Guía de actividades Nº 3

Actividad 1

Con la actual crisis energética, investigadores de las principales compañías petroleras están tratando de hallar fuentes alternativas de petróleo. Se sabe que algunos tipos de pizarra bituminosa contienen pequeñas cantidades de petróleo que es factible extraer. Se han creado cuatro métodos para extraer el petróleo de esta pizarra y el gobierno ha decidido realizar experimentos para determinar si los métodos difieren considerablemente en la cantidad promedio de petróleo que pueda extraerse con cada uno de ellos. Doce trozos de pizarra (del mismo tamaño) se sometieron aleatoriamente a los cuatro métodos con los resultados que se muestran a continuación. Se considera que la cantidad de petróleo extraída por pizarra es una variable que se comporta como una normal con varianza homogénea para los distintos tratamientos.

a) Escriba el modelo lineal que describe este experimento.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \qquad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3$$

y_{ij} *valor observado de la variable respuesta*

μ *media general*

τ_i *efecto i − ésimo tratamiento* $(i = 1,2,3,4)$

ϵ_{ij} *término de error aleatorio* $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

b) Escriba la matriz de incidencia de acuerdo al modelo planteado.

$$y = Xb + \epsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{14} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{24} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{34} \end{bmatrix}$$

c) Plantee el sistema de ecuaciones normales y muestre los procedimientos alternativos para la resolución de dicho sistema.

$$X'X\hat{b} = X'Y \quad (X'X)^{-1}\ no\ existe \quad rango(X) < p$$

Alternativa 1: Utilizar una inversa generalizada de $X'X$

$$G\ es\ una\ inversa\ generalizada\ de\ X'X \Leftrightarrow X'XGX'X = X'X$$

$$solución\ propuesta\ \ b^0 = GX'Y$$

$$b^0 = \begin{bmatrix} 2,467 \\ -0,467 \\ 0,200 \\ 1,533 \\ 1,200 \end{bmatrix}\ es\ una\ solución\ "no\ una\ estimación"$$

Alternativa 2: Reparametrizar el modelo (encontrar un modelo equivalente pero de rango completo)

$$y = Xb + \epsilon = U\theta + \epsilon$$

$$siendo\ \theta = L'b\ \ (sus\ filas\ son\ funciones\ estimables)\ y\ U = X(L')^{-}$$

$$X_{nxp} \quad b_{px1} \quad \theta_{rx1} \quad U_{nxr} \quad donde\ r = rango(X) = rango(U)$$

$$(L')^{-}\ es\ una\ inversa\ generalizada\ de\ L' \Leftrightarrow L'(L')^{-}L' = L'$$

<u>Opción 1</u>: Resultados equivalentes a restricción $\hat{\mu} = 0$. Las funciones estimables son las medias de tratamiento.

$$L'_{rxp} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ y \quad \theta = L'b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 \\ \mu + \tau_2 \\ \mu + \tau_3 \\ \mu + \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

$U = X(L')^{-}$ *A la matriz X le quitamos la columna correspondiente a* μ

$$U = X(L')^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = (U'U)^{-1}U'Y = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}000 \\ 2{,}667 \\ 4{,}000 \\ 3{,}667 \end{bmatrix}$$

<u>Opción 2</u>: Resultados equivalentes a restricción $\hat{\tau}_1 = 0$.

$$U = X(L')^{-} \qquad L' = (X^{-}U)^{-}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = L'b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 \\ -\tau_1 + \tau_2 \\ -\tau_1 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 - \mu_1 \\ \mu_3 - \mu_1 \\ \mu_4 - \mu_1 \end{bmatrix}$$

Alternativa 3: Imponiendo restricciones a las soluciones del sistema de ecuaciones normales. Se forma un nuevo sistema "ampliado" que tiene solución única.

Opción 1: Restricción $\hat{\mu} = 0$. $\quad C'b^0 = \gamma \quad C' = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Solución sistema ampliado $\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2{,}667 \\ 4 \\ 3{,}667 \\ 0 \end{bmatrix}$

Opción 2: Restricción $\hat{\tau}_1 = 0$. $\quad C'b^0 = \gamma \quad C' = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Solución sistema ampliado $\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}667 \\ 2 \\ 1{,}667 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Evalúe si las siguientes son funciones estimables (utilizando una inversa generalizada para obtener las soluciones del sistema de ecuaciones normales – el paquete MASS tiene una función *ginv* que devuelve la inversa generalizada de una matriz) y obtenga sus respectivas estimaciones: $\mu + \tau_1, \ \tau_1 - \tau_2, \ \tau_1 \ y \ \tau_1 - \tau_3$

$$q'b \quad es\ estimable\ si\ existe\ t'\ tal\ que\ E(t'Y) = q'b$$

Condición de estimabilidad: $\quad q'GX'X = q'$

$\mu + \tau_1 = q'b \quad donde\ q' = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$\tau_1 - \tau_2 = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$

$\tau_1 = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad No\ es\ estimable$

$\tau_1 - \tau_3 = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$

$$q'b^0\ estimación$$

$$b^0 = \begin{bmatrix} 2,467 \\ -0,467 \\ 0,200 \\ 1,533 \\ 1,200 \end{bmatrix}$$

<u>Alternativa 1:</u>

$\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = q'b^0 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]b^0 = 2$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = -0,667$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = -2$

<u>Alternativa 2:</u>

<u>Opción 1</u>

$$\hat{\theta} = (U'U)^{-1}U'Y = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,000 \\ 2,667 \\ 4,000 \\ 3,667 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = \hat{\mu}_1 = 2$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = -0,667$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 = -2$

Opción 2

$$\hat{\theta} = (U'U)^{-1}U'Y = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}000 \\ 0{,}667 \\ 2{,}000 \\ 1{,}667 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = \hat{\mu}_1 = 2$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = -0{,}667$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 = -2$

Alternativa 3:

Opción 1

$$\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2{,}667 \\ 4 \\ 3{,}667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = q'b^0 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]b^0 = 2$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = -0{,}667$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = -2$

Opción 2

$$\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}667 \\ 2 \\ 1{,}667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = q'b^0 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]b^0 = 2$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = -0{,}667$

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = -2$

e) Utilizando la forma general de las pruebas de hipótesis (Kβ=m) obtenga la matriz K y calcule las sumas de cuadrados asociadas para testear que no existen efectos diferenciales entre tratamientos. Corrobore los cálculos anteriores procesando los datos con algún software estadístico.

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \qquad\qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \qquad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{\frac{Q}{s}}{\frac{SCr}{n - r(X)}} \sim F_{s,n-r(X);\lambda}$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 7{,}5833$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 15{,}3333$$

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	7,5833	3	2,5278	1,3188	0,3341
método	7,5833	3	2,5278	1,3188	0,3341
Error	15,3333	8	1,9167		
Total	22,9167	11			

f) Utilizando la forma general de las pruebas de hipótesis (Kb=m) obtenga la matriz K y calcule las sumas de cuadrados asociadas para testear que no existen efectos diferenciales entre las medias de los tratamientos 1 y 2. Corrobore los cálculos anteriores procesando los datos con algún software estadístico.

$$K = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \qquad m = [0]$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}6667$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 15{,}3333$$

Contrastes

método	Contraste	E.E.	SC	gl	CM	F	p-valor
Contraste1	-0,6667	1,1304	0,6667	1	0,6667	0,3478	0,5716
Total			0,6667	1	0,6667	0,3478	0,5716

Coeficientes de los contrastes

método	Ct.1
a	1,0000
b	-1,0000
c	0,0000
d	0,0000

$$w = \frac{\left(H\hat{\beta} - h\right)'\left[\widehat{Cov}\left(H\hat{\beta} - h\right)\right]^{-1}\left(H\hat{\beta} - h\right)}{q}$$

Actividad 2:

Un fabricante de partes electrónicas emplea dos hornos y dos temperaturas con el propósito de probar la duración de cierto componente. Se seleccionan en forma aleatoria doce componentes del mismo lote y en grupos de tres se asignan a las cuatro combinaciones de hornos y temperaturas. Los tiempos de duración (en horas) de los componentes se encuentran en la tabla siguiente.

	Horno 1			Horno 2		
Temperatura 1	6,29	6,38	6,25	6,32	6,44	6,29
Temperatura 2	5,80	5,92	5,78	5,95	6,05	5,89

a) Escriba el modelo lineal que describe este experimento (suponga un modelo aditivo).

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \epsilon_{ijk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \quad k = 1,2,3$$

y_{ijk} $valor\ observado\ de\ la\ variable\ respuesta$

μ $media\ general$

τ_i $efecto\ i-ésimo\ tratamiento\ del\ factor\ tempertura\ \ (i = 1,2)$

α_j $efecto\ j-ésimo\ tratamiento\ del\ factor\ horno\ \ (j = 1,2)$

ϵ_{ijk} $término\ de\ error\ aleatorio\ \ \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$

b) Escriba la matriz de incidencia de acuerdo al modelo planteado.

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mu & \tau_1 & \tau_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} tiene\ p = 5\ columnas\ pero\ r = rango(X) =$$

c) Plantee el sistema de ecuaciones normales y muestre los procedimientos alternativos para la resolución de dicho sistema.

d) Evalúe si las siguientes son funciones estimables y obtenga sus respectivas estimaciones: $\mu_{11} - \mu_{12} \quad y \quad \mu_{11} - \mu_{22}$

Alternativa 1: Utilizar una inversa generalizada de $X'X$

$$solución\ propuesta\ \ b^0 = GX'Y$$

$$b^0 = \begin{bmatrix} 3{,}0567 \\ 1{,}7433 \\ 1{,}3133 \\ 1{,}4850 \\ 1{,}5717 \end{bmatrix} \ \ es\ una\ solución\ \text{"}no\ una\ estimación\text{"}$$

$$q'b \ \ \ es\ estimable\ si\ existe\ t'\ tal\ que\ E(t'Y) = q'b$$

Condición de estimabilidad: $q'GX'X = q'$

$$\mu_{11} - \mu_{12} = \mu + \tau_1 + \alpha_1 - (\mu + \tau_1 + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\mu_{11} - \mu_{22} = \mu + \tau_1 + \alpha_1 - (\mu + \tau_2 + \alpha_2) = \tau_1 - \tau_2 + \alpha_1 - \alpha_2$$

$\mu_{11} - \mu_{12} = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$ ¿estimable?

$\mu_{11} - \mu_{22} = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$ ¿estimable?

$$q'b^0\ estimación$$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = q'b^0 = -0{,}0867$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = q'b^0 = 0{,}3433$

Alternativa 2: Reparametrizar el modelo (encontrar un modelo equivalente pero de rango completo)

$$y = Xb + \epsilon = U\theta + \epsilon$$

$$siendo\ \theta = L'b\ \ (sus\ filas\ son\ funciones\ estimables)\ y\ U = X(L')^{-}$$

<u>**Opción 1**</u>: Resultados equivalentes a restricción $\hat{\tau}_1 = 0 \quad y \quad \hat{\alpha}_1 = 0$.

$$L' = (X^{-}U)^{-}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad L' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = L'b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 + \alpha_1 \\ -\tau_1 + \tau_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{2.} - \mu_{1.} \\ \mu_{.2} - \mu_{.1} \end{bmatrix}$$

$$-\tau_1 + \tau_2 = \mu_{21} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{12} = \mu_{2.} - \mu_{1.}$$

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = \mu_{12} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{21} = \mu_{.2} - \mu_{.1}$$

		Horno	
		1	2
Temperatura	1	$\mu_{11} = \mu + \tau_1 + \alpha_1$	$\mu_{12} = \mu + \tau_1 + \alpha_2$
	2	$\mu_{21} = \mu + \tau_2 + \alpha_1$	$\mu_{22} = \mu + \tau_2 + \alpha_2$

$$\hat{\theta} = (U'U)^{-1}U'Y = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} \\ \hat{\mu}_{2\,.} - \hat{\mu}_{1\,.} \\ \hat{\mu}_{.2} - \hat{\mu}_{.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}285 \\ -0{,}43 \\ 0{,}0867 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = -0{,}0867$$

$$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = 0{,}43 - 0{,}0867 = 0{,}3433$$

Alternativa 3: Imponiendo restricciones a las soluciones del sistema de ecuaciones normales. Se forma un nuevo sistema "ampliado" que tiene solución única.

Opción 1: Restricción $\hat{\tau}_1 = 0 \quad y \quad \hat{\alpha}_1 = 0$. $\qquad C'b^0 = \gamma \qquad C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución sistema ampliado $\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}285 \\ 0 \\ -0{,}43 \\ 0 \\ 0{,}0867 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = q'b^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]b^0 = -0{,}0867$$

$$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = q'b^0 = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]b^0 = 0{,}3433$$

e) Utilizando la forma general de las pruebas de hipótesis (Kb=m) obtenga la matriz K y calcule las sumas de cuadrados asociadas para testear: a) no hay efecto de los factores temperatura y horno y b) no hay efecto del factor horno. Corrobore los cálculos anteriores procesando los datos con algún software estadístico.

$$H_0:\ \tau_1 = \tau_2 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 \qquad\qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{\frac{Q}{s}}{\frac{SCr}{n-r(X)}} \sim F_{s,n-r(X);\lambda}$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}5772$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 0{,}0516$$

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	0,5772	2	0,2886	50,3076	<0,0001
temperatura	0,5547	1	0,5547	96,6875	<0,0001
horno	0,0225	1	0,0225	3,9277	0,0788
Error	0,0516	9	0,0057		
Total	0,6289	11			

$$H_0: \quad \alpha_1 = \alpha_2 \qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad m = [0]$$

$$F = \frac{\frac{Q}{s}}{\frac{SCr}{n - r(X)}} \sim F_{s,n-r(X);\lambda}$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}0225$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 0{,}0516$$

Contrastes

horno	Contraste	E.E.	SC	gl	CM	F	p-valor
Contraste1	-0,0867	0,0437	0,0225	1	0,0225	3,9277	0,0788
Total			0,0225	1	0,0225	3,9277	0,0788

Coeficientes de los contrastes

horno	Ct.1
1	1,0000
2	-1,0000

Actividad 3:

Considere el enunciado de la actividad anterior pero suponga un modelo bifactorial con interacción.

a) Escriba el modelo lineal que describe este experimento.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \delta_{ij+}\epsilon_{ijk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \quad k = 1,2,3$$

$$\epsilon_{ijk} \ \textit{término de error aleatorio} \ \ \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

b) Escriba la matriz de incidencia de acuerdo al modelo planteado.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \textit{tiene } p = 9 \textit{ columnas pero } r = rango(X) =$$

c) Plantee el sistema de ecuaciones normales y muestre los procedimientos alternativos para la resolución de dicho sistema.

d) Evalúe si las siguientes son funciones estimables y obtenga sus respectivas estimaciones: $\mu_{11} - \mu_{12}$ y $\mu_{11} - \mu_{22}$.

Alternativa 1: Utilizar una inversa generalizada de $X'X$

$$\textit{solución propuesta} \ \ b^0 = GX'Y$$

$$b^0 = \ \ \textit{es una solución "no una estimación"}$$

$$q'b \quad es\ estimable\ si\ existe\ t'\ tal\ que\ E(t'Y) = q'b$$

Condición de estimabilidad: $\quad q'GX'X = q'$

$$\mu_{11} - \mu_{12} = \mu + \tau_1 + \alpha_1 + \delta_{11} - (\mu + \tau_1 + \alpha_2 + \delta_{12}) = \alpha_1 - \alpha_2 + \delta_{11} - \delta_{12}$$

$$\mu_{11} - \mu_{22} = \mu + \tau_1 + \alpha_1 + \delta_{11} - (\mu + \tau_2 + \alpha_2 + \delta_{22}) = \tau_1 - \tau_2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \delta_{11} - \delta_{22}$$

$\mu_{11} - \mu_{12} = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$ ¿estimable?

$\mu_{11} - \mu_{22} = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$ ¿estimable?

$\mu_{22} = q'b \quad donde\ q' = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ ¿estimable?

$$q'b^0\ estimación$$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = q'b^0 = -0{,}0433$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = q'b^0 = 0{,}3433$

$\hat{\mu}_{22} = q'b^0 = 5{,}9634$

Alternativa 2: Reparametrizar el modelo (encontrar un modelo equivalente pero de rango completo)

$$y = Xb + \epsilon = U\theta + \epsilon$$

$$siendo\ \theta = L'b \ \ (sus\ filas\ son\ funciones\ estimables)\ y\ U = X(L')^-$$

$$X_{nxp} \qquad b_{px1} \qquad \theta_{rx1} \qquad U_{nxr} \qquad donde\ r = rango(X) = rango(U)$$

<u>Opción 1</u>: Resultados equivalentes a restricción $\hat{\tau}_1 = 0 \quad \hat{\alpha}_1 = 0 \quad \hat{\delta}_{11} = 0 \quad \hat{\delta}_{12} = 0 \quad \widehat{\delta}_{21} = 0$

$$L' = (X^- U)^-$$

$$U=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad L'=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\theta=L'b=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\\tau_1\\\tau_2\\\alpha_1\\\alpha_2\\\delta_{11}\\\delta_{12}\\\delta_{21}\\\delta_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu+\tau_1+\alpha_1+\delta_{11}\\-\tau_1+\tau_2-\delta_{11}+\delta_{21}\\-\alpha_1+\alpha_2-\delta_{11}+\delta_{12}\\\delta_{11}-\delta_{12}-\delta_{21}+\delta_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{21}-\mu_{11}\\\mu_{12}-\mu_{1\,1}\\\mu_{22}+\mu_{11}-\mu_{21}-\mu_{12}\end{bmatrix}$$

		Horno	
		1	2
Temperatura	1	$\mu_{11}=\mu+\tau_1+\alpha_1+\delta_{11}$	$\mu_{12}=\mu+\tau_1+\alpha_2+\delta_{12}$
	2	$\mu_{21}=\mu+\tau_2+\alpha_1+\delta_{21}$	$\mu_{22}=\mu+\tau_2+\alpha_2+\delta_{22}$

$$\hat{\theta} = (U'U)^{-1}U'Y = \begin{bmatrix} 6{,}3067 \\ -0{,}4733 \\ 0{,}0433 \\ 0{,}0867 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = -0{,}0433$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = -(0{,}0867 + 0{,}0433 - 0{,}4733) = 0{,}3433$

$\hat{\mu}_{22} = 6{,}3067 - 0{,}4733 + 0{,}0433 + 0{,}0867 = 5{,}9634$

Alternativa 3: Imponiendo restricciones a las soluciones del sistema de ecuaciones normales. Se forma un nuevo sistema "ampliado" que tiene solución única.

Opción 1: Restricción $\hat{\tau}_1 = 0 \quad \hat{\alpha}_1 = 0 \quad \hat{\delta}_{11} = 0 \quad \hat{\delta}_{12} = 0 \quad \widehat{\delta}_{21} = 0$.

$$C'b^0 = \gamma \qquad C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución sistema ampliado $\begin{bmatrix} b^0 \\ \lambda \end{bmatrix} =$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{12} = q'b^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]b^0 = -0{,}0433$

$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{22} = q'b^0 = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]b^0 = 0{,}3433$

e) Utilizando la forma general de las pruebas de hipótesis (Kb=m) obtenga la matriz K y calcule las sumas de cuadrados asociadas para testear:

1. no hay efecto del factor temperatura,

$$H_0\!: \tau_1 = \tau_2 \qquad\qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \end{bmatrix} \qquad m = [0]$$

$$F = \frac{\frac{Q}{s}}{\frac{SCr}{n - r(X)}} \sim F_{s, n-r(X); \lambda}$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}5547$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 0{,}046$$

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	0,5829	3	0,1943	33,7894	0,0001
temperatura	0,5547	1	0,5547	96,4696	<0,0001
horno	0,0225	1	0,0225	3,9188	0,0831
temperatura*horno	0,0056	1	0,0056	0,9797	0,3513
Error	0,0460	8	0,0058		
Total	0,6289	11			

Contrastes

temperatura	Contraste	E.E.	SC	gl	CM	F	p-valor
Contraste1	0,4300	0,0438	0,5547	1	0,5547	96,4696	<0,0001
Total			0,5547	1	0,5547	96,4696	<0,0001

2. no hay efecto del factor horno,

$$H_0: \quad \alpha_1 = \alpha_2 \qquad\qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \end{bmatrix} \qquad m = [0]$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}0225$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 0{,}046$$

3. no hay efecto interacción temperatura x horno. Corrobore los cálculos anteriores procesando los datos con algún software estadístico.

$$H_0: \quad \delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{22} \qquad\qquad K_{sxp} b_{px1} = m_{sx1}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1] \qquad b = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \end{bmatrix} \qquad m = [0]$$

$$Q = (Kb^0 - m)'(KGK')^{-1}(Kb^0 - m) = 0{,}0056$$

$$SCr = Y'(I - XGX')Y = 0{,}046$$