Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:
Informe Tarea3

Martín Panza
RUT 18.954.534-7

8 de Octubre, 2015

1. Pregunta 1

1.1 Introducción

El objetivo fue integrar la ecuación del oscilador de Van der Pol utilizando el método Runge Kutta 3, implementando el algoritmo a utilizar. El oscilador fue propuesto para describir la dinámica de algunos circuitos eléctricos y su ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt}$$

En ella, k es la constante y μ es coeficiente de roce. Si $|x| > a$, el movimiento es amortiguado por el roce. Por otra parte, si $|x| < a$ el roce inyecta energía.
Se señaló en el enunciado que realizando el cambio de variable y=ax la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

Esta vez sólo depende del parámetro μ^*. Se requirió para la integración utilizar μ^*=1.RRR con RRR los tres números previos al guión en el RUT del alumno. Además se pidió describir la discretización y paso de tiempo usados.

1.2 Procedimiento

Mi RUT es 18.954.534-7 por lo que se asignó a μ^* el valor 1.534. A continuación se procedió a reducir la ecuación a un sistema de EDOs definiendo z=y' resultando de la siguiente manera:

$$\frac{d}{ds}y = z \wedge \frac{d}{ds}z = -y - \mu(y^2 - 1)z$$

De esta forma, se implementó la función oscilador de Van der Pol que recibía como parámetros a z e y retornaba lo mostrado en las ecuaciones. Se implementó Runge Kutta 3 utilizando vectores y se integró la ecuación para realizar dos gráficos: y(s) e y v/s dy/ds. Para ello, se utilizó un arreglo de tiempo entre 0 y 20π, y un número de pasos 1000; esto resulta en un h=0.0628318530718. Este proceso se realizó dos veces para condiciones iniciales diferentes. Primero para y(0)=0.1, z(0)=0; y luego para y(0)=4, z(0)=0.

1.3 Resultados

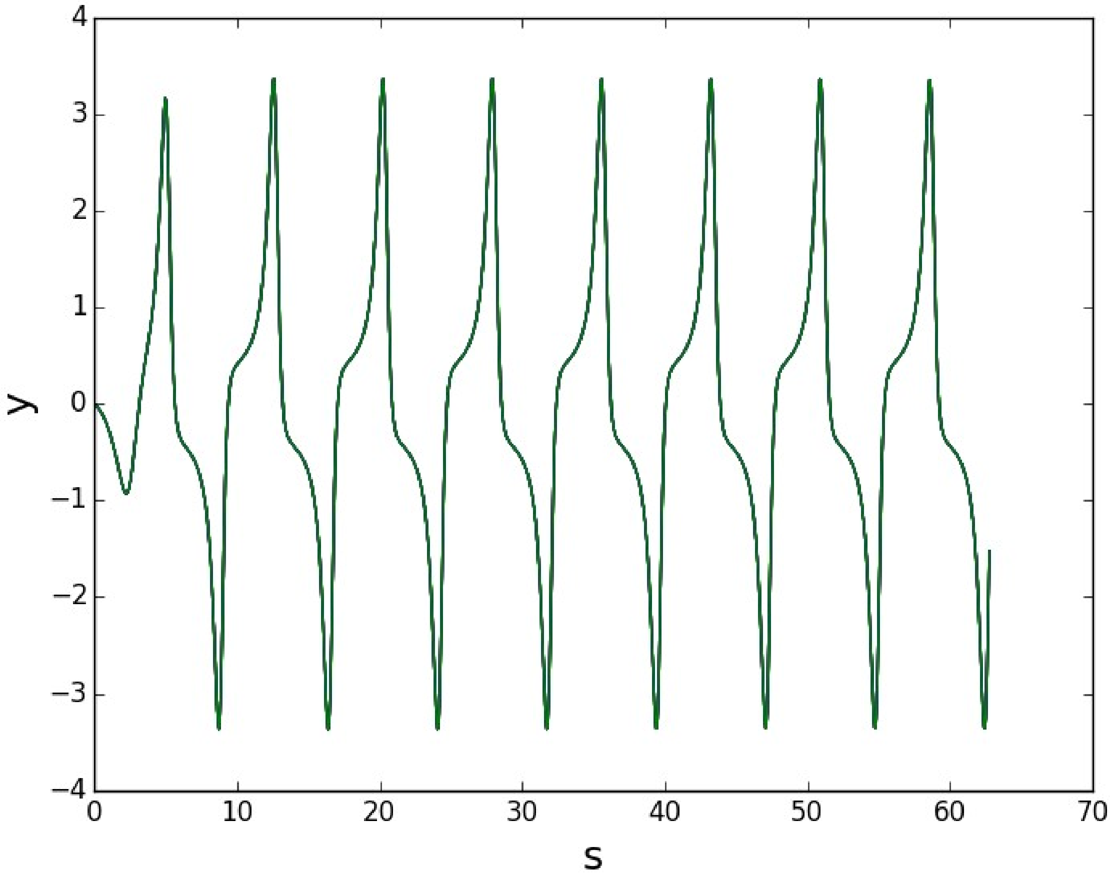

Figura 1: y(s) oscilador de Van der Pol para y(0)=0.1, z(0)=0

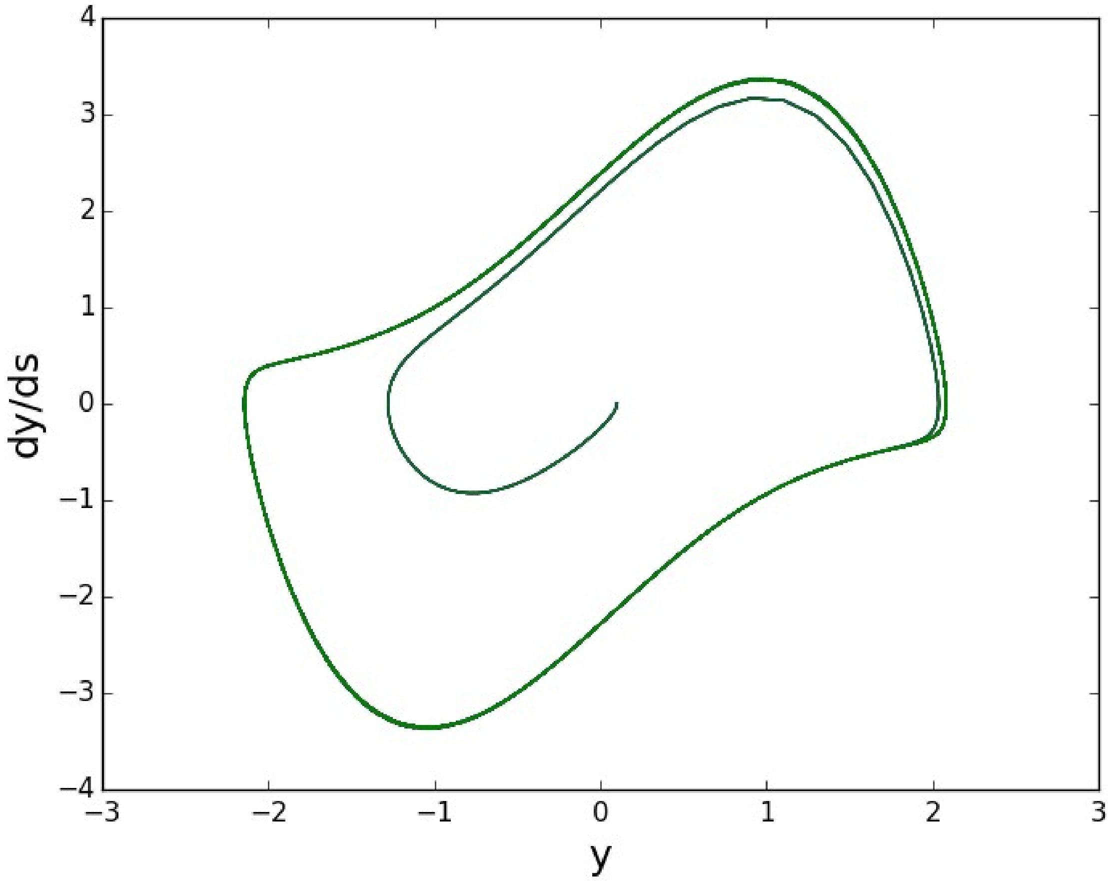

Figura 2: Gráfico de trayectoria en el espacio
y v/s dy/ds oscilador de Van der Pol para y(0)=0.1, z(0)=0

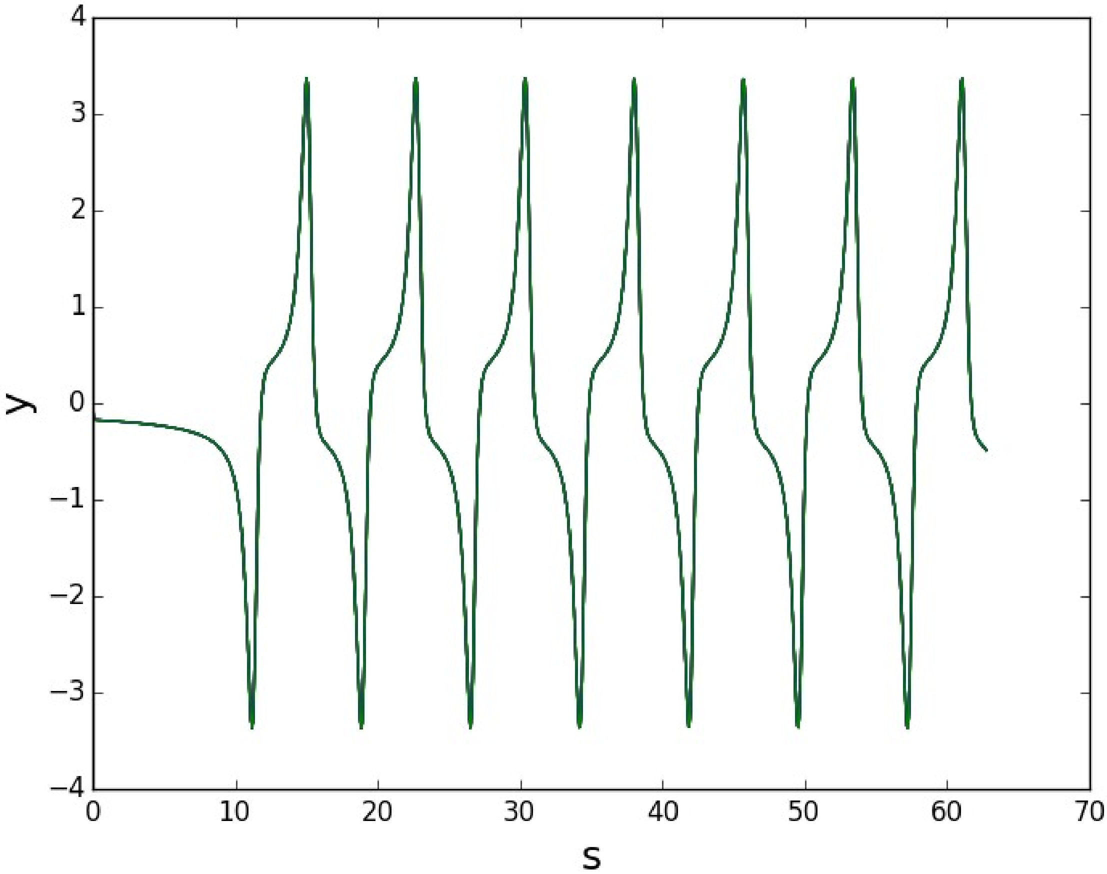

Figura 3: y(s) oscilador de Van der Pol para y(0)=4, z(0)=0

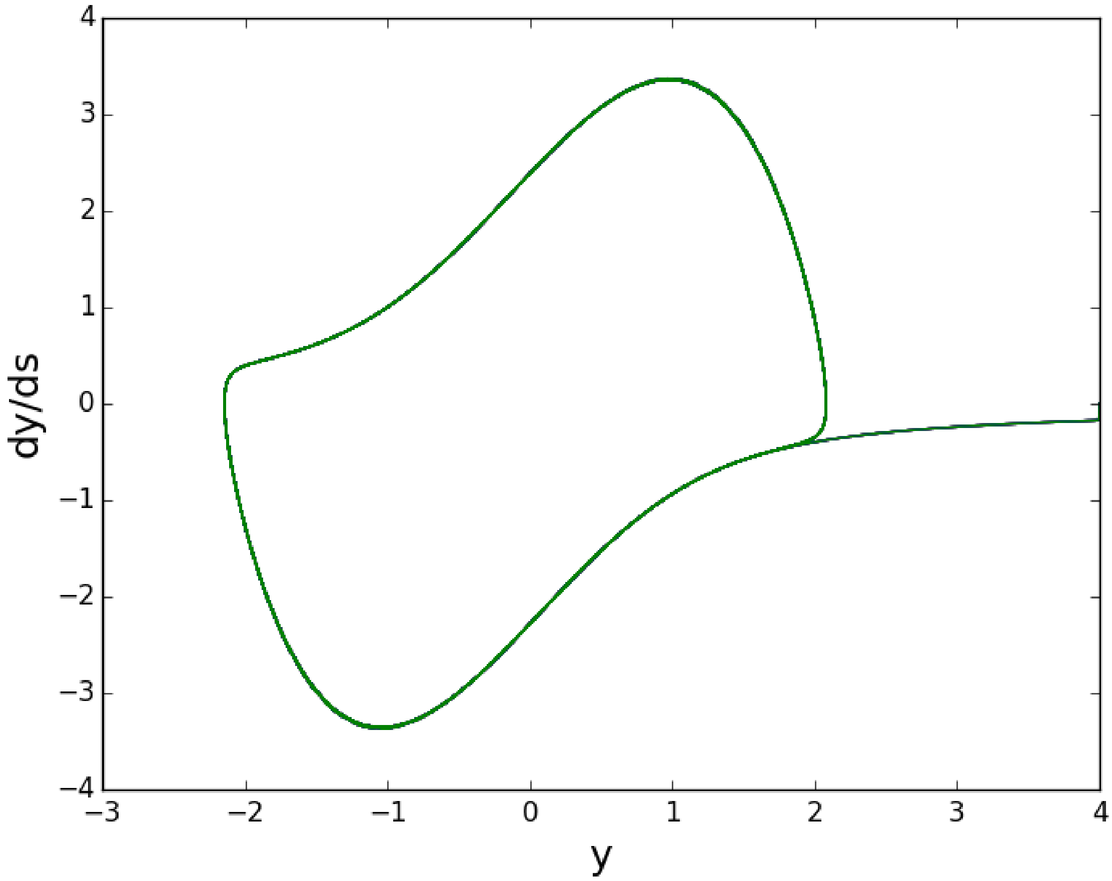

Figura 4: Gráfico de trayectoria en el espacio
y v/s dy/ds oscilador de Van der Pol para y(0)=4, z(0)=0

1.4 Conclusiones

Es importante destacar que, como se observa en las figuras 1 y 3, y(s) demuestra efectivamente un movimiento oscilatorio. Ambos con amplitud y periodo muy parecidos de aproximadamente 3.5 y 9 respectivamente. Sin embargo, se diferencian en un pequeño desfase respecto al eje x. En cuanto a las figuras 2 y 4, nuevamente se observa un comportamiento similar entre ambos; sin embargo, para el caso y(0)=4 hay un momento en que la trayectoria escapa a la curva, lo que no sucede con el caso en la figura 1. Es decir, la velocidad inicial es suficiente para que en un momento dado, se alcance una velocidad de escape.

2. Pregunta 2

2.1 Introducción

En esta pregunta, fue presentado el sistema de Lorenz, conocido por tener soluciones caóticas. La más conocida el llamado atractor de Lorenz. El sistema es el que sigue:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Para obtener aquella solución mencionada se requiere utilizar los parámetros σ=10, β=8/3 y ρ=28 que fueron los utilizados en esta actividad. El objetivo nuevamente era integrar la ecuación. Pero, a diferencia de la parte anterior, se utilizaría el método Runge Kutta 4 y no se pedía implementarlo, se podía usar los algoritmos disponibles en 'scipy.integrate.' Era necesario dar un set de condiciones iniciales (x0,y0,z0) y un intervalo de tiempo en el que integrar. Por último, se debía realizar un gráfico 3D para las variables x(t), y(t), z(t).

2.2 Procedimiento

Una vez implementada la función, se definieron las condiciones iniciales, para las que se eligieron [x0, y0, z0, dx/dt 0, dy/dt 0, dz/dt 0]=[1,1,1,1,1,1]. Luego se definió el intervalo de tiempo t=[0,100] para 1000 pasos. Para la integración se utilizó el método de scipy.integrate '.odeint()' y luego se procedió a graficar utilizando como base el archivo 3D.py ubicado dentro del repositorio de la tarea 3.

2.3 Resultados

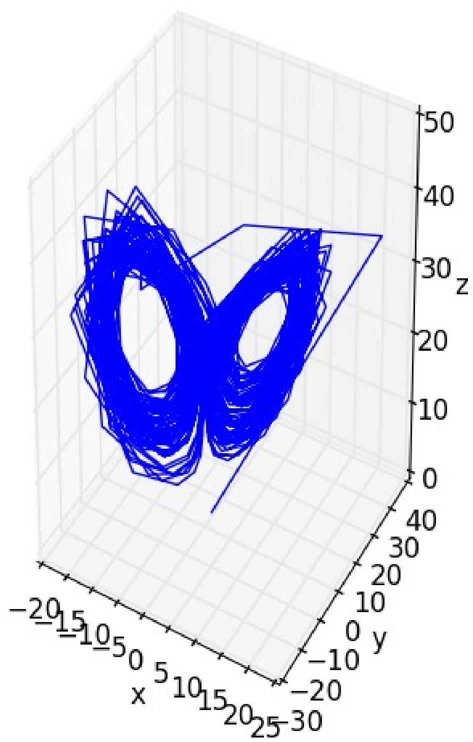

Figura 5: Gráfico 3D de x(t),y(t),z(t)

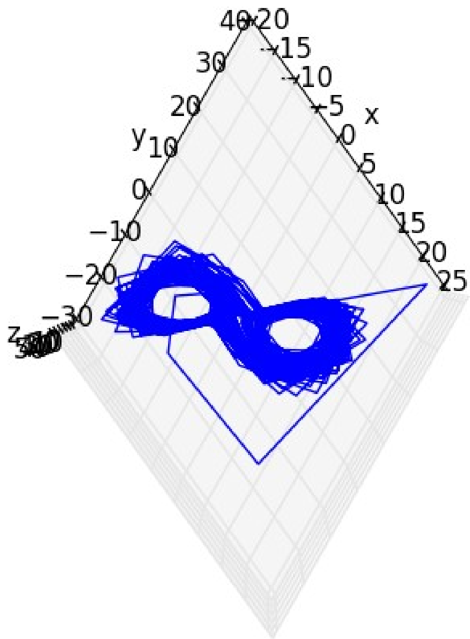

Figura 6: Gráfico de x(t),y(t),z(t) en plano x-y

2.4 Conclusiones

Se puede observar que la trayectoria se mantiene 'orbitando' en torno a dos puntos en una especie de 8, sin embargo sin pasar inmediatamente de un lazo al otro. Además se puede observar que en un comienzo la trayectoria parte muy alejada de los puntos pero que es atraída rápidamente hacia ellos.