

# Maestría en Estadística Aplicada

## Curso: Modelos Lineales (cohorte 2020-2021)

### Guía de actividades N° 2

1) Sea  $\mathbf{y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I})$  con  $\text{rango}(X) = p$ . Demuestre las siguientes propiedades:

a) La estimación por mínimos cuadrados de  $\boldsymbol{\beta}$  (aquel que minimiza  $\mathbf{e}'\mathbf{e}$ ) coincide con la estimación de máxima verosimilitud.

b)  $\frac{\widehat{\sigma}^2(n-p)}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$

2) En un modelo de regresión lineal simple sin ordenada al origen:

a) Encontrar la expresión para el estimador de  $\beta$  y  $\sigma^2$ .

b) Encontrar la expresión para  $\text{Var}(\hat{\beta})$ .

c) Encontrar la expresión de la matriz de proyección P

d) Encontrar la varianza de los valores predichos/ajustados/esperados.

e) Obtener el test F para probar  $H_0: \beta_1 = 0$

3) Considere el siguiente modelo de regresión lineal  $y_i = \delta_0 + \delta_1(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i$

a) Encontrar la expresión para el estimador de  $\delta$  y su varianza.

b) Encontrar la expresión de la matriz de proyección P.

4) En un modelo de regresión simple con ordenada al origen, demostrar que el

estadístico  $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)}}{EE(\hat{\beta}_1)}$  tiene distribución t-Student con n-2 grados de

libertad, donde  $\hat{\beta}_1$  es el estimador de  $\beta_1$ ,  $\beta_1^{(0)}$  el valor de  $\beta_1$  bajo la hipótesis nula y  $EE(\hat{\beta}_1)$  el error estándar estimado de  $\hat{\beta}_1$

5) En un estudio sobre la incidencia que puede tener sobre el rendimiento en el lenguaje, la comprensión lectora y la capacidad intelectual, se obtuvieron datos sobre 10 estudiantes tomados al azar de un curso.

Rendimiento	3	2	4	9	6	7	2	6	5	8
Comprensión lectora	1	1	3	7	8	7	4	6	6	9
Capacidad intelectual	3	4	7	9	7	6	5	8	5	7

## Maestría en Estadística Aplicada

### Curso: Modelos Lineales (cohorte 2020-2021)

#### Guía de actividades N° 2

- a) Escriba el modelo para el rendimiento en el lenguaje en función de la comprensión lectora y la capacidad intelectual suponiendo un efecto aditivo para ambas predictoras, que sin el efecto de las mismas el rendimiento no es nulo y que los errores del modelo se comportan normales con esperanza cero y varianza común desconocida y covarianzas cero.
  - b) Expresa matricialmente el modelo.
  - c) Estime los parámetros del modelo.
  - d) Estime la varianza del estimador de  $\beta$ .
  - e) Calcule el intervalo de confianza al 95% para la esperanza del rendimiento del lenguaje dado que la puntuación de la comprensión lectora es 5 y de la capacidad intelectual es 7.
  - f) ¿Para qué combinación de puntuaciones de comprensión lectora y capacidad intelectual se obtiene el intervalo de confianza más estrecho para la esperanza condicional de los rendimientos?
  - g) Encuentre la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{h}$  para la prueba de hipótesis  $\beta_1=0$  y calcule la suma de cuadrados asociada y sus grados de libertad.
  - h) Encuentre la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{h}$  para la prueba de hipótesis  $\beta_1= \beta_2=0$  y calcule la suma de cuadrados asociada y sus grados de libertad.
  - i) Encuentre la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{h}$  para la prueba de hipótesis  $\beta_1= \beta_2$  y calcule la suma de cuadrados asociada y sus grados de libertad.
  - j) Realice las pruebas para estas hipótesis.
  - k) Construya un intervalo de confianza del 95 % para  $\beta_1$ .
  - l) Construya un intervalo de confianza del 95 % para  $\beta_1- \beta_2$ .
- 6) Los siguientes datos fueron obtenidos en un ensayo de rendimiento de trigo bajo diferentes combinaciones de aportes de nitrógeno y potasio. (qq/ha: quintales por hectárea)

Rendimiento (qq/ha)	25	29,5	34,8	28,4	33	38,9
Nitrógeno (qq/ha)	0	1	2	0	1	2

## Maestría en Estadística Aplicada

### Curso: Modelos Lineales (cohorte 2020-2021)

#### Guía de actividades N° 2

Potasio (qq/ha)	0	0	0	1	1	1
-----------------	---	---	---	---	---	---

- a) Escriba el modelo para el rendimiento en función del aporte de nitrógeno y potasio suponiendo un efecto aditivo para los aportes de fertilizantes, que sin aporte de fertilizantes el rendimiento no es nulo y que los errores del modelo se comportan normales con esperanza cero y varianza común desconocida y covarianzas cero.
  - b) Estime los parámetros del modelo.
  - c) Calcule la varianza del estimador de  $\beta$ .
  - d) Se desea probar que el efecto del nitrógeno en el rendimiento duplica el efecto del potasio. Encuentre la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{h}$  para la prueba de hipótesis y calcule la suma de cuadrados asociada y sus grados de libertad.
  - e) Se desea probar  $H_0: \beta_1 = \beta_2 + 1,5$  versus  $H_0: \beta_1 \neq \beta_2 + 1,5$ . Encuentre la matriz  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{h}$  para la prueba de hipótesis y calcule la suma de cuadrados asociada y sus grados de libertad.
  - f) Realice las pruebas para estas hipótesis.
- 7) Mostrar que el estadístico para la prueba de hipótesis  $H\beta = h$  se puede escribir como

$$W = \frac{1}{q} (\mathbf{H}\beta - \mathbf{h})' [\text{cov}(\mathbf{H}\beta - \mathbf{h})]^{-1} (\mathbf{H}\beta - \mathbf{h})$$