Maestría en Estadística Aplicada

Curso: Modelos Lineales (cohorte 2020-2021)

Guía de actividades Nº 1

1. Sea $\mathbf{X} \sim N_3(\mathbf{0}, \Sigma)$ con $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   a) Plantear $f(\mathbf{X})$

   b) Encontrar la distribución marginal de X_1 y X_3

   c) Encontrar la distribución conjunta de (X_1, X_2) y (X_1, X_3)

   d) Encontrar la distribución condicional de $(X_2 | X_1 = x_1,\ X_3 = x_3)$ y $(X_1, X_3 | X_2 = x_2)$

   e) Encontrar la matriz de correlación

   f) Encontrar $\rho_{13\,|\,2}$ y $\rho_{12\,|3}$

   g) Encontrar la distribución de $Z = 3x_1 - 2x_2 - 11$.

   h) Encontrar la covarianza entre Z_1 y Z_2 donde: $Z_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3$ y $Z_2 = 3x_3 + 2$

2. En el archivo calefacción.IDB2 se muestran datos correspondientes a una muestra de 20 inmuebles ubicados en cierta zona residencial. Se consideran tres variables que están relacionadas con el costo de calefacción de la vivienda: la temperatura exterior media diaria (X_1), el número de cm. de aislamiento térmico de las paredes (X_2) y la antigüedad del calefactor (X_3). (Utilice algún software)

   a) Estime el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas del vector $\mathbf{X}' = (X_1\ X_2\ X_3)$

   b) Estime la matriz de correlación.

   c) Estime la matriz de correlación parcial de $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1, X_2)$ dado $\mathbf{X}^{(2)} = X_3$

3. Sea $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ con $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   a) Encontrar la distribución conjunta de (X_1, X_2)

   b) Encontrar la distribución condicional de $X_1,\ X_2 | X_3 = x_3$, la esperanza y varianza.

   c) Encontrar ρ_{12} y $\rho_{12\,|3}$

4. Sea $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, obtener $E(\mathbf{X})$ y $Var(\mathbf{X})$ utilizando la Función Generadora de Momentos.

5. Sea $\mathbf{X} \sim N_3(\mathbf{0},\mathbf{I})$ encontrar la transformación $\mathbf{CX}$ tal que la matriz de covarianzas de la variable resultante sea: $\Sigma = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. (Ayuda. Utilizar R o algún software que soporte algebra matricial. Pensar en descomposición espectral o descomposición de Cholesky)

6. Dada $\mathbf{X} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$ encontrar la transformación $\mathbf{Y} = \mathbf{TX} + \mathbf{c}$ tal que $\mathbf{Y} \sim N_2(\mathbf{0},\mathbf{I})$

7. En el ejercicio anterior la función de densidad multivariada está dada por

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} |\Sigma|^{-1/2}\ e^{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]}$$

donde $Q = (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$ es una forma cuadrática que mide el cuadrado de la distancia entre cada punto del plano y el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$. Encontrar la distribución de dicha forma cuadrática.

8. Dado $\mathbf{Y} \sim N_3(\mu,\mathbf{I})$ establecer si la forma lineal $\mathbf{BY}$ es independiente de la forma cuadrática $\mathbf{Y'AY}$ donde: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$.

9. Dado $\mathbf{Y} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$, con: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

   a) Probar si la forma lineal $\mathbf{BY}$ es independiente de la forma cuadrática $\mathbf{Y'AY}$
   b) Determinar la distribución de la forma cuadrática $\mathbf{Y'AY}$
   c) Calcular la esperanza y la varianza de dicha forma cuadrática utilizando la función generadora de momentos.

10. Con $\mathbf{Y}$ y Σ como en el ejercicio anterior, establezca si las formas cuadráticas $\mathbf{Y'BY}$ e $\mathbf{Y'AY}$ son independientes, donde: $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

11. El estadístico T para la prueba de hipótesis de diferencia de medias está dado por:

$$T=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

a) Demuestre que este estadístico tiene distribución t-Student con $\left(n_1+n_2-2\right)$ grados de libertad cuando $\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$ es obtenida a partir de muestras aleatorias simples e independientes de tamaños n_1 y n_2, de poblaciones normales con idéntica varianza (σ^2) y esperanzas μ_1 y μ_2.

b) Demuestre que $S_p^2=\dfrac{S_1^2\left(n_1-1\right)+S_2^2\left(n_2-1\right)}{n_1+n_2-2}$ es un estimador insesgado de σ^2.

12. El estadístico F para la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas está dado por:

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

Demuestre que este estadístico tiene distribución F con $\left(n_1-1, n_2-1\right)$ grados de libertad cuando las muestras aleatorias son independientes de tamaños n_1 y n_2, provenientes de poblaciones normales.