

Examen Final Series de Tiempo

MATEOS - RODRIGUEZ - ZARATE

14-12-2021

```
library(tseries)
library(aTSA)
```

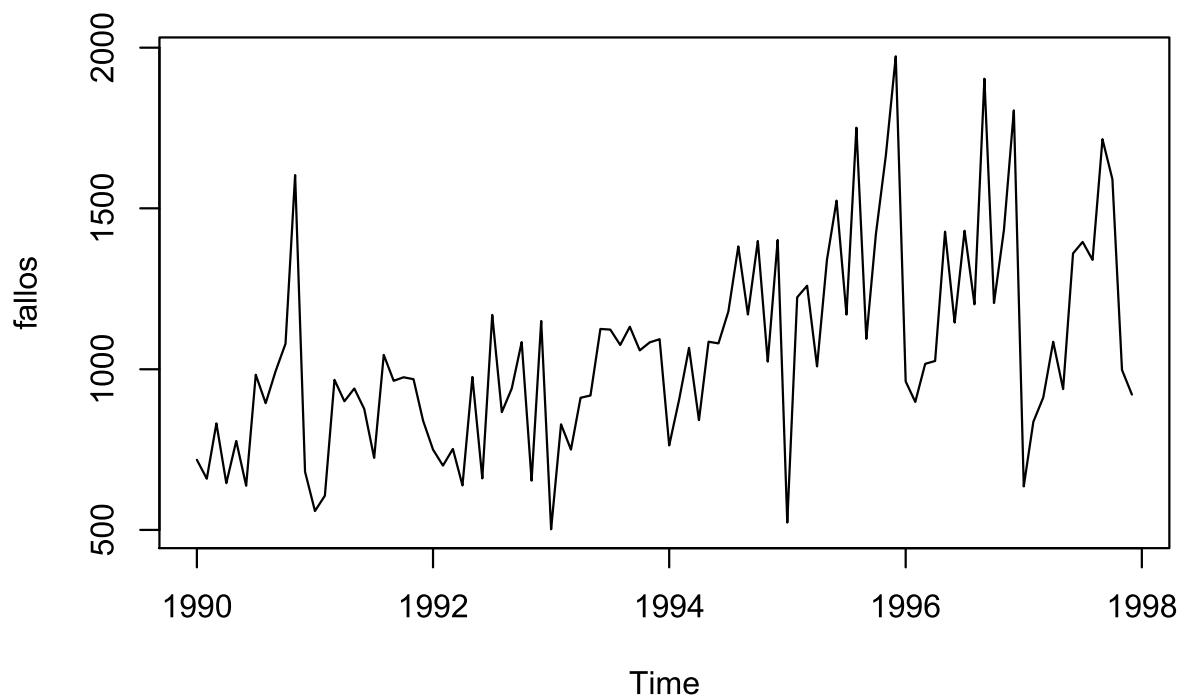
EJERCICIO 1

```
fallos <- c(718, 659, 831, 645, 777, 637, 983, 894, 994, 1079,
1604, 681, 559, 606, 967, 900, 940, 876, 724, 1044, 964, 975,
969, 839, 750, 700, 752, 638, 976, 660, 1169, 866, 940, 1084,
653, 1150, 502, 828, 750, 911, 918, 1125, 1123, 1075, 1132, 1058,
1083, 1093, 763, 905, 1066, 841, 1085, 1080, 1180, 1382, 1170,
1399, 1023, 1402, 523, 1224, 1259, 1009, 1340, 1524, 1170, 1751,
1094, 1421, 1664, 1973, 962, 898, 1016, 1025, 1428, 1145, 1431,
1202, 1903, 1206, 1433, 1805, 635, 836, 912, 1085, 938, 1360,
1396, 1340, 1715, 1591, 998, 921)
fallos <- ts(data=fallos,start=1990,frequency = 12)
fallos
```

```
##      Jan   Feb   Mar   Apr   May   Jun   Jul   Aug   Sep   Oct   Nov   Dec
## 1990  718   659   831   645   777   637   983   894   994  1079  1604   681
## 1991   559   606   967   900   940   876   724  1044   964   975   969   839
## 1992   750   700   752   638   976   660  1169   866   940  1084   653  1150
## 1993   502   828   750   911   918  1125  1123  1075  1132  1058  1083  1093
## 1994   763   905  1066   841  1085  1080  1180  1382  1170  1399  1023  1402
## 1995   523  1224  1259  1009  1340  1524  1170  1751  1094  1421  1664  1973
## 1996   962   898  1016  1025  1428  1145  1431  1202  1903  1206  1433  1805
## 1997   635   836   912  1085   938  1360  1396  1340  1715  1591   998   921
```

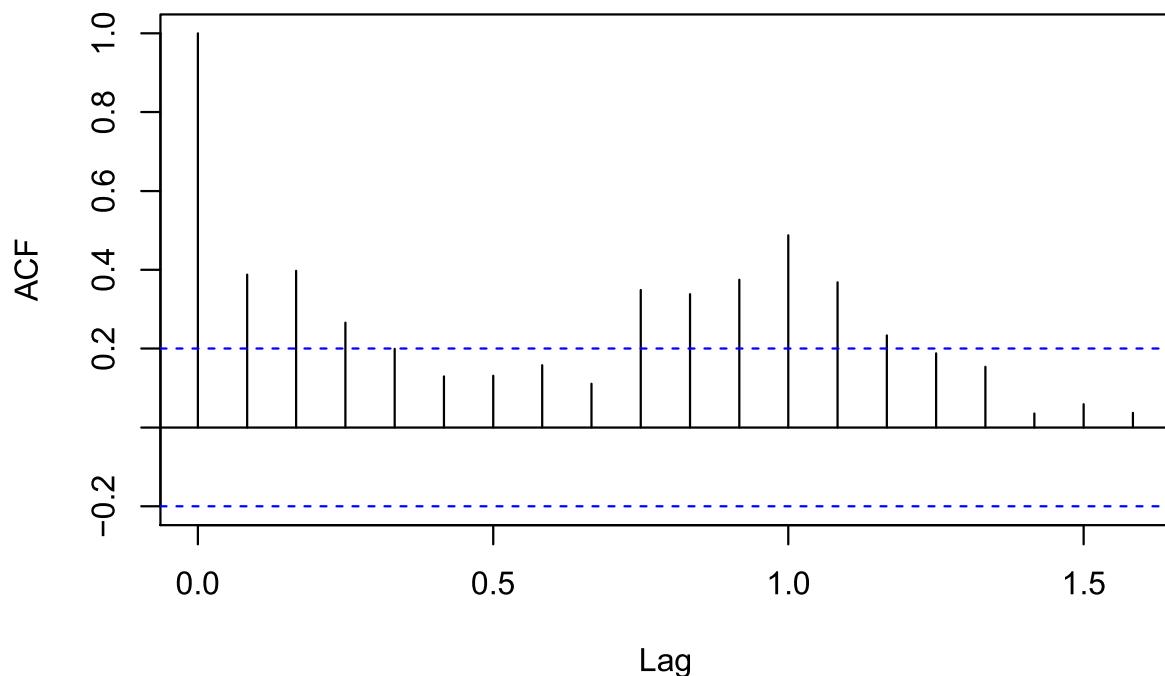
- a) Grafique la serie y sus funciones de autocorrelacion simple y parcial. Analice estos graficos.

```
plot(fallos)
```



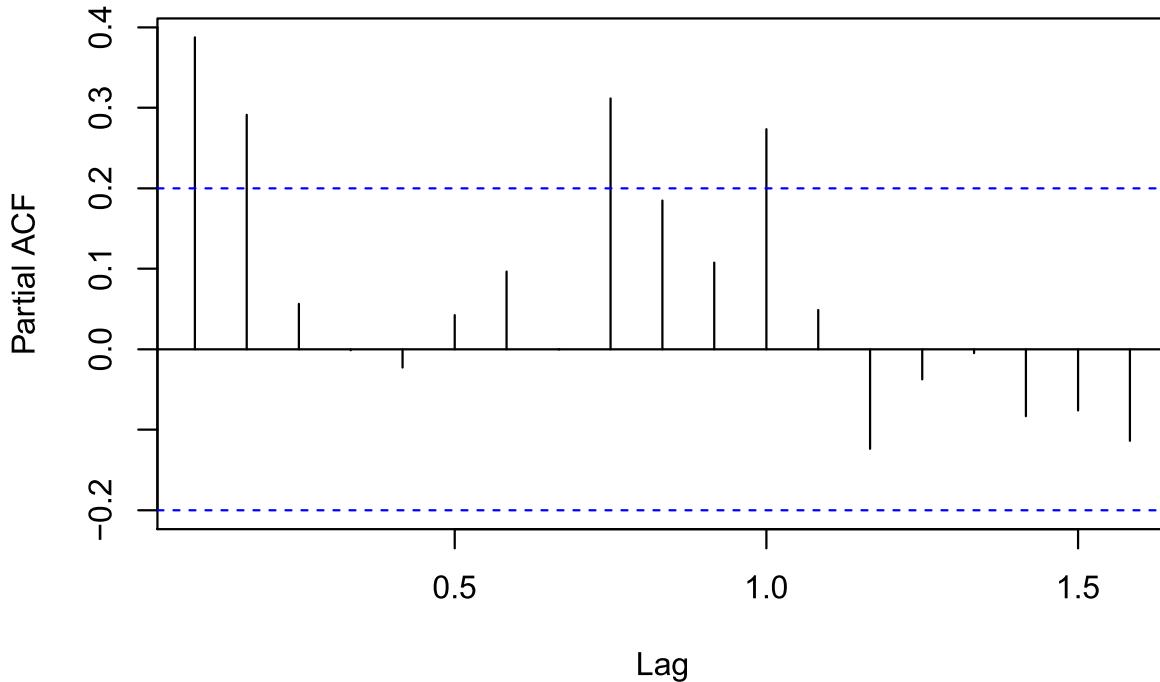
```
acf(fallos)
```

Series fallos



```
pacf(fallos)
```

Series fallos



```
mean(fallos)
```

```
## [1] 1054.479
```

A partir del grafico de la serie podemos ver una tendencia creciente en la media a lo largo del tiempo. En cuanto a la varianza podemos ver que parece variar a lo largo del tiempo. Podemos concluir que la serie parece ser no estacionaria ni en media y ni en varianza.

Podemos apreciar que la funcion de autocorrelacion simple se atenua lentamente, ademas podemos ver como los valores de los coeficientes aumentan al acercarse al lag 12 como consecuencia de una raiz no estacional. Por otra parte, la funcion de autocorrelacion parcial cae abruptamente en los lag 1 y 2 y tambien vuelve a aumentar para el lag 12.

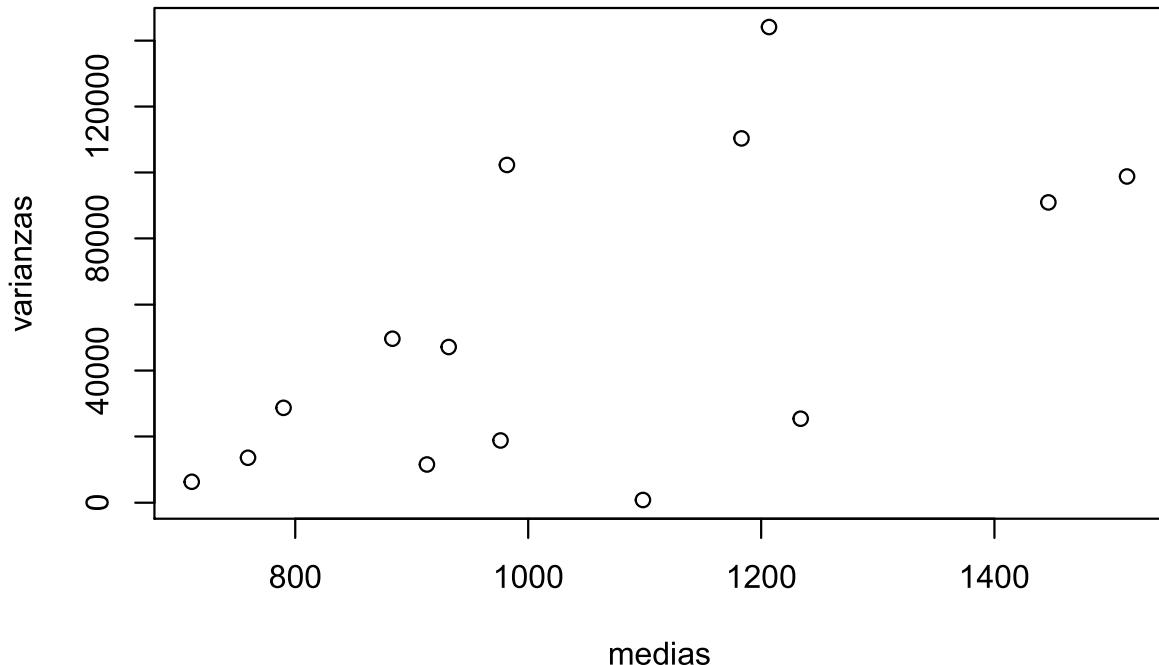
b) Proponga un modelo ARIMA que ajuste razonablemente el conjunto de datos.
Para ello:

b1) Analice la necesidad de transformar la serie.

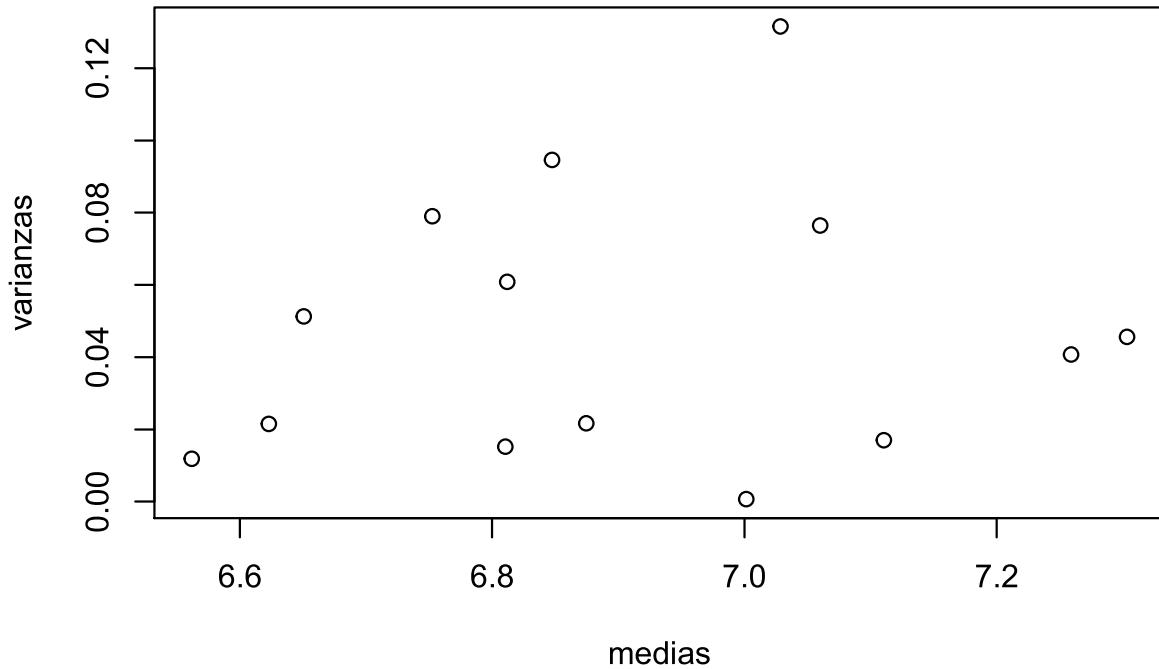
```
medias=0  
varianzas=0  
for (i in 1:14) {  
  medias[i]=mean(fallos[((i-1)*6):((i)*6)])  
  varianzas[i]=var(fallos[((i-1)*6):((i)*6)])
```

```
}
```

```
plot(x=medias,y=varianzas)
```



```
fallos1=log(fallos)
for (i in 1:14) {
  medias[i]=mean(falllos1[((i-1)*6):((i)*6)])
  varianzas[i]=var(falllos1[((i-1)*6):((i)*6)])
}
plot(x=medias,y=varianzas)
```



Se opta por realizar una transformacion logaritmica para eliminar la heterogeneidad de varianzas.

b2) Estudie la presencia de raiz unitaria (Test de Dickey-Fuller).

Procedemos a aplicar el test de Dickey Fuller, que es una prueba de raiz unitaria:

- H_0 : Hay raíz unitaria. (Serie no estacionaria)
- H_1 : No hay raíz unitaria. (Serie estacionaria)

```
tseries::adf.test(fallos1) #según el test no tiene raiz unitaria
```

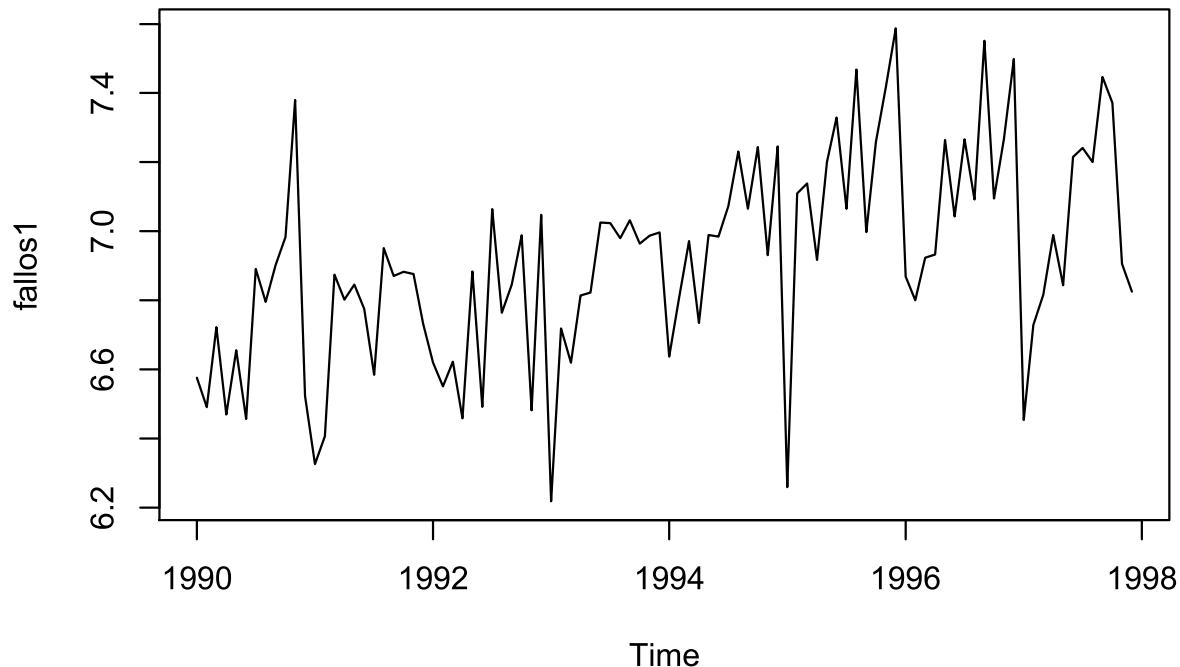
```
## Warning in tseries::adf.test(fallos1): p-value smaller than printed p-value

##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data: fallos1
## Dickey-Fuller = -4.9504, Lag order = 4, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

La muestra reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5%, por lo tanto se acepta que no hay raiz unitaria para ninguna de las diferenciaciones no estacionarias propuestas.

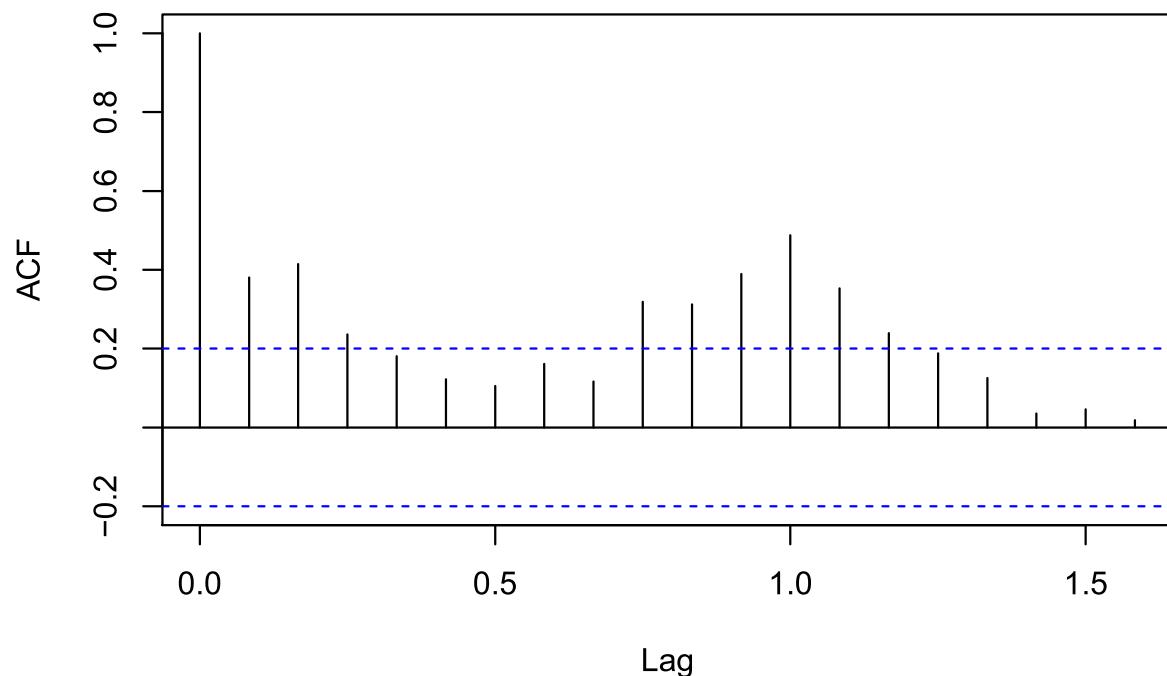
b3) Estudie la necesidad de diferenciar convenientemente la serie.

```
plot(fallos1)
```

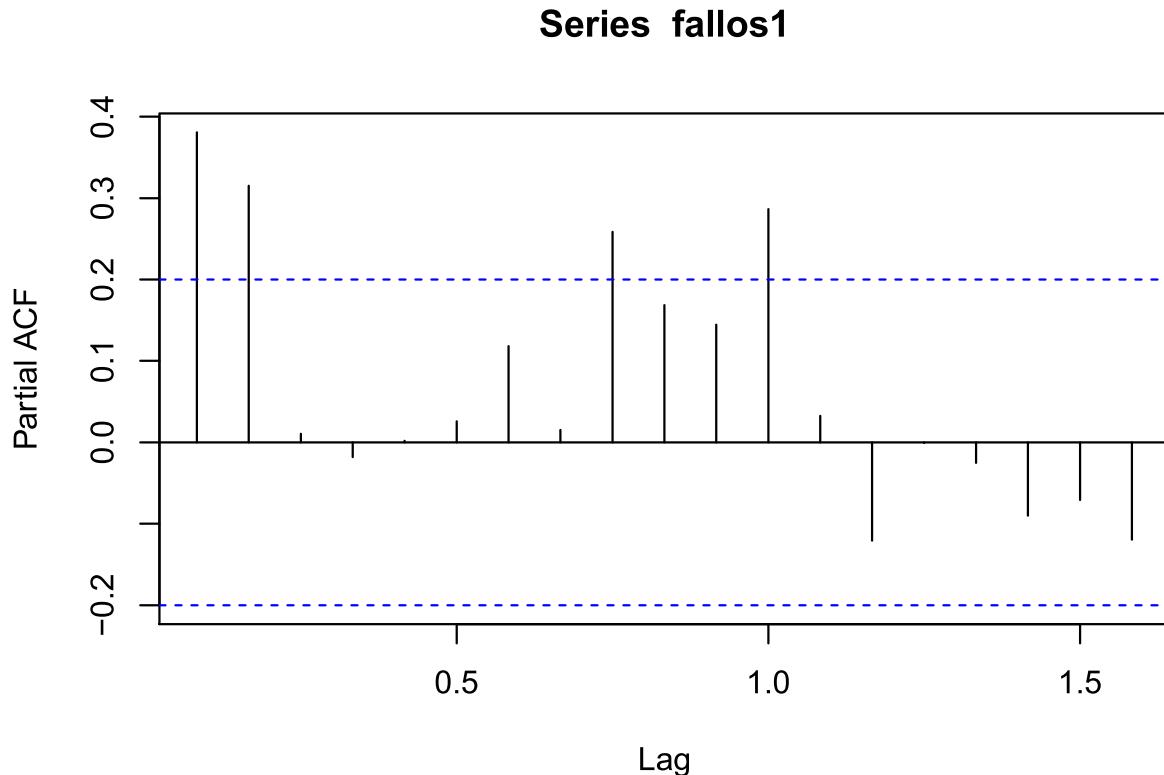


```
acf(fallos1)
```

Series fallos1

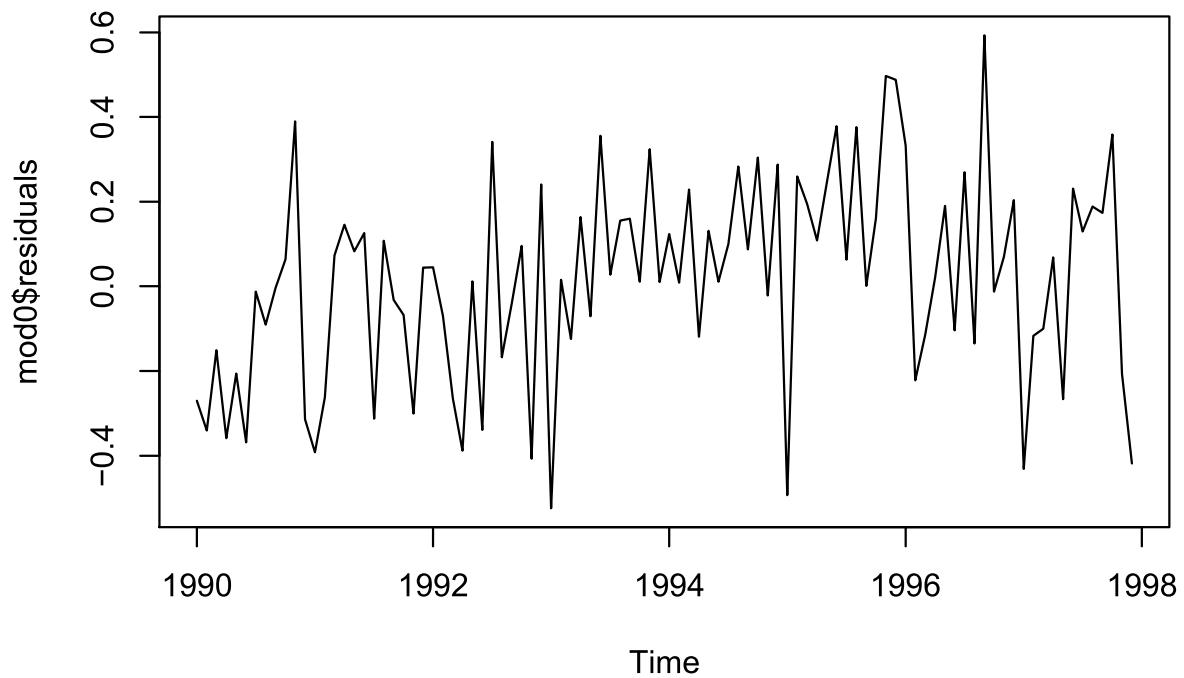


```
pacf(fallos1)
```



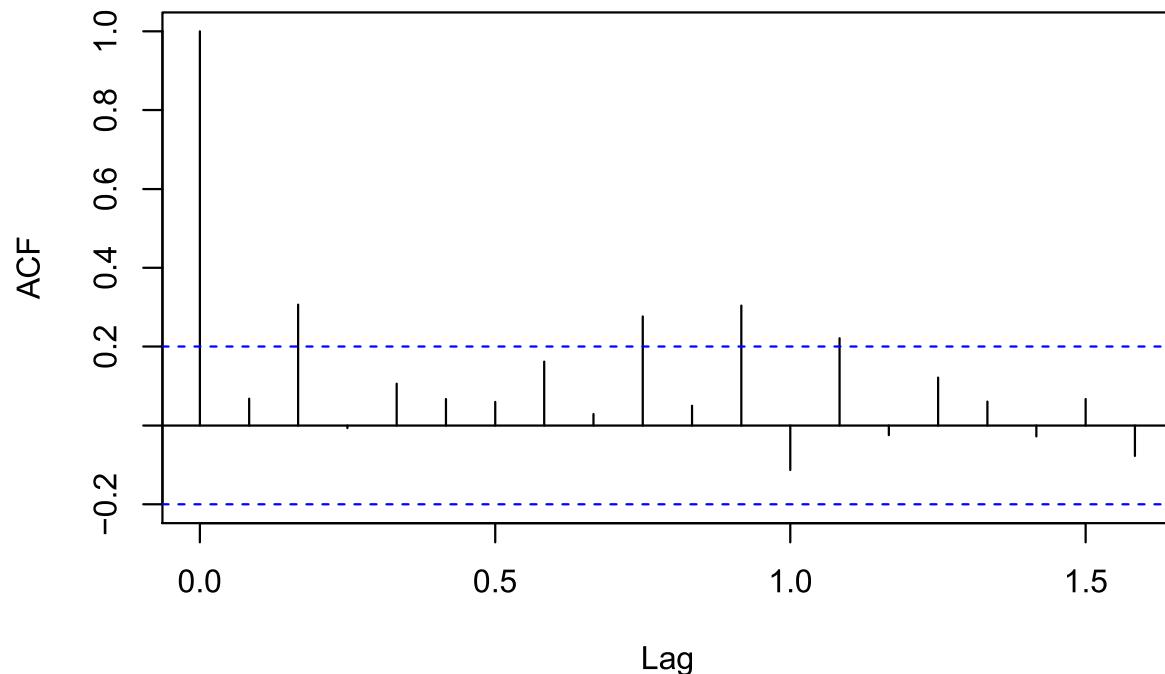
El grafico de la nueva serie sigue mostrando una tendencia creciente en la media a lo largo del tiempo por lo que se sostiene que la diferenciacion no estacional podria ser necesaria. Por este motivo se procedera a comparar distintos modelos y determinar si fuese necesaria dicha diferenciacion.

```
mod0 <- arima(fallos1,order=c(0,0,0),seasonal=list(order=c(1,0,0),period=12))
plot(mod0$residuals)
```



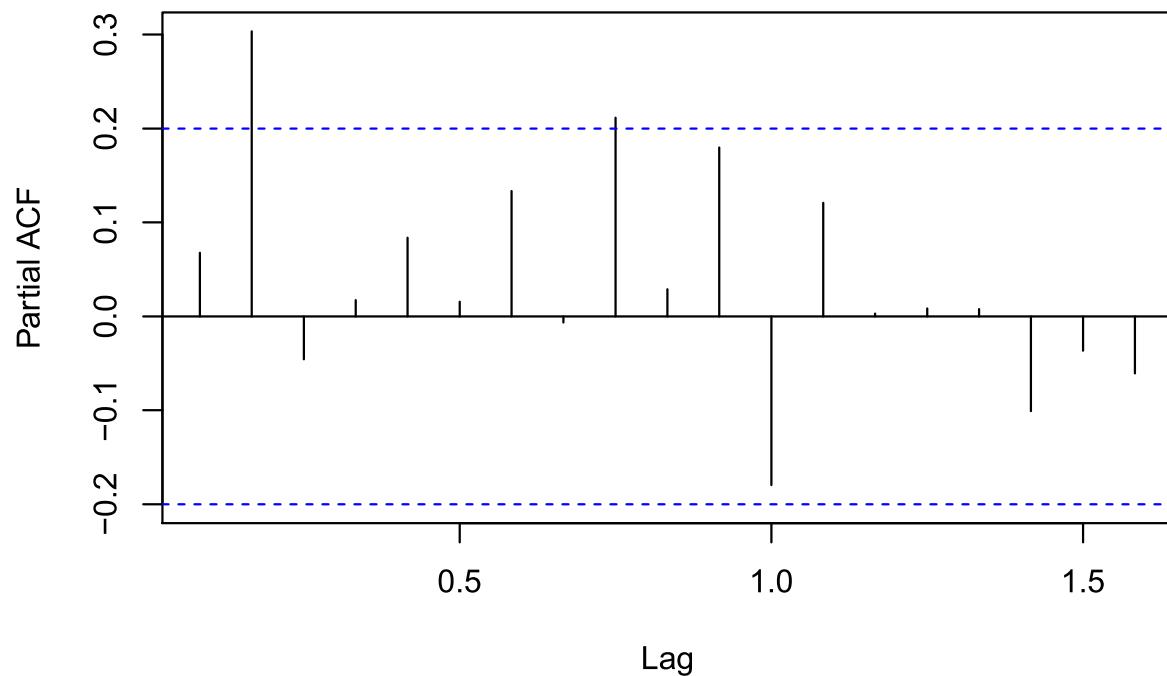
```
acf(mod0$residuals)
```

Series mod0\$residuals

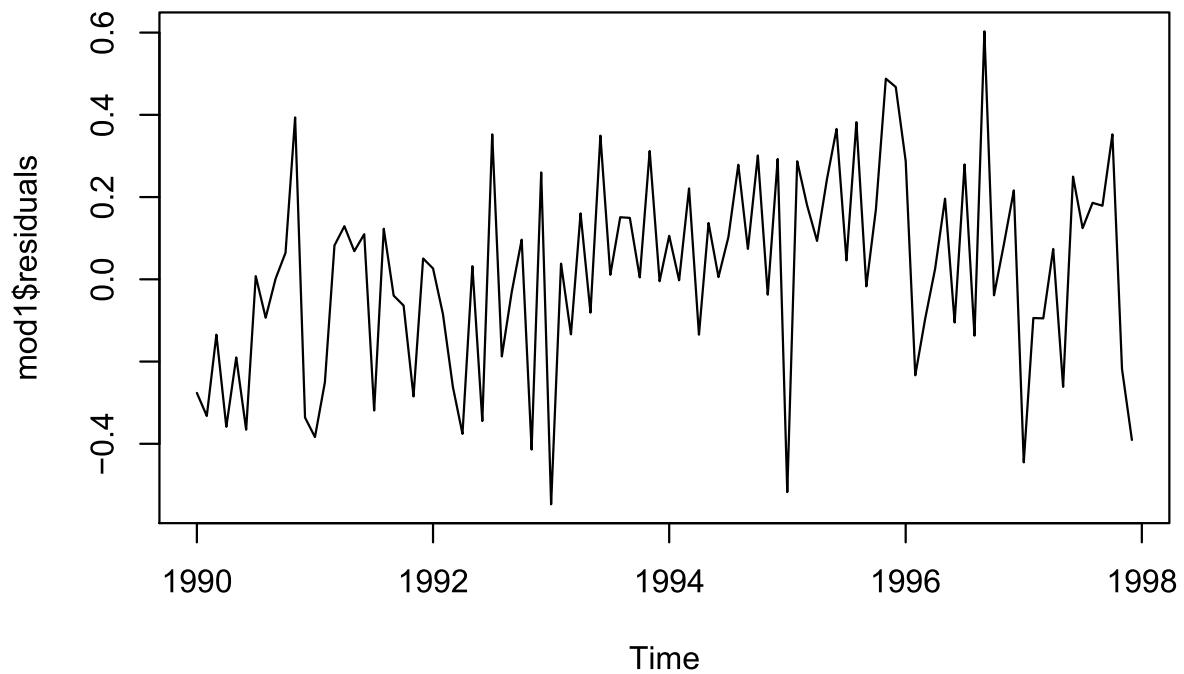


```
pacf(mod0$residuals)
```

Series mod0\$residuals

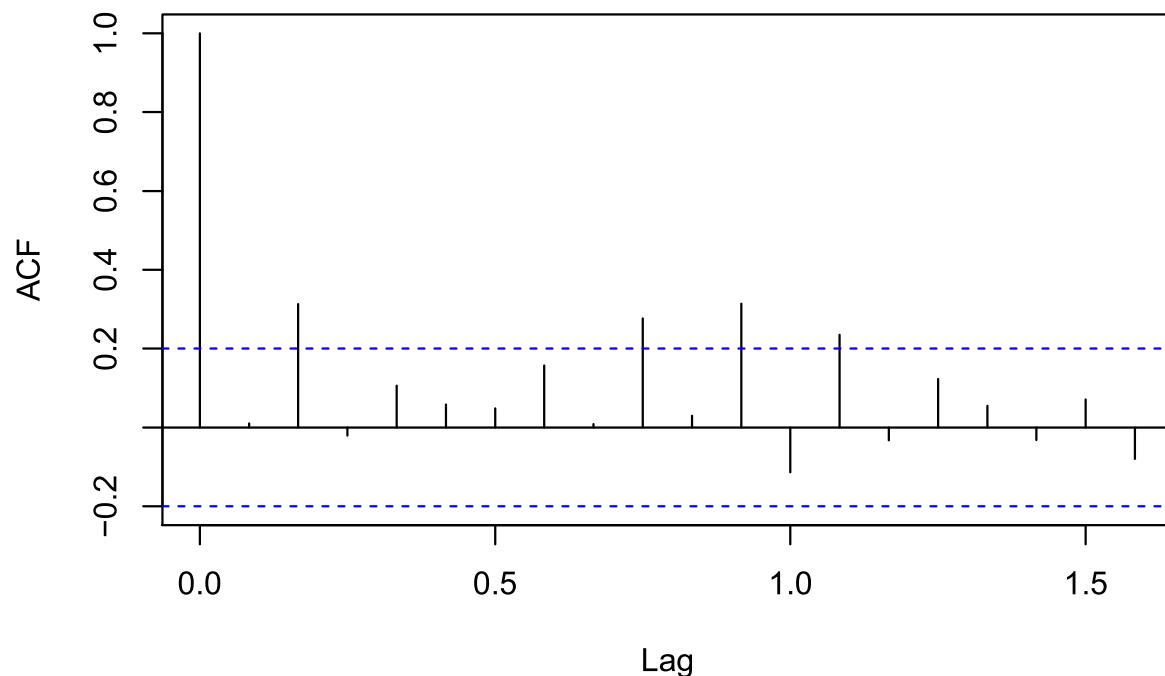


```
mod1 <- arima(fallos1, order=c(0,0,1), seasonal=list(order=c(1,0,0), period=12))
plot(mod1$residuals)
```



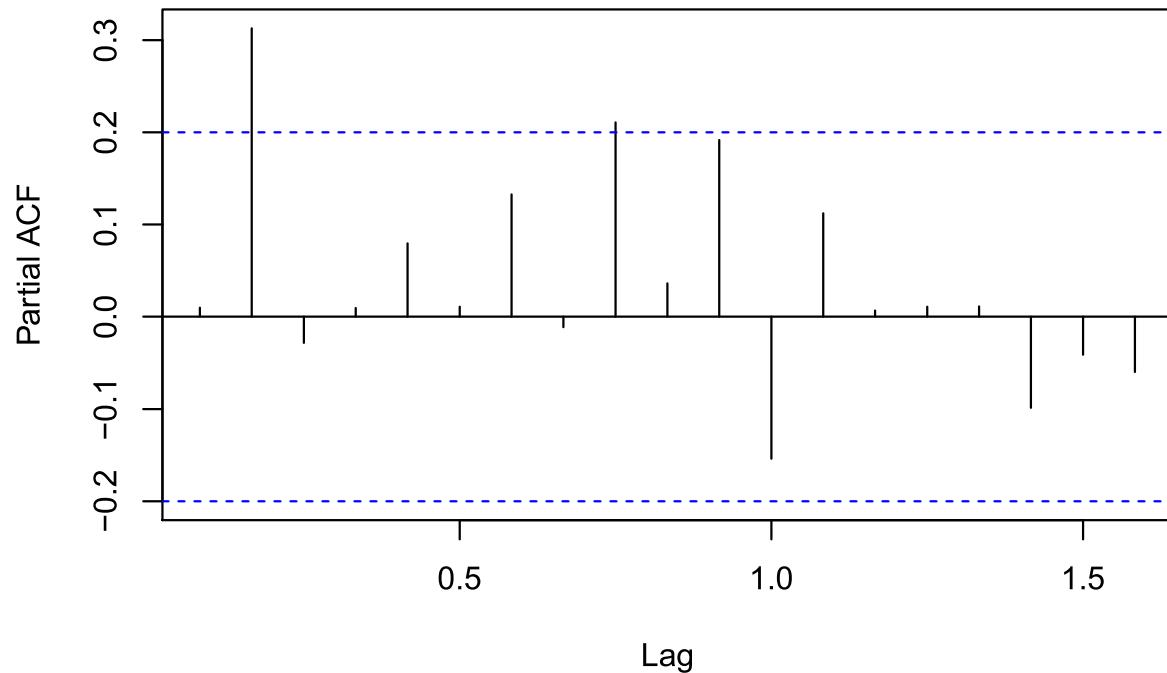
```
acf(mod1$residuals)
```

Series mod1\$residuals

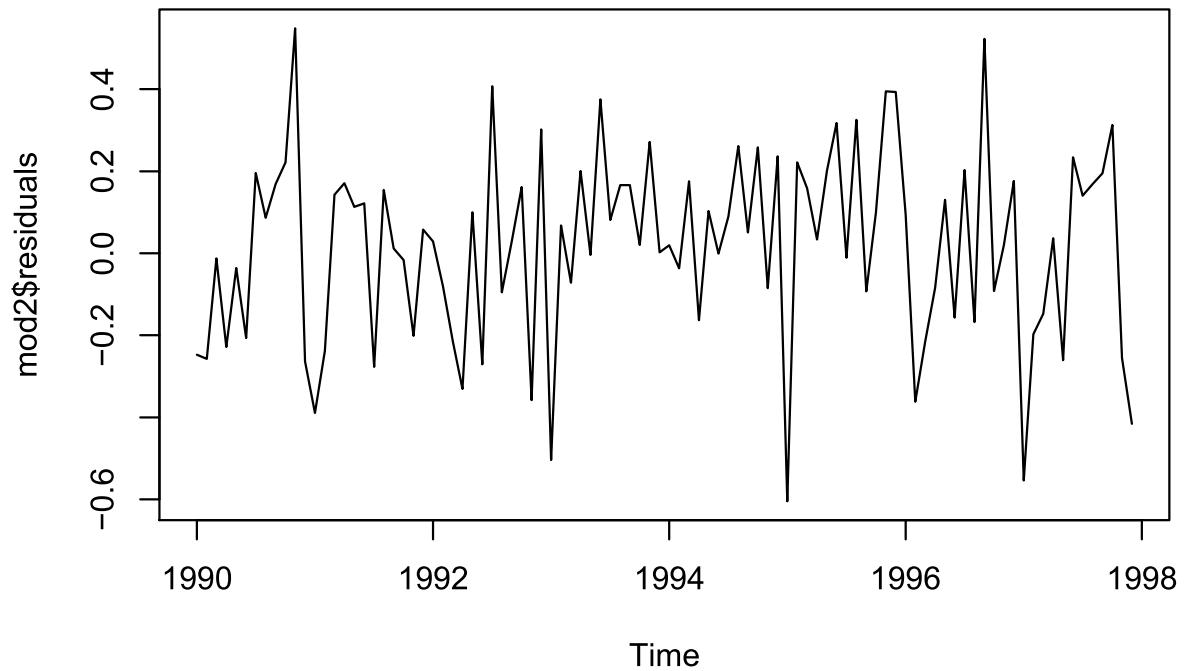


```
pacf(mod1$residuals)
```

Series mod1\$residuals

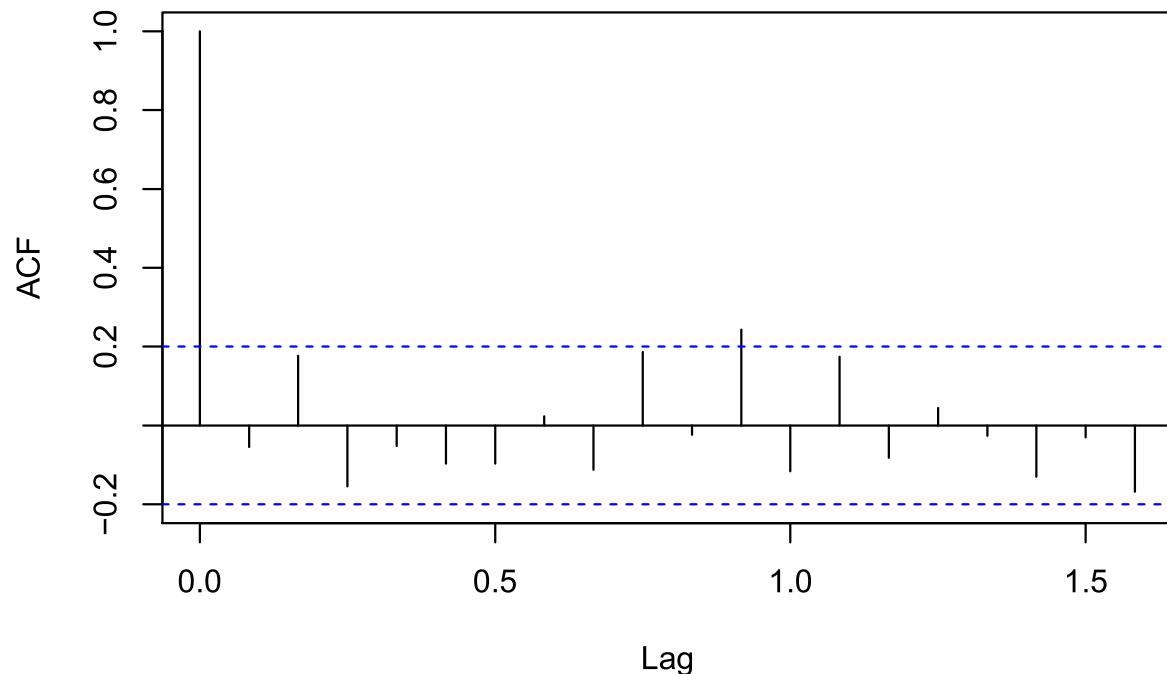


```
mod2 <- arima(fallos1, order=c(1,0,1), seasonal=list(order=c(1,0,0), period=12))
plot(mod2$residuals)
```

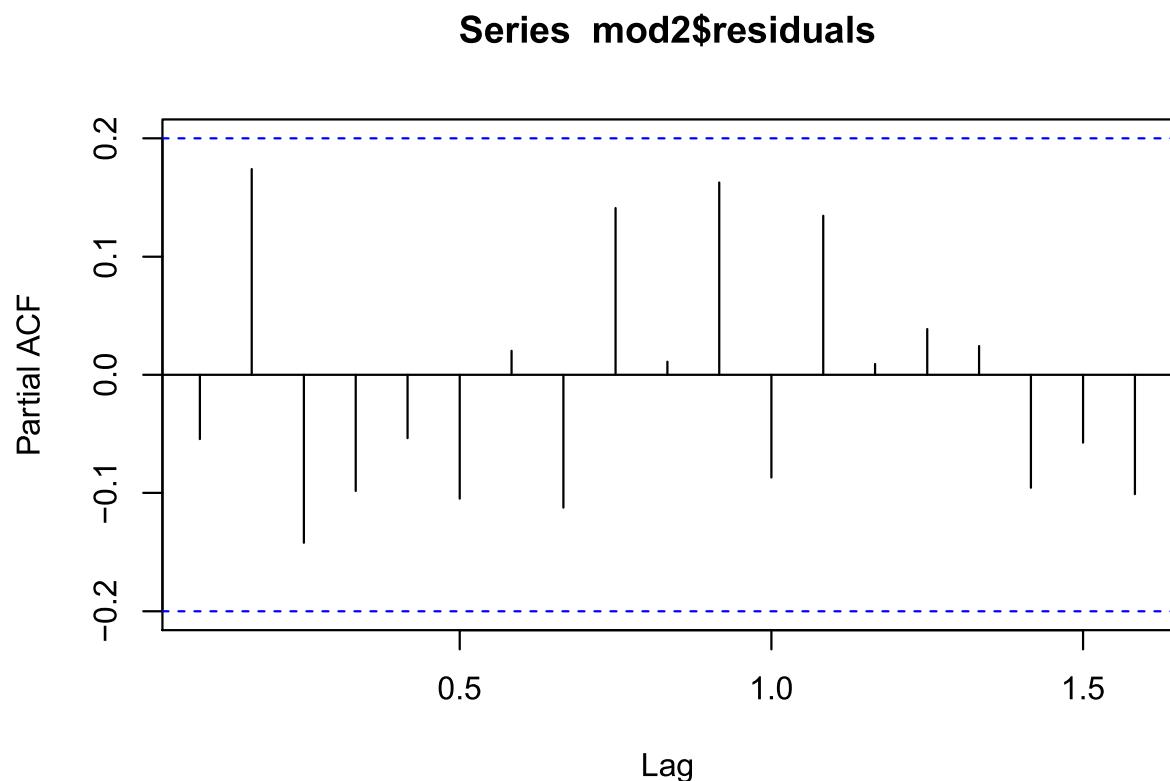


```
acf(mod2$residuals)
```

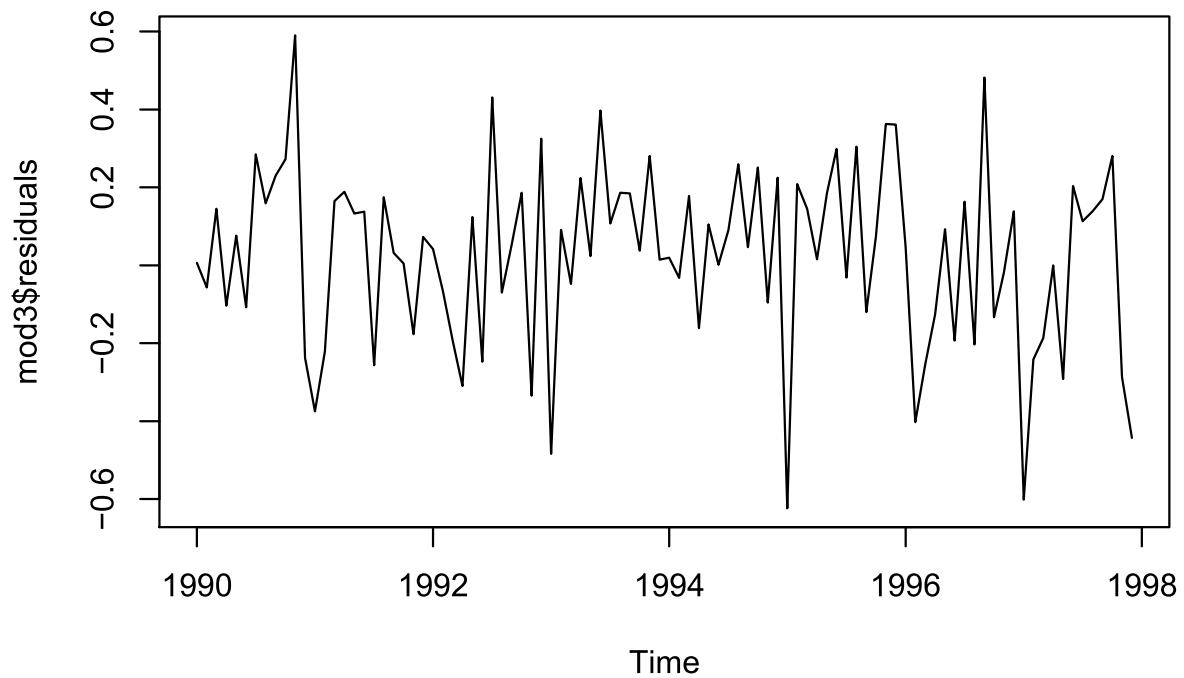
Series mod2\$residuals



```
pacf(mod2$residuals)
```

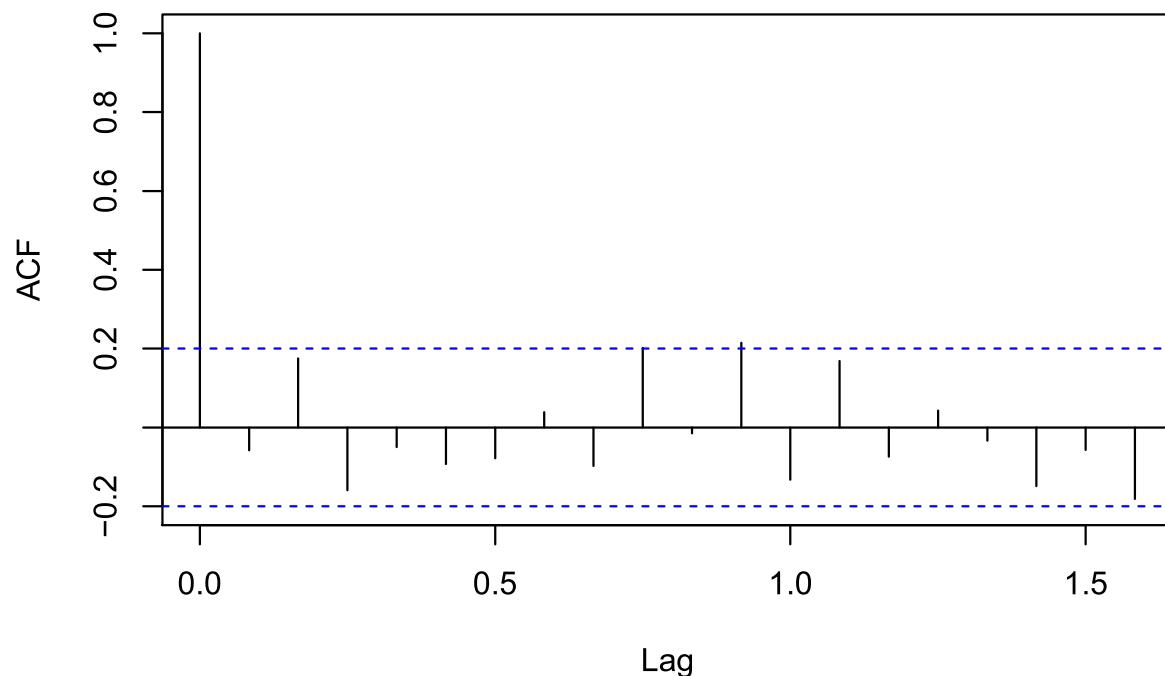


```
mod3 <- arima(fallos1,order=c(0,1,1),seasonal=list(order=c(1,0,0),period=12))
plot(mod3$residuals)
```

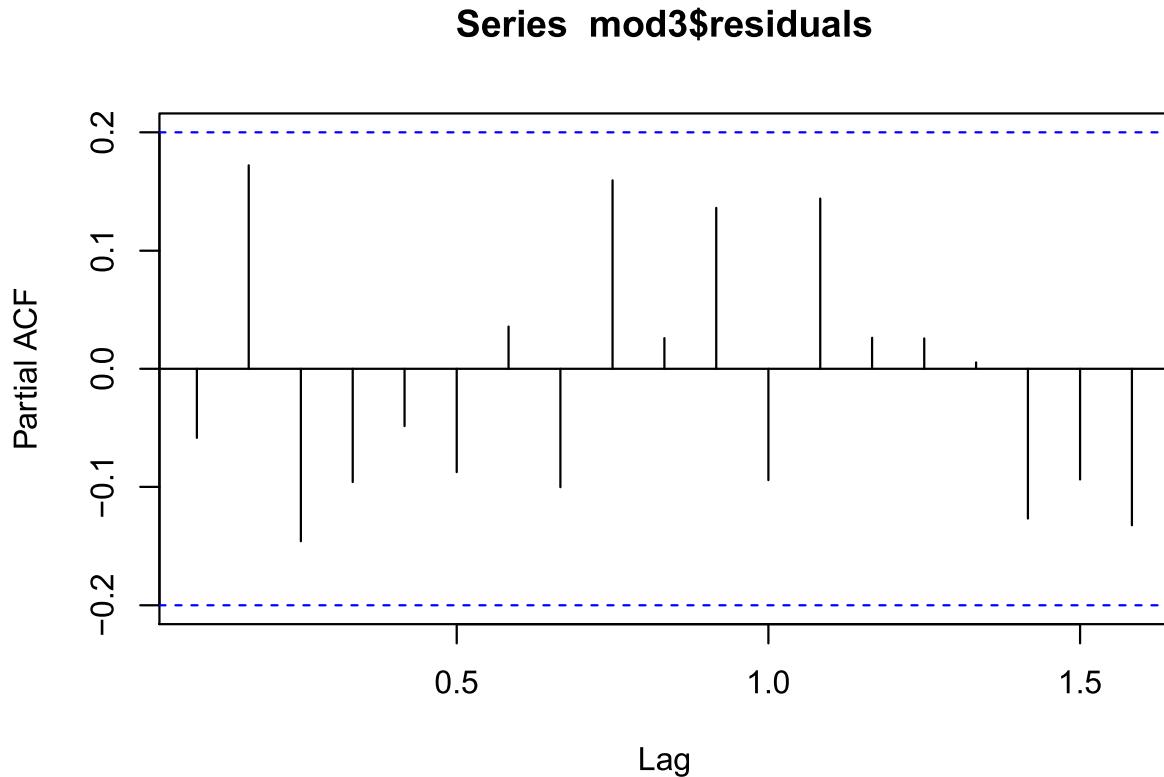


```
acf(mod3$residuals)
```

Series mod3\$residuals



```
pacf(mod3$residuals)
```



AIC(mod0,mod1,mod2,mod3)

```
## Warning in AIC.default(mod0, mod1, mod2, mod3): models are not all fitted to the  
## same number of observations
```

```

##      df      AIC
## mod0  3 11.344785
## mod1  4 12.906650
## mod2  5  6.510247
## mod3  3  4.423043

```

BIC(mod0,mod1,mod2,mod3)

```
## Warning in BIC.default(mod0, mod1, mod2, mod3): models are not all fitted to the  
## same number of observations
```

```

##          df      BIC
## mod0     3 19.03783
## mod1     4 23.16404
## mod2     5 19.33199
## mod3     3 12.08467

```

```
MuMIn::AICc(mod0,mod1,mod2,mod3)
```

```
##      df     AICc
## mod0  3 11.605654
## mod1  4 13.346211
## mod2  5  7.176913
## mod3  3  4.686780
```

A partir de los criterios de informacion calculados podemos concluir que el mejor modelo, es decir el que menores valores de AIC, BIC y AICc presenta es el mod3, de esta forma podemos concluir que es muy mala la sugerencia del test de Dickey Fuller de no diferenciar, ya que de no ser por nuestra insistencia nos hubiese llevado a conclusiones equivocadas. Ademas de ser el mod3 el que menores valores de AIC, BIC y AICc registra es mas parsimonioso, por lo que deberias ser el elegido.

Como consecuencia de la tendencia creciente de la media en la serie justificamos la diferenciacion no estacional de la misma.

A partir de los grafico de los residuos de los distintos modelos propuestos, podemos ver que el mejor ajuste es generado por el mod3, modelo en el cual se incluyo una diferencia no estacional. Los coeficientes estimados tanto en la funcion de autocorrelacion simple como en la parcial quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no significativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco y que el modelo propuesto ajusta bien a los datos.

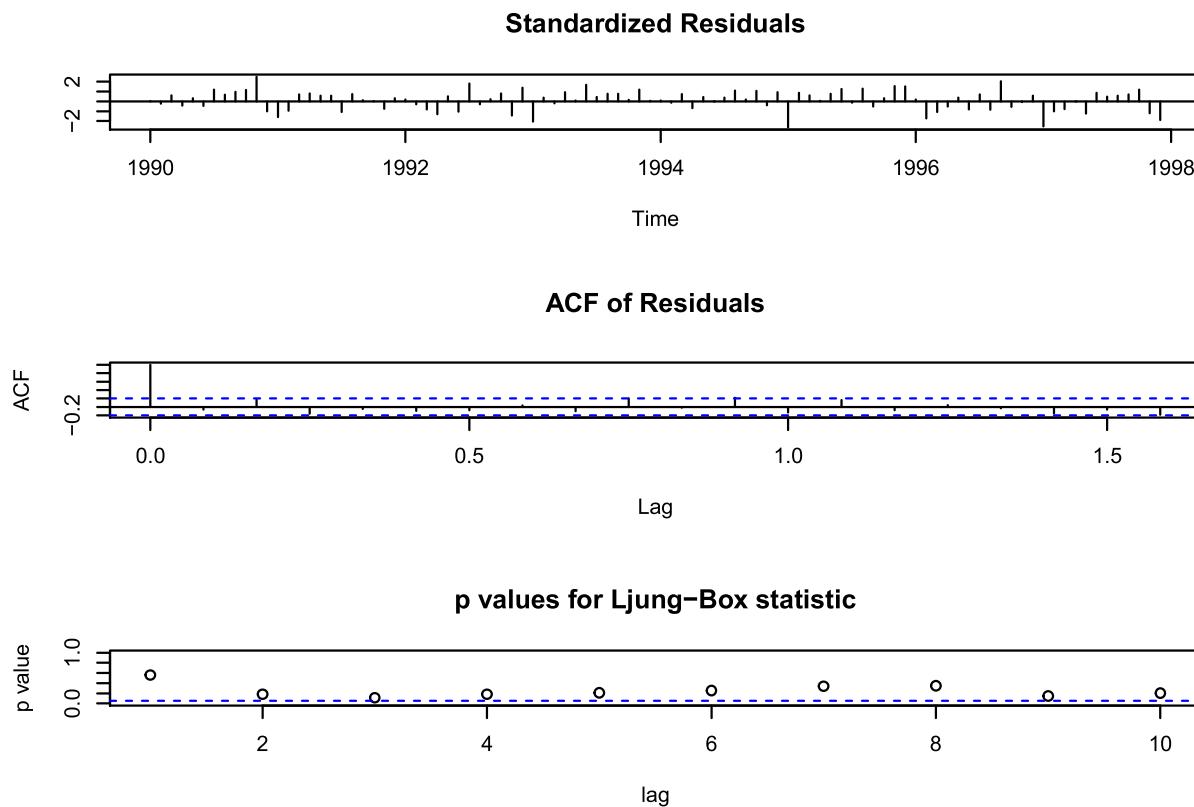
En conclusion el mejor modelo ajustado es el mod3, esto se encuentra avalado tanto por los criterios de comparacion calculados para los cuales obtiene los minimos valores, asi como tambien para los graficos de residuos.

b4) Sobre el modelo propuesto, realice el analisis de los residuos. (Tests: Box, Shapiro y Jarque Bera, etc.).

```
Box.test(mod3$residuals, lag = 10, type = "Ljung-Box", fitdf = 2)
```

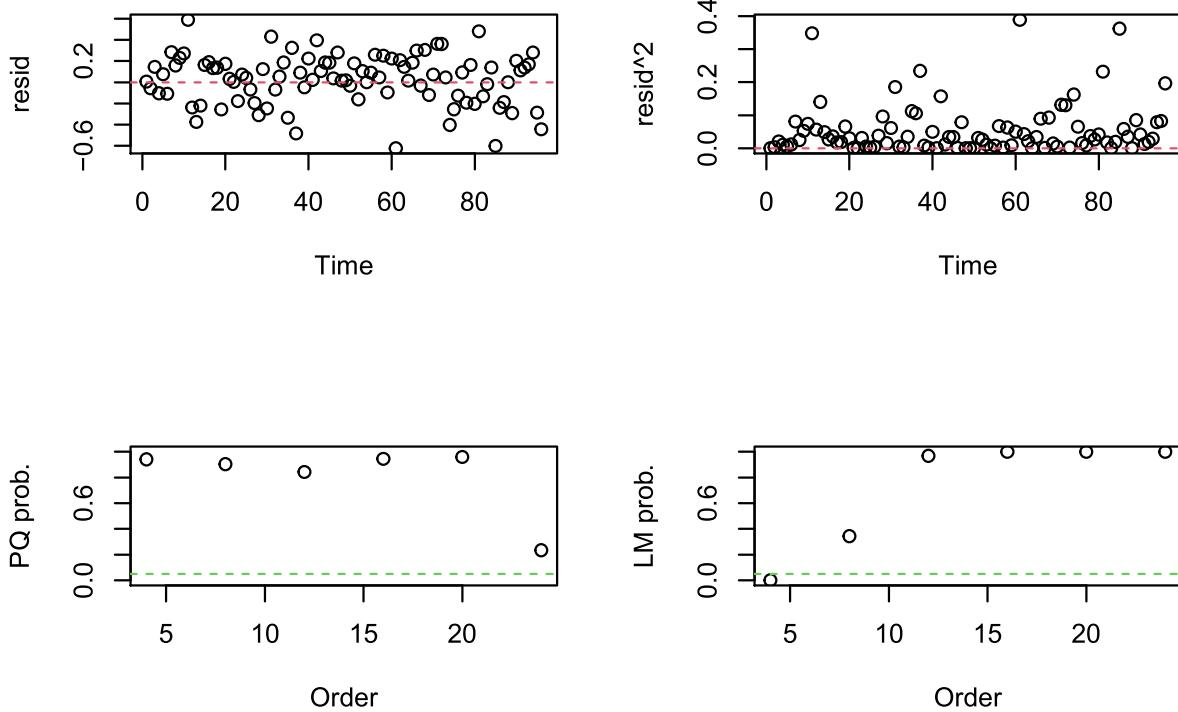
```
##
##  Box-Ljung test
##
## data: mod3$residuals
## X-squared = 13.382, df = 8, p-value = 0.09936
```

```
tsdiag(mod3)
```



```
arch.test(mod3, output = TRUE)
```

```
## ARCH heteroscedasticity test for residuals
## alternative: heteroscedastic
##
## Portmanteau-Q test:
##      order      PQ p.value
## [1,]     4  0.781  0.941
## [2,]     8  3.434  0.904
## [3,]    12  7.217  0.843
## [4,]    16  8.104  0.946
## [5,]    20 10.446  0.959
## [6,]    24 28.638  0.234
## Lagrange-Multiplier test:
##      order      LM p.value
## [1,]     4 18.654 0.000322
## [2,]     8  7.873 0.343934
## [3,]    12  4.055 0.968287
## [4,]    16  2.349 0.999915
## [5,]    20  1.222 1.000000
## [6,]    24  0.576 1.000000
```



```
shapiro.test(mod3$residuals)
```

```
##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data: mod3$residuals
## W = 0.98126, p-value = 0.1865
```

La prueba de **Ljung-Box** se puede definir de la siguiente manera:

- H₀: Los datos se distribuyen de forma independiente (es decir, las correlaciones en la población de la que se toma la muestra son 0, de modo que cualquier correlación observada en los datos es el resultado de la aleatoriedad del proceso de muestreo).
- H_a: Los datos no se distribuyen de forma independiente.

El p valor arrojado por la prueba de Ljung-Box de 0.09936, sugiere que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelación existente.

Ademas el grafico muestra que ninguno de los p valores para la prueba de Ljung-Box es significativo.

La prueba de **Pormanteau** es similar a la de Ljun-Box pero considerando los residuos al cuadrado, en otras palabras se podria definir como:

- H₀: Los coeficientes de correlacion de los residuos cuadrados es igual a 0.

- H1: Al menos uno de los coeficientes de correlacion de los residuos cuadrados es distinto de 0.

Por otra parte, el **Lagrange-Multiplier test** (ARCH LM), plantea una regresion entre los residuos cuadrados y el retardo de los residuos cuadrados. De esta forma verifica si hay autocorrelacion planteando una regresion.

El **Portmanteau-Q test**, arroja p valores que demuestran que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados.

Por otra parte el **Lagrange-Multiplier test**, arroja p valores que demuestran que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5%, por lo que se acepta que no hay autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados. Hay un unico p valor que nos hace dudar, que sugeriria que potencialmente hay heterocedasticidad

Los graficos de la funcion de autocorrelacion simple y parcial de los residuos del modelo muestran que todos los coeficientes estimados quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no significativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco, que el modelo propuesto ajusta bien a los datos y que no existe heterocedasticidad.

El test de normalidad de **Shapiro-Wilk** plantea las hipotesis: * Ho: Los datos siguen una distribucion normal. * H1: Los datos no siguen una distribucion normal.

Finalmente la prueba de Shapiro-Wilk arroja un p valor de 0.1865, el cual sugiere que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que los residuos provienen de una distribucion normal.

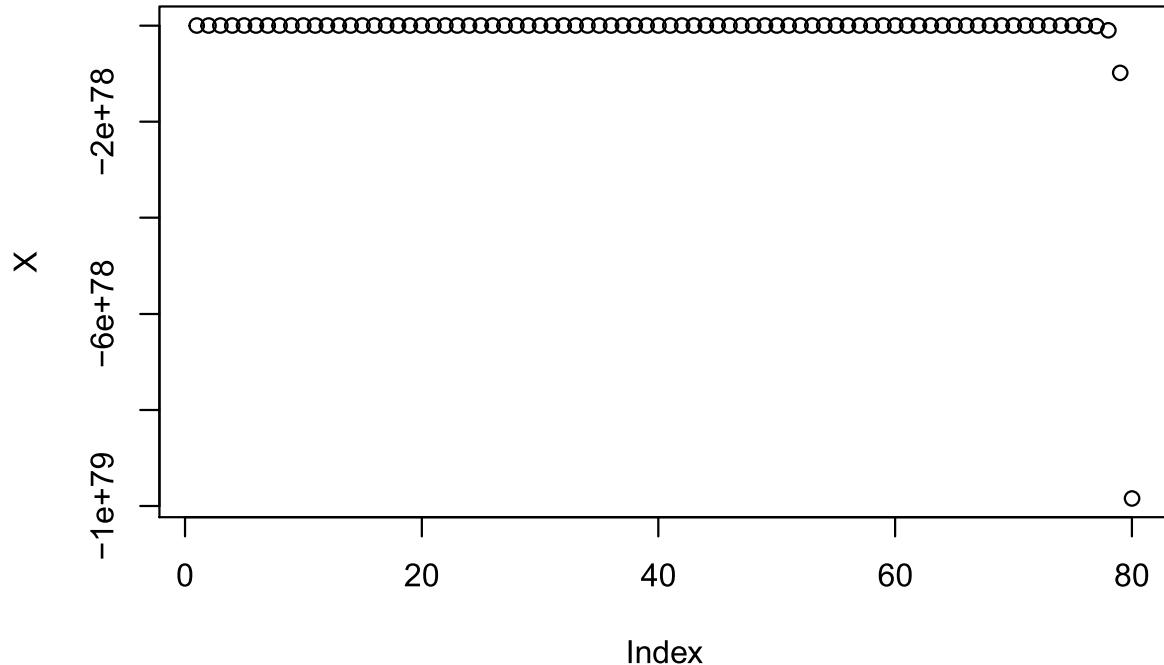
EJERCICIO 2

- a) Simule 80 realizaciones del proceso $X_t - 10X_{t-1} - 0.2X_{t-2} = E_t$, donde E_t es un proceso de ruido blanco con varianza igual a 16.

```
# arima.sim(n=80,model=list(ar=c(10,0.2)))
E <- rnorm(80,0,4)
X=0
X[1]=E[1]
X[2]=10*X[1]+E[2]
for (i in 3:80) {
  X[i]=10*X[i-1]+0.2*X[i-2]+E[i]
}
```

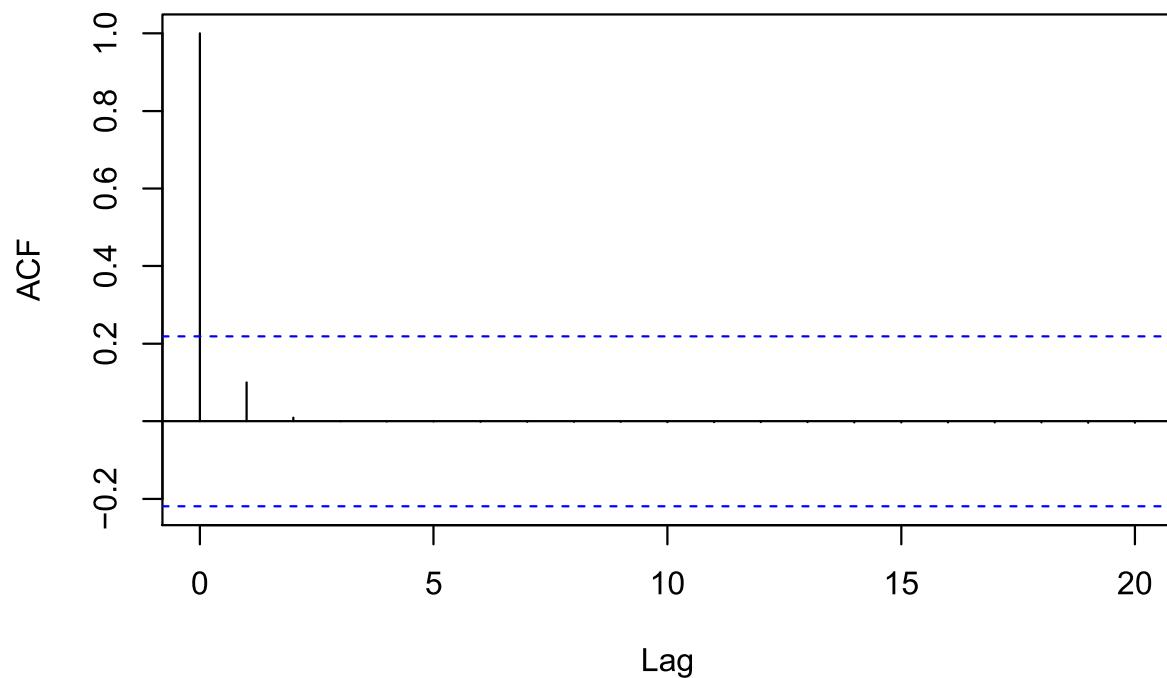
- b) Grafique la serie obtenida. Grafique tambien los primeros 20 valores de las funciones de autocorrelacion muestral simple y parcial de la serie simulada.

```
plot(X)
```

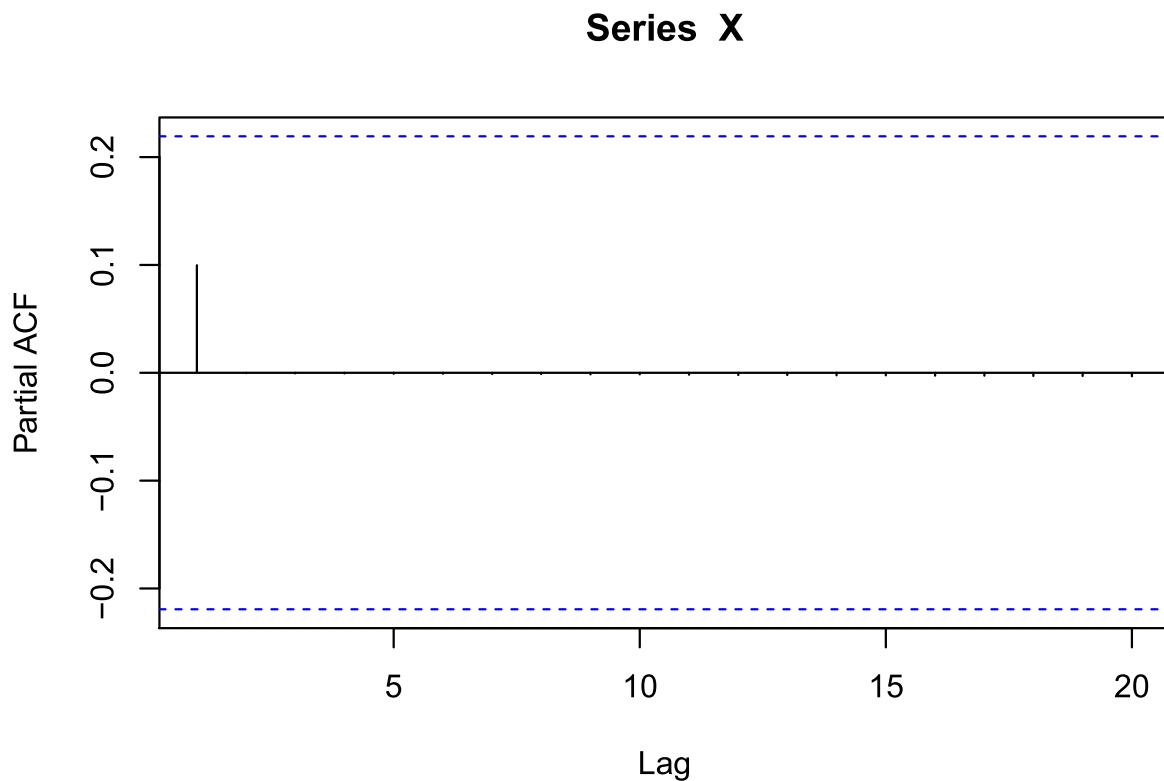


```
acf(X,lag.max = 20)
```

Series X



```
pacf(X, lag.max = 20)
```



```
# arima.sim(n=80, list(ar=c(10, 0.2)), sd=4)
polyroot(c(1, -10, -0.2))
```

```
## [1] 0.0998008+0i -50.0998008+0i
```

Podemos ver que el grafico de la serie de tiempo muestra un comportamiento explosivo, comunmente subyacente en procesos no estacionarios.

Los graficos de las funciones de autocorrelacion simple y parcial permiten ver que los coeficientes se encuentran dentro de las barras de tolerancia por lo que son no significativamente distintos de cero, por lo tanto recordarian a un ruido blanco.

c) ¿El proceso es estacionario? Justifique su respuesta. Explique.

No, porque una de las raices de $(1-10 * B-0.2 * B^2)$, la funcion phi(B) se encuentra por dentro del círculo unitario complejo.

d) Proponga un proceso AR(2) estacionario y justifique por que el proceso propuesto es estacionario.

```
# AR(2) <- X_t=0, 1*X_t-1+0, 2*X_t-2+E_t
polyroot(c(1, -0.1, -0.2))
```

```
## [1] 2.0+0i -2.5+0i
```

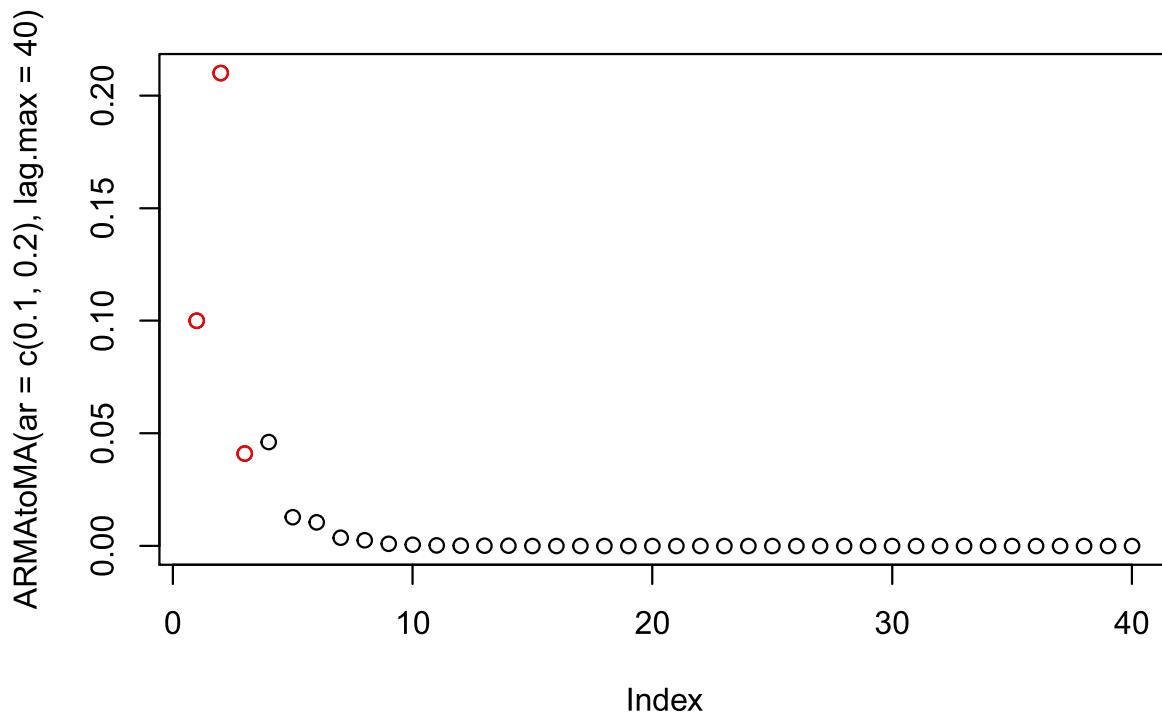
Si es estacionario porque las raíces de $(1-0,1 * B-0,2 * B^2)$, la función $\phi(B)$ se encuentran por fuera del círculo unitario complejo.

e) Para el proceso propuesto, calcule y grafique en R los 40 primeros coeficientes del desarrollo en serie de Taylor correspondiente a la expresión del proceso como promedio móvil de orden infinito.

```
ARMAtoMA(ar=c(0.1,0.2),lag.max = 40)
```

```
## [1] 1.000000e-01 2.100000e-01 4.100000e-02 4.610000e-02 1.281000e-02
## [6] 1.050100e-02 3.612100e-03 2.461410e-03 9.685610e-04 5.891381e-04
## [11] 2.526260e-04 1.430902e-04 6.483422e-05 3.510147e-05 1.647699e-05
## [16] 8.667992e-06 4.162198e-06 2.149818e-06 1.047421e-06 5.347058e-07
## [21] 2.629548e-07 1.332366e-07 6.591463e-08 3.323879e-08 1.650681e-08
## [26] 8.298439e-09 4.131205e-09 2.072808e-09 1.033522e-09 5.179138e-10
## [31] 2.584958e-10 1.294323e-10 6.464238e-11 3.235071e-11 1.616355e-11
## [36] 8.086496e-12 4.041359e-12 2.021435e-12 1.010415e-12 5.053286e-13
```

```
plot(ARMAtoMA(ar=c(0.1,0.2),lag.max = 40))
points(x=c(1,2,3),y=c(0.1,0.21,0.041),col='red')
```



Verificamos que los tres coeficientes calculados a mano coinciden con los calculados en R.

2)
e)

$$X_t = 0,1X_{t-1} + 0,2X_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = X_t - 0,1X_{t-1} - 0,2X_{t-2} = (1 - 0,1B - 0,2B^2)X_t$$

$$X_t = \frac{1}{1 - 0,1B - 0,2B^2} \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i \varepsilon_t = \alpha_0 \varepsilon_t + \alpha_1 B \varepsilon_t + \alpha_2 B^2 \varepsilon_t + \alpha_3 B^3 \varepsilon_t + \alpha_4 B^4 \varepsilon_t + \dots$$

$$\frac{1}{1 - 0,1B - 0,2B^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i \text{ con } \alpha_0 = 1$$

$$1 = (1 - 0,1B - 0,2B^2)(1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \alpha_3 B^3 + \alpha_4 B^4 + \dots)$$

$$1 = 1 - 0,1B - 0,2B^2 + \alpha_1 B - 0,1\alpha_1 B^2 - 0,2\alpha_1 B^3 + \alpha_2 B^2 - 0,1\alpha_2 B^3 - 0,2\alpha_2 B^4 + \alpha_3 B^3 - 0,1\alpha_3 B^4 - 0,2\alpha_3 B^5 + \dots$$

$$0 = -0,1 + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0,1$$

$$0 = -0,2 - 0,1\alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0,1\alpha_1 + 0,2 = 0,21$$

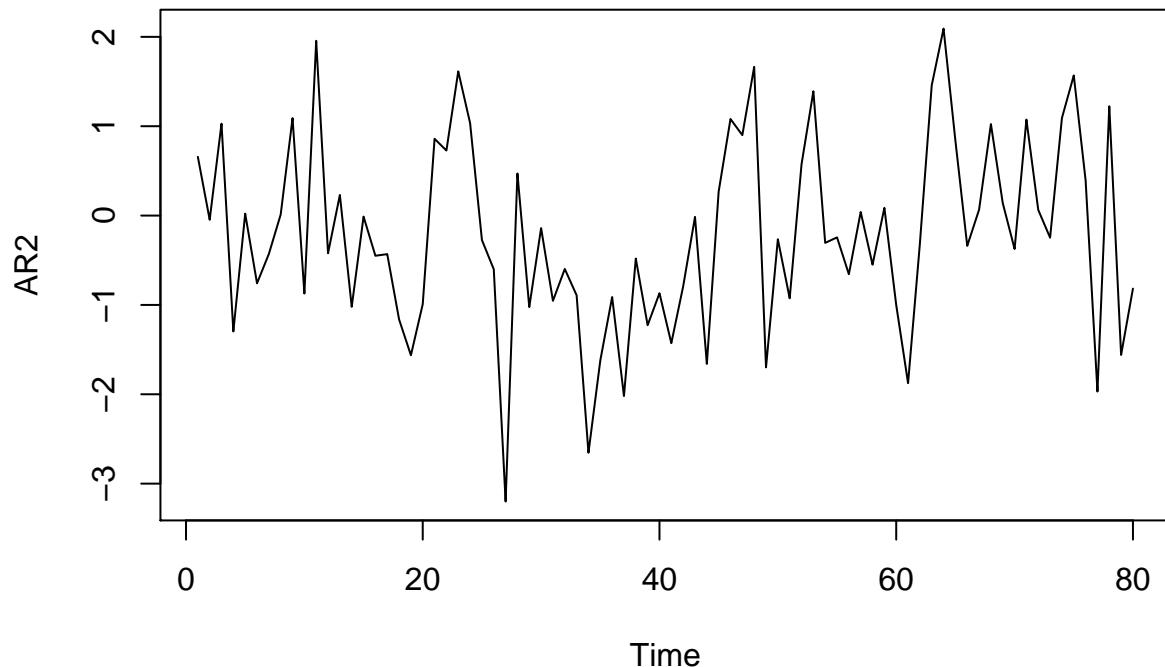
$$0 = -0,2\alpha_1 - 0,1\alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = 0,2\alpha_1 + 0,1\alpha_2 = 0,041$$

$\alpha_1 = 0,1$
$\alpha_2 = 0,21$
$\alpha_3 = 0,041$

Primeros tres coeficientes calculados

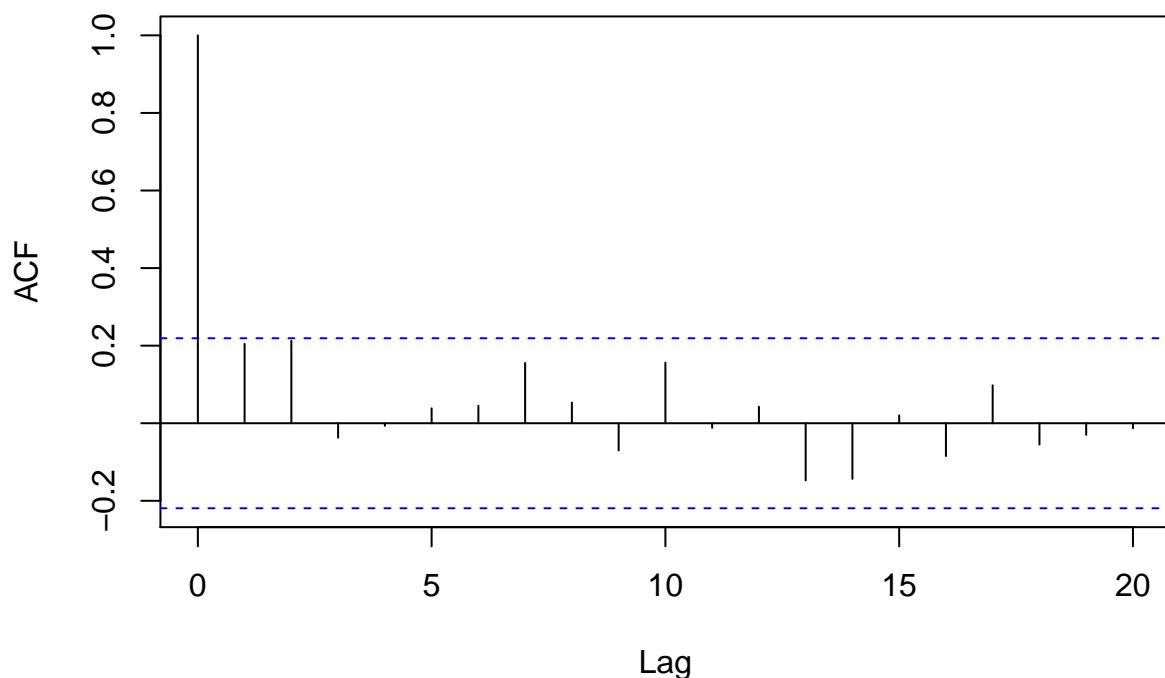
f) A partir del proceso propuesto, genere una serie de tiempo de longitud 80, grafique la serie y los primeros 20 valores de las funciones de autocorrelacion muestral simple y parcial de la serie simulada. Compare con b).

```
AR2 <- arima.sim(n=80, model=list(ar=c(0.1, 0.2)))
plot(AR2)
```



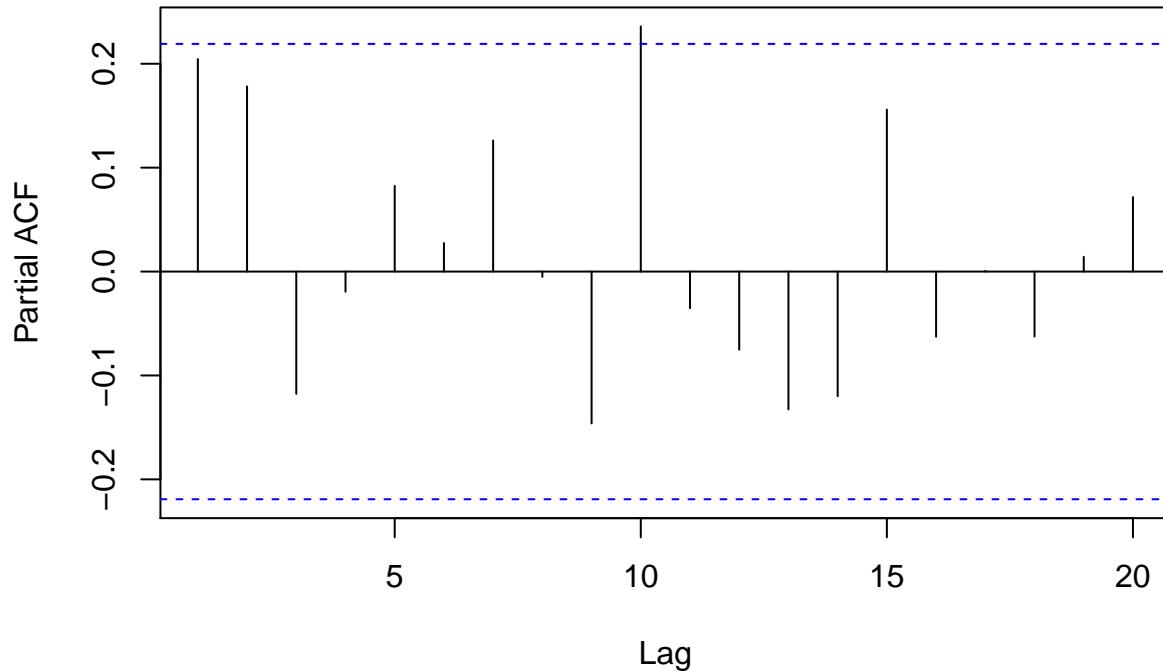
```
acf(AR2, lag.max = 20)
```

Series AR2



```
pacf(AR2, lag.max = 20)
```

Series AR2



```
acf(AR2,lag.max = 20,plot = F)
```

```
##  
## Autocorrelations of series 'AR2', by lag  
##  
##      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10  
##  1.000  0.205  0.213 -0.037 -0.007  0.038  0.045  0.155  0.053 -0.070  0.156  
##     11      12      13      14      15      16      17      18      19      20  
## -0.012  0.043 -0.147 -0.143  0.020 -0.085  0.098 -0.055 -0.030 -0.013
```

Los graficos de las funciones de autocorrelacion simple y parcial, permiten observar un comportamiento mas heterogeneo, mostrando cierta relacion entre los valores de la serie en los distintos lag de tiempo.

Mientras que la serie ajustada en b) no muestra ningun tipo de relacion entre los valores registrados a lo largo de la serie.

En el proceso ajustado en b) los valores son de magnitudes tan diferentes que no se encuentra correlacion alguna, mientras que los valores ajustados en f) tienen una desviacion constante por ser una serie estacionaria, mostrando cierta correlacion entre ellos.

g)

g) Sabiendo que

$$\pi_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{k-2} & p_1 \\ p_1 & 1 & p_1 & \dots & p_{k-3} & p_2 \\ p_2 & p_1 & 1 & \dots & p_{k-4} & p_3 \\ \vdots & & & & \ddots & p_m \\ p_m & p_{m-1} & p_{m-2} & \dots & p_1 & p_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{k-2} & p_{k-1} \\ p_1 & 1 & p_1 & \dots & p_{k-3} & p_{k-2} \\ p_2 & p_1 & 1 & \dots & p_{k-4} & p_{k-3} \\ \vdots & & & & \ddots & p_1 \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\pi_1 = \frac{p_1}{1} = p_1 = \frac{\delta_1}{\delta_0}$$

$$\delta_k^1 = E(X_t X_{t+k}) - E(X_t)E(X_{t+k})$$

$$E(X_t) = 0 \text{ porque } X_t \text{ puede ser escrito como } \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i E_t$$

$$\text{y } E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i E_t\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i E(E_t) = 0$$

$$\text{Entonces } \delta_k^1 = E(X_t X_{t+k})$$

$$\delta_1^1 = E(X_t X_{t+1}) = E((\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}) X_{t+1}) = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t+1}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t+1})$$

$$\delta_1^1 = \phi_1 \delta_0^1 + \phi_2 \delta_1^1$$

$$\frac{\delta_1^1}{\delta_0^1} = \phi_1 \frac{\delta_0^1}{\delta_0^1} + \phi_2 \frac{\delta_1^1}{\delta_0^1}$$

$$P_1 = \phi_1 + \phi_2 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\text{Como } \pi_1 = P_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.1}{1-0.2} = 0.125$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{p_2 - p_1^2}{1 - p_1^2}$$

$$P_2 = \frac{\delta_2^1}{\delta_0^1}$$

$$\hat{Y}_2 = E(X_+ X_{+2}) = E((\phi_1 X_{+1} + \phi_2 X_{+2}) X_{+2})$$

$$\hat{Y}_2 = \phi_1 E(X_{+1} X_{+2}) + \phi_2 E(X_{+2} X_{+2})$$

$$\hat{Y}_2 = \phi_1 \hat{Y}_1 + \phi_2 \hat{Y}_0$$

$$\frac{\hat{Y}_2}{\hat{Y}_0} = \phi_1 \frac{\hat{Y}_1}{\hat{Y}_0} + \phi_2 \frac{\hat{Y}_0}{\hat{Y}_0}$$

$$P_2 = P_1 \phi_1 + \phi_2$$

$$P_2 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \phi_1 + \phi_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2} = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1-\phi_2}$$

$$P_2 = \frac{0,1^2 + 0,2 - 0,2^2}{1-0,2} = \frac{0,01 + 0,2 - 0,04}{0,8} = 0,2125$$

$$\Pi_2 = \frac{P_2 - P_1^2}{1 - P_1^2} = \frac{0,2125 - 0,125^2}{1 - 0,125^2} = 0,2 = \phi_2$$

$\Pi_3 = 0$ porque para todo AR(p) todo Π_k con $k > p$ es 0.

Π_k	$\begin{cases} \Pi_k = 0,125 & \text{si } k=1 \\ \Pi_k = 0,2 & \text{si } k=2 \\ \Pi_k = 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$
---------	---

EJERCICO 3

a) Simule 500 realizaciones del proceso $X_t + 0.4X_{t-1} = \epsilon_t$, donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco con varianza igual a 4.

```
MA1 <- arima.sim(n=500, model = list(ma=-0.4), sd=2)
```

b) ¿Es el proceso simulado en a) estacionario? ¿Es invertible? Justifique sus respuestas.

Si, el proceso simulado en a) es estacionario porque todo proceso MA(q) es estacionario.

```
polyroot(c(1, -0.2))
```

```
## [1] 5+0i
```

Es invertible porque la raíz del polinomio $\text{tita}(B)$ está fuera del círculo unitario complejo o, lo que es lo mismo, el valor absoluto del coeficiente tita es menor a uno.

c) Calcule los primeros 10 valores de las funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales de la serie simulada. Compare estos valores con los de las respectivas funciones teóricas del proceso.

```
acf(MA1, lag.max = 10, plot = F)
```

```
##  
## Autocorrelations of series 'MA1', by lag  
##  
##      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10  
##  1.000 -0.353  0.016 -0.108  0.139 -0.104  0.068 -0.036  0.070 -0.079  0.010
```

```
pacf(MA1, lag.max = 10, plot = F)
```

```
##  
## Partial autocorrelations of series 'MA1', by lag  
##  
##      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10  
## -0.353 -0.124 -0.168  0.044 -0.058  0.017  0.003  0.053 -0.021 -0.035
```

Los coeficientes calculados a mano y con el R son similares.

Comparamos los valores de los coeficientes de la función de autocorrelación parcial calculados a mano con los obtenidos por el modelo.

```

ti <- -0.4
pi <- 0
pi[1]=(-1)^(2)*ti^1/(1+ti^2)
pi[2]=(-1)^(3)*ti^2/(1+ti^2+ti^4)
pi[3]=(-1)^(4)*ti^3/(1+ti^2+ti^4+ti^6)
pi[4]=(-1)^(5)*ti^4/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8)
pi[5]=(-1)^(6)*ti^5/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10)
pi[6]=(-1)^(7)*ti^6/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10+ti^12)
pi[7]=(-1)^(8)*ti^7/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10+ti^12+ti^14)
pi[8]=(-1)^(9)*ti^8/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10+ti^12+ti^14+ti^16)
pi[9]=(-1)^(10)*ti^9/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10+ti^12+ti^14+ti^16+ti^18)
pi[10]=(-1)^(11)*ti^10/(1+ti^2+ti^4+ti^6+ti^8+ti^10+ti^12+ti^14+ti^16+ti^18+ti^20)

pacfMA1 <- pacf(MA1,lag.max = 10,plot = F)
DT::datatable(round(cbind(pi,pacfMA1$acf),6))

```

Show 10 entries	Search:
pi	V2
-0.344828	-0.353223
-0.134953	-0.124188
-0.053795	-0.168392
-0.021506	0.044357
-0.008602	-0.05775
-0.003441	0.016949
-0.001376	0.003035
-0.000551	0.053196
-0.00022	-0.020531
-0.000088	-0.034877

Showing 1 to 10 of 10 entries

Previous 1 Next

$$3) c) X_t = -0,4E_{t-1} + E_t \quad \text{con} \quad \sigma_e^2 = 4$$

$$E(X_t) = E(-0,4E_{t-1} + E_t) = -0,4E(E_{t-1}) + E(E_t)$$

$$E(X_t) = 0$$

$$Var(X_t) = Var(-0,4E_{t-1} + E_t) = 0,16Var(E_{t-1}) + Var(E_t)$$

$$Var(X_t) = \gamma_0^1 = 4,64$$

$$P_k = \frac{\delta_k}{\gamma_0^1} = \frac{E(X_t X_{t-k})}{\gamma_0^1}$$

$$P_1 = \frac{E(X_t X_{t-1})}{\gamma_0^1} = \frac{E((\theta E_{t-1} + E_t)(\theta E_{t-2} + E_{t-1}))}{\gamma_0^1}$$

$$P_1 = \frac{E(\theta^2 E_{t-1} E_{t-2} - \theta E_{t-1} E_{t-2} - \theta E_t E_{t-2} + E_t E_{t-1})}{\gamma_0^1}$$

$$P_1 = \frac{\theta \sigma_e^2}{\gamma_0^1} = \frac{\theta \sigma_e^2}{(1+\theta^2)\cancel{\sigma_e^2}} = \frac{-0,4}{1,16} \approx -0,3448$$

$$P_2 = \frac{E(X_t X_{t-2})}{\gamma_0^1} = \frac{E((-0,4E_{t-1} + E_t)(-0,4E_{t-2} + E_{t-1}))}{\gamma_0^1}$$

$$P_2 = 0$$

$$P_k = \begin{cases} P_k = 1 & \text{si } k=0 \\ P_k = -0,3448 & \text{si } k=1 \\ P_k = 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_1 = P_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \approx -0,3448$$

$$\Pi_2 = \frac{P_2 - P_1^2}{1 - P_1^2} = \frac{-P_1^2}{1 - P_1^2} = \frac{-\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^2} = \frac{-\frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}}{\frac{(1+\theta^2)^2 - \theta^2}{(1+\theta^2)^2}} = \frac{-\theta^2}{1+2\theta^2+\theta^4-\theta^2}$$

$$= \frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4} = \frac{-(-0,4)^2}{1+(-0,4)^2+(-0,4)^4} \approx -0,1350$$

$$\Pi_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & 1 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 1 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & 1 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & 0 \\ P_1 & 1 & P_1 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{vmatrix}} = \frac{P_1^3}{1-2P_1^2} = \frac{\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^3}{1-2\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^2}$$

$$\dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 1 & P_1 \\ P_2 & P_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & P_1 & 0 \\ P_1 & 1 & P_1 \\ 0 & P_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2P_1^2 = 1 - 2\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^2$$

$$= \frac{\frac{\theta^3}{(1+\theta^2)^3}}{\frac{(1+\theta^2)^2 - 2\theta^2}{(1+\theta^2)^2}} = \frac{\theta^3}{(1+\theta^4)(1+\theta^2)} = \frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6} \approx 0,0538$$

$$\Pi_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_2 & P_1 \\ P_1 & 1 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 & 1 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_1 & P_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & 1 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 & 1 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & 0 & P_1 \\ P_1 & 1 & P_1 & 0 \\ 0 & P_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & P_1 & 0 & 0 \\ P_1 & 1 & P_1 & 0 \\ 0 & P_1 & 1 & P_1 \\ 0 & 0 & P_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-P_1(P_1^3)}{1(1-2P_1^2) - P_1(P_1 - P_1^3)}$$

$$= \frac{-P_1^4}{1-2P_1^2-P_1^2+P_1^3} = \frac{-P_1^4}{1-3P_1^2+P_1^4} = \frac{-\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^4}{1-3\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)^4}$$

$$= \frac{-\frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^4}}{\frac{(1+\theta^2)^4 - 3\theta^2(1+\theta^2)^2 + \theta^4}{(1+\theta^2)^4}} = \frac{-\theta^4}{(1+2\theta^2+\theta^4)^2 - 3\theta^2(1+2\theta^2+\theta^4) + \theta^4}$$

$$= \frac{-\theta^4}{1+4\theta^2+2\theta^4+4\theta^6+4\theta^8-\theta^4-3\theta^2-6\theta^4-3\theta^6+\theta^4} = \frac{-\theta^4}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6+\theta^8} \approx -0,0215$$

Entonces viendo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \\ \Pi_2 = \frac{-\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4} \\ \Pi_3 = \frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6} \\ \Pi_4 = \frac{-\theta^4}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6+\theta^8} \end{array} \right.$$

Se verifica que $\Pi_k = \frac{(-1)^{k+1} \theta^k}{1+\theta^2+\theta^4+\dots+\theta^{2k}}$

$$\text{Se verifica que } \pi_k = \frac{(-1)^{k+1} \theta^k}{1+\theta^2+\theta^4+\dots+\theta^{2k}}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} \pi_1 \approx -0,3448 \\ \pi_2 \approx -0,1349 \\ \pi_3 \approx -0,0538 \\ \pi_4 \approx -0,0215 \\ \pi_5 \approx -0,0086 \\ \pi_6 \approx -0,0034 \\ \pi_7 \approx -0,0014 \\ \pi_8 \approx -0,0005 \\ \pi_9 \approx -0,0002 \\ \pi_{10} \approx -0,00008 \end{cases}$$

EJERCICIO 4

Considere el proceso X definido por $X_t=0.2X_{t-1}-0.3X_{t-2}+E_t$, donde E_t es un proceso de ruido blanco con distribucion normal con media 0 y varianza 4.

- a) Genere 100 realizaciones del proceso X.

```
AR2 <- arima.sim(n=100,model = list(ar=c(0.2,-0.3)),sd=2)
```

- b) A partir de la serie generada en a), estime por minimos cuadrados los parametros del modelo. Compare con los verdaderos valores de los parametros.

```
arima(AR2,c(2,0,0),method = "CSS")#Usando la función ARIMA
```

```
##  
## Call:  
## arima(x = AR2, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")  
##  
## Coefficients:  
##          ar1      ar2  intercept  
##     0.2804 -0.3829    -0.3139  
## s.e.  0.0918  0.0931     0.1907  
##  
## sigma^2 estimated as 4.414:  part log likelihood = -216.13
```

```
# Calculo manual  
covAR2 <- acf(AR2,type='covariance',plot=F)  
gamma <- matrix(c(covAR2$acf[1],covAR2$acf[2],covAR2$acf[2],covAR2$acf[1]),nrow = 2)  
estAR2<- solve(gamma)%*%c(covAR2$acf[2],covAR2$acf[3])  
  
DT::datatable(round(cbind(c(0.2,-0.3),estAR2),4))
```

Show	10	entries	Search:
V1			V2
0.2			0.2919
-0.3			-0.3724

Showing 1 to 2 of 2 entries

Previous Next

Los valores obtenidos por minimos cuadrados son similares a los teoricos.

c) Genere 10 observaciones de un ruido blanco S, con distribucion normal, con media cero y varianza 64: S1,S2,..., S10.

```
Ruido <- rnorm(10,0,8)
```

d) Seleccione al azar, 10 observaciones xi1,xi2,...,xi10 de la serie generada en a) y reemplazelas en por xi1+ S1, xi2+S2, ..., xi10+S10, formando las i una nueva serie “contaminada” de 100 observaciones.

```
vector <- sample.int(100, 10)
AR2cont <- AR2
for (i in 1:10) {
  AR2cont[vector[i]] <- AR2[vector[i]]+Ruido[1]
}
```

e) Reestime por minimos cuadrados los parametros del modelo. Compare con b) y con los verdaderos valores de los parametros.

```
arima(AR2cont,c(2,0,0),method = "CSS")
```

```
##  
## Call:
```

```

## arima(x = AR2cont, order = c(2, 0, 0), method = "CSS")
##
## Coefficients:
##             ar1      ar2  intercept
##            0.2146 -0.2474   -0.8918
## s.e.    0.0966  0.0980    0.2653
##
## sigma^2 estimated as 7.501:  part log likelihood = -242.64

# 'A mano'
covAR2cont <- acf(AR2cont, type='covariance', plot=F)
gammacont <- matrix(c(covAR2cont$acf[1], covAR2cont$acf[2], covAR2cont$acf[2], covAR2cont$acf[1]), nrow = 2)
estAR2cont<- solve(gamma)%*%c(covAR2cont$acf[2], covAR2cont$acf[3])
# Comparamos los valores dados y los calculados a mano
DT:=datatable(round(cbind(c(0.2,-0.3), estAR2cont), 4))

```

Show 10 entries		Search: <input type="text"/>
V1	V2	
0.2	0.3469	
-0.3	-0.3781	

Showing 1 to 2 of 2 entries Previous Next

Los valores obtenidos por minimos cuadrados en la serie contaminada, se encuentran mas distanciados de los teoricos con respecto a la serie no contaminada.

PROBLEMA 5

Sea $\varepsilon = \{\varepsilon_t\}_t$ un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma^2 = 9$.

Consideré los modelos X, Y, Z con media cero, definiéndolos a continuación.

$$X_t = 0.3 X_{t-1} + 3 \varepsilon_{t-1} + 0.7 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.5B) Y_{t-1} = 0.2 Y_{t-2} + 4 Y_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - B) Z_t = 6 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- a) Determine qué tipo de proceso define X .
¿Es un proceso estacionario? ¿Es invertible? JUSTIFIQUE.

$$X_t = 0.3 X_{t-1} + 3 \varepsilon_{t-1} + 0.7 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.3B) X_t = (1 + 3B + 0.7B^2) \varepsilon_t$$

De esta manera podemos ver que X es un proceso autorregresivo de promedios móviles de orden 1 y 2 respectivamente y lo denotamos ARMA (1,2)

llamemos ahora:

$$\phi(B) = 1 - 0.3B \quad \text{y} \quad \theta(B) = 1 + 3B + 0.7B^2$$

Ej decir, $\phi(B) X_t = \theta(B) E_t$

Ahora bien, una condición suficiente para que este proceso sea estacionario es que las raíces de $\phi(B)$ sean todas de módulo menor que 1.

Notemos que: $\phi(B) = 1 - 0.3B = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} = 3.\overline{3} > 1$

$\therefore X$ es estacionario

Una condición suficiente para que este proceso sea invertible es que las raíces del polinomio $\theta(B)$ sean todas de módulo menor que 1.

Veamos: $\theta(B) = 1 + 3B + 0.7B^2$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 0.7 \cdot 1}}{1.4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 21.8}}{1.4} = \frac{-3 \pm \sqrt{6.2}}{1.4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{-3 - \sqrt{6.2}}{1.4} \approx -3.921 \\ b_2 = \frac{-3 + \sqrt{6.2}}{1.4} \approx -0.364 \end{cases}$$

Notemos que $|b_1| > 1$, sin embargo $|b_2| < 1$.

$\therefore X$ NO es invertible

b) Determine qué tipo de proceso define Y .

$$(1 - 0.5B) Y_{t-1} = 0.2 Y_{t-2} + 4 Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-1} - 0.5 Y_{t-2} = 0.2 Y_{t-2} + 4 Y_t + \varepsilon_t$$

$$-4 Y_t + Y_{t-1} - (0.5 + 0.2) Y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$-4 Y_t + Y_{t-1} - 0.7 Y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$\text{H) } Y_t - \frac{1}{4} Y_{t-1} + \frac{0.7}{4} Y_{t-2} = -\frac{1}{4} \varepsilon_t$$

$$Y_t - 0.25 Y_{t-1} + 0.175 Y_{t-2} = -0.25 \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\text{sea } \tilde{\varepsilon}_t = -0.25 \varepsilon_t, \quad t \in T$$

Mostraremos que $\{\tilde{\varepsilon}_t\}_t$ es un proceso de Ruido Blanco.

$$\bullet E(\tilde{\varepsilon}_t) = E(-0.25 \varepsilon_t) = -0.25 \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0 \text{ pues } \varepsilon_t \text{ es de ruido blanco}} = 0 \quad \forall t \in T$$

$$\bullet \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_t) = \text{Var}(-0.25 \varepsilon_t) = (-0.25)^2 \text{Var}(\varepsilon_t)$$
$$= 0.0625 \cdot 9 = 0.5625$$

$$\begin{aligned}\text{• } \text{cov}(\tilde{\epsilon}_i, \tilde{\epsilon}_j) &= \text{cov}(-0.25\epsilon_i, -0.25\epsilon_j) \\ &= (-0.25)(-0.25) \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) \\ &= 0.0625 \cdot \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j)\end{aligned}$$

$$\text{Si } i=j, \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 6\epsilon^2 = 9$$

$$\text{Si } i \neq j, \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$$

$$\therefore \text{cov}(\tilde{\epsilon}_i, \tilde{\epsilon}_j) = \begin{cases} 6\tilde{\epsilon}^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\therefore \{\tilde{\epsilon}_t\}_t$ es un proceso de ruido Blanco con varianza $6\tilde{\epsilon}^2 = 0.5625$

Volviendo a (1), tenemos entonces que:

$$(1 - 0.25B + 0.175B^2) Y_t = \tilde{\epsilon}_t$$

Llámemos $\epsilon_t := \tilde{\epsilon}_t$ (para mayor comodidad en la notación).

luego,

$$(1 - 0.25B + 0.175B^2) Y_t = \epsilon_t$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso de Ruido Blanco con varianza $b_\varepsilon^2 = 0.5625$

con lo podemos observar, Y es un proceso autoregresivo de orden 2 y lo notamos AR(2)

calcule la función de autocorrelación parcial de este proceso.

$$(1 - 0.25B + 0.175B^2) Y_t = \varepsilon_t$$

$$\text{sea } \phi(B) = 1 - 0.25B + 0.175B^2$$

¿Es Y un proceso estacionario?

Para esto, debemos analizar las raíces del polinomio $\phi(B)$ y ver que todas tengan módulo menor que 1.

$$b_{1,2} = \frac{0.25 \pm \sqrt{(-0.25)^2 - 4 \cdot (0.175) \cdot 1}}{0.35} = \frac{0.25 \pm \sqrt{0.0625 - 0.7}}{0.35}$$
$$= \frac{0.25 \pm \sqrt{0.6375} \cdot i}{0.35}$$

Luego,

$$b_1 = \frac{0.25 - \sqrt{0.6375} i}{0.35} \quad y \quad b_2 = \frac{0.25 + \sqrt{0.6375} i}{0.35}$$

son las raíces de $\phi(B)$.

Veamos,

$$|b_1| = \sqrt{\left(\frac{0.25}{0.35}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{0.6375}}{0.35}\right)^2} \approx 2.39 > 1$$

$$|b_2| = \sqrt{\left(\frac{0.25}{0.35}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{0.6375}}{0.35}\right)^2} \approx 2.39 > 1$$

Notemos que $|b_1| = |b_2|$ pues son raíces complejas conjugadas.

$\therefore Y_t$ es un proceso estacionario

En particular, sabemos que $E(Y_t) = \mu_Y \quad \forall t \in T$

Veamos ahora cuánto vale μ_Y .

$$(1 - 0.25 B + 0.175 B^2) Y_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t - 0.25 Y_{t-1} + 0.175 Y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$Y_t = 0.25 Y_{t-1} - 0.175 Y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(0.25 Y_{t-1} - 0.175 Y_{t-2} + \varepsilon_t) \\ \underbrace{\mu_Y}_{\mu_Y} &= 0.25 \underbrace{E(Y_{t-1})}_{\mu_Y} - 0.175 \underbrace{E(Y_{t-2})}_{\mu_Y} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_Y = 0.25\mu_Y - 0.175\mu_Y$$

$$\Rightarrow \mu_Y (1 - 0.25 + 0.175) = 0$$

$$\Rightarrow 0.925\mu_Y = 0 \Rightarrow \underline{\mu_Y = 0} \quad (3)$$

Para hallar las expresiones de las funciones teóricas de autocovarianzas y autocorrelación haremos lo siguiente:

Como recién vimos en (3), Y_t es un proceso estacionario y $\mu_Y = 0$.

Primero vamos a calcular la función de autocovarianza.

Para esto, primero vamos a multiplicar por Y_{t-k} ambos miembros de la expresión (2):

$$\begin{aligned} Y_t \cdot Y_{t-k} &= (0.25 Y_{t-1} - 0.175 Y_{t-2} + \varepsilon_t) Y_{t-k} \\ &= 0.25 Y_{t-1} Y_{t-k} - 0.175 Y_{t-2} Y_{t-k} + \varepsilon_t Y_{t-k} \end{aligned}$$

y ahora tomamos esperanza:

$$E(Y_t \cdot Y_{t-k}) = 0.25 E(Y_{t-1} \cdot Y_{t-k}) - 0.175 E(Y_{t-2} \cdot Y_{t-k}) + E(\varepsilon_t \cdot Y_{t-k}) \quad (4)$$

Notemos que:

$$E(Y_t \cdot Y_{t-k}) \stackrel{\text{def}}{=} C_Y(k) + \underbrace{E(Y_t)}_{=0} \cdot \underbrace{E(Y_{t-k})}_{=0} \quad \text{pues } \mu_Y = 0 \quad (5)$$

$$E(Y_{t-1} \cdot Y_{t+k}) = \delta_Y(k-1) + \underbrace{E(Y_{t-1})}_{=0} \cdot \underbrace{E(Y_{t+k})}_{=0} \quad (6)$$

$(t-1-t+k = k-1)$

$$E(Y_{t-2} \cdot Y_{t+k}) = \delta_Y(k-2) + \underbrace{E(Y_{t-2})}_{=0} \cdot \underbrace{E(Y_{t+k})}_{=0} \quad (7)$$

$(t-2 - t+k = k-2)$

Por otra parte,

$$Y_{t+k} = 0.25 Y_{t-k-1} - 0.175 Y_{t-k-2} + \varepsilon_{t+k}.$$

Ejdecir Y_{t+k} depende sólo de ε_{t+k} , así que

$$E(\varepsilon_t \cdot Y_{t+k}) = 0 \quad \forall k \geq 1 \quad (8)$$

Por lo tanto, de (4), (5), (6), (7) y (8) concluimos que:

$$\delta_Y(k) = 0.25 \delta_Y(k-1) - 0.175 \delta_Y(k-2) \quad \forall k \geq 1$$

o: $\underline{\delta_K = 0.25 \delta_{K-1} - 0.175 \delta_{K-2}} \quad \forall K \geq 1 \quad (9)$

Dividiendo esta expresión por δ_0 :

$$\rho_k = 0.25 \rho_{k-1} - 0.175 \rho_{k-2} \quad \forall k \geq 1 \quad (10)$$

Sabemos además que $f_k = \rho_{-k}$ por ser Y un proceso estacionario y como $\rho_0 = 1$, de (a) podemos ver que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.25 \rho_0 - 0.175 \rho_{-1} = 0.25 \underline{\rho_0} - 0.175 \rho_1 \\ &\rho_{-1} = \rho_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+0.175) \beta_1 = 0.25$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_1 = \frac{0.25}{1.175} \approx 0.213}$$

Si llamamos $\phi_1 = 0.25$ y $\phi_2 = -0.175$, $\beta_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$

De esta manera se pueden calcular en forma recursiva todos los β_k , partiendo de estos valores iniciales β_0 y β_1 mediante el uso reiterado de la ecuación en diferencias encontrada, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= 0.25 \beta_1 - 0.175 \beta_0 \underset{\equiv 1}{=} \phi_1 \beta_1 + \phi_2 = \phi_1 \cdot \frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_2 \\ &= \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{(0.25)^2 - 0.175(1+0.175)}{1+0.175} = \frac{0.0625 - 0.205625}{1.175}$$

$$\therefore \boxed{\beta_2 = \frac{-0.143125}{1.175} \approx -0.1218}$$

$$\text{y } \beta_{-2} = \beta_2.$$

Si quisieramos ahora encontrar una expresión general para β_k , basta con resolver la ecuación en diferencias homogénea de segundo orden:

$$f_k - 0.25 f_{k-1} + 0.175 f_{k-2} = 0$$

que tiene por ecuación característica, a la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 0.25x + 0.175 = 0$$

$$(x^2 - \phi_1 x - \phi_2 = 0)$$

con raíces características x_1, x_2 :

$$x_{1,2} = \frac{0.25 \pm \sqrt{(-0.25)^2 - 4 \cdot 0.175}}{2} = \frac{0.25 \pm \sqrt{0.0625 - 0.7}}{2}$$

$$= \frac{0.25 \pm \sqrt{0.6375}}{2} i = \frac{\phi_1^2 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \quad \begin{cases} \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0 \\ \phi_1^2 \pm \sqrt{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)} i \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{0.25 - \sqrt{0.6375}}{2} i \quad ; \quad x_2 = \frac{0.25 + \sqrt{0.6375}}{2} i$$

$$|x_1| = \sqrt{\left(\frac{0.25}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{0.6375}}{2}\right)^2}$$

$$|x_2| = \sqrt{\left(\frac{0.25}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{0.6375}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\phi_1^2}{4} + \frac{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)}{4}}$$

$$|x_1| = |x_2| \approx 0,4183$$

como x_1, x_2 son raíces complejas, es

$$f_k = R^k (c_1 \cos(k\lambda) + c_2 \sin(k\lambda))$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

donde

$$\bullet R = \sqrt{\frac{\Phi_1^2}{4} + \frac{-(\Phi_1^2 + 4\Phi_2)}{4}} = \sqrt{\frac{\Phi_1^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2}{4}} = \sqrt{-\Phi_2} = \sqrt{|\Phi_2|}$$

$$= |\alpha_1| = |\alpha_2| < 1$$

$$\bullet \lambda \text{ es tal que } \cos(\lambda) = \frac{\Phi_1}{2R} \quad (\lambda = \arccos\left(\frac{0.25}{2R}\right))$$

Ej decir que la función de autocorrelación tiene el comportamiento de una curva sinusoidal que se va amortiguando a medida que k aumenta.

Con respecto a la función de autocorrelación parcial, podemos ver que para $k \geq 3$, $\pi_k = 0$ ya que usando la igualdad (10) :

$$\beta_k = \phi_1 \beta_{k-1} + \phi_2 \beta_{k-2} \quad \text{con } \underline{\Phi_1 = 0.25 \text{ y } \Phi_2 = -0.175},$$

notamos que la última columna del determinante en el numerador de π_k es una combinación de las dos primeras columnas y en consecuencia, para $k \geq 3$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_k \\ \beta_1 & 1 & \dots & \beta_{k-3} & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-4} & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \dots & \beta_1 & \beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & (\Phi_1 + \Phi_2 \beta_1) \\ \beta_1 & 1 & \dots & \beta_{k-3} & (\Phi_1 \beta_1 + \Phi_2) \\ \beta_2 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-4} & (\Phi_2 \beta_2 + \Phi_2 \beta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \dots & \beta_1 & (\Phi_1 \beta_{k-1} + \Phi_2 \beta_{k-2}) \end{vmatrix} = 0$$

siendo además,

$$\pi_1 = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.25}{1.175}$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2} \right) - \frac{\phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2}}{1 - \frac{\phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\phi_1^2(1-\phi_2) + \phi_2(1-\phi_2) - \phi_2^2(1-\phi_2) - \phi_1^2}}{\cancel{(1-\phi_2)^2}} \\ \underline{\underline{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}} \\ \underline{\underline{(1-\phi_2)^2}}$$

$$= \frac{\phi_1^2\phi_2 + \phi_2 - \phi_2^2 - \phi_2^2 + \phi_2^3}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2} = \frac{\phi_1^2\phi_2 + \phi_2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2}$$

$$= \frac{\phi_2[-\phi_1^2 + 1 - 2\phi_2 + \phi_2^2]}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2} = \phi_2 = -0.175$$

Por lo tanto, podemos concluir que las autocorrelaciones parciales de este proceso γ son:

$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.25}{1.175} & \text{si } k=1 \\ \phi_2 = -0.175 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$
--

Esta función que calculó es teórica o muestral?

Es teórica!

¿Cómo se interpreta esta función?

Como pudimos notar la función de autocorrelación del este proceso γ , es sinusoidal que se va amortiguando a medida que avanza el retraso k .

Esta función γ y sus estimaciones muestrales no presentan rasgos que permitan identificar el orden del proceso AR.

Para ayudar a resolver este problema se introduce la función de autocorrelación parcial π :

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{Z}_L &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto \pi(k) = \pi_k\end{aligned}$$

$\pi(k)$ es la correlación parcial teórica entre Y_t e Y_{t-k} ; esto es, la dependencia lineal o influencia lineal de Y_{t-k} sobre Y_t , eliminando los efectos de $Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1}$ sobre Y_t .

c) Determina qué proceso define Z_t : Es un proceso estacionario? ¿Es invertible? JUSTIFICA.

$$(1-B)Z_t = 6\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Lo podemos reescribir como:

$$(1-B)Z_t = (1+6B)\epsilon_t$$

De esta manera podemos ver que Z es un proceso autorregresivo de promedios móviles de orden 1 y 1 respectivamente y lo denotamos ARMA (1,1)

Llámemos ahora:

$$\phi(B) = 1 - B \quad \text{y} \quad \theta(B) = 1 + 6B$$

Ej decir, $\phi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t$

Ahora bien, una condición suficiente para que este proceso sea estacionario es que las raíces de $\phi(B)$ sean todas de módulo menor que 1.

Notemos que: $\phi(B) = 1 - B = 0 \Leftrightarrow b = 1 \quad (|b| = 1)$

$\therefore Z$ NO es un proceso estacionario

Una condición suficiente para que este proceso sea invertible es que las raíces del polinomio $\theta(B)$ sean todas de módulo menor que 1.

$$\text{Voranses: } \Theta(B) = 1 + bB = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{B}$$

$$|\Gamma|b| = \frac{1}{6} < 1$$

$\therefore \underline{\mathbb{Z} \text{ NO es invertible}}$

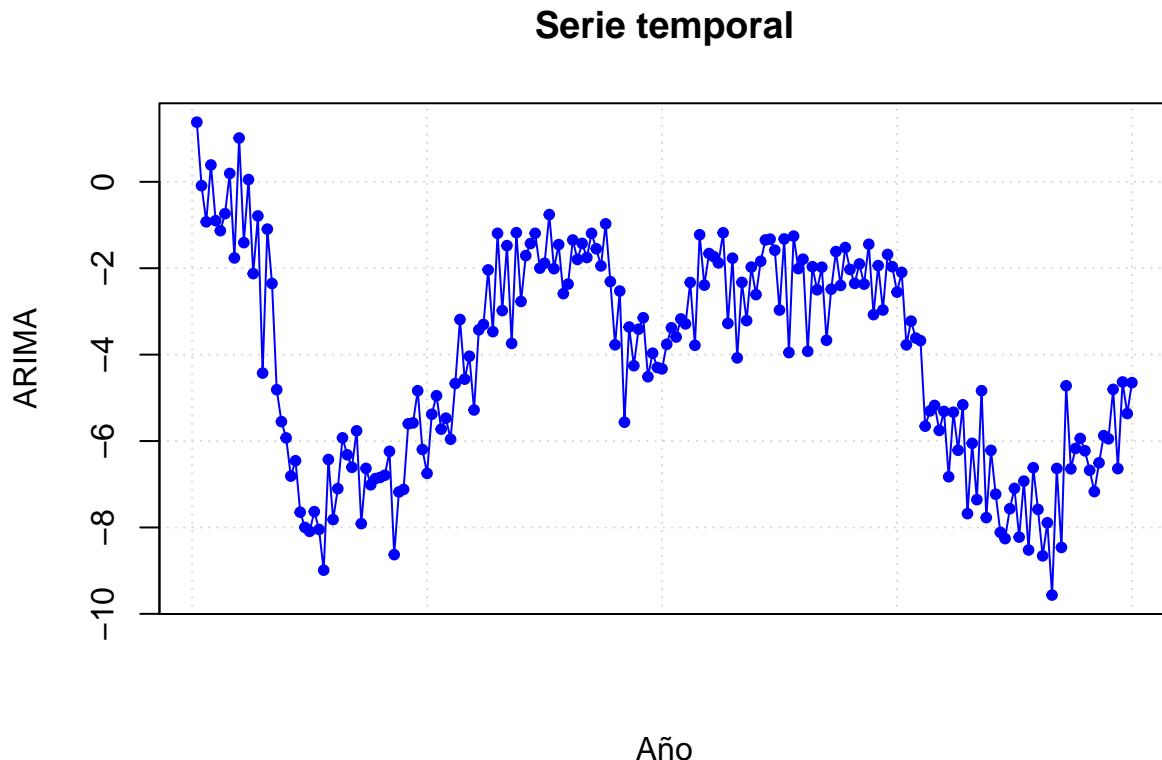
EJERCICIO 6

1) Cargo la base de datos ARIMA

```
library(readr)
arima <- read_csv("arima2.csv")
```

a) Graficamos la serie:

```
plot(arima$x, col = "blue", ylab = "ARIMA",
      main = "Serie temporal", xlab = "Año", type ="o", pch = 20,
      panel.first = grid (), xaxt = "n")
```



```
mean(arima$x)
```

```
## [1] -4.095578
```

A partir del grafico podemos establecer que la serie muestra una tendencia relativamente estable centrada en -4.09. En cuanto a la varianza podemos ver que tambien se mantiene relativamente constante a lo largo del tiempo. Puede verse una componente ciclica de picos seguidos por baches, pero esta es leve.

Podemos concluir que la serie parece ser estacionaria en media y varianza. Por este motivo se opta por no plantear ninguna transformacion.

Procedemos a aplicar el test de Dickey Fuller, que es una prueba de raiz unitaria y en este caso busca determinar la cantidad de diferencias no estacionarias a aplicar (ADF).

- H_0 : Hay raíz unitaria. (Serie no estacionaria)
- H_1 : No hay raíz unitaria. (Serie estacionaria)

Test de Dickey Fuller aplicada a las primeras tres diferencias no estacionarias.

```
library(tseries)
dtasa1<-diff(arima$x,lag=1,differences=1)
dtasa2<-diff(arima$x,lag=1,differences=2)
dtasa3<-diff(arima$x,lag=1,differences=3)
adf.test(dtasa1)

## Augmented Dickey-Fuller Test
## alternative: stationary
##
## Type 1: no drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -32.53   0.01
## [2,] 1 -13.23   0.01
## [3,] 2 -9.64    0.01
## [4,] 3 -7.79    0.01
## [5,] 4 -6.34    0.01
## Type 2: with drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -32.49   0.01
## [2,] 1 -13.21   0.01
## [3,] 2 -9.65    0.01
## [4,] 3 -7.80    0.01
## [5,] 4 -6.34    0.01
## Type 3: with drift and trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -32.47   0.01
## [2,] 1 -13.20   0.01
## [3,] 2 -9.66    0.01
## [4,] 3 -7.81    0.01
## [5,] 4 -6.34    0.01
## ----
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

adf.test(dtasa2)

## Augmented Dickey-Fuller Test
## alternative: stationary
##
## Type 1: no drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -47.7    0.01
## [2,] 1 -21.9    0.01
```

```

## [3,] 2 -16.6 0.01
## [4,] 3 -14.4 0.01
## [5,] 4 -12.1 0.01
## Type 2: with drift no trend
##      lag ADF p.value
## [1,] 0 -47.5 0.01
## [2,] 1 -21.8 0.01
## [3,] 2 -16.5 0.01
## [4,] 3 -14.4 0.01
## [5,] 4 -12.0 0.01
## Type 3: with drift and trend
##      lag ADF p.value
## [1,] 0 -47.4 0.01
## [2,] 1 -21.8 0.01
## [3,] 2 -16.5 0.01
## [4,] 3 -14.3 0.01
## [5,] 4 -12.0 0.01
## ----
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

```

```
adf.test(dtasa3)
```

```

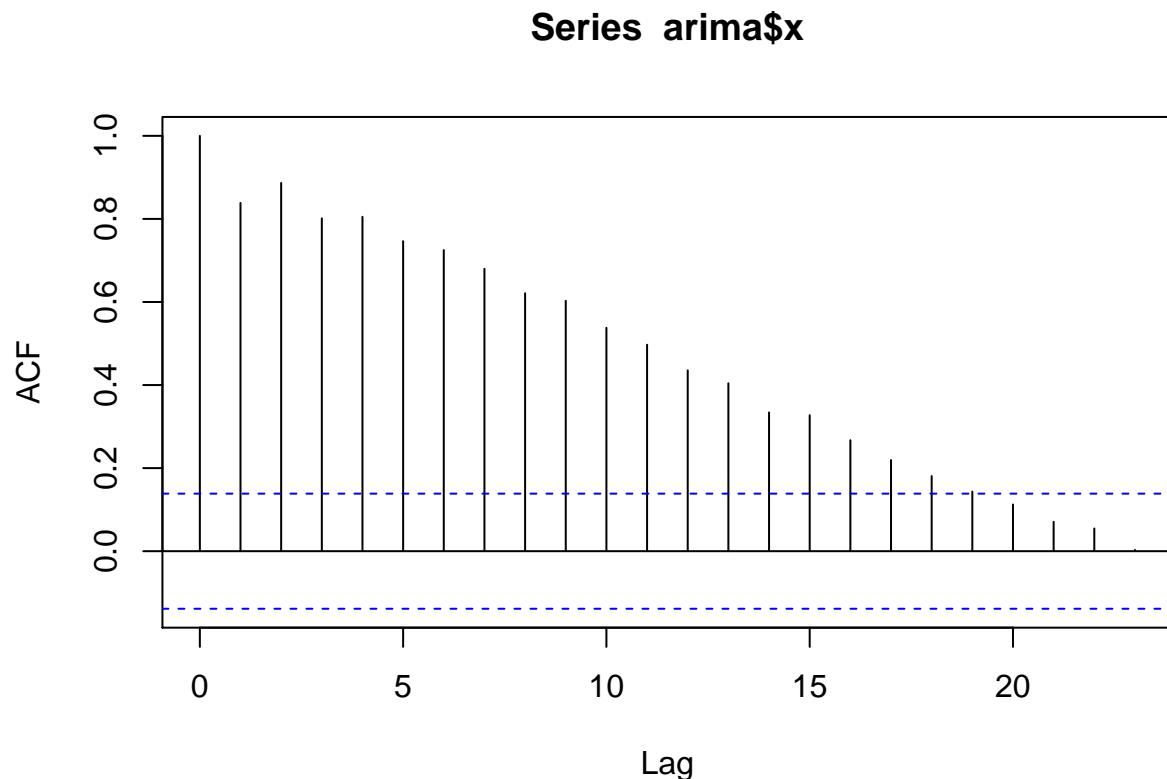
## Augmented Dickey-Fuller Test
## alternative: stationary
##
## Type 1: no drift no trend
##      lag ADF p.value
## [1,] 0 -56.8 0.01
## [2,] 1 -27.4 0.01
## [3,] 2 -20.4 0.01
## [4,] 3 -18.0 0.01
## [5,] 4 -14.6 0.01
## Type 2: with drift no trend
##      lag ADF p.value
## [1,] 0 -56.6 0.01
## [2,] 1 -27.4 0.01
## [3,] 2 -20.3 0.01
## [4,] 3 -18.0 0.01
## [5,] 4 -14.6 0.01
## Type 3: with drift and trend
##      lag ADF p.value
## [1,] 0 -56.5 0.01
## [2,] 1 -27.3 0.01
## [3,] 2 -20.3 0.01
## [4,] 3 -17.9 0.01
## [5,] 4 -14.5 0.01
## ----
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

```

La muestra reune evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5%, por lo tanto se acepta que no hay raíz unitaria para ninguna de las diferenciaciones no estacionarias propuestas.

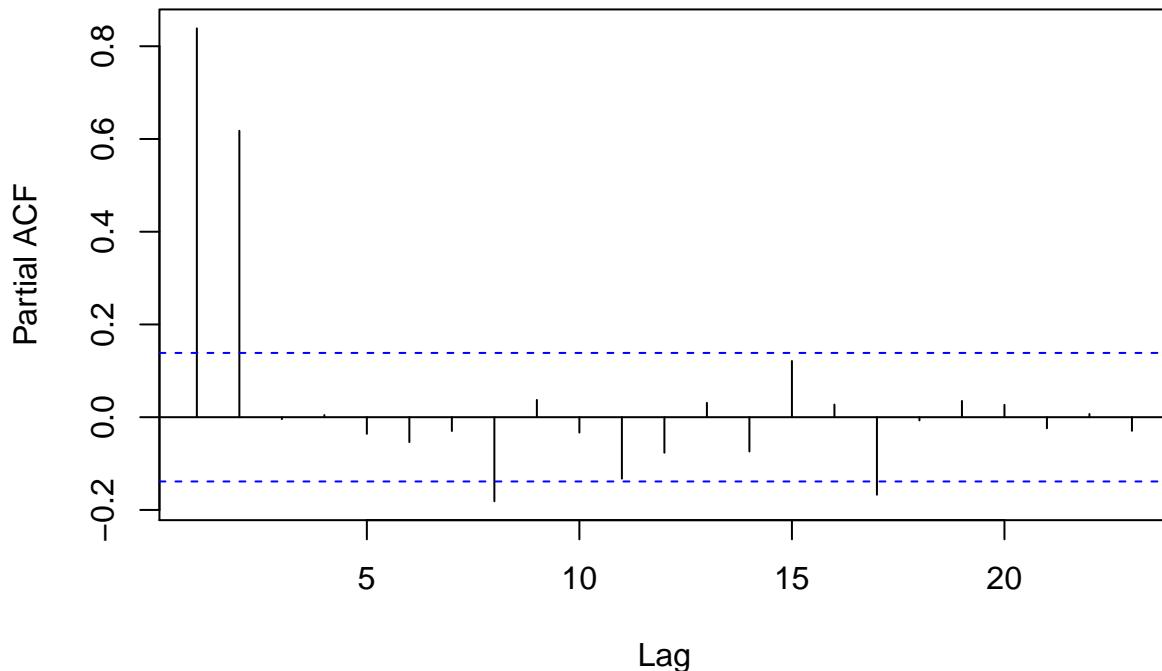
b) Grafico la funcion de autocorrelacion simple y funcion de autocorrelacion parcial:

```
acf(arima$x)
```



```
pacf(arima$x)
```

Series arima\$x



Podemos apreciar que la funcion de autocorrelacion simple se atenua muy lentamente. Por otra parte, la funcion de autocorrelacion parcial cae abruptamente luego del lag 2.

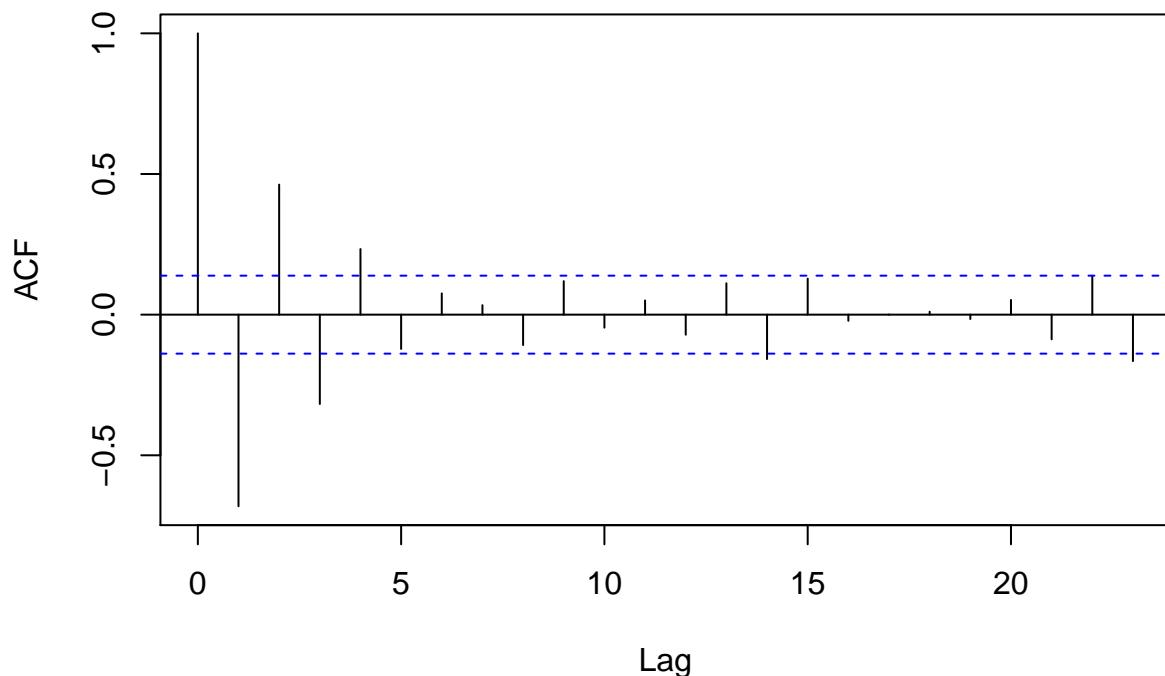
La caida suave de la funcion de autocorrelacion simple y abrupta de la funcion de autocorrelacion parcial, indican que posiblemente podriamos encontrarnos frente a un modelo autorregresivo..

Propuestas:

Como primer modelo proponemos un AR(1):

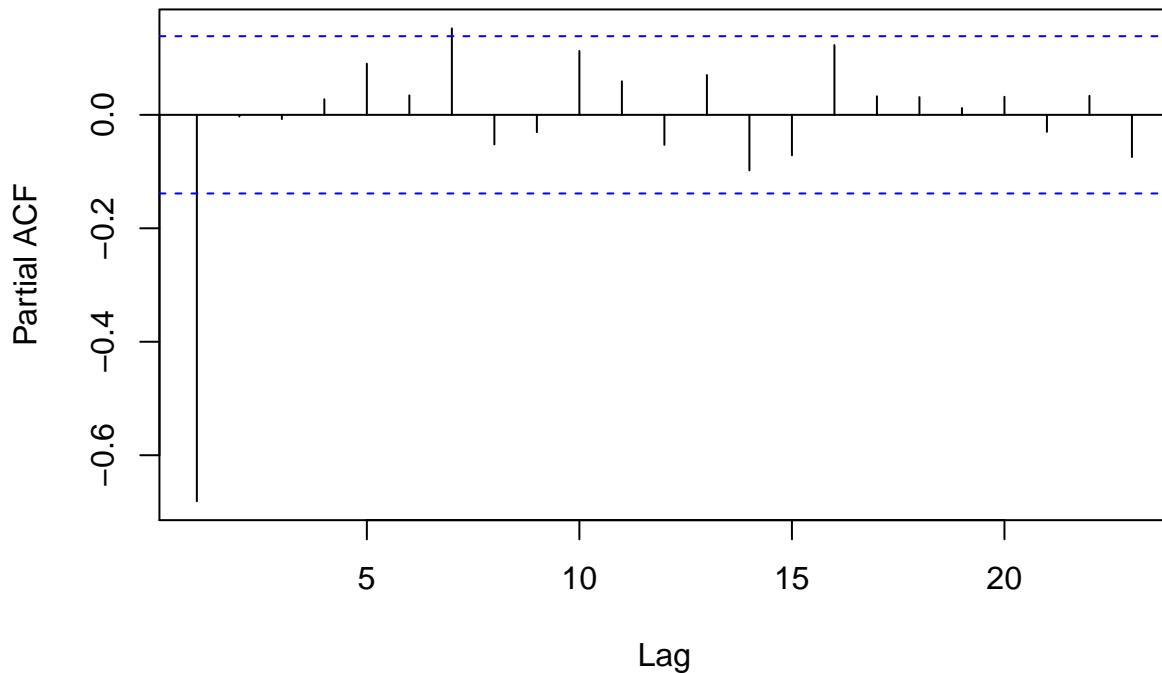
```
fit1 <- arima(arima$x, order=c(p=1, d=0, q=0), include.mean = F)
res1 <- fit1$residuals
acf(res1)
```

Series res1



```
pacf(res1)
```

Series res1

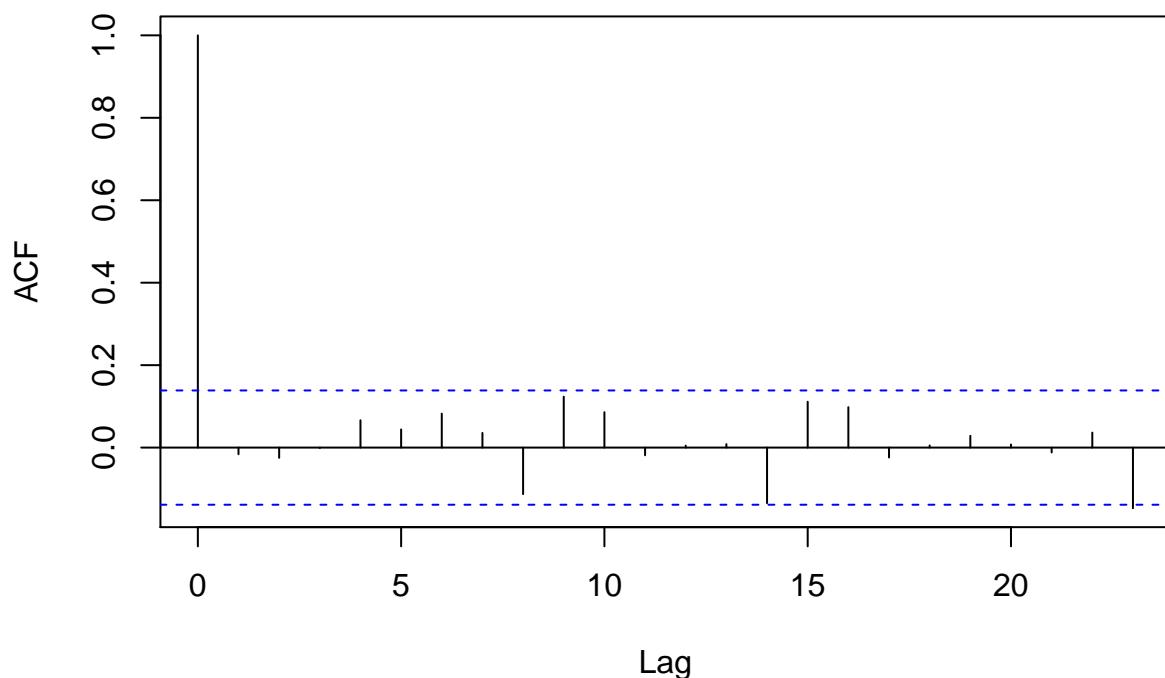


Podemos apreciar que la función de autocorrelación simple sigue atenuándose lentamente con coeficientes significativos y además la función de autocorrelación parcial cae abruptamente luego del primer lag.

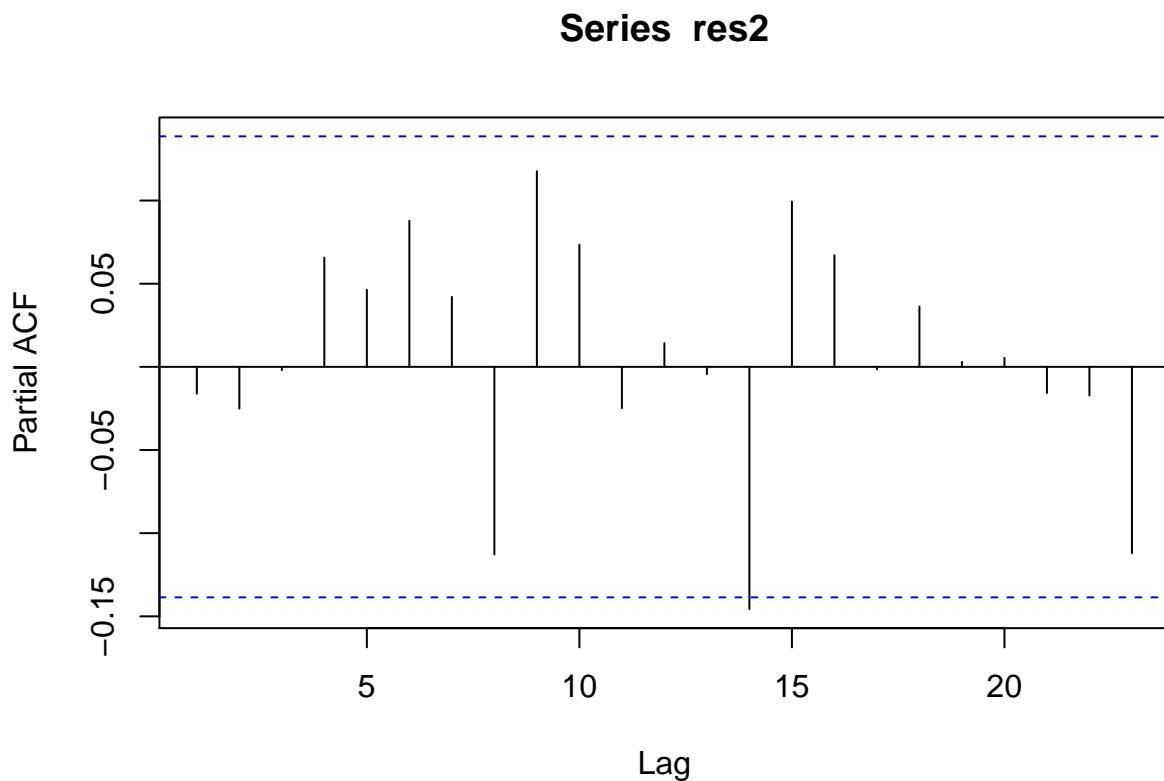
Por este motivo procederemos a ajustar un AR(2) y analizaremos los resultados.

```
fit2 <- arima(arima$x, order=c(p=2, d=0, q=0), include.mean = F)
res2 <- fit2$residuals
acf(res2)
```

Series res2



```
pacf(res2)
```



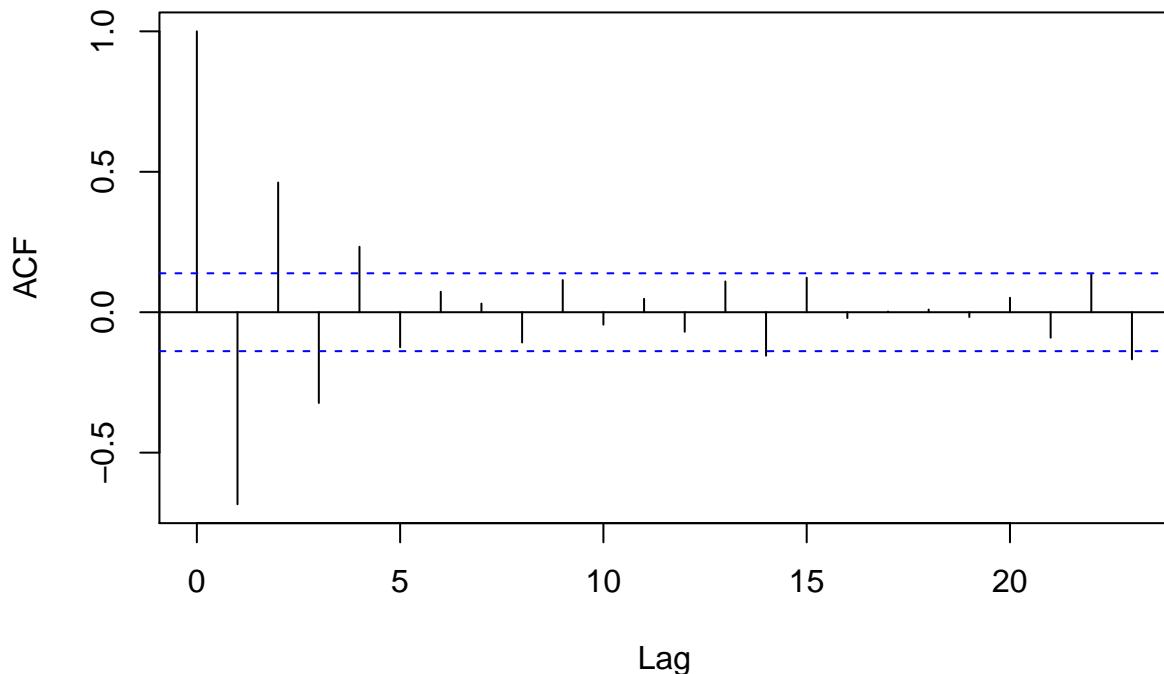
A partir del grafico de los residuos podemos ver que todos los coeficientes estimados tanto en la funcion de autocorrelacion simple como en la parcial quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no singificativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco y que el modelo propuesto ajusta bien a los datos.

c) Propuesta alternativa:

A pesar de las sugerencias de la prueba de Dickey Fuller de no incluir una diferenciacion no estacional, podemos ver a partir del primer grafico de la serie una leve tendencia negativa, que optamos por considerar insignificante desde un comienzo. Por lo tanto como modelo alternativo propondremos un AR incluyendo en este caso una diferencia no estacionalaria de orden 1.

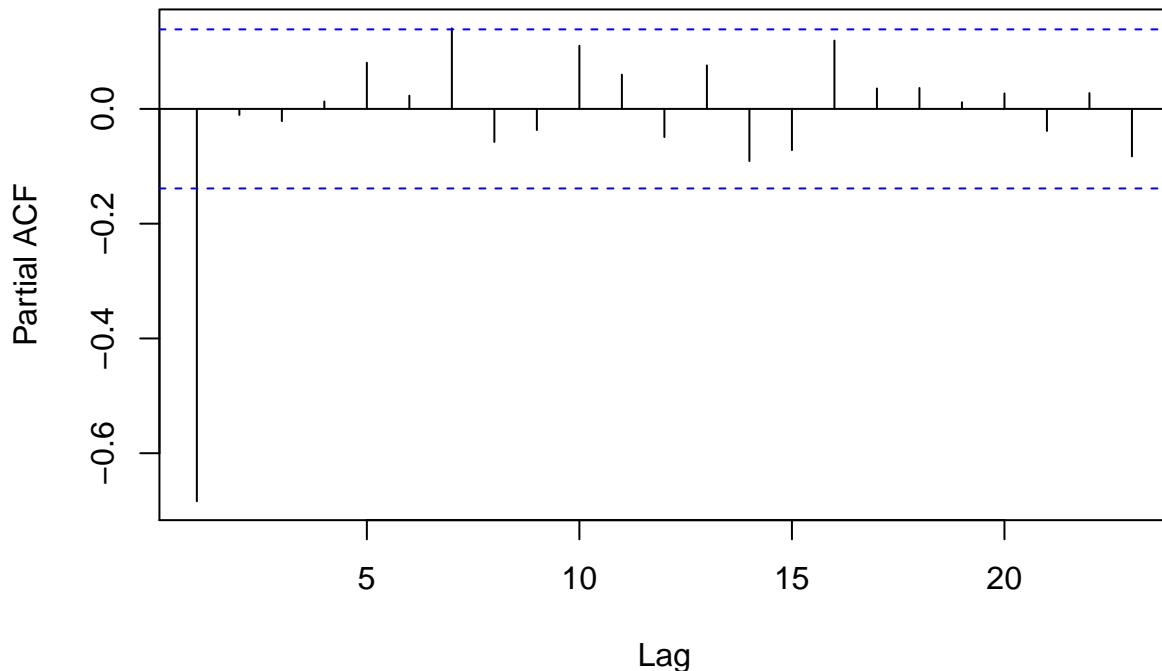
```
fit3 <- arima(arima$x, order=c(p=0, d=1, q=0), include.mean = F)
acf(fit3$residuals)
```

Series fit3\$residuals



```
pacf(fit3$residuals)
```

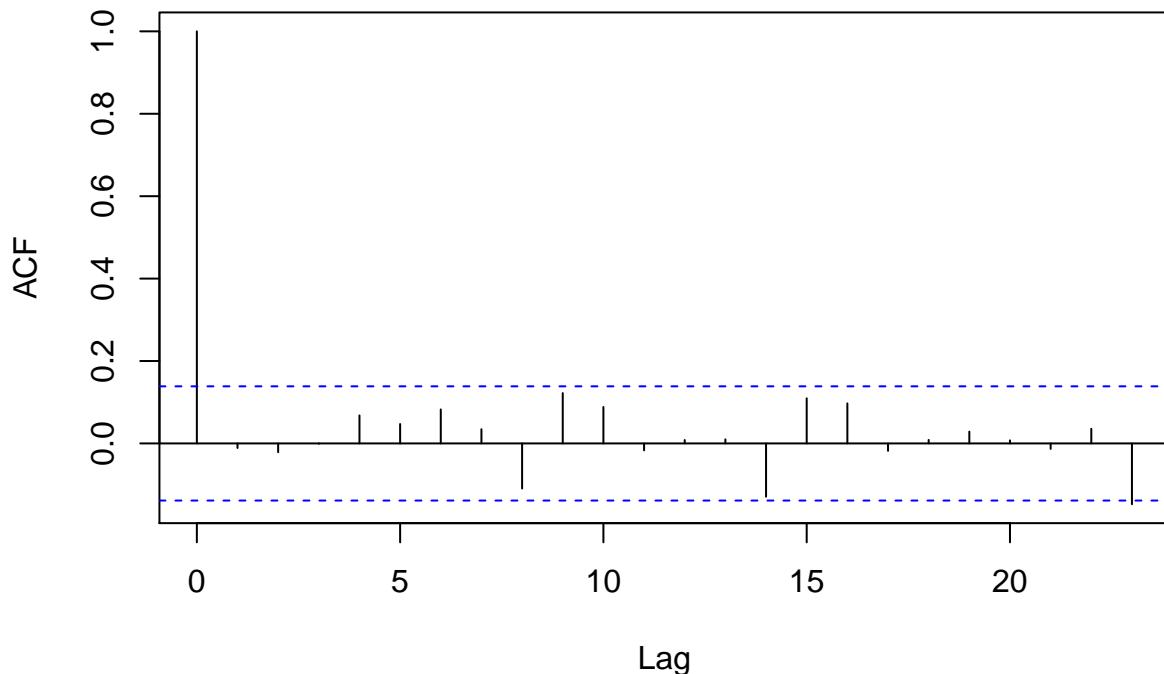
Series fit3\$residuals



El grafico de la funcion de autocorrelacion simple sugiere un decaimineto suave a cero, mientras que la funcion de autocorrelacion parcial, muestra un coeficiente notablemente significativo en el lag 1, esto insinua que estamos en precencia de un modelo autorregresivo de orden 1.

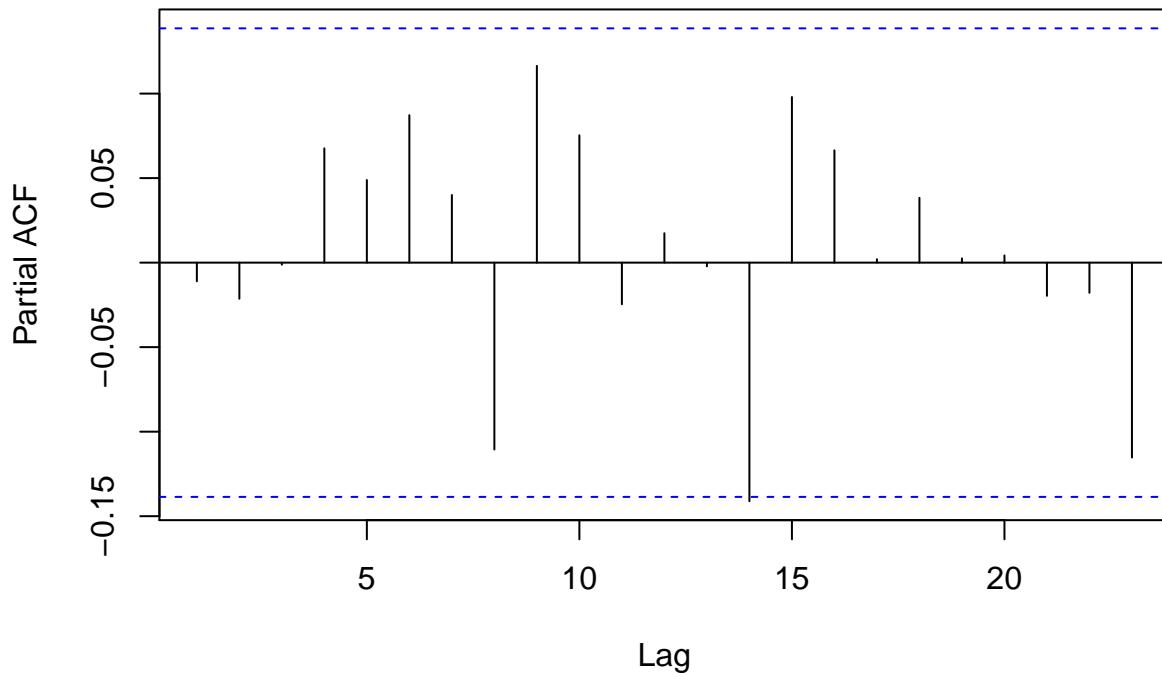
```
fit4 <- arima(arima$x, order=c(p=1, d=1, q=0), include.mean = F)
acf(fit4$residuals)
```

Series fit4\$residuals



```
pacf(fit4$residuals)
```

Series fit4\$residuals



A partir del grafico de los residuos podemos ver que todos los coeficientes estimados tanto en la funcion de autocorrelacion simple como en la parcial quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no singificativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco y que el modelo propuesto ajusta bien a los datos.

d) Modelos propuestos:

```
modelo1 <- arima(arima$x, order=c(p=2, d=0, q=0), include.mean = F)
modelo2 <- arima(arima$x, order=c(p=1, d=1, q=0), include.mean = F)
```

```
AIC(modelo1,modelo2)
```

```
##          df      AIC
## modelo1  3  563.2216
## modelo2  2  556.4924
```

```
BIC(modelo1,modelo2)
```

```
##          df      BIC
## modelo1  3  573.1166
## modelo2  2  563.0790
```

```
MuMin::AICc(modelo1,modelo2)
```

```
##          df      AICc
## modelo1  3 563.3441
## modelo2  2 556.5536
```

A partir de los criterios de informacion calculados podemos concluir que el mejor modelo, es decir el que menores valores de AIC, BIC y AICc presenta es el modelo2, de esta forma podemos concluir que es muy mala la sugerencia del test de Dickey Fuller de no diferenciar, ya que de no ser por nuestra insistencia nos hubiese llevado a conclusiones equivocadas. Ademas de ser el modelo 2 el que menores valores de AIC, BIC y AICc registra, es mas parsimonioso, por lo que deberia ser el elegido.

e) Análisis de los residuos:

Autocorrelación: Prueba de Ljung-Box

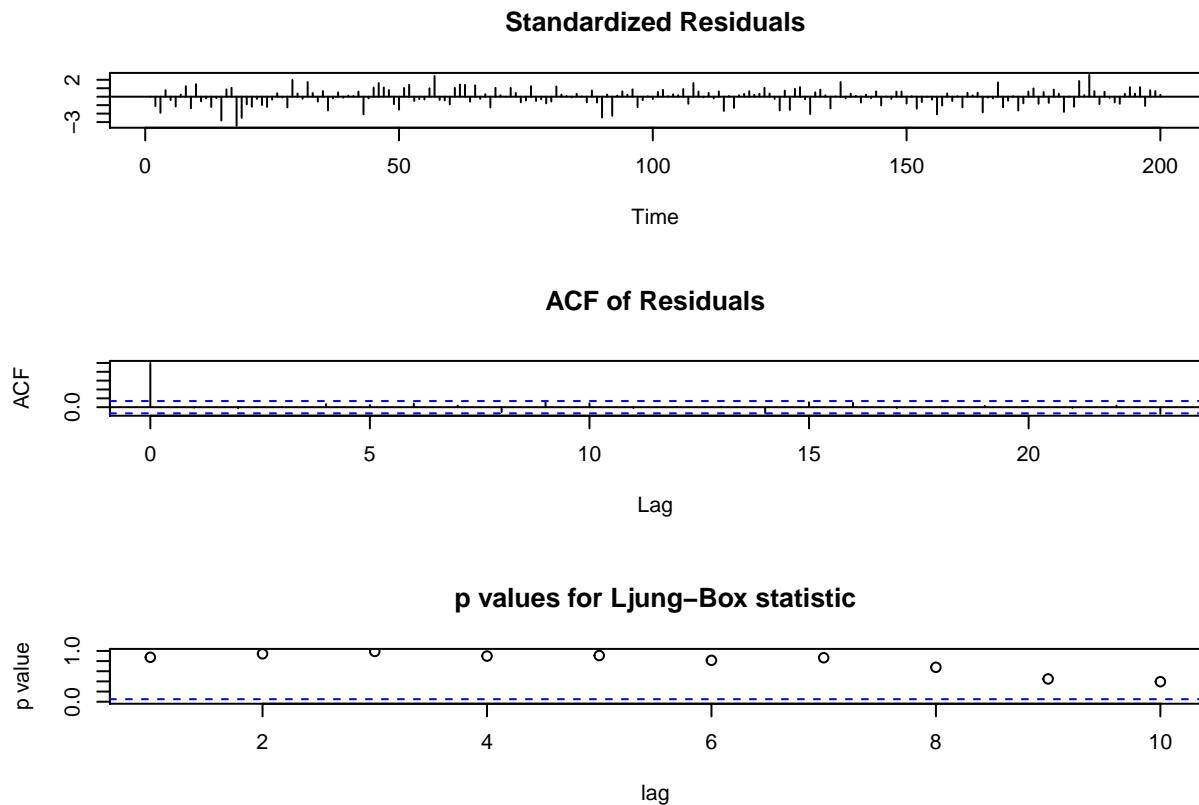
La prueba de Ljung-Box se puede definir de la siguiente manera:

- H₀: Los datos se distribuyen de forma independiente (es decir, las correlaciones en la población de la que se toma la muestra son 0, de modo que cualquier correlación observada en los datos es el resultado de la aleatoriedad del proceso de muestreo).
- H_a: Los datos no se distribuyen de forma independiente.

```
Box.test(modelo2$residuals, lag = 10, type = "Ljung-Box", fitdf = 2)
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  modelo2$residuals
## X-squared = 10.544, df = 8, p-value = 0.2289
```

```
tsdiag(modelo2)
```



El p valor de 0.2289, sugiere que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelación existente.

Ademas el grafico muestra que ninguno de los p valores para la prueba es significativo.

Heterocedasticidad: test de Portmanteau y Lagrange-Multiplier

La prueba de Portmanteau es similar a la de Ljung-Box pero considerando los residuos al cuadrado, en otras palabras se podría definir como:

- H_0 : Los coeficientes de correlación de los residuos cuadrados es igual a 0.
- H_1 : Al menos uno de los coeficientes de correlación de los residuos cuadrados es distinto de 0.

Por otra parte, el Lagrange-Multiplier test (ARCH LM), plantea una regresión entre los residuos cuadrados y el retardo de los residuos cuadrados. De esta forma verifica si hay autocorrelación planteando una regresión.

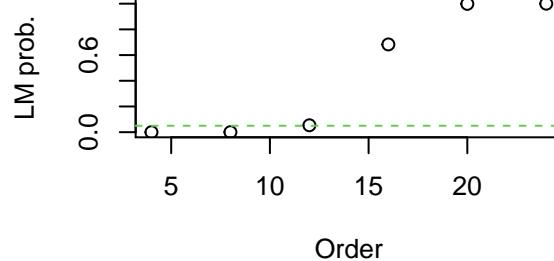
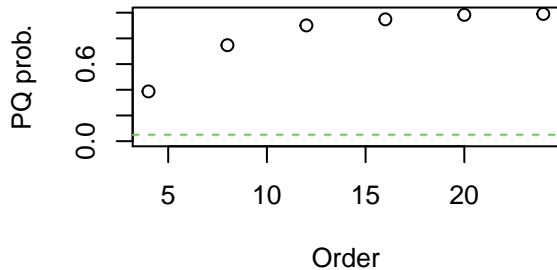
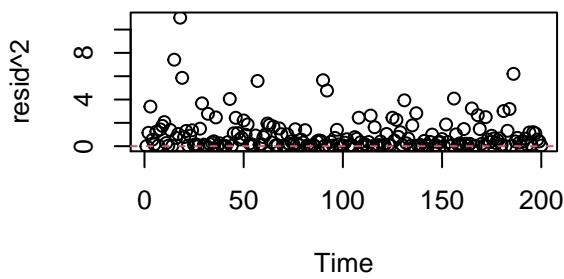
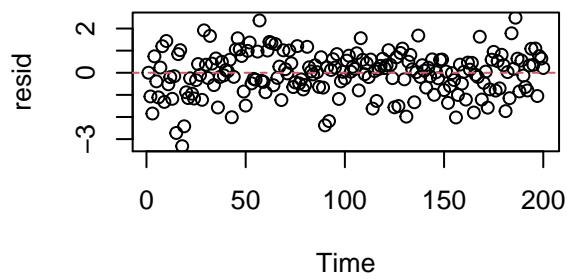
```
library(aTSA)
arch.test(modelo2, output = TRUE)
```

```
## ARCH heteroscedasticity test for residuals
## alternative: heteroscedastic
##
## Portmanteau-Q test:
##      order    PQ p.value
```

```

## [1,]    4  4.14  0.387
## [2,]    8  5.10  0.747
## [3,]   12  6.29  0.901
## [4,]   16  8.03  0.948
## [5,]   20  8.97  0.983
## [6,]   24 10.80  0.990
## Lagrange-Multiplier test:
##      order   LM  p.value
## [1,]    4 65.03 4.95e-14
## [2,]    8 30.43 7.91e-05
## [3,]   12 19.43 5.37e-02
## [4,]   16 11.95 6.83e-01
## [5,]   20  5.62 9.99e-01
## [6,]   24  4.12 1.00e+00

```

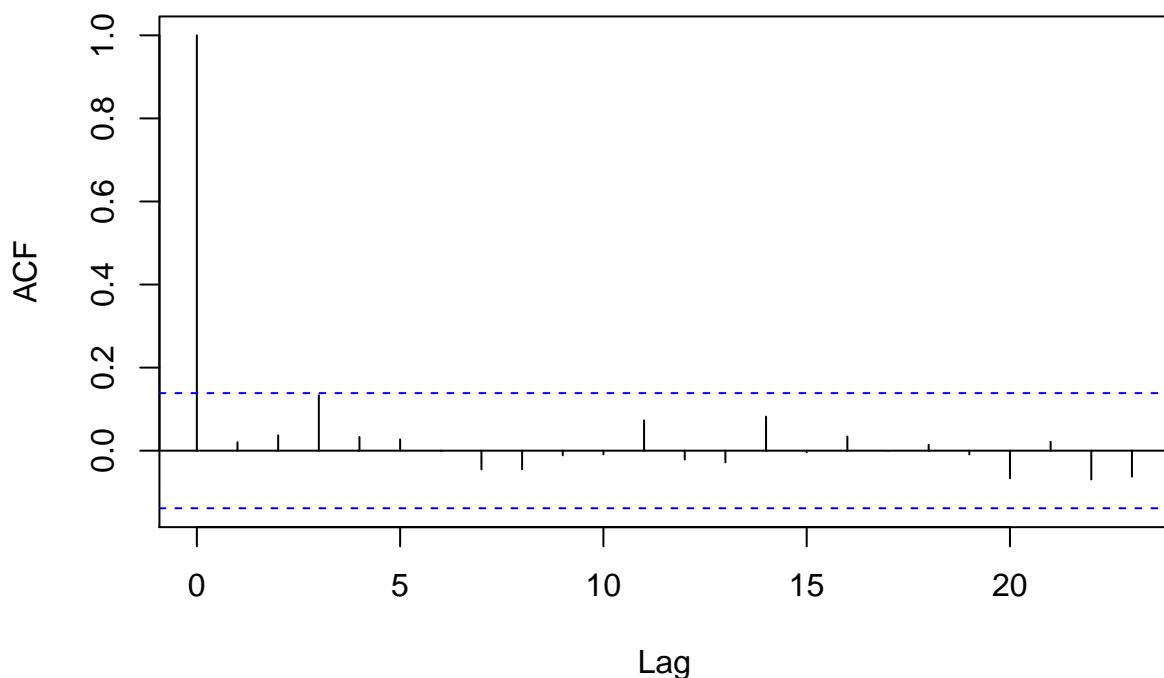


```

#correlogramas de los cuadrados de los residuos
res2<-modelo2$residuals
res2_cuadrado = res2^2
acf(res2_cuadrado)

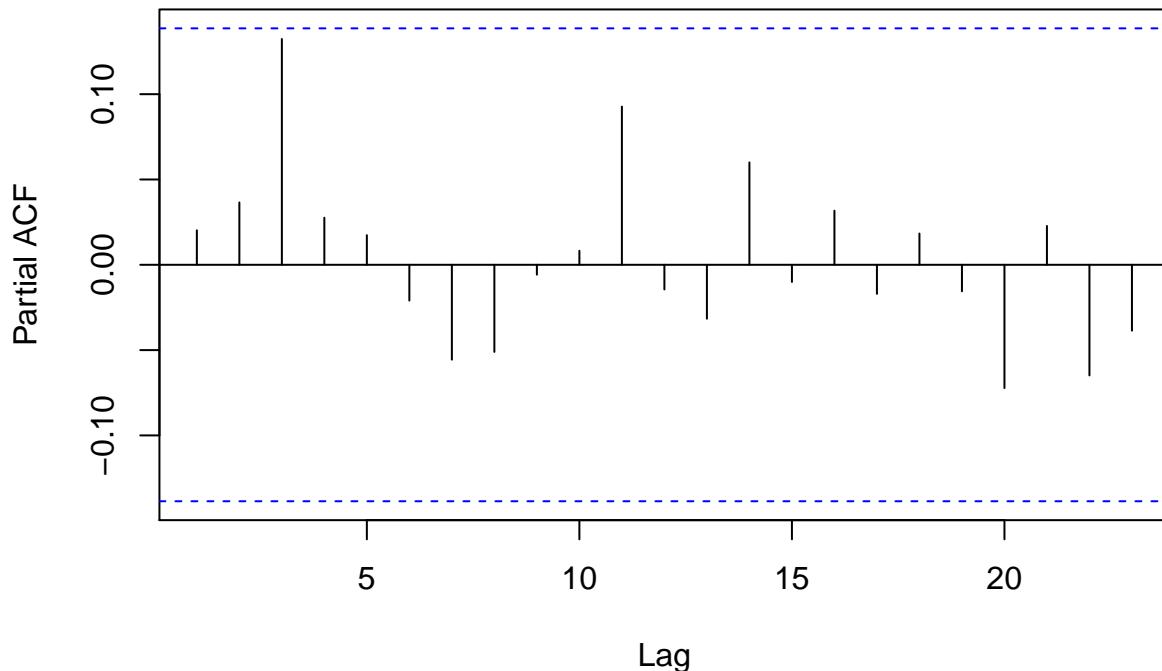
```

Series res2_cuadrado



```
pacf(res2_cuadrado)
```

Series res2_cuadrado



El Portmanteau-Q test, arroja p valores que demuestran que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados.

Por otra parte el Lagrange-Multiplier test, arroja p valores que demuestran que la muestra reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5%, sugiriendo autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados. Esto es sinonimo a decir que potencialmente hay heterocedasticidad. A partir de los graficos podemos ver que la heterocedasticidad es singificativa solo en los primeros ordenes y que luego se vuelve no significativa.

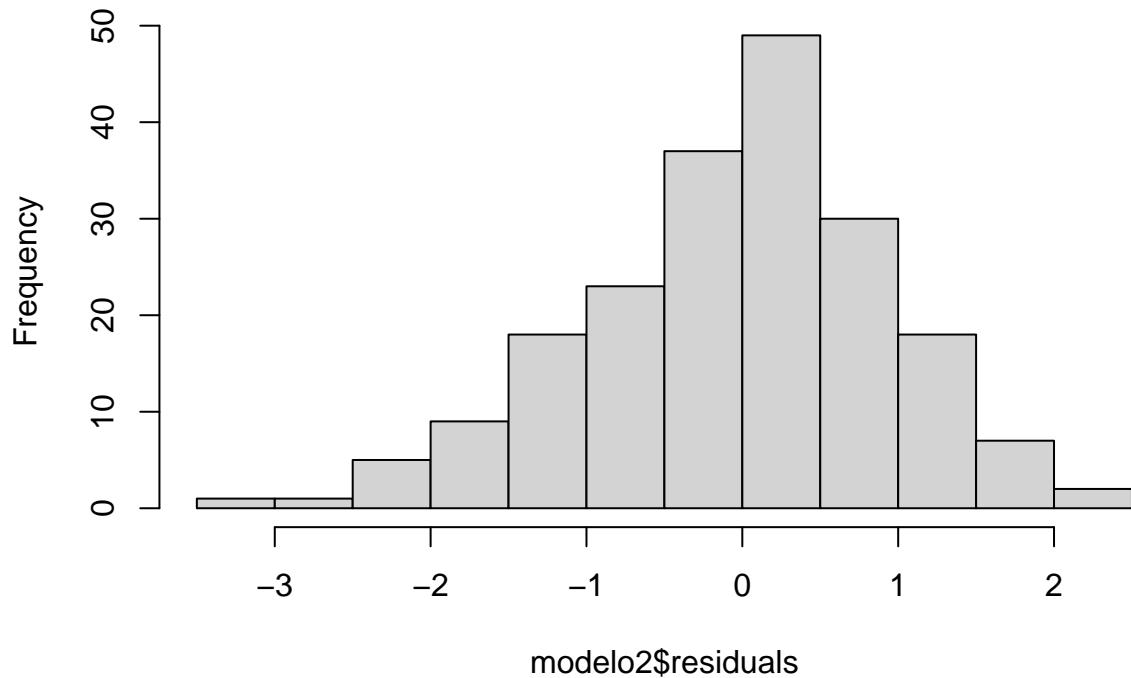
Los graficos de la funcion de autocorrelacion simple y parcial de los residuos del modelo muestran que todos los coeficientes estimados quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no singificativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco, que el modelo propuesto ajusta bien a los datos y que no existe heterocedasticidad.

Normalidad

Procedemos a graficar un histograma, relizar el test de normalidad de Shapiro-Wilk y el QQplot. El test de normalidad de Shapiro-Wilk plantea las hipotesis: * Ho: Los datos siguen una distribucion normal. * H1: Los datos no siguen una distribucion normal.

```
hist(modelo2$residuals)
```

Histogram of modelo2\$residuals

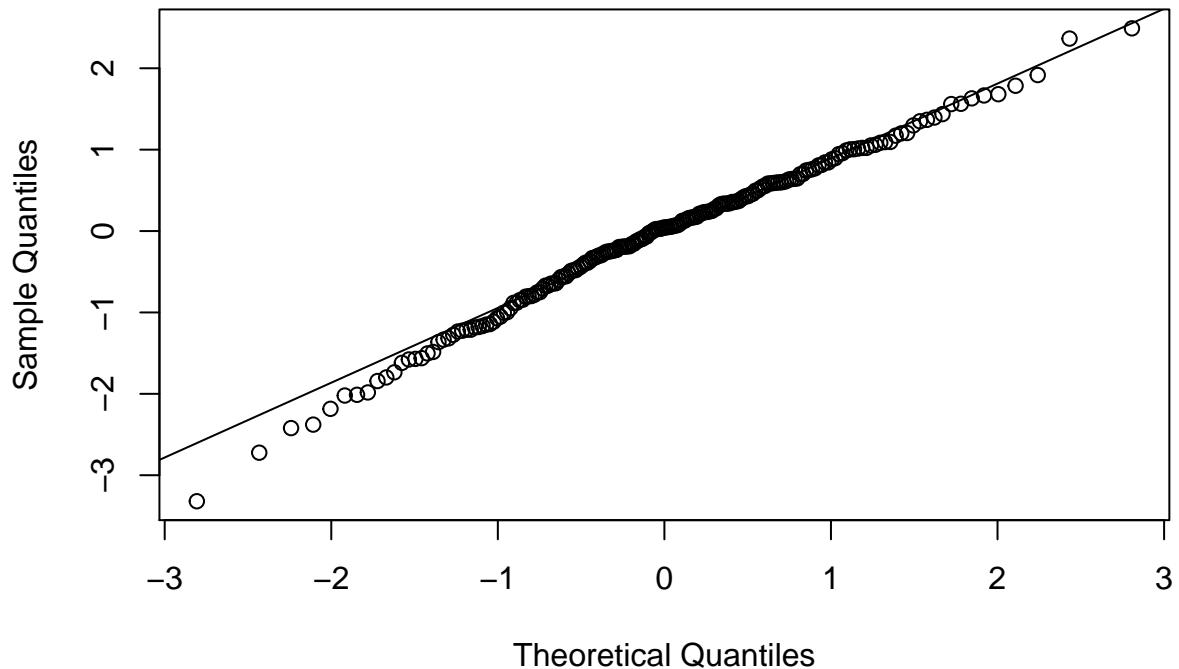


```
shapiro.test(modelo2$residuals)
```

```
##  
## Shapiro-Wilk normality test  
##  
## data: modelo2$residuals  
## W = 0.99036, p-value = 0.2015
```

```
qqnorm(modelo2$residuals)  
qqline(modelo2$residuals)
```

Normal Q-Q Plot



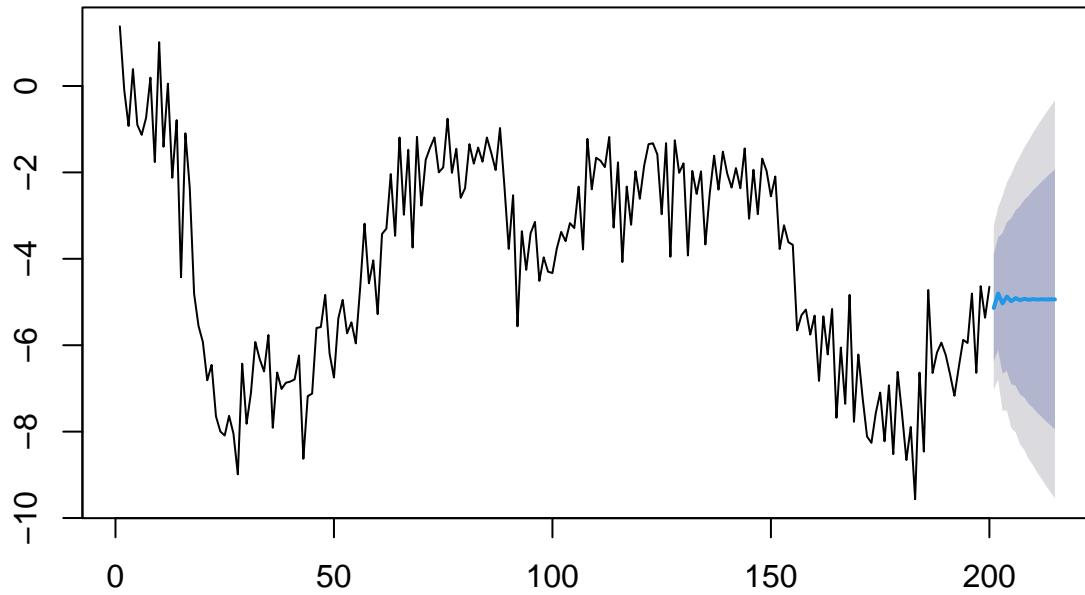
El histograma muestra una tendencia de la distribución de los datos a la normalidad, que la prueba de Shapiro-Wilk sostiene, esta prueba arroja un p valor de 0.2015 lo cual sugiere que la muestra no reúne evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que los residuos se distribuyen normalmente. El QQplot permite ver que en las colas hay pequeños desvíos de la normalidad, pero que son una pequeña proporción de los datos que no afecta la normalidad general de los residuos.

Como conclusión final quedaron algunas dudas con el Lagrange-Multiplier test, pero que con las otras herramientas disponibles logramos solucionar.

f) Pronostico:

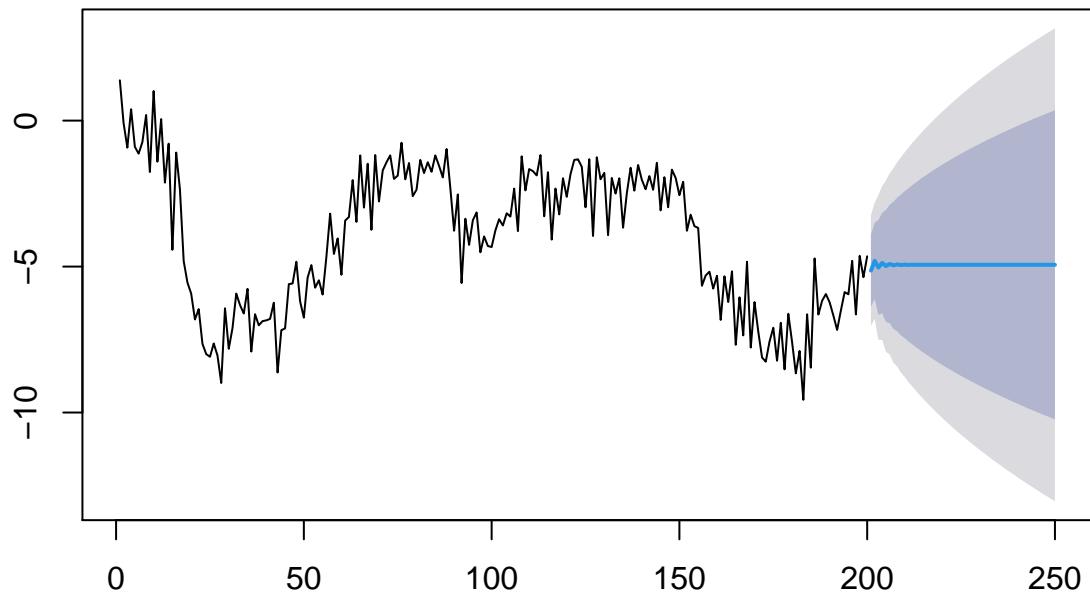
```
preds1 <- forecast::forecast(modelo2, 15) # para prevenir error  
plot(preds1)
```

Forecasts from ARIMA(1,1,0)



```
preds2 <- forecast::forecast(modelo2, 50)
plot(preds2)
```

Forecasts from ARIMA(1,1,0)



Podemos ver predicciones a distintos tiempos en el futuro, se puede ver a simple vista que las predicciones representan la tendencia general de la serie en el futuro cercano, pero que a medida que avanza en el tiempo esta tiende a volverse constante lo cual puede deberse a la falta de informacion en el futuro para realizar predicciones.

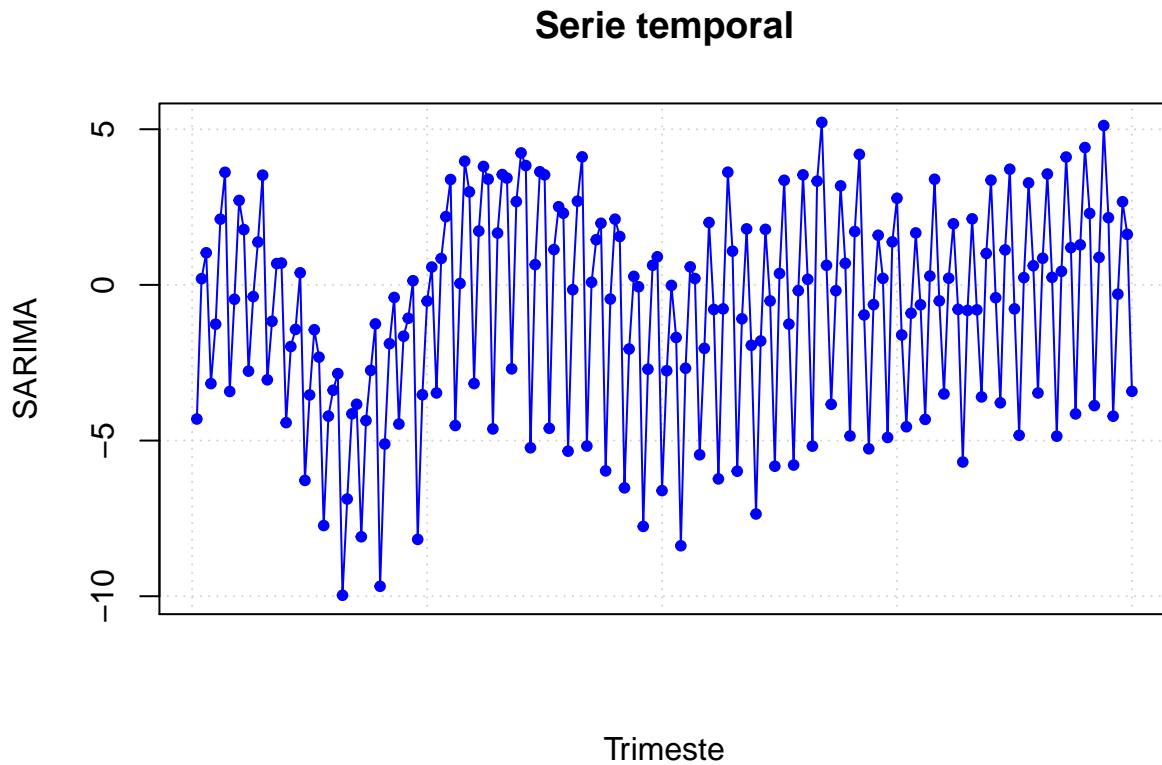
Algo interesante de destacar es como las bandas de confianza del 95%, comienzan a aumentar su amplitud a medida que nos alejamos en el tiempo y eso se debe a que a medida que avanzamos en el tiempo tenemos menos informacion disponible para realizar predicciones.

2) Cargo la base de datos SARIMA

```
sarima <- read_csv("sarima2.csv")  
  
##  
## -- Column specification -----  
## cols(  
##   x = col_double()  
## )
```

a) Graficamos la serie

```
plot(sarima$x, col = "blue", ylab = "SARIMA",  
      main = "Serie temporal", xlab = "Trimestre", type ="o", pch = 20,  
      panel.first = grid (), xaxt = "n")
```



```
mean(sarima$x)
```

```
## [1] -0.8560378
```

A partir del grafico de la serie podemos establecer que muestra una tendencia estable centrada en -0.85. En cuanto a la varianza podemos ver que se mantiene constante a lo largo del tiempo. Ademas puede verse una clara componente ciclica de picos seguidos por baches que parece ser fuerte.

Dada la componente estacional que visualizamos en la serie optamos por aplicar una prueba de Augmented Dickey-Fuller para verificar si es necesaria una diferencia estacional de orden 4 o una diferencia no estacional de primer orden.

```
dtasa1<-diff(sarima$x,lag = 1,differences = 1)
adf.test(dtasa1)

## Augmented Dickey-Fuller Test
## alternative: stationary
##
## Type 1: no drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -16.92  0.01
## [2,] 1 -23.92  0.01
## [3,] 2 -48.09  0.01
## [4,] 3 -8.34   0.01
## [5,] 4 -7.14   0.01
## Type 2: with drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -16.88  0.01
## [2,] 1 -23.86  0.01
## [3,] 2 -47.98  0.01
## [4,] 3 -8.31   0.01
## [5,] 4 -7.12   0.01
## Type 3: with drift and trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -16.83  0.01
## [2,] 1 -23.79  0.01
## [3,] 2 -47.85  0.01
## [4,] 3 -8.29   0.01
## [5,] 4 -7.11   0.01
## ----
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01
```

```
dtasa<-diff(sarima$x,lag = 4,differences = 1)
adf.test(dtasa)
```

```
## Augmented Dickey-Fuller Test
## alternative: stationary
##
## Type 1: no drift no trend
##      lag      ADF p.value
## [1,] 0 -8.38   0.01
## [2,] 1 -7.20   0.01
## [3,] 2 -7.44   0.01
## [4,] 3 -11.81  0.01
## [5,] 4 -4.68   0.01
## Type 2: with drift no trend
##      lag      ADF p.value
```

```

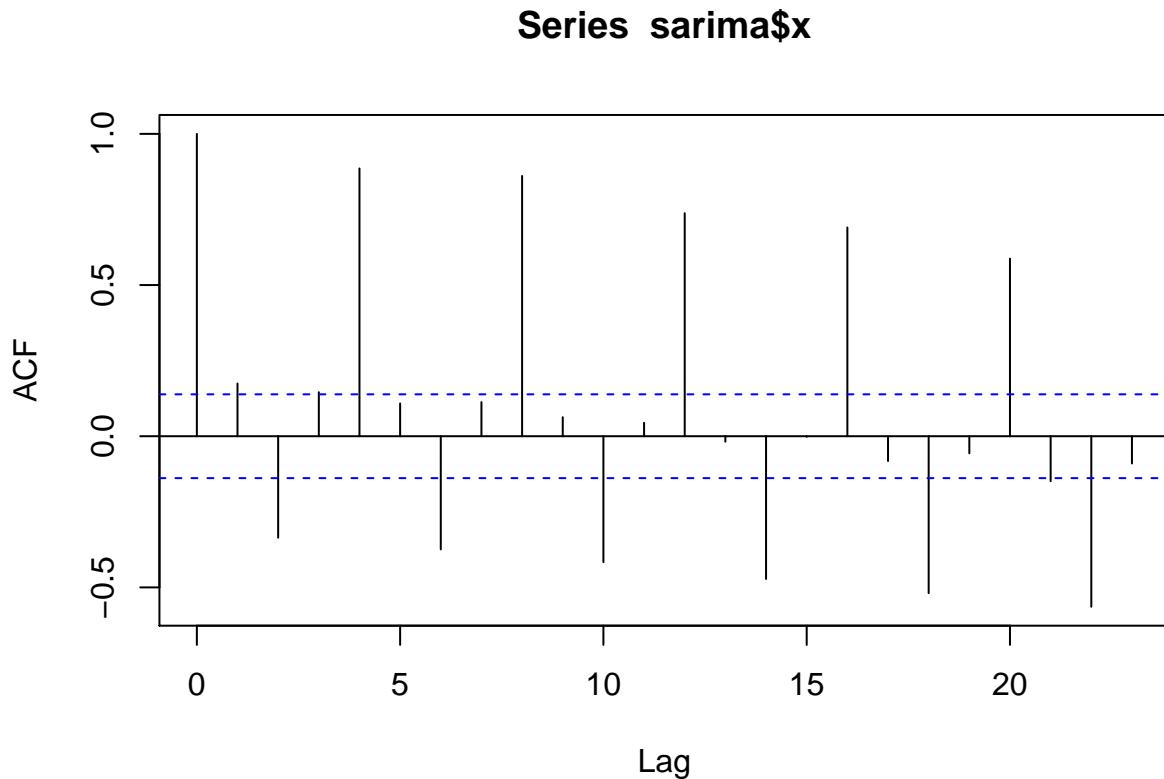
## [1,] 0 -8.36 0.01
## [2,] 1 -7.18 0.01
## [3,] 2 -7.42 0.01
## [4,] 3 -11.79 0.01
## [5,] 4 -4.66 0.01
## Type 3: with drift and trend
##      lag     ADF p.value
## [1,] 0 -8.34 0.01
## [2,] 1 -7.17 0.01
## [3,] 2 -7.42 0.01
## [4,] 3 -11.79 0.01
## [5,] 4 -4.71 0.01
## -----
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

```

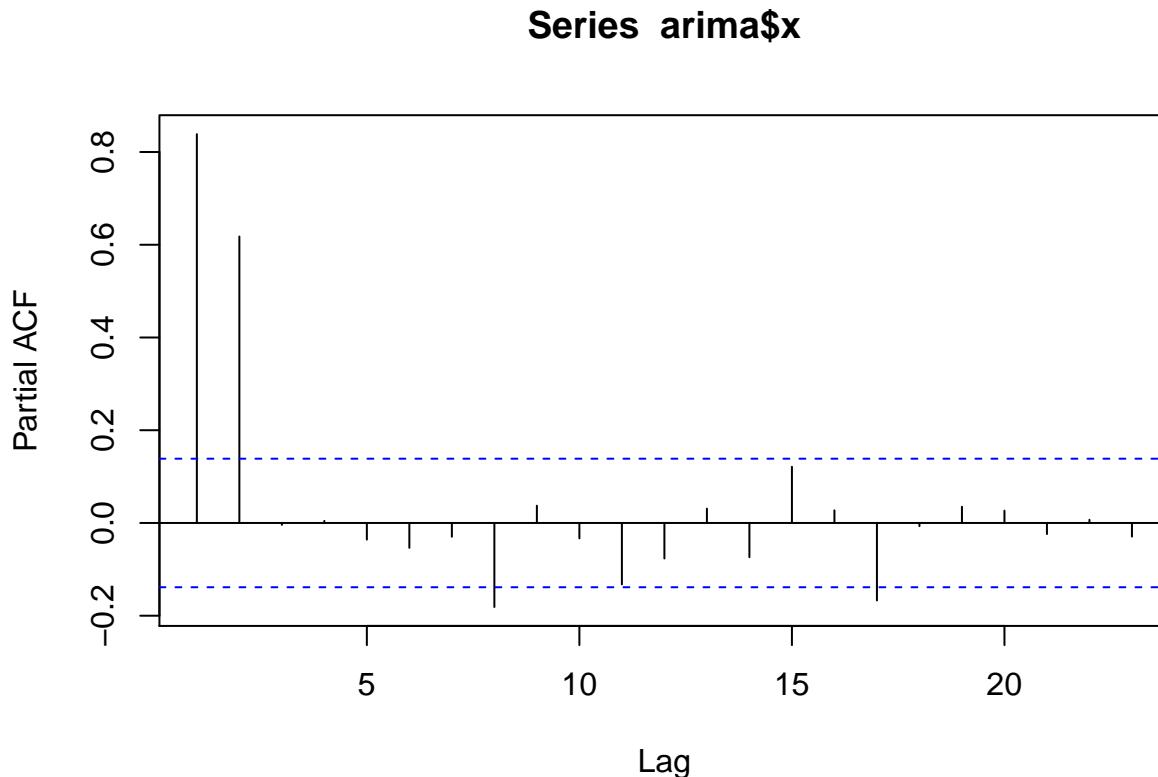
La muestra reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5%, por lo tanto se acepta que la serie es estacionaria.

b) Grafico la funcion de autocorrelacion simple y la funcion de autocorrelacion parcial:

```
acf(sarima$x)
```



```
pacf(arima$x)
```



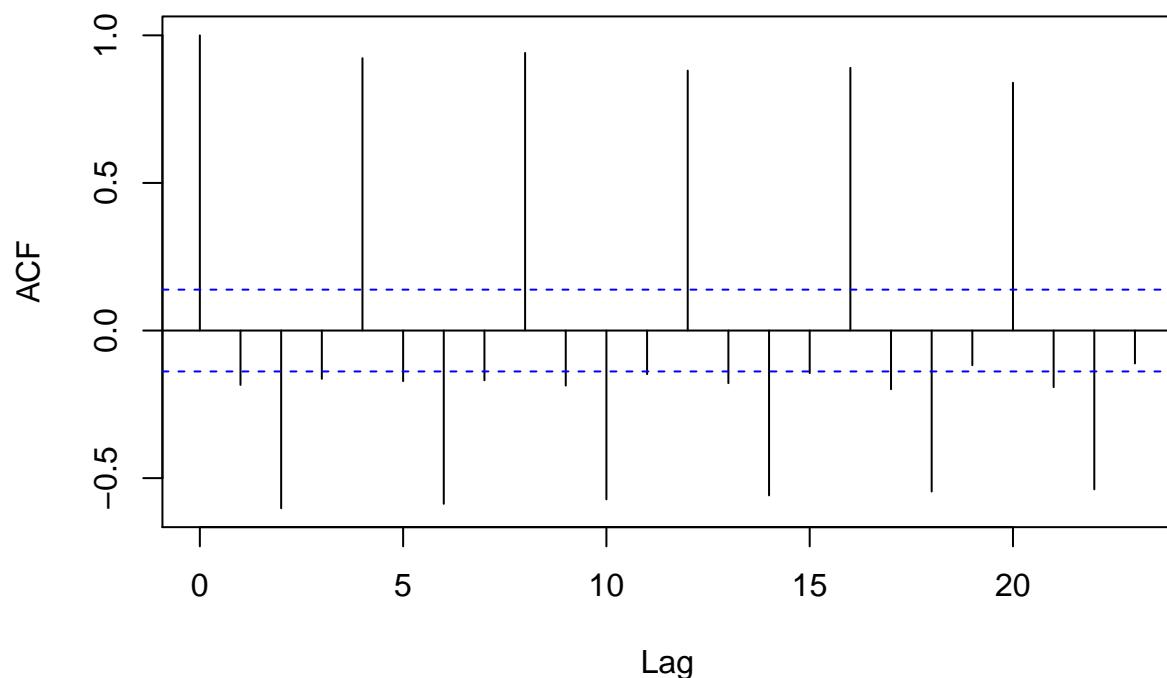
A pesar de que el test de Dickey Fuller sugirió no realizar la diferencia estacional con lag 4, podemos ver que el gráfico de autocorrelación simple muestra una clara estacionalidad con este lag. Esto es así porque los coeficientes son significativos en los múltiplos del lag 4, por este motivo procederemos a diferenciar y analizar nuevamente la serie diferenciada.

Por otra parte, podemos apreciar que la función de autocorrelación parcial cae abruptamente en el lag 2.

- Procederemos a diferenciar estacionalmente y volveremos a analizar.

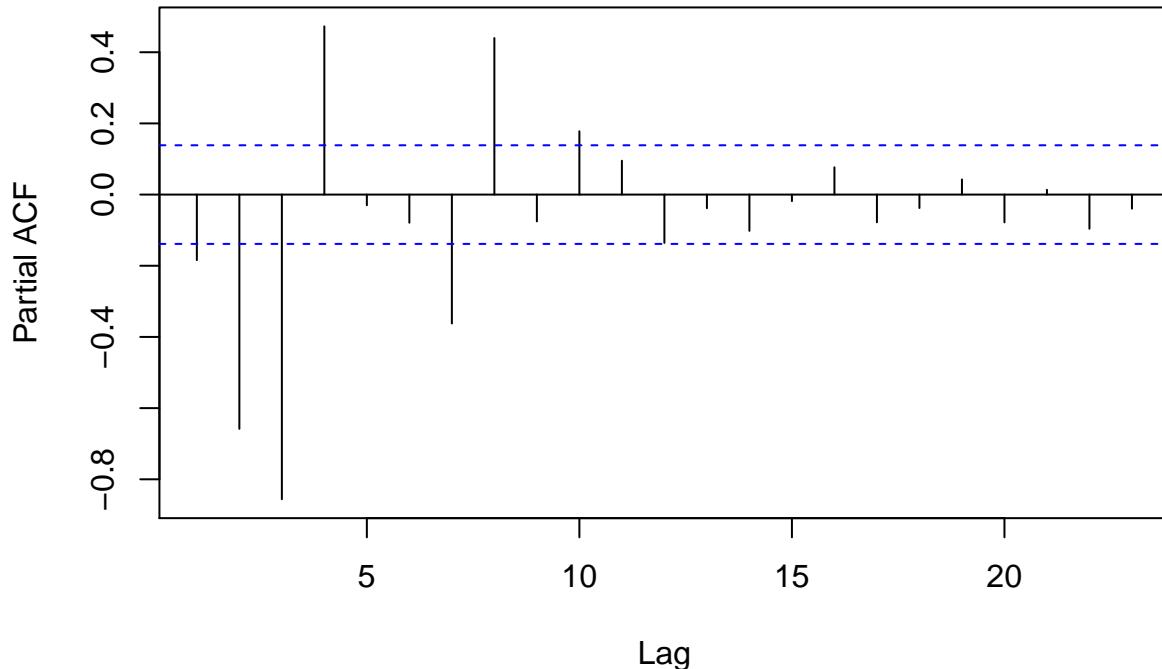
```
fit1 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,0), seasonal=c(order=c(0,1,0), period=4), method = "ML")  
acf(fit1$residuals)
```

Series fit1\$residuals



```
pacf(fit1$residuals)
```

Series fit1\$residuals



Estos graficos dejan mucho que desear, la raiz unitaria estacional esta claramente presente. El motivo por el cual se siguen escapando tantos coeficientes en el grafico de la funcion de autocorrelacion simple, es por que es necesaria la incorporacion de terminos al modelo en la parte estacionaria, de este modo podremos reducir el proceso a un ruido blanco.

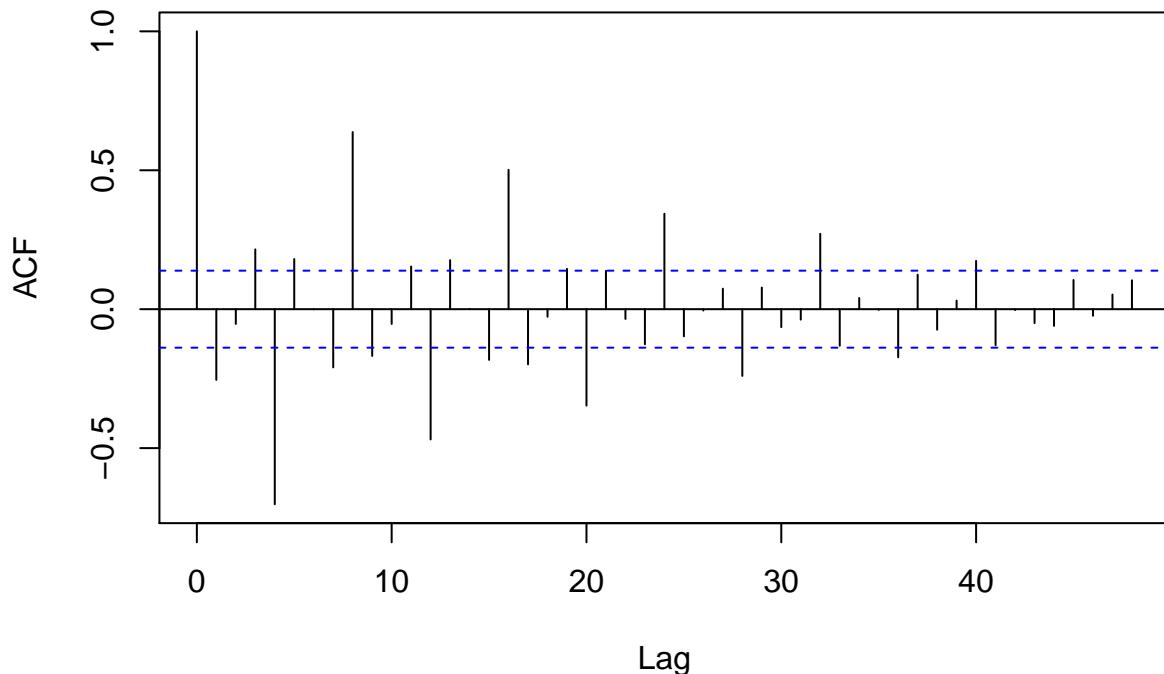
Estamos seguros que los pasados inmediatos de la serie en cada cuatrimestre ayudan a explicar el valor cuatrimestral en cada caso, por lo tanto nos inclinamos mas por los modelos autorregresivos. No sabemos cuantos son los pasados que debemos incluir para reducirlo a un ruido blanco pero probaremos hasta reducirlo.

Ademas el grafico de la funcion de autocorrelacion parcial insinua un decaimiento abrupto, lo que podria sugerir la incorporacion de terminos en la parte no estacional para el AR.

- Procedemos a incluir un termino autorregresivo en la parte estacional del modelo y analizaremos:

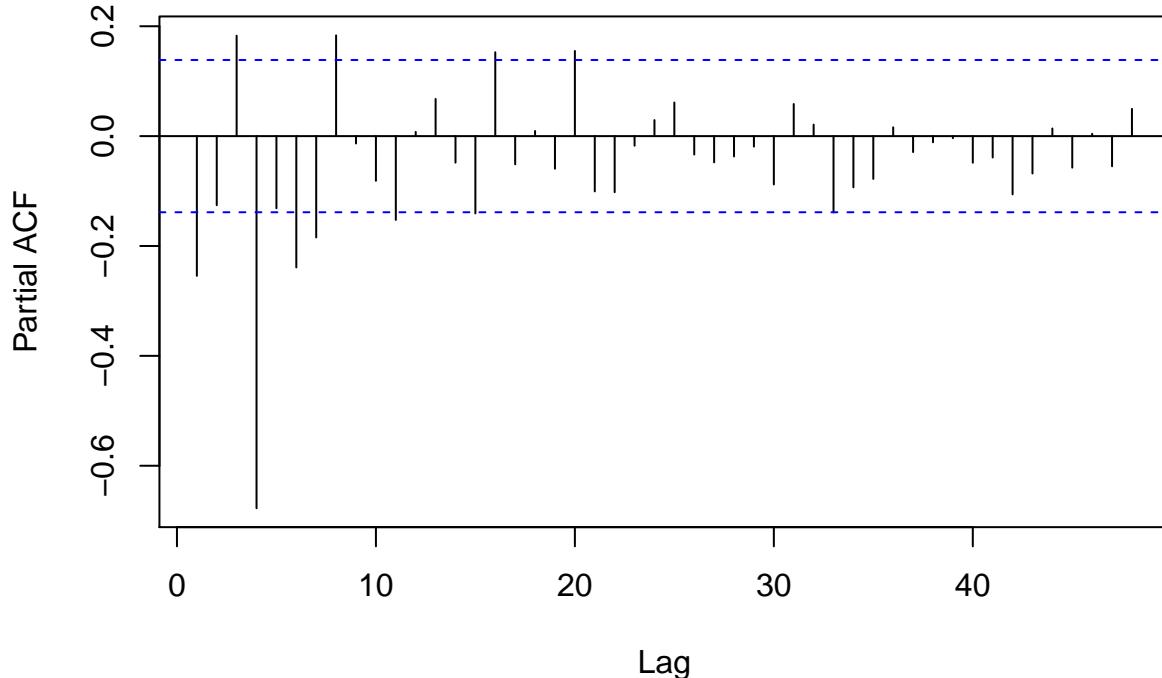
```
fit2 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,0), seasonal=c(order=c(1,1,0), period=4), method = "ML")  
acf(fit2$residuals, lag.max=48)
```

Series fit2\$residuals



```
pacf(fit2$residuals, lag.max=48)
```

Series fit2\$residuals



Podemos apreciar que ambos graficos atenuaron los valores de sus coeficientes, creemos que es el camino correcto y que incluyendo otro pasado inmediato mas en la parte estacional lograremos explicar lo que hace falta para llevar los resiudos a un ruido blanco.

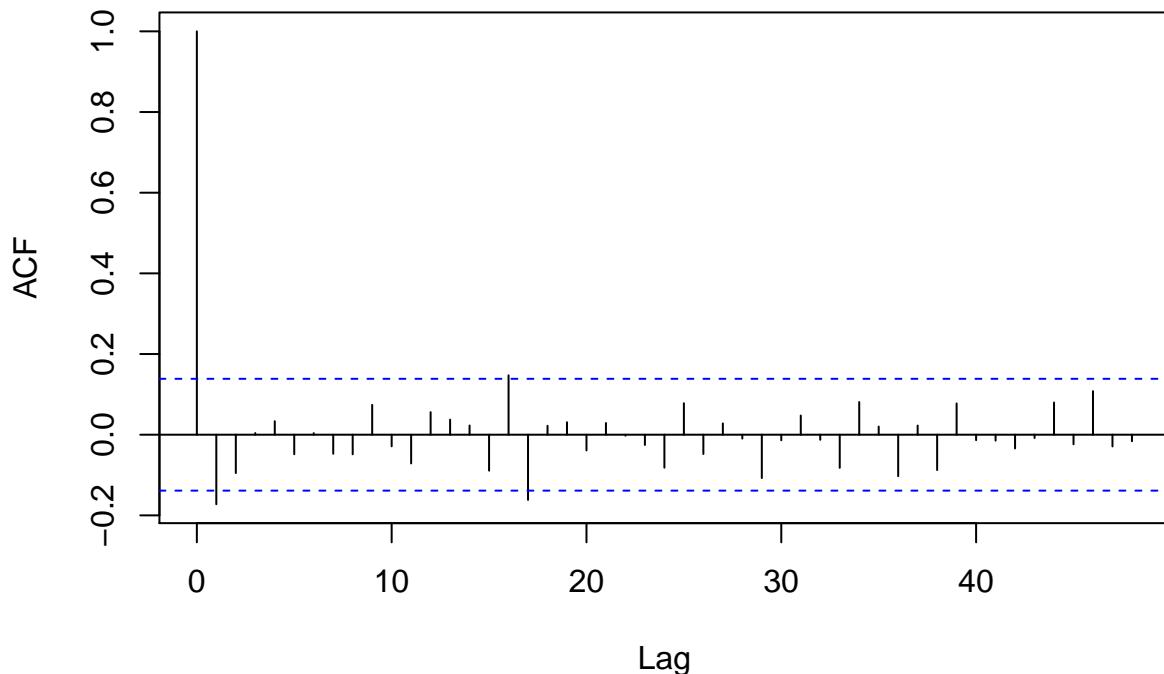
- Incluimos un coeficiente autorregresivo mas en la parte estacional del modelo:

```
fit3 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,0), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
```

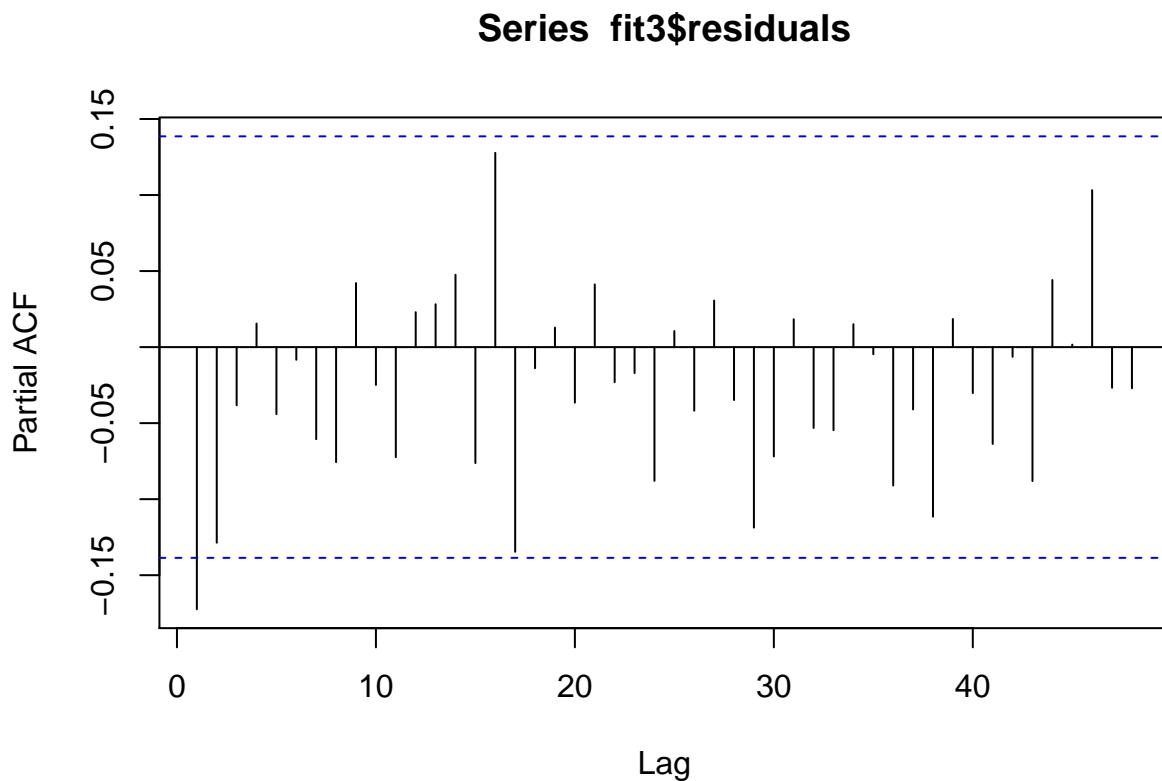
Tomamos la primer difererencia simple y vemos que ocurre:

```
acf(fit3$residuals, lag.max=48)
```

Series fit3\$residuals



```
pacf(fit3$residuals, lag.max=48)
```



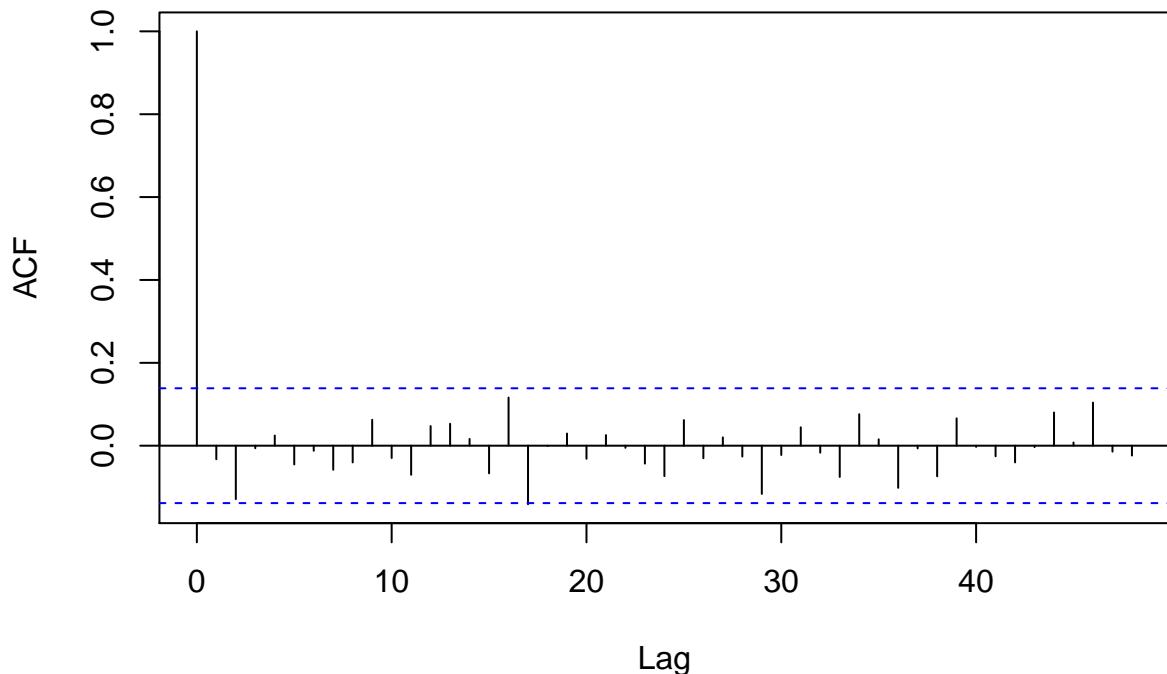
A partir del grafico de los residuos del fit 3 podemos ver que para la funcion de autocorrelacion simple todos los coeficientes quedan dentro o praticamente dentro de las barras de significancia, por lo que no se distinguen de 0. Este grafico estaria insinuando que llegamos al ruido blanco.

Por otra parte la funcion de autocorrelacion parcial, muestra que la mayoria de los coeficientes tambien caen dentro de las bandas, la unica preocupacion la tenemos con el primer coeficiente en el lag 1 que podria sugerir un decaimineto abrupto y la incorporacion de un termino autorregresivo en la parte no estacionaria, pero optamos por no incluirlo aun y consideramos como un ruido blanco. Procederemos a considerar este otro modelo como alternativo.

c) Propuesta alternativa:

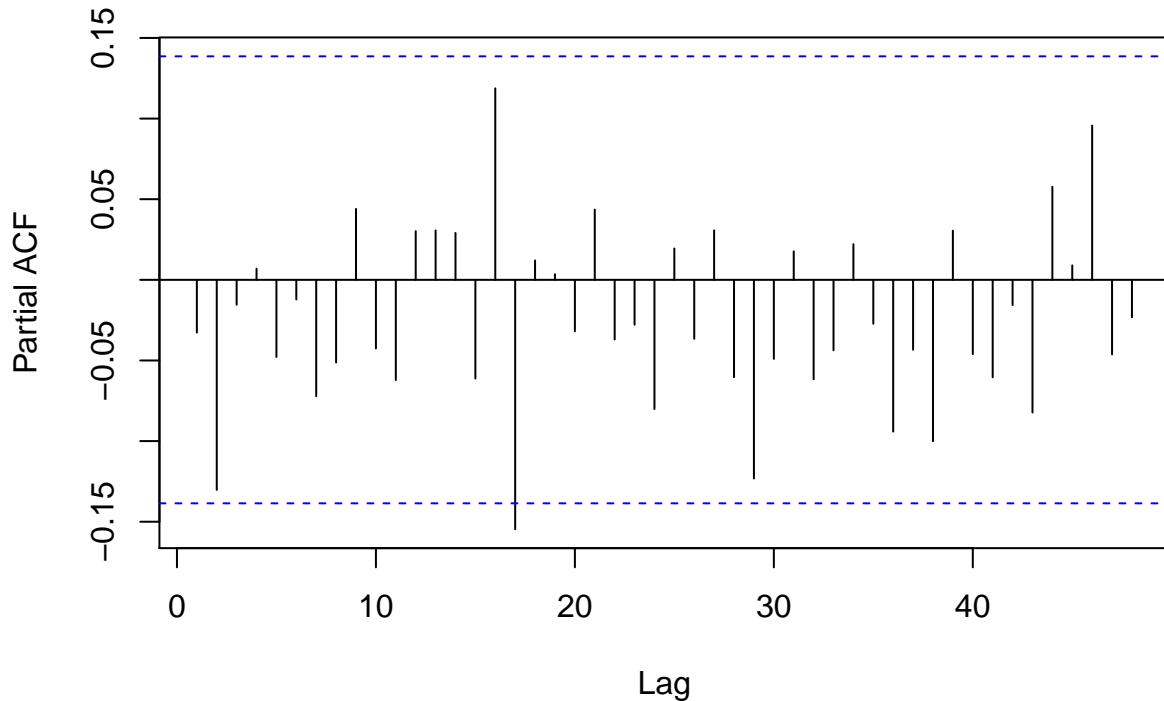
```
fit4 <- arima(sarima$x, order=c(1,0,0), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
acf(fit4$residuals, lag.max=48)
```

Series fit4\$residuals



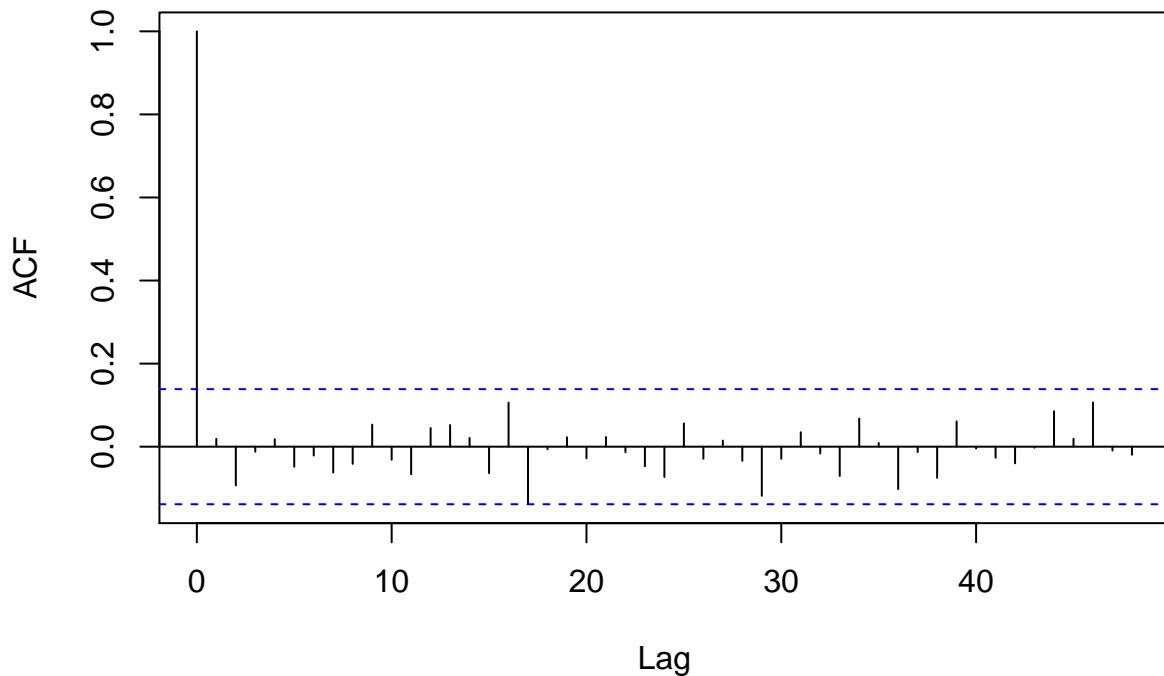
```
pacf(fit4$residuals, lag.max=48)
```

Series fit4\$residuals



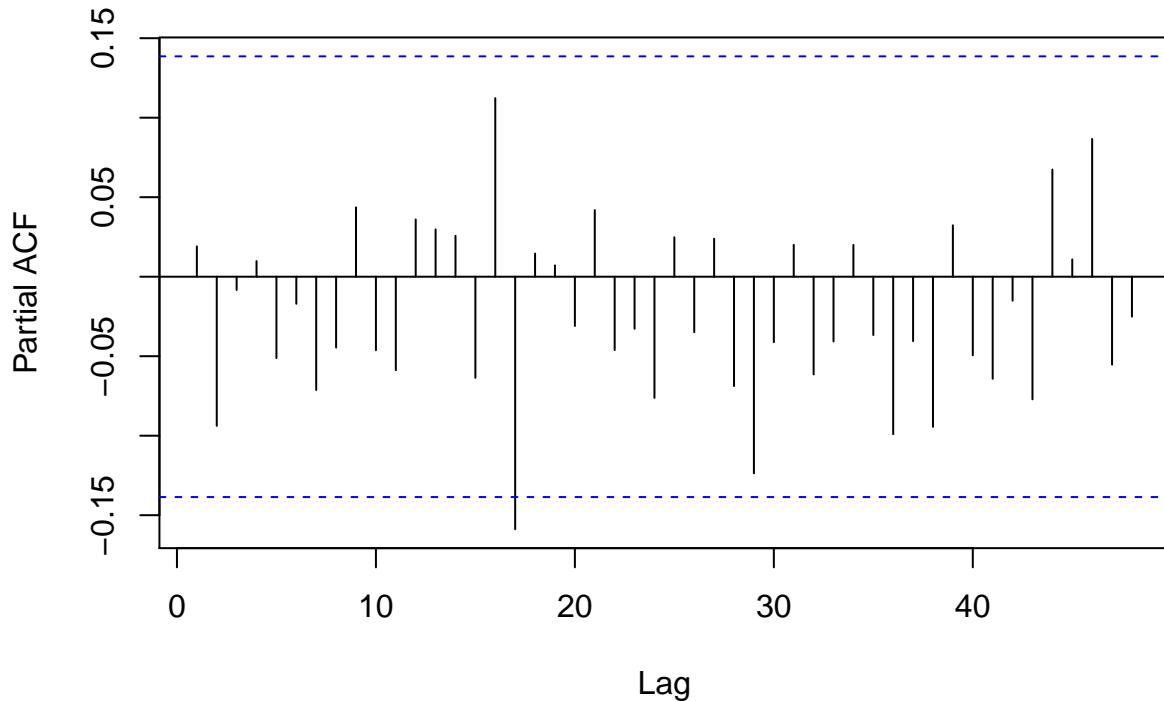
```
fit5 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,1), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
acf(fit5$residuals, lag.max=48)
```

Series fit5\$residuals



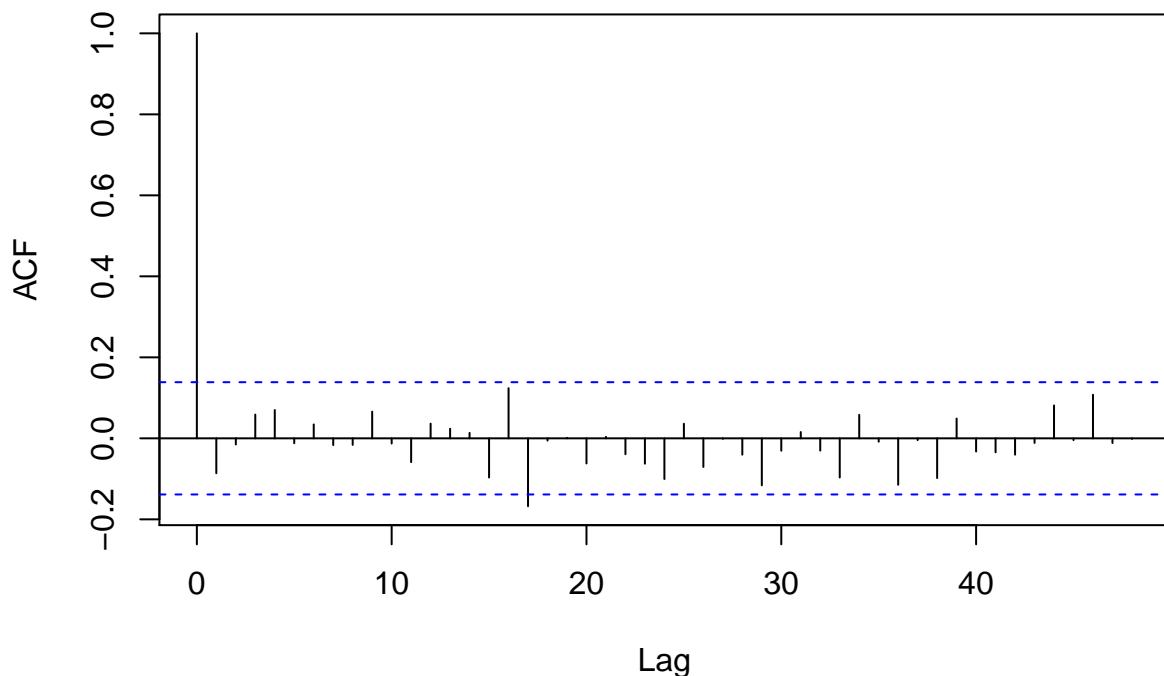
```
pacf(fit5$residuals, lag.max=48)
```

Series fit5\$residuals



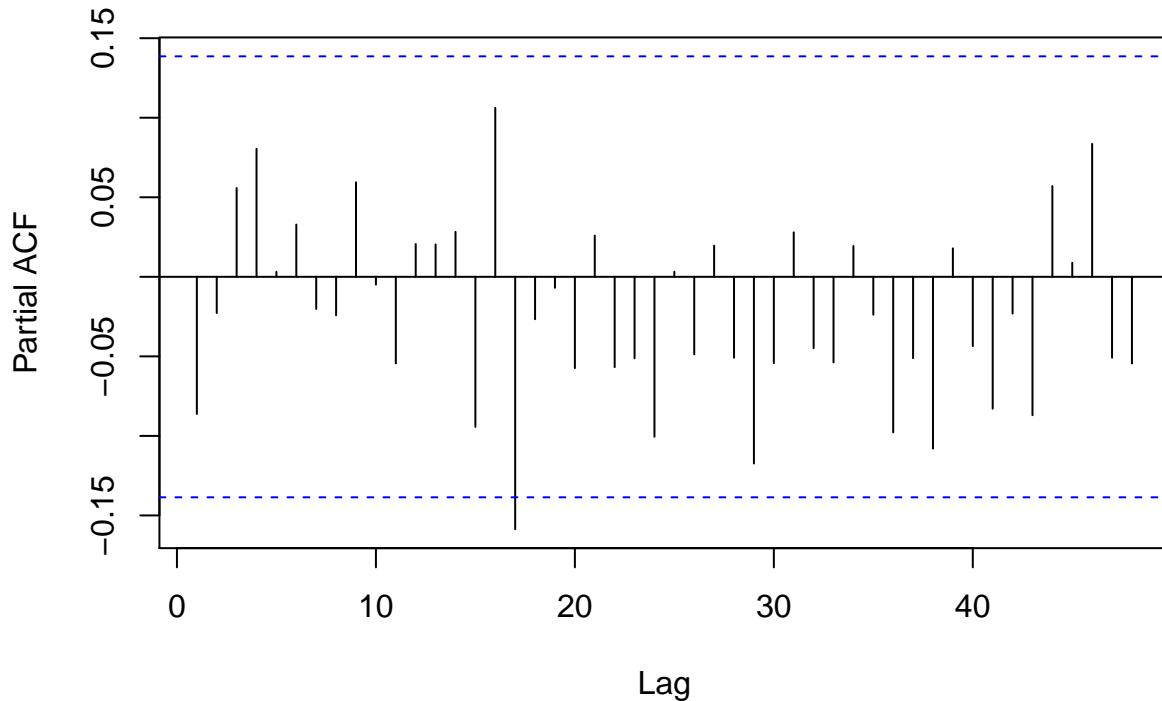
```
fit6 <- arima(sarima$x, order=c(1,0,1), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
acf(fit6$residuals, lag.max=48)
```

Series fit6\$residuals



```
pacf(fit6$residuals, lag.max=48)
```

Series fit6\$residuals



A partir de los graficos de residuos podemos ver que todos los coeficientes estimados tanto en la funcion de autocorrelacion simple como en la parcial quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no singificativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco y que los modelos propuestos ajustan bien a los datos.

d) Modelos propuestos:

```

modelo1 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,0), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
modelo2 <- arima(sarima$x, order=c(1,0,0), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
modelo3 <- arima(sarima$x, order=c(0,0,1), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")
modelo4 <- arima(sarima$x, order=c(1,0,1), seasonal=c(order=c(2,1,0), period=4), method = "ML")

AIC(modelo1,modelo2,modelo3,modelo4)

```

```

##          df      AIC
## modelo1  3 549.0262
## modelo2  4 545.5068
## modelo3  4 543.4282
## modelo4  5 531.1249

```

```
BIC(modelo1,modelo2,modelo3,modelo4)
```

```
##          df      BIC
```

```
## modelo1 3 558.9061
## modelo2 4 558.6800
## modelo3 4 556.6014
## modelo4 5 547.5914
```

```
MuMin::AICc(modelo1,modelo2,modelo3,modelo4)
```

```
##          df      AICc
## modelo1 3 549.1493
## modelo2 4 545.7129
## modelo3 4 543.6344
## modelo4 5 531.4357
```

A partir de los criterios de informacion calculados podemos concluir que el mejor modelo, es decir el que menores valores de AIC, BIC y AICC presenta es el modelo4, de esta forma podemos concluir nuevamente que es muy mala la sugerencia del test de Dicket Fuller que nos hubiese llevado a conclusiones equivocadas.

Por otra parte creemos que la diferencia en los grados de libertad entre ambos modelos no es relevante para descartar el modelo 4, por este motivo lo seleccionamos.

e) Análisis de los residuos:

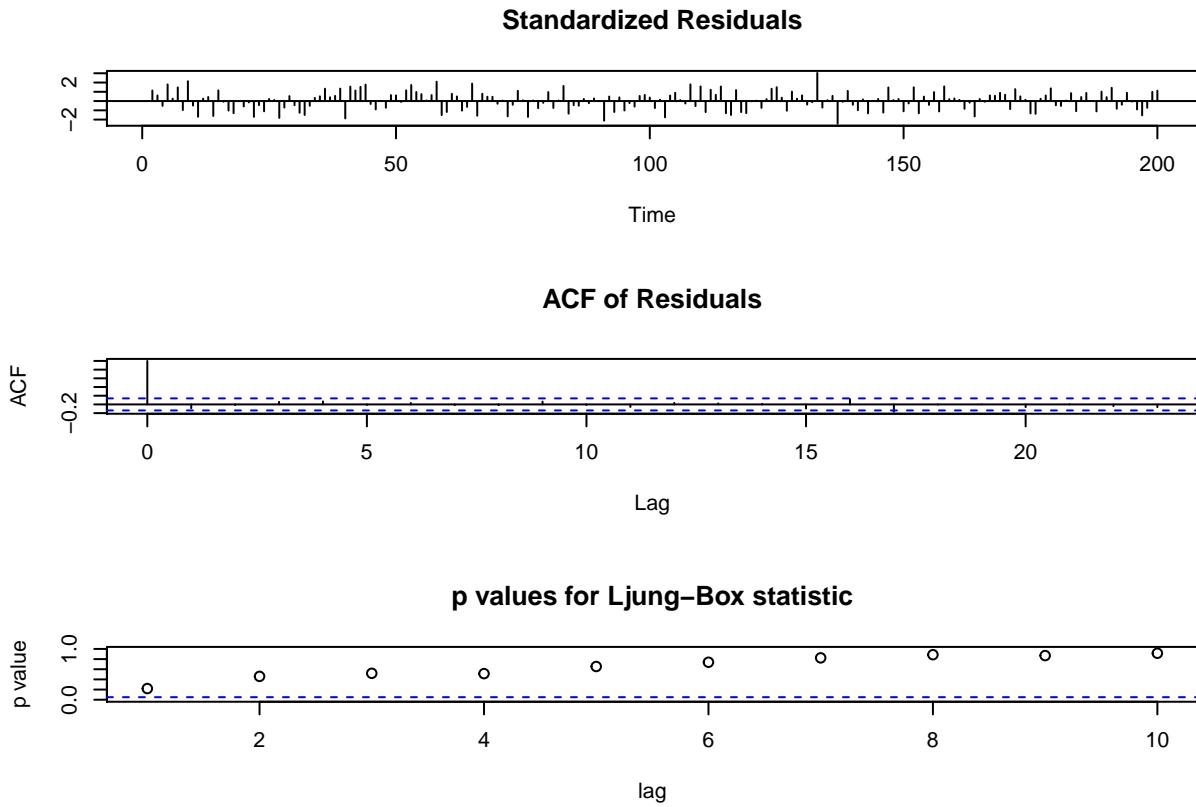
Autocorrelación: Prueba de Ljung-Box

La prueba de Ljung-Box se puede definir de la siguiente manera: * H0: Los datos se distribuyen de forma independiente (es decir, las correlaciones en la población de la que se toma la muestra son 0, de modo que cualquier correlación observada en los datos es el resultado de la aleatoriedad del proceso de muestreo). * Ha: Los datos no se distribuyen de forma independiente.

```
Box.test(modelo4$residuals, lag = 10, type = "Ljung-Box", fitdf = 5)
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  modelo4$residuals
## X-squared = 4.6154, df = 5, p-value = 0.4646
```

```
tsdiag(modelo4)
```



El p valor de 0.4646, sugiere que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelacion existente.

Ademas el grafico muestra que ninguno de los p valores para la prueba es significativo.

Heterocedasticidad: test de Pormanteau y Lagrange-Multiplier

La prueba de Pormanteau es similar a la de Ljun-Box pero considerando los residuos al cuadrado, en otras palabras se podria definir como:

- H_0 : Los coeficientes de correlacion de los residuos cuadrados es igual a 0.
- H_1 : Al menos uno de los coeficientes de correlacion de los residuos cuadrados es distinto de 0.

Por otra parte, el Lagrange-Multiplier test (ARCH LM), plantea una regresion entre los residuos cuadrados y el retardo de los residuos cuadrados. De esta forma verifica si hay autocorrelacion planteando una regresion.

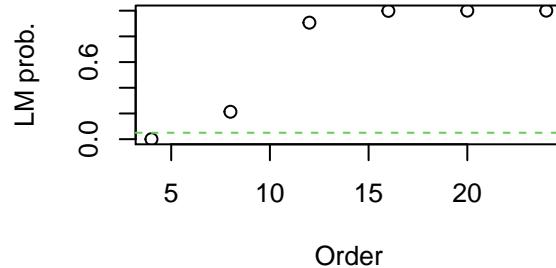
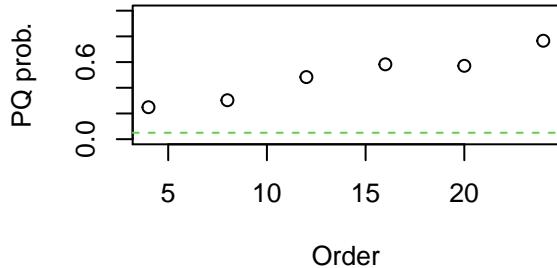
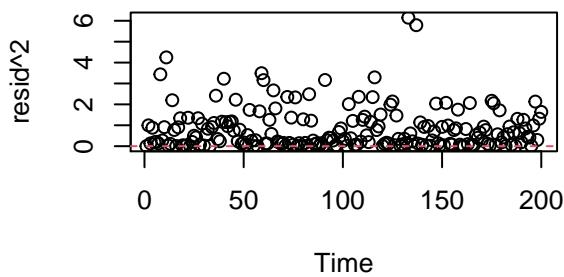
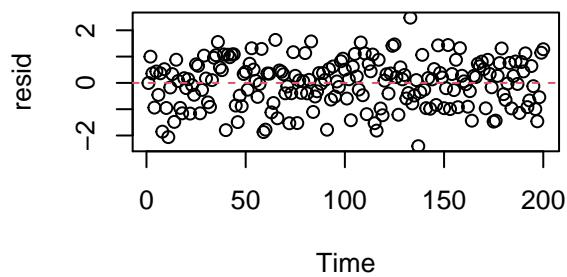
```
library(aTSA)
arch.test(modelo2, output = TRUE)
```

```
## ARCH heteroscedasticity test for residuals
## alternative: heteroscedastic
##
## Portmanteau-Q test:
##      order    PQ p.value
```

```

## [1,]    4  5.40  0.249
## [2,]    8  9.48  0.303
## [3,]   12 11.54  0.483
## [4,]   16 14.22  0.583
## [5,]   20 18.25  0.571
## [6,]   24 18.73  0.766
## Lagrange-Multiplier test:
##      order   LM  p.value
## [1,]    4 24.05 2.44e-05
## [2,]    8  9.58 2.13e-01
## [3,]   12  5.46 9.07e-01
## [4,]   16  3.75 9.98e-01
## [5,]   20  2.37 1.00e+00
## [6,]   24  1.77 1.00e+00

```

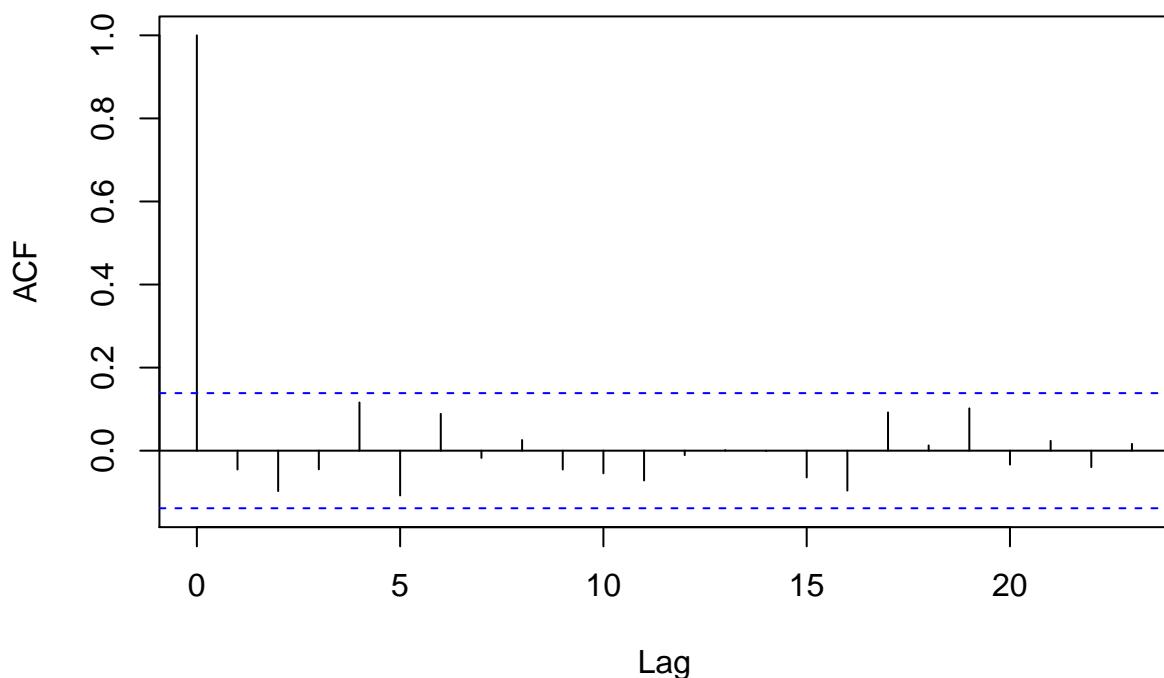


```

#correlogramas de los cuadrados de los residuos
res2<-modelo2$residuals
res2_cuadrado = res2^2
acf(res2_cuadrado)

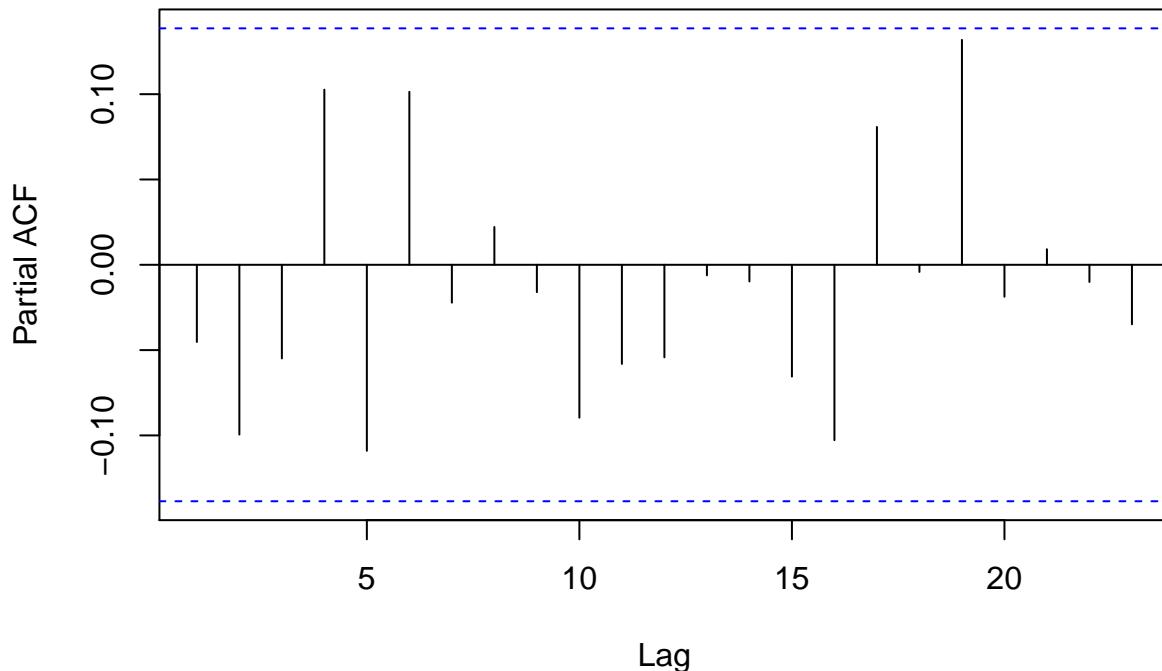
```

Series res2_cuadrado



```
pacf(res2_cuadrado)
```

Series res2_cuadrado



El Portmanteau-Q test, arroja p valores que demuestran que la muestra no reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que no hay autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados.

Por otra parte el Lagrange-Multiplier test, arroja p valores que demuestran que la muestra reune evidencias suficientes para rechazar la hipotesis nula a un nivel de significancia del 5%, sugiriendo autocorrelacion existente entre los residuos cuadrados. Esto es sinonimo a decir que potencialmente hay heterocedasticidad. A partir de los graficos podemos ver que la heterocedasticidad es singificativa solo en los primeros ordenes y que luego se vuelve no significativa.

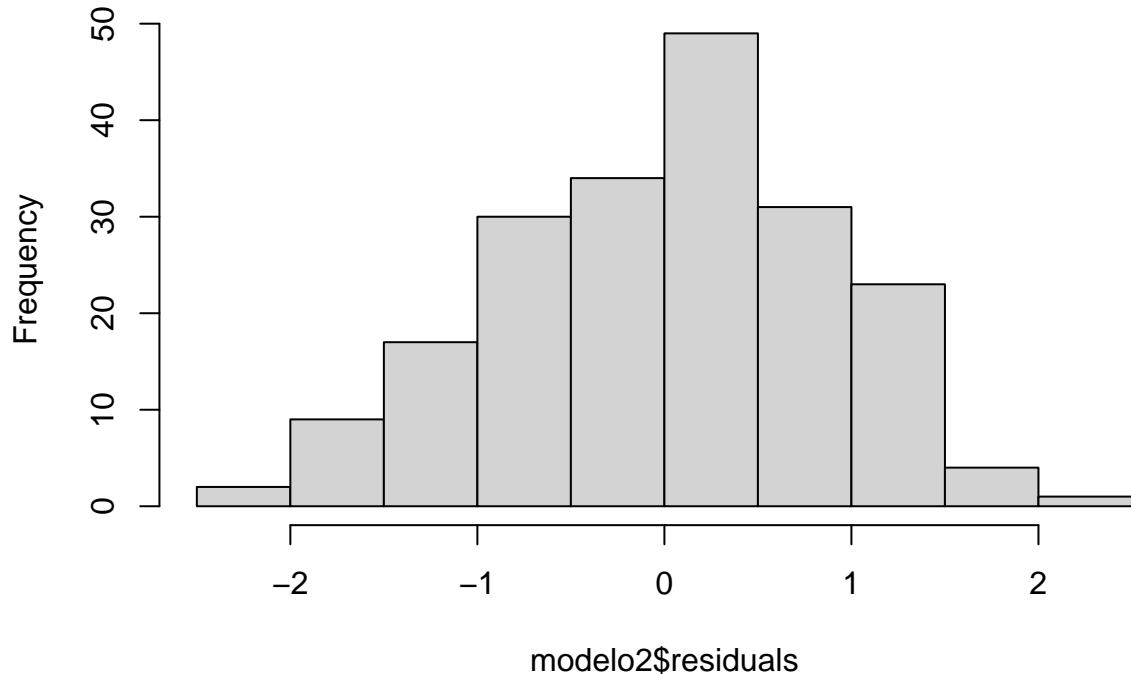
Los graficos de la funcion de autocorrelacion simple y parcial de los residuos del modelo muestran que todos los coeficientes estimados quedan contenidos dentro de las bandas de tolerancia, motivo por el cual son no singificativamente distintos de cero. Razon por la cual creemos que los residuos son un ruido blanco, que el modelo propuesto ajusta bien a los datos y que no existe heterocedasticidad.

Normalidad

Procedemos a graficar un histograma, relizar el test de normalidad de Shapiro-Wilk y el QQplot. El test de normalidad de Shapiro-Wilk plantea las hipotesis: * Ho: Los datos siguen una distribucion normal. * H1: Los datos no siguen una distribucion normal.

```
hist(modelo2$residuals)
```

Histogram of modelo2\$residuals

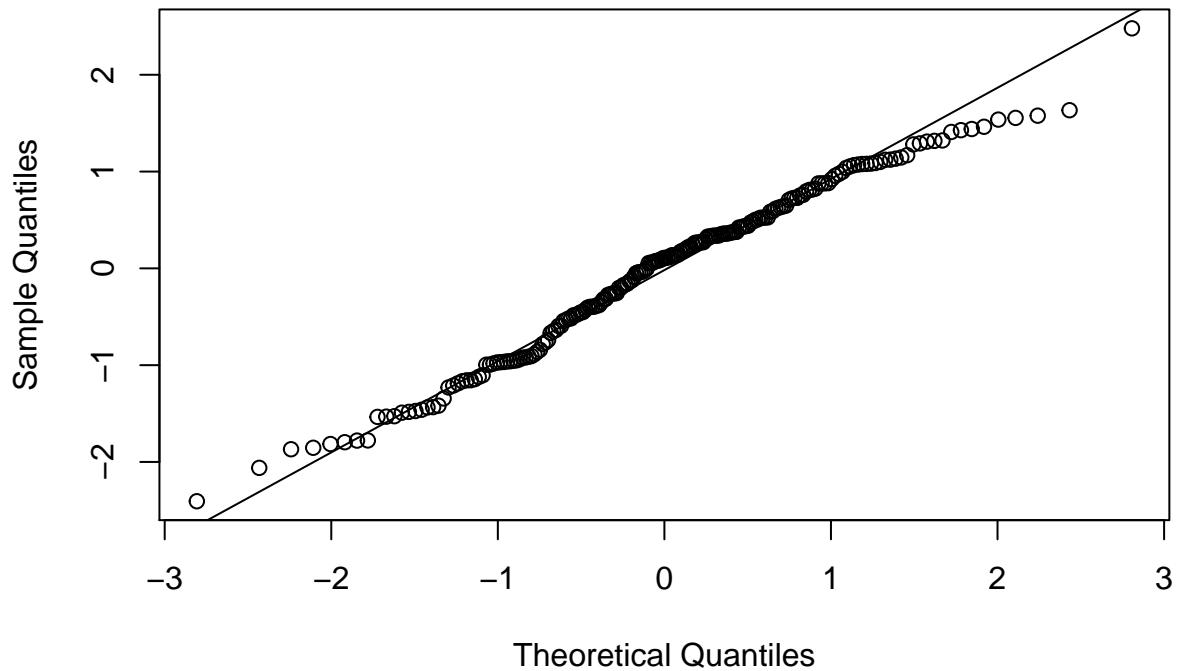


```
shapiro.test(modelo2$residuals)
```

```
##  
## Shapiro-Wilk normality test  
##  
## data: modelo2$residuals  
## W = 0.98666, p-value = 0.05663
```

```
qqnorm(modelo2$residuals)  
qqline(modelo2$residuals)
```

Normal Q-Q Plot



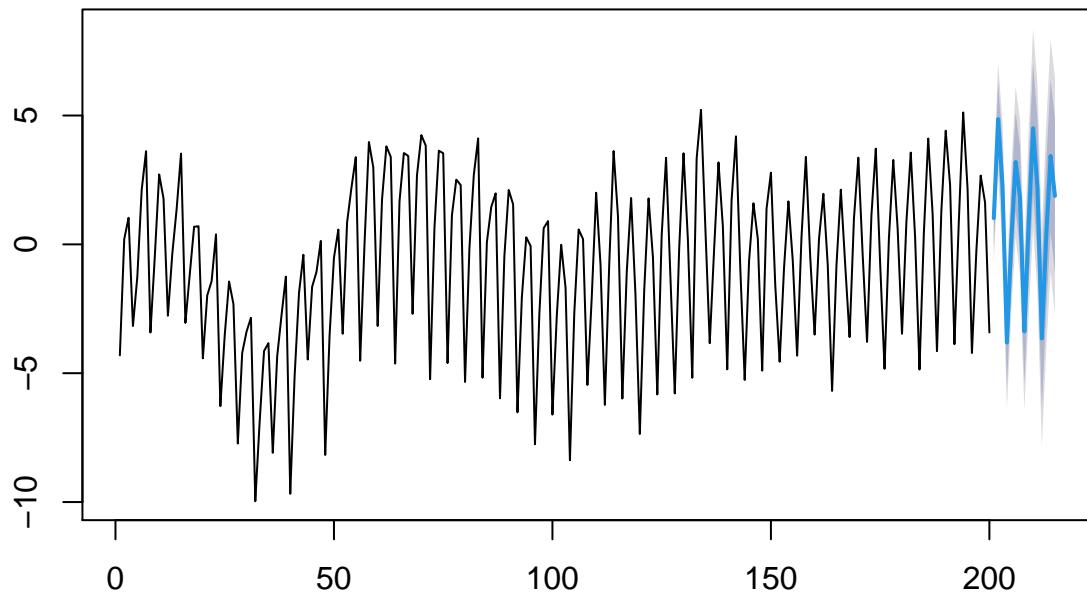
El histograma muestra una tendencia de la distribución a la normalidad, que la prueba de Shapiro-Wilk sostiene al límite, esta prueba arroja un p valor de 0.05663 lo cual sugiere que la muestra no reúne evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% por lo que se acepta que los residuos se distribuyen normalmente, sostenemos que al límite de rechazar la normalidad. El QQplot permite ver que en las colas es donde existen los desvíos de la normalidad que estarian generando que la prueba de Shapiro-Wilk obtenga este resultado límite, pero al ser una pequeña proporción de los datos tomamos como que en términos generales los residuos se distribuyen normalmente.

Como conclusión final quedaron algunas dudas con el Lagrange-Multiplier test, pero que con las otras herramientas disponibles logramos solucionar.

f) Pronostico:

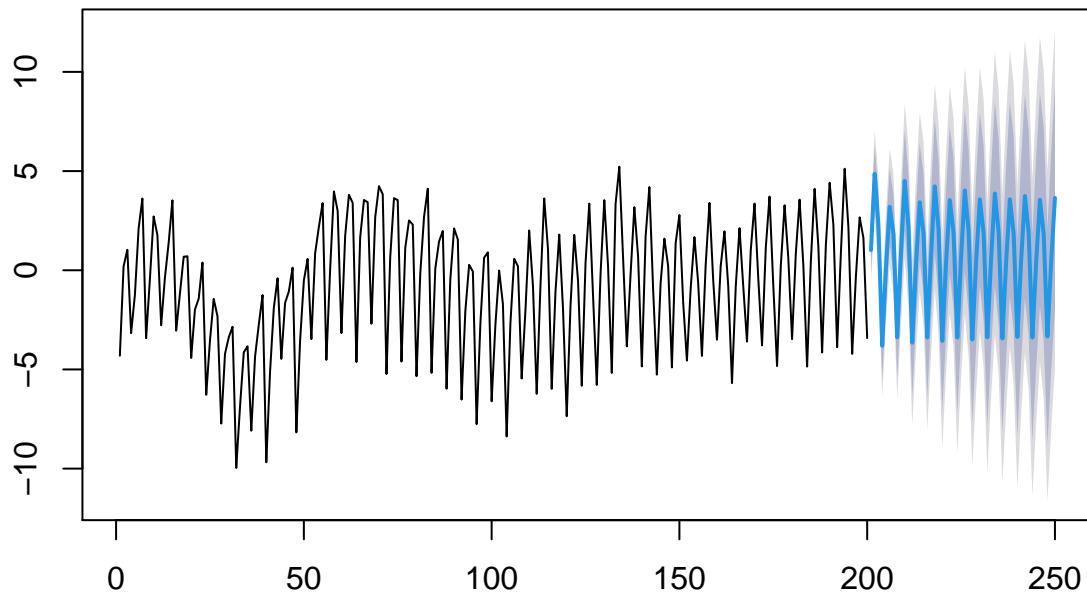
```
preds1 <- forecast::forecast(modelo4, 15) # para prevenir error  
plot(preds1)
```

Forecasts from ARIMA(1,1,1)(2,0,0)[4]



```
preds2 <- forecast::forecast(modelo4, 50)
plot(preds2)
```

Forecasts from ARIMA(1,1,1)(2,0,0)[4]



Podemos ver predicciones a distintos tiempos en el furuto, se puede ver que a simple vista la prediccion representa la tendencia general de la serie, lo que nos tranquiliza sobre que el modelo propuesto es adecuado, ya que logra captar mucha de la informacion disponible.

Algo interesante de destacar es como las bandas de confianza del 95%, comienzan a aumentar su amplitud a medida que nos alejamos en el tiempo y eso se debe a que a medida que avanzamos en el tiempo tenemos menos informacion disponible.