entre `sumaDivisores n` y `sumaDivisores (n-k)` (para ningún  $k$  particular).

¿Qué sucede si definimos primero una función **más general** que devuelve la suma de los divisores de un número hasta cierto punto?

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer
```

20

## Generalización de funciones

### ¿Una fácil?.. o no tanto

- Implementar una función `sumaDivisores :: Integer -> Integer` que calcule la suma de los divisores de un número entero positivo.

```
problema sumaDivisores(n : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {n > 0}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^n$  if (n mod i = 0) then i else 0 fi}  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

No hay ninguna relación sencilla entre `sumaDivisores n` y `sumaDivisores (n-k)` (para ningún  $k$  particular).

¿Qué sucede si definimos primero una función **más general** que devuelve la suma de los divisores de un número hasta cierto punto?

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer
```

Ahora **sí** existe una relación sencilla entre `sumaDivisoresHasta n k` y `sumaDivisoresHasta n (k-1)`. ¿Por qué?

20

## Generalización de funciones

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumaDivisoresHasta(n : ℤ, k : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {(n > 0) ∧ (k > 0)}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^k$  if (n mod i = 0) then i else 0 fi}  
}
```

20

21

## Generalización de funciones

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumaDivisoresHasta( $n : \mathbb{Z}, k : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (k > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^k \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer  
sumaDivisoresHasta n 1 = 1  
sumaDivisoresHasta n i | (mod n i == 0) = i +  
    sumaDivisoresHasta n (i-1)  
    | otherwise = sumaDivisoresHasta n (i-1)
```

21

## Generalización de funciones

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumaDivisoresHasta( $n : \mathbb{Z}, k : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (k > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^k \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer  
sumaDivisoresHasta n 1 = 1  
sumaDivisoresHasta n i | (mod n i == 0) = i +  
    sumaDivisoresHasta n (i-1)  
    | otherwise = sumaDivisoresHasta n (i-1)
```

¿Y por último, cómo definimos SumaDivisores utilizando lo anterior?

```
sumaDivisores :: Integer -> Integer  
sumaDivisores n = sumaDivisoresHasta n n
```

21

## Generalización de funciones

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumaDivisoresHasta( $n : \mathbb{Z}, k : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (k > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^k \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer  
sumaDivisoresHasta n 1 = 1  
sumaDivisoresHasta n i | (mod n i == 0) = i +  
    sumaDivisoresHasta n (i-1)  
    | otherwise = sumaDivisoresHasta n (i-1)
```

¿Y por último, cómo definimos SumaDivisores utilizando lo anterior?

21

## Generalización de funciones

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumaDivisoresHasta( $n : \mathbb{Z}, k : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (k > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^k \text{if } (n \bmod i = 0) \text{ then } i \text{ else } 0 \text{ fi}\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer  
sumaDivisoresHasta n 1 = 1  
sumaDivisoresHasta n i | (mod n i == 0) = i +  
    sumaDivisoresHasta n (i-1)  
    | otherwise = sumaDivisoresHasta n (i-1)
```

¿Y por último, cómo definimos SumaDivisores utilizando lo anterior?

```
sumaDivisores :: Integer -> Integer  
sumaDivisores n = sumaDivisoresHasta n n
```

Entonces, SumaDivisores, ¿es una función recursiva?

21

## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

Veamos primero la especificación:

```
problema sumatoriaDoble(n :  $\mathbb{Z}$ , m :  $\mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j\}$   
}
```

22

22

## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

Veamos primero la especificación:

```
problema sumatoriaDoble(n :  $\mathbb{Z}$ , m :  $\mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j\}$   
}
```

## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

Veamos primero la especificación:

```
problema sumatoriaDoble(n :  $\mathbb{Z}$ , m :  $\mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j\}$   
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?



## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

Veamos primero la especificación:

```
problema sumatoriaDoble(n : ℤ, m : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {(n > 0) ∧ (m > 0)}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$ }  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

¿Qué sucede si definimos primero una función **más específica** que devuelve la sumatoria interna?

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer
```

22

## Recursión en más de un parámetro

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumatoriaInterna(n : ℤ, m : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {(n > 0) ∧ (m > 0)}  
  asegura: {res =  $\sum_{j=1}^m n^j$ }  
}
```

## Recursión en más de un parámetro

Implementar la siguiente función:

$$f(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$$

Veamos primero la especificación:

```
problema sumatoriaDoble(n : ℤ, m : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {(n > 0) ∧ (m > 0)}  
  asegura: {res =  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^j$ }  
}
```

**Pregunta clave:** ¿alcanza con hacer recursión sobre  $n$ ?

¿Qué sucede si definimos primero una función **más específica** que devuelve la sumatoria interna?

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer
```

Ahora parece más sencillo definir `sumatoriaDoble n m` utilizando `sumatoriaInterna n m`. ¿Cómo lo hacemos?

22

## Recursión en más de un parámetro

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumatoriaInterna(n : ℤ, m : ℤ) : ℤ {  
  requiere: {(n > 0) ∧ (m > 0)}  
  asegura: {res =  $\sum_{j=1}^m n^j$ }  
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaInterna _ 0 = 0  
sumatoriaInterna n j = n^j + sumatoriaInterna n (j-1)
```

23

23

## Recursión en más de un parámetro

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumatoriaInterna( $n : \mathbb{Z}, m : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{j=1}^m n^j\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaInterna _ 0 = 0  
sumatoriaInterna n j = n^j + sumatoriaInterna n (j-1)
```

¿Y por último, cómo definimos sumatoriaDoble utilizando lo anterior?

## Recursión en más de un parámetro

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumatoriaInterna( $n : \mathbb{Z}, m : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{j=1}^m n^j\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaInterna _ 0 = 0  
sumatoriaInterna n j = n^j + sumatoriaInterna n (j-1)
```

¿Y por último, cómo definimos sumatoriaDoble utilizando lo anterior?

```
sumatoriaDoble :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaDoble 0 _ = 0  
sumatoriaDoble n m = sumatoriaDoble (n-1) m + sumatoriaInterna n m
```

23

23

## Recursión en más de un parámetro

Veamos cómo sería la especificación:

```
problema sumatoriaInterna( $n : \mathbb{Z}, m : \mathbb{Z}$ ) :  $\mathbb{Z}$  {  
  requiere:  $\{(n > 0) \wedge (m > 0)\}$   
  asegura:  $\{res = \sum_{j=1}^m n^j\}$   
}
```

Ahora podemos definir esta función en Haskell recursivamente

```
sumatoriaInterna :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaInterna _ 0 = 0  
sumatoriaInterna n j = n^j + sumatoriaInterna n (j-1)
```

¿Y por último, cómo definimos sumatoriaDoble utilizando lo anterior?

```
sumatoriaDoble :: Integer -> Integer -> Integer  
sumatoriaDoble 0 _ = 0  
sumatoriaDoble n m = sumatoriaDoble (n-1) m + sumatoriaInterna n m
```

Entonces, sumatoriaDoble, ¿cuántas recursiones involucra?

## Práctica 3: Ejercicio 6

Especificar e implementar la función sumaDigitos :: Integer -> Integer que calcula la suma de dígitos de un número natural. Para esta función pueden utilizar div y mod.

23

24

## Práctica 3: Ejercicio 7

Implementar la función `todosDigitosIguales :: Integer -> Bool` que determina si todos los dígitos de un número natural son iguales, es decir:

```
problema todosDigitosIguales( $n : \mathbb{Z}$ ) : bool{  
  requiere:  $\{(n > 0)\}$   
  asegura:  $\{res \leftrightarrow \text{todos los dígitos de } n \text{ son iguales}\}$   
}
```