

# REGRESIÓN LINEAL



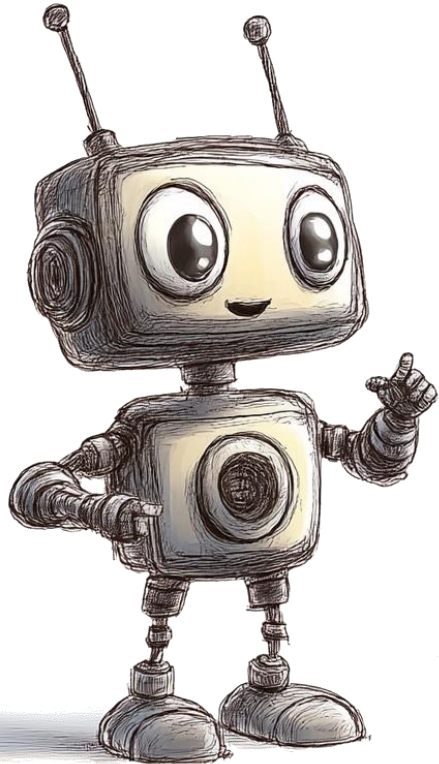
Inteligencia Artificial

CEIA - FIUBA

Dr. Ing. Facundo Adrián  
Lucianna

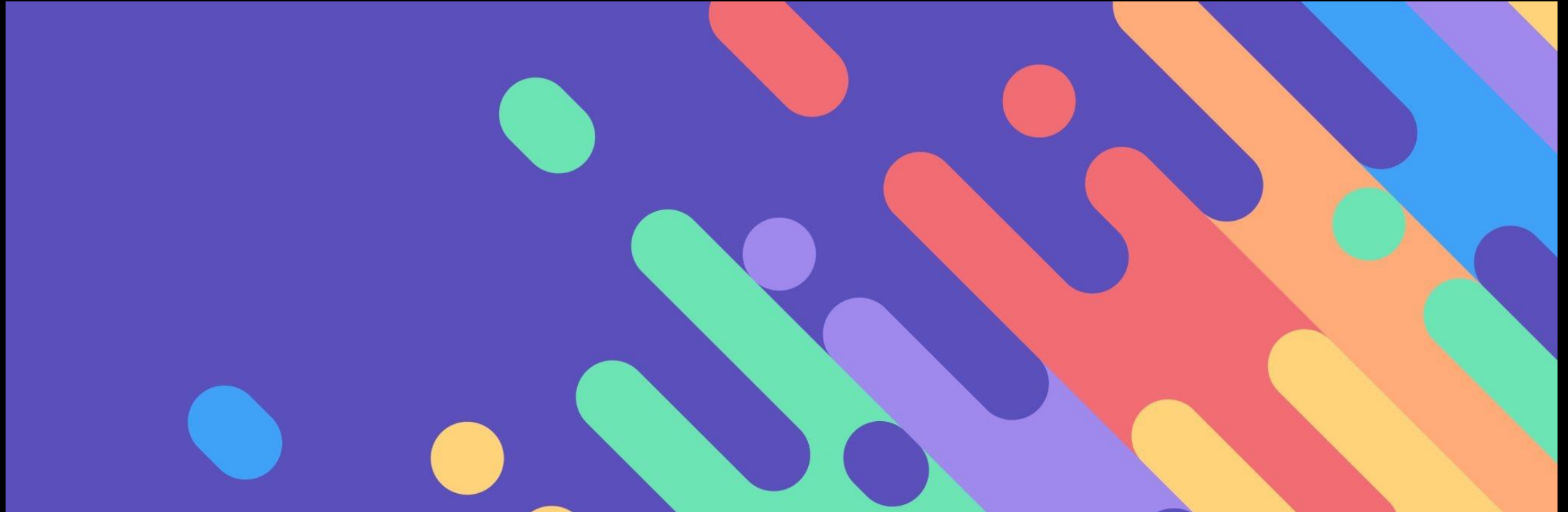
---

# REGRESIÓN



Los temas que vamos a ver en este video son:

- Regresión Lineal
  - Definición
  - Ajuste
  - Supuestos
- Tratamiento de variables
  - Normalización
  - Estandarización
  - Variables Categóricas: One-Hot Encoding
- Métricas de evaluación



---

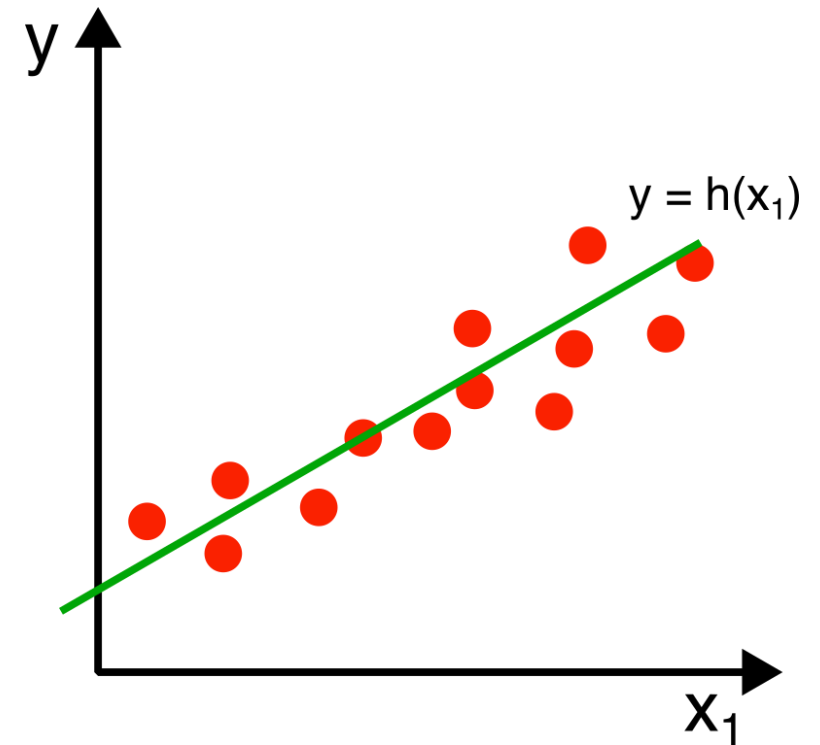
# REGRESIÓN

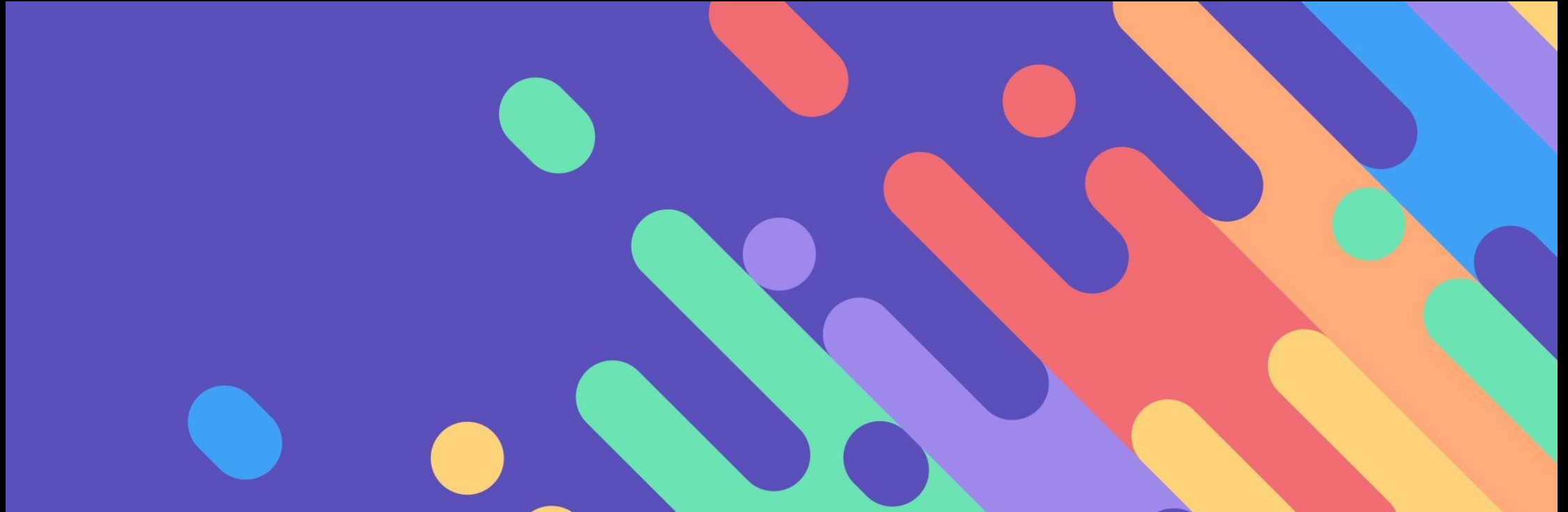
---

# REGRESIÓN

Si tenemos un problema donde el target  $y$  es una *variable numérica*, se llama un **problema de regresión**.

Se centra en estudiar las relaciones entre una variable dependiente y una o más variables independientes.





---

# REGRESIÓN LINEAL

---

# REGRESIÓN LINEAL

La regresión lineal es parte de una subárea del aprendizaje automático llamada **aprendizaje estadístico**, que:

- Se enfoca en el estudio de modelos estadísticos y métodos para analizar y comprender los datos.
- Utiliza herramientas y técnicas estadísticas clásicas para hacer inferencias y tomar decisiones basadas en los datos.
- Su enfoque principal puede ser la estimación de parámetros, la predicción o la inferencia sobre la relación entre variables.

---

# REGRESIÓN LINEAL

El modelo de regresión lineal es una combinación lineal de las variables de entrada:

$$\hat{y} = h(X) = b + w_0x_0 + \cdots + w_dx_d$$

- $X = (x_0, x_1, \dots, x_d)$
- $b, w_0, \dots, w_d$
- $\hat{y}$

---

# REGRESIÓN LINEAL

El modelo de regresión lineal es una combinación lineal de las variables de entrada:

$$\hat{y} = h(X) = b + w_0x_0 + \cdots + w_dx_d$$

- $X = (x_0, x_1, \dots, x_d)$  Son las *características (features)* de nuestras observaciones. Son todas **variables numéricas**.
- $b, w_0, \dots, w_d$
- $\hat{y}$



---

# REGRESIÓN LINEAL

El modelo de regresión lineal es una combinación lineal de las variables de entrada:

$$\hat{y} = h(X) = b + w_0x_0 + \cdots + w_dx_d$$

- $X = (x_0, x_1, \dots, x_d)$  Son las *características (features)* de nuestras observaciones. Son todas **variables numéricas**.
- $b, w_0, \dots, w_d$  Son los coeficientes del modelo. Son números reales. Cuanto más cerca de cero esté un coeficiente, menos depende la variable dependiente del *feature* que multiplica.
- $\hat{y}$

---

# REGRESIÓN LINEAL

El modelo de regresión lineal es una combinación lineal de las variables de entrada:

$$\hat{y} = h(X) = b + w_0x_0 + \dots + w_dx_d$$

- $X = (x_0, x_1, \dots, x_d)$  Son las *características (features)* de nuestras observaciones. Son todas **variables numéricas**.
- $b, w_0, \dots, w_d$  Son los coeficientes del modelo. Son números reales. Cuanto más cerca de cero esté un coeficiente, menos depende la variable dependiente del *feature* que multiplica.
- $\hat{y}$  Es la predicción del modelo. Se compara con la *etiqueta (label)* de la observación.

---

# REGRESIÓN LINEAL

El modelo de regresión lineal es una combinación lineal de las variables de entrada:

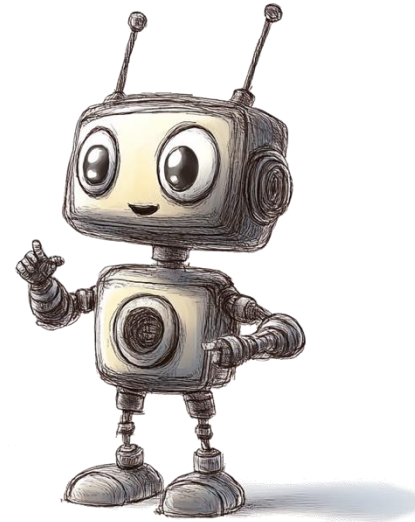
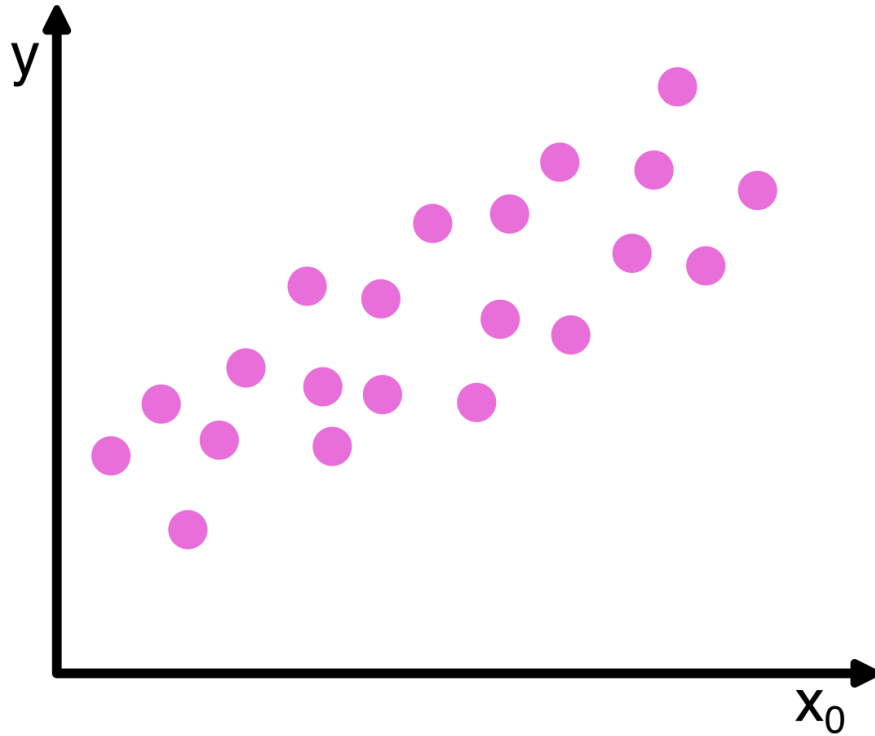
$$\hat{y} = h(X) = b + w_0x_0 + \cdots + w_dx_d$$

Podemos también expresarlo en notación matricial:

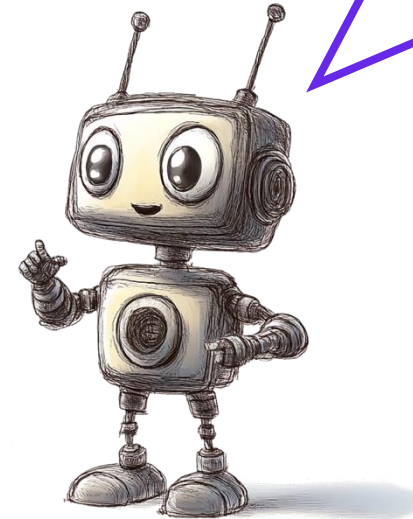
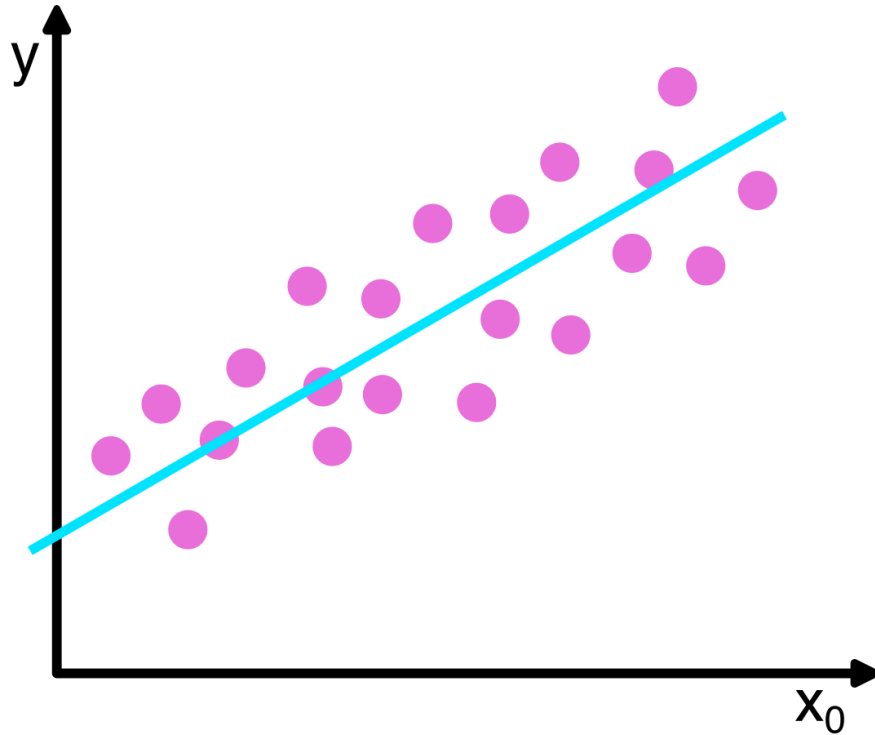
$$\hat{y} = h(X) = b + \mathbf{W}^T \mathbf{X}$$

---

# REGRESIÓN LINEAL

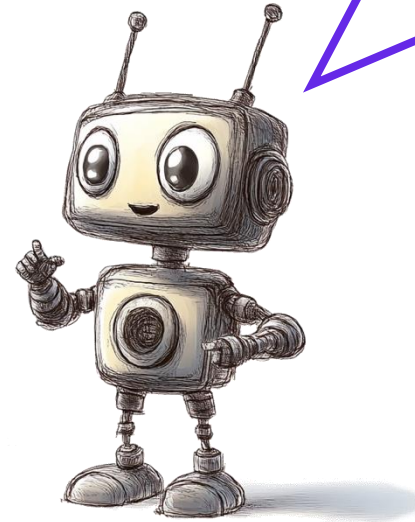
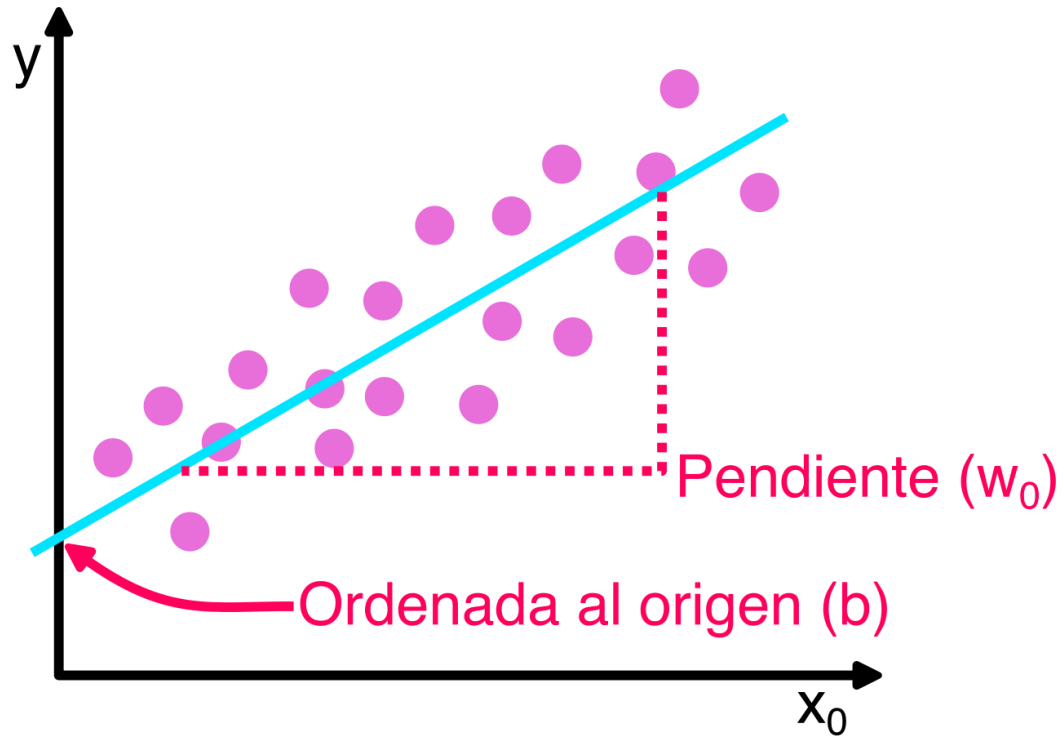


# REGRESIÓN LINEAL



$$\hat{y} = h(X) = b + w_0 x_0$$

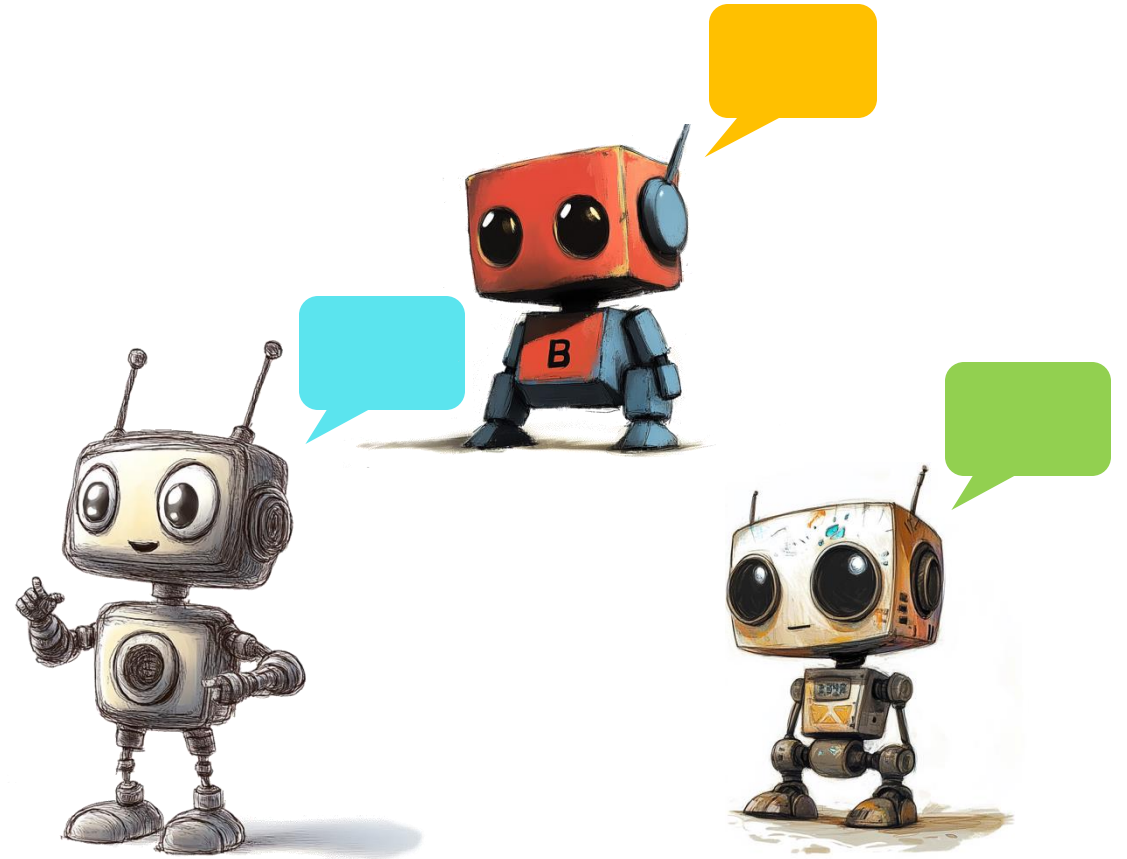
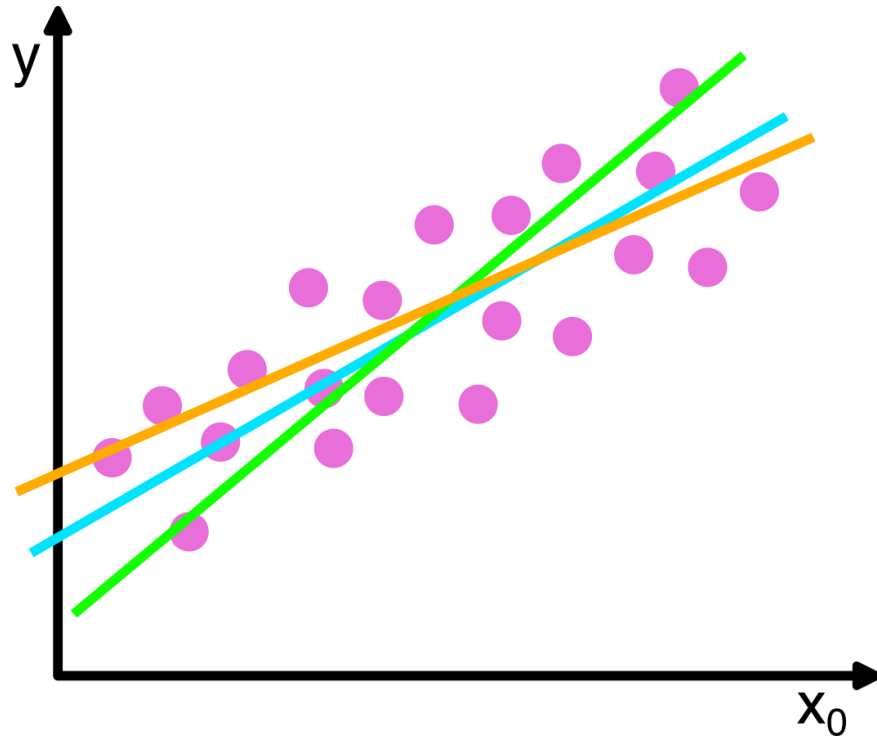
# REGRESIÓN LINEAL



$$\hat{y} = h(X) = b + w_0 x_0$$

# REGRESIÓN LINEAL

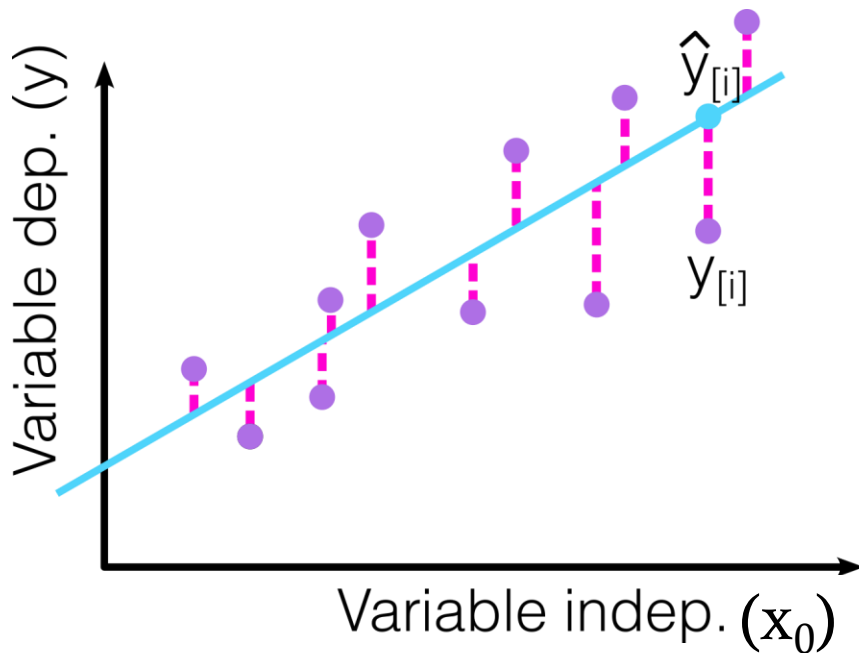
¿Ahora cuál recta?



---

# REGRESIÓN LINEAL

Para encontrarla, medimos la distancia entre la recta y cada punto, a lo que llamamos **residuos**.



$$e_{[i]} = y_{[i]} - \hat{y}_{[i]}$$

$$y_{[i]} = \hat{y}_{[i]} + e_{[i]}$$

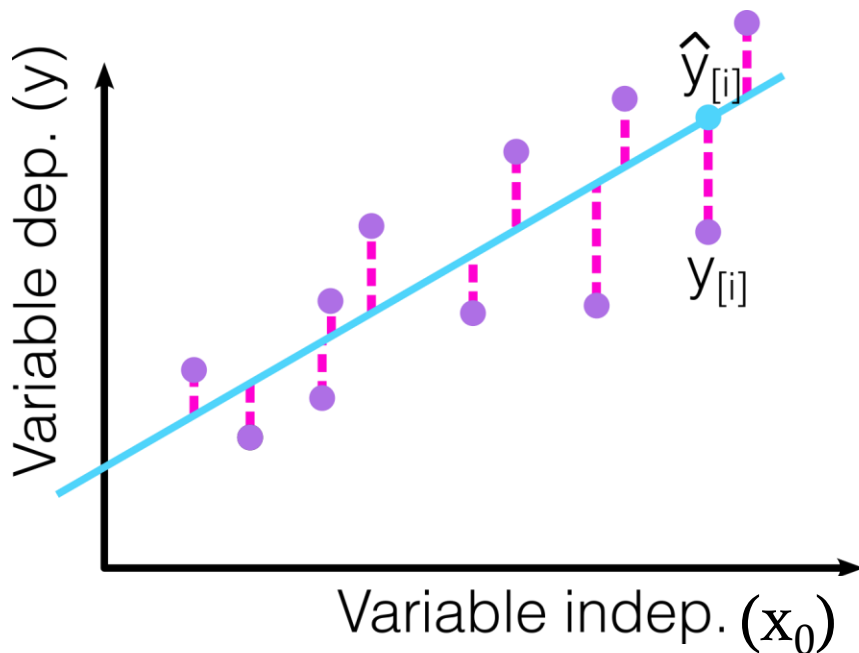
$$y_{[i]} = b + w_0 x_0[i] + e_{[i]}$$



---

# REGRESIÓN LINEAL

Buscamos minimizar el valor de los residuos. Para lograrlo, lo hacemos minimizando la suma de los cuadrados de los **residuos**.

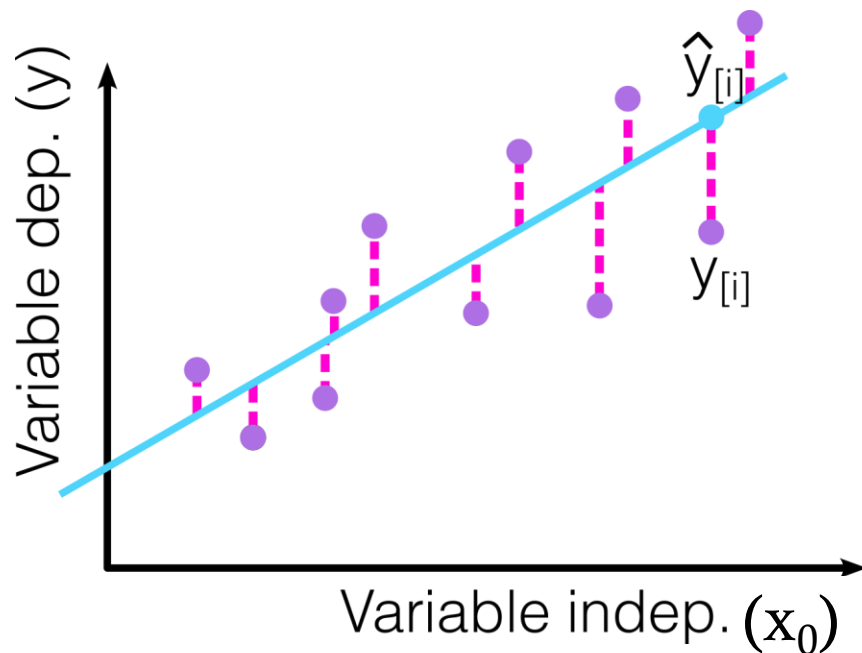


$$S_{res} = \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - w_0 x_{0[i]})^2$$

$$\min(S_{res}) = \min \left( \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2 \right)$$

# REGRESIÓN LINEAL

Buscamos minimizar el valor de los residuos. Para lograrlo, lo hacemos minimizando la suma de los cuadrados de los **residuos**.



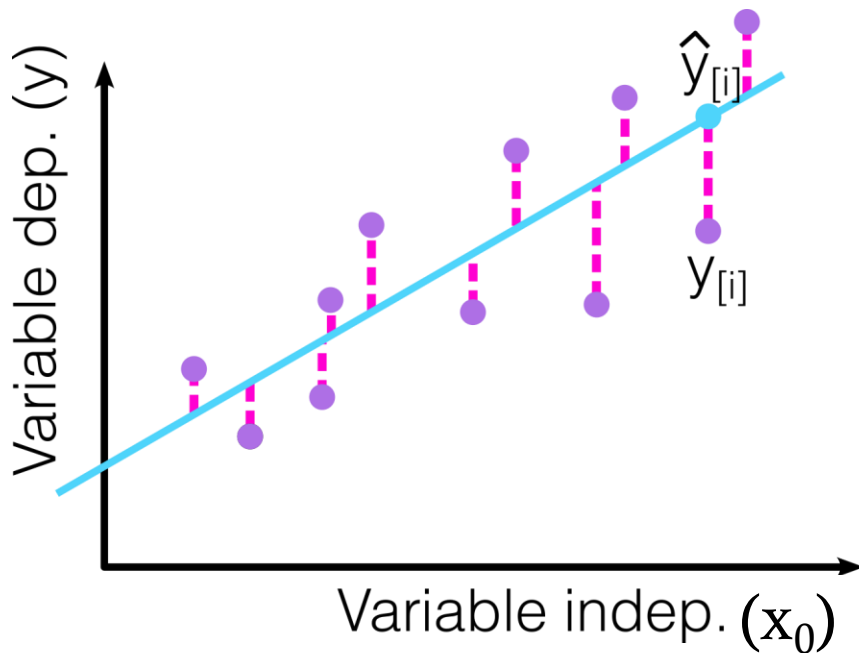
$$S_{res} = \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - w_0 x_{0[i]})^2$$

$$\min(S_{res}) = \min \left( \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2 \right)$$

---

# REGRESIÓN LINEAL

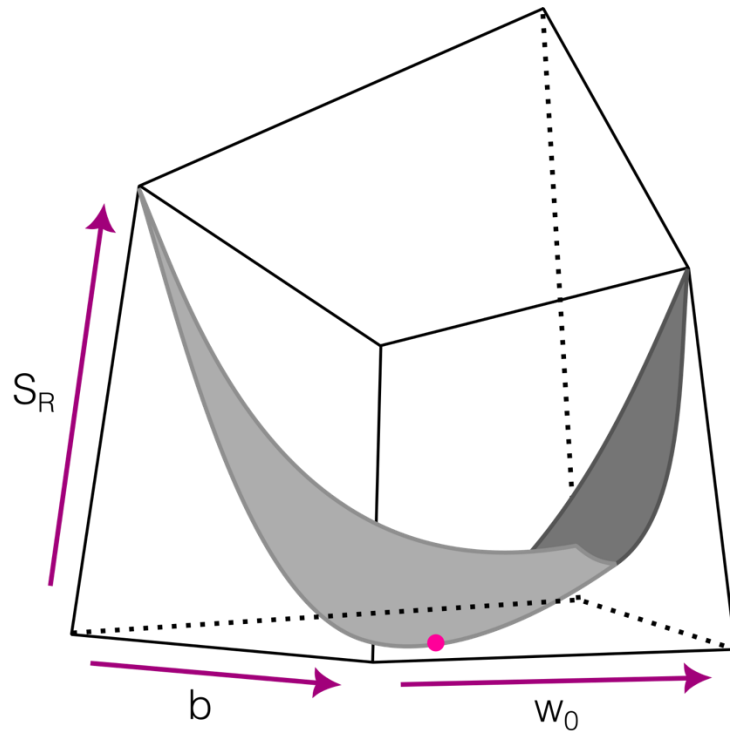
Buscamos minimizar el valor de los residuos. Para lograrlo, lo hacemos minimizando la suma de los cuadrados de los **residuos**.



Para minimizar, solo podemos ajustar los coeficientes. Lo que hacemos es seguir el **gradiente**.

$$\frac{\partial S_{res}}{\partial b} = 0 \quad \frac{\partial S_{res}}{\partial w_0} = 0$$

# REGRESIÓN LINEAL



En la regresión lineal, la función es siempre convexa, es decir, siempre tiene un solo mínimo. En su forma tradicional:

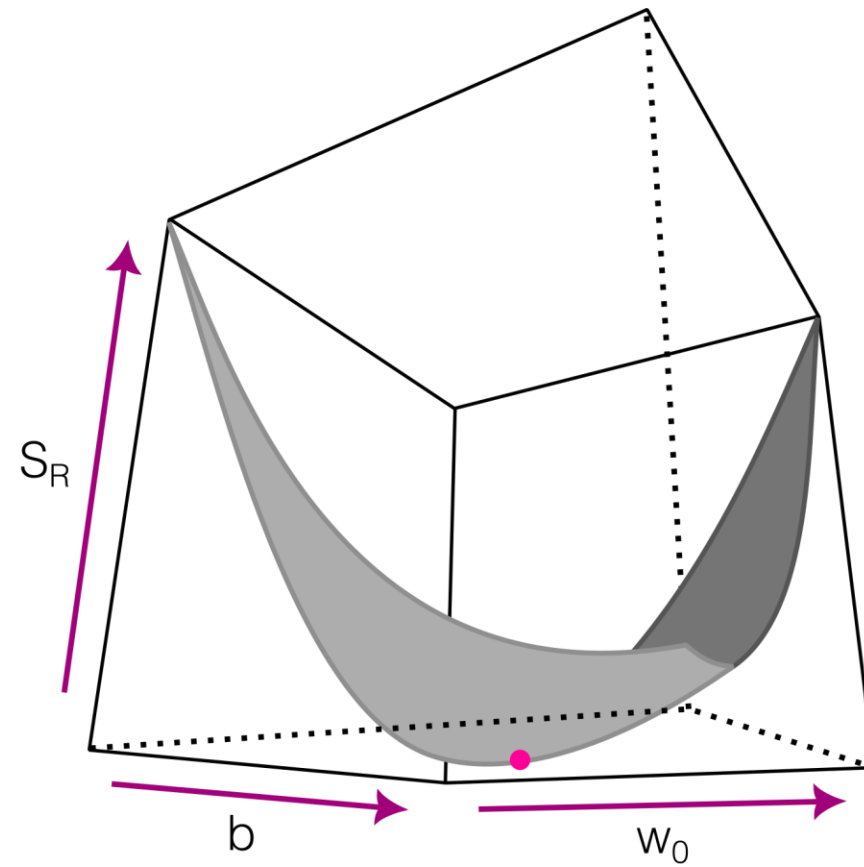
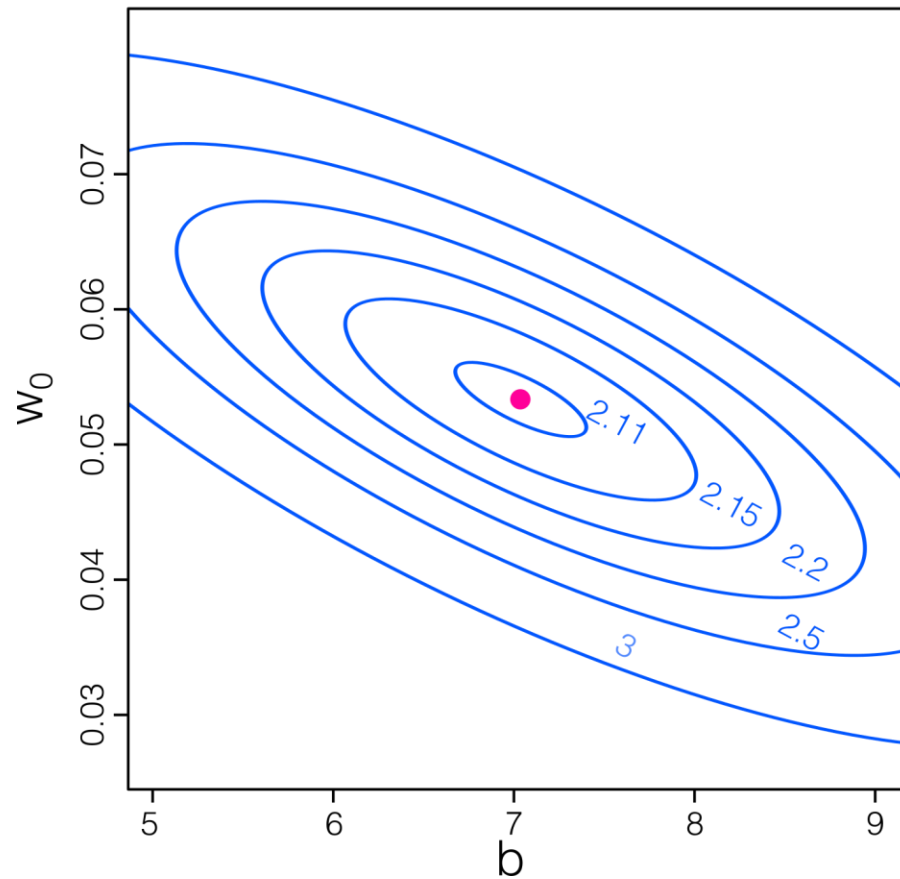
$$\frac{\partial S_{res}}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial S_{res}}{\partial w_0} = 0$$

Si expresamos las derivadas, obtenemos un sistema de ecuaciones, llamado **ecuaciones normales**.

El problema es que, cuando tenemos muchos datos, resolver el sistema es muy difícil. ¡En esos casos, podemos usar **gradiente descendiente**!

# REGRESIÓN LINEAL



---

# REGRESIÓN LINEAL

## Ajuste

¿Cómo medimos qué tan bien se ajusta una regresión a nuestros datos?

Si medimos la varianza de la variable dependiente en los datos:

$$S_T = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - \bar{y})^2$$

Esta varianza se puede separar en dos partes: una parte que es **atribuida al modelo** y **otra que no**:

$$S_T = S_{model} + S_{res}$$
$$S_T = \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{y}_{[i]} - \bar{y})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2$$

---

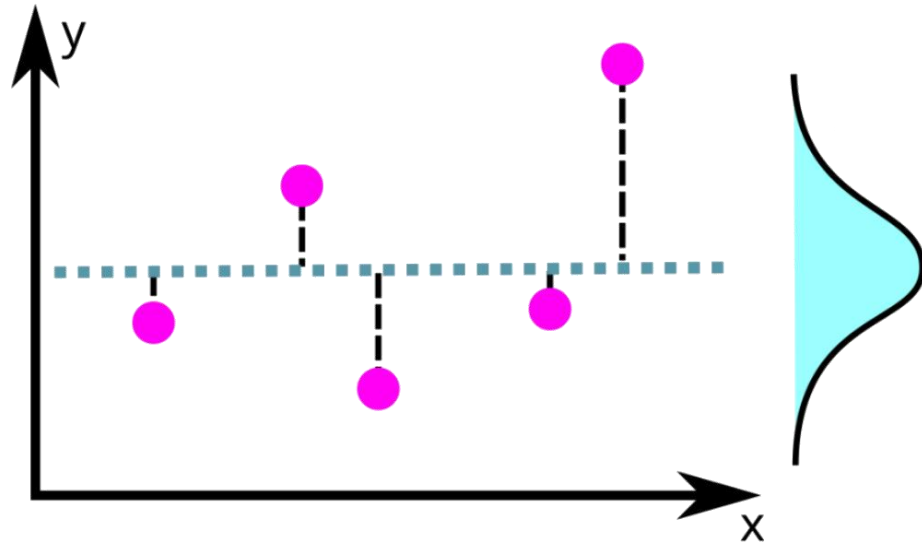
Parte que explica el  
modelo

Parte que no  
(residuos)

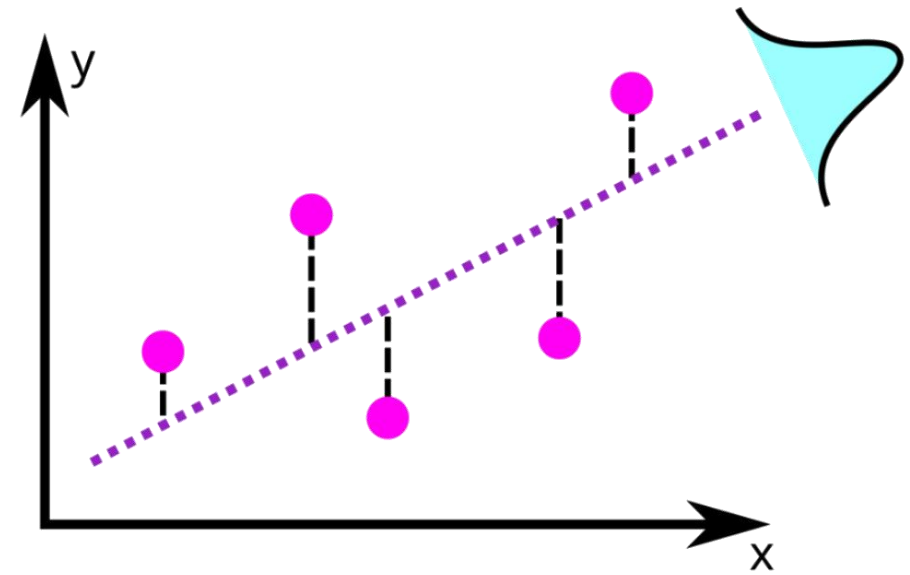
---

# REGRESIÓN LINEAL

## Ajuste



$$S_T = \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - \bar{y})^2$$



$$S_{res} = \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2$$

---

# REGRESIÓN LINEAL

## Ajuste

Como métricas, podemos usar:

- El cálculo del desvío estándar residual:

$$s_{res} = \sqrt{\frac{S_{res}}{N - d - 1}} = \sqrt{\frac{1}{N - d - 1} \sum_{i=0}^{N-1} (e_{[i]})^2}$$

Donde  $d$  es la cantidad de *features*.

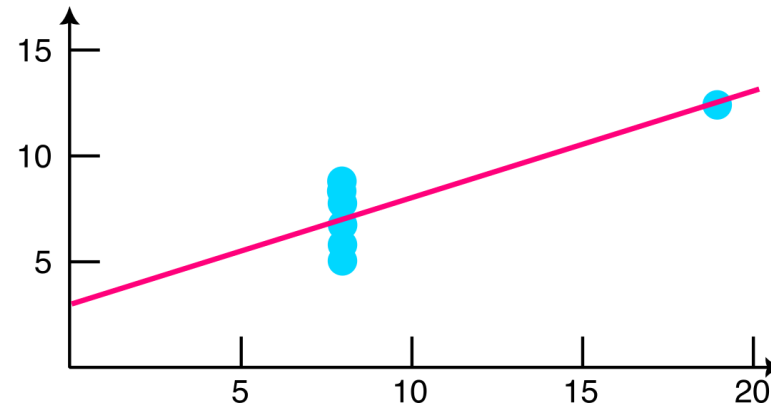
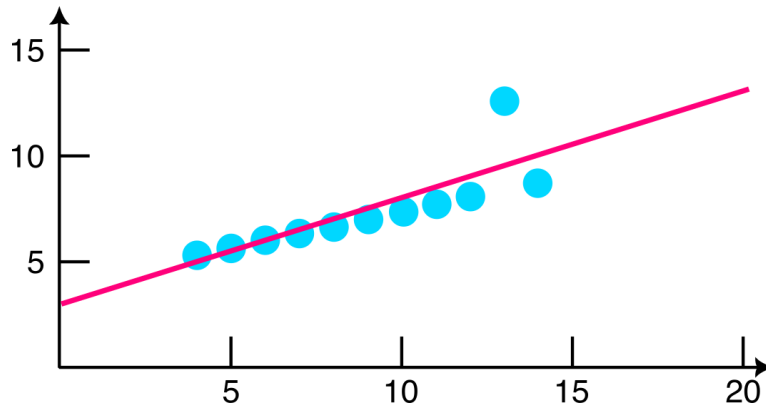
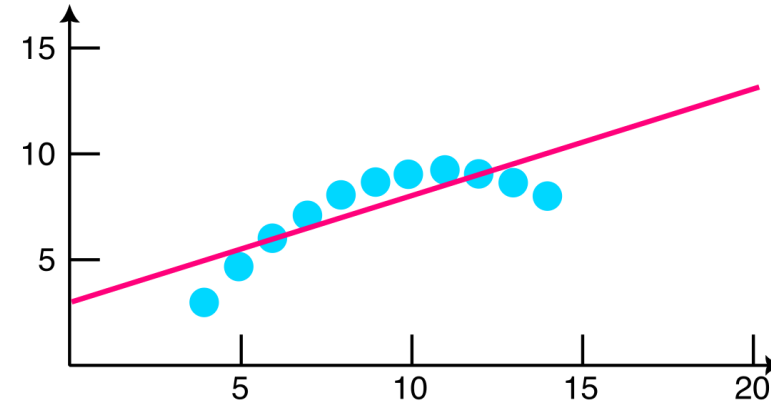
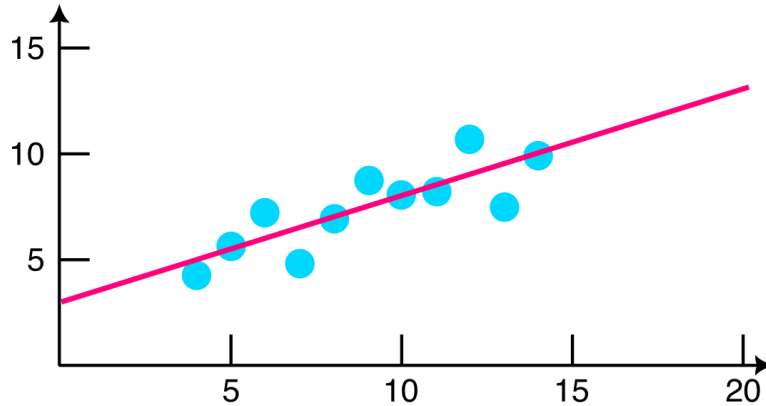
- El coeficiente de Pearson:

$$R^2 = \frac{S_{model}}{S_T} = 1 - \frac{S_{res}}{S_T}$$



# REGRESIÓN LINEAL

## Ajuste



---

# REGRESIÓN LINEAL

## Suposiciones

Las suposiciones que usamos para aplicar la regresión lineal son:

- **Relación lineal:** Al aplicar el modelo, muchas veces buscamos validar esta suposición.
- **Features independientes:** Los *features* de entrada de la regresión deben ser independientes entre sí.
- **Residuos:** Deben provenir de una distribución normal  $N(0, \sigma^2)$  y ser independientes entre sí.

# REGRESIÓN LINEAL

## Suposiciones

Las suposiciones

- **Relación**

suposición

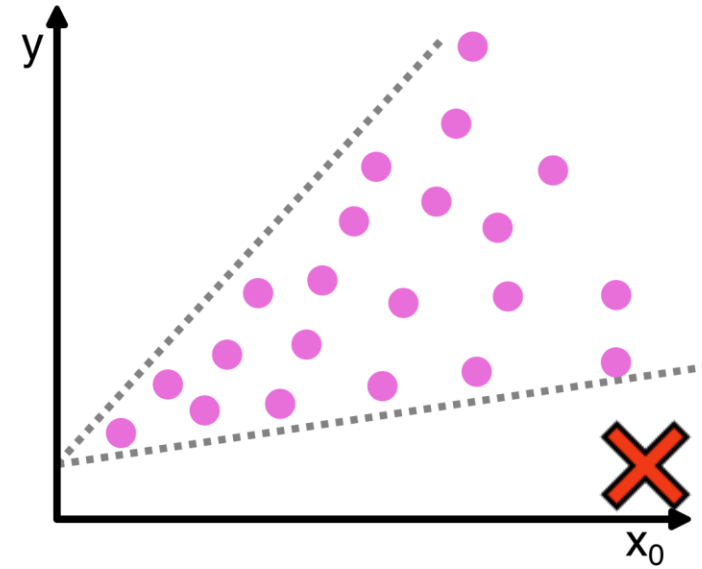
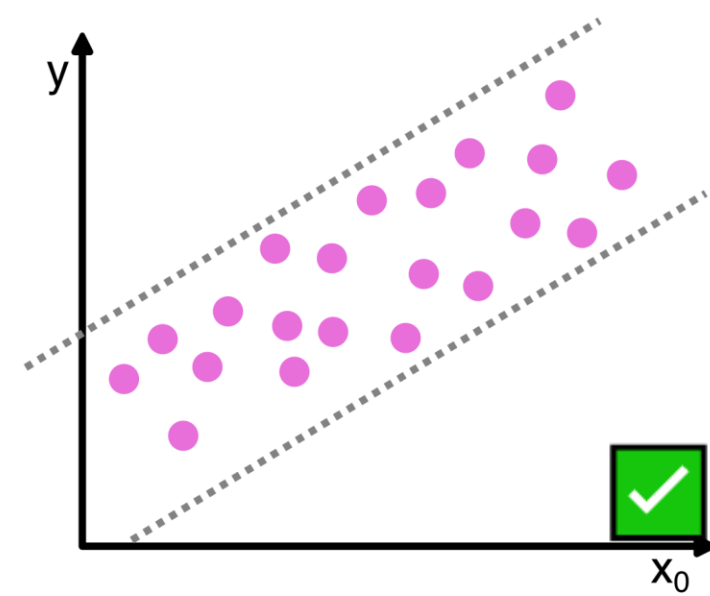
- **Features**

independ

- **Residuos**

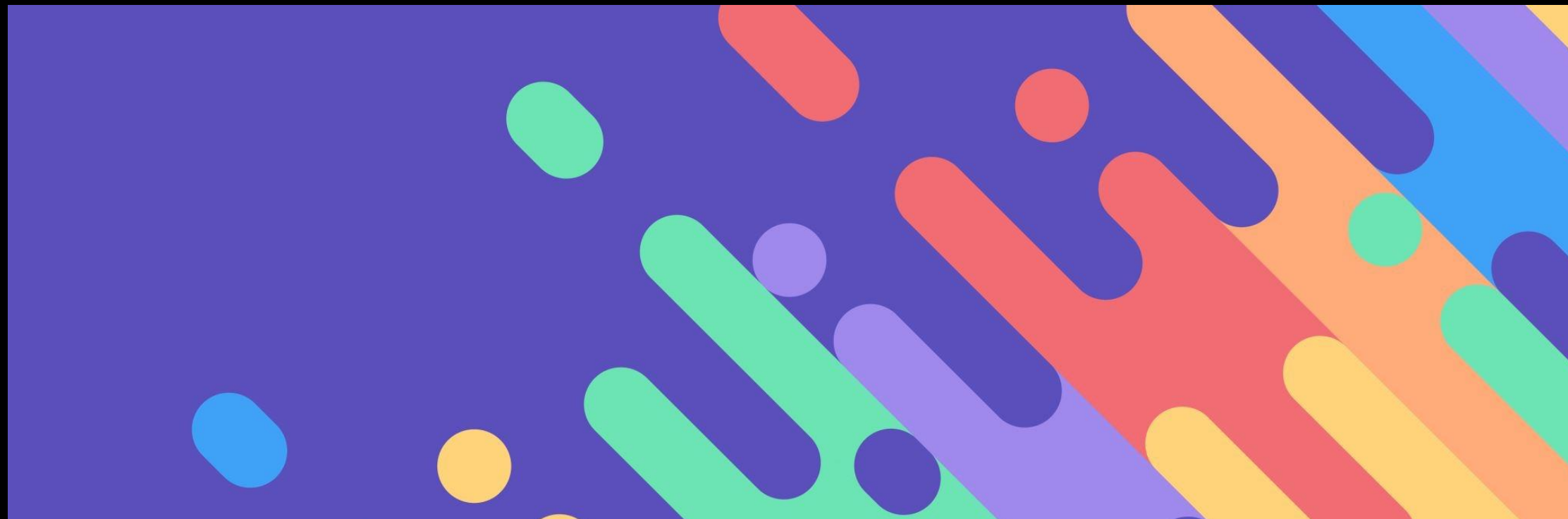
independ

**Homocedasticidad**



r esta

n ser



---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Normalización o estandarización

En la regresión lineal, tenemos la multiplicación de los coeficientes por nuestras entradas:

$$\hat{y} = b + w_0x_0 + w_1x_1$$

Los coeficientes nos dan un **valor de importancia de las entradas**, pero esto es válido solo si todas las entradas están en la misma escala.

Si la variable  $x_0$  está en rango de  $[1000, 3000]$  y  $x_1$  en  $[-1, 1]$ , los valores de  $w_0$  y  $w_1$  estarán en escalas diferentes, y por lo tanto, no serán comparables.

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

Normalización o estandarización

Una forma de **normalizar** es hacer que los valores estén aproximadamente entre 0 y 1, utilizando el valor máximo y el valor mínimo:

$$\tilde{x} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Normalización o estandarización

Una forma de **normalizar** es hacer que los valores estén aproximadamente entre 0 y 1, utilizando el valor máximo y el valor mínimo:

$$\tilde{x} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

Si se necesita normalizar entre -1 y 1:

$$\tilde{x} = 2 \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)} - 1$$

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Normalización o estandarización

Una forma de **normalizar** es hacer que los valores estén aproximadamente entre 0 y 1, utilizando el valor máximo y el valor mínimo:

$$\tilde{x} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

$\left. \begin{array}{l} \min(x) \\ \max(x) \end{array} \right\}$  Set de entrenamiento

Si se necesita normalizar entre -1 y 1:

$$\tilde{x} = 2 \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)} - 1$$



---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

Normalización o estandarización

Otra forma es aplicando la **estandarización**, que es menos sensible a los *outliers*:

$$\tilde{x} = \frac{x - \text{mean}(x)}{\text{std}(x)}$$

mean(x) }  
std(x) } Set de entrenamiento

---

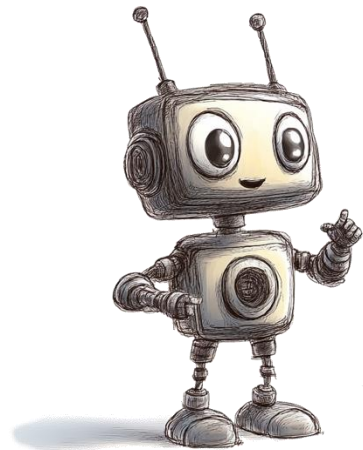
# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

La regresión lineal utiliza variables numéricas para predecir un valor. ¿Cómo podemos usar **variables categóricas**?

Para poder usarlas, debemos transformarlas en *numéricas mediante alguna codificación*.

En el caso de **variables categóricas ordinales**, podemos asociarles un número:



★☆☆☆☆ = 1  
★★☆☆☆ = 2  
★★★☆☆ = 3  
★★★★☆ = 4  
★★★★★ = 5

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Si tenemos **casos nominales** no podemos asociarles números, ya que, al hacerlo, estableceríamos un orden.

Para este tipo de variable existen diferentes codificaciones, y una de ellas es el **one-hot encoding**.



Ale = [1, 0, 0]

Honey = [0, 1, 0]

Stout = [0, 0, 1]

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Peso	Altura	País
80	180	Argentina
83	177	Chile
75	169	Chile
68	155	Argentina
95	199	Perú

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Peso	Altura	País	Argentina	Chile	Perú
80	180	Argentina	1	0	0
83	177	Chile	0	1	0
75	169	Chile	0	1	0
68	155	Argentina	1	0	0
95	199	Perú	0	0	1

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Peso	Altura	Argentina	Chile	Perú
80	180	1	0	0
83	177	0	1	0
75	169	0	1	0
68	155	1	0	0
95	199	0	0	1

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

El **one-hot encoding** nos genera un nuevo atributo por categoría, pero esto puede generar *una trampa*

Si vemos el ejemplo, las tres variables que estamos usando están 100% correlacionadas entre sí:

$$\hat{y} = b + w_0x_{peso} + w_1x_{altura} + w_2x_{arg} + w_3x_{chile} + w_4x_{peru}$$

$x_{peru} = 1 - x_{arg} - x_{chile}$

$$\hat{y} = b + w_0x_{peso} + w_1x_{altura} + w_2x_{arg} + w_3x_{chile} + w_4(1 - x_{arg} - x_{chile})$$
$$\hat{y} = (b + w_4) + w_0x_{peso} + w_1x_{altura} + (w_2 - w_4)x_{arg} + (w_3 - w_4)x_{chile}$$

Para solucionar esto, debemos eliminar siempre una columna para romper la trampa.

---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Peso	Altura	Argentina	Chile	Perú
80	180	1	0	0
83	177	0	1	0
75	169	0	1	0
68	155	1	0	0
95	199	0	0	1

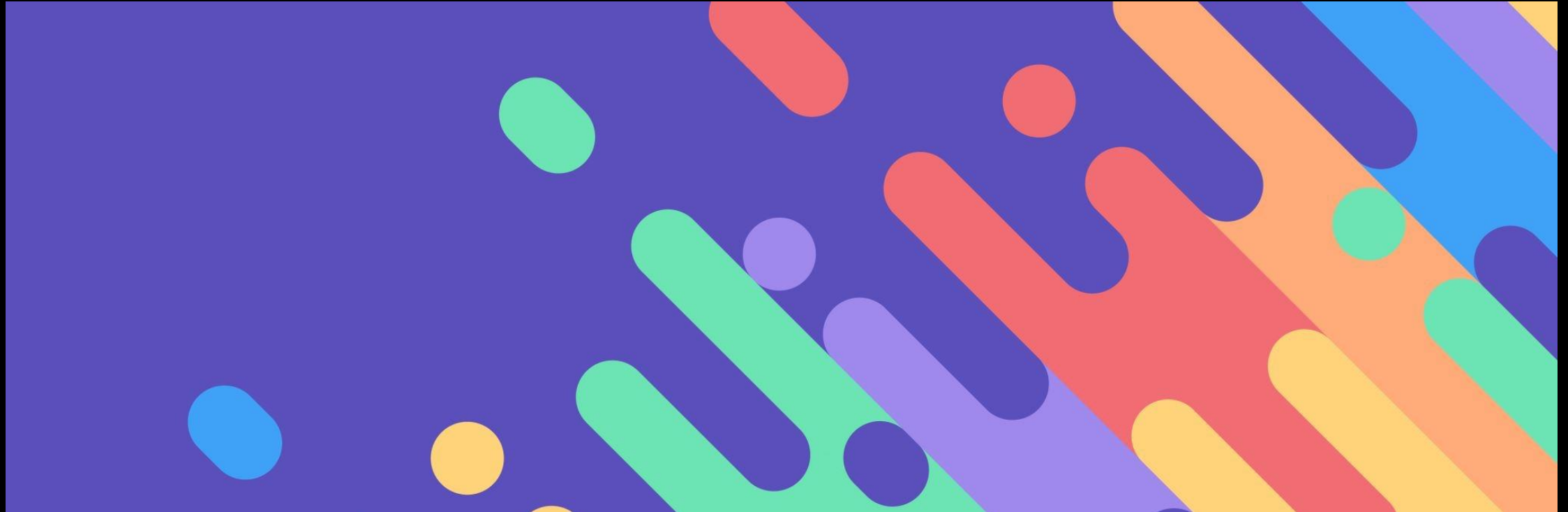


---

# TRATAMIENTO DE VARIABLES

## Variables Dummies

Peso	Altura	Argentina	Chile
80	180	1	0
83	177	0	1
75	169	0	1
68	155	1	0
95	199	0	0



---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

*El conjunto de datos de evaluación se utiliza para evaluar qué tan bien se entrenó el algoritmo con el conjunto de datos de entrenamiento.*

¿Pero cómo evaluamos?

- **El coeficiente de Pearson ( $R^2$ )**

Podemos usar métricas más generales, que midan el error en variables numéricas.

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

Error absoluto medio (MAE)

El **error absoluto medio (MAE)** es el cálculo del valor absoluto del residuo para cada punto de datos.

Luego, tomamos el promedio de todos estos residuos.

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |y_{[i]} - \hat{y}_{[i]}|$$

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

## Error cuadrático medio (MSE)

El **error cuadrático medio (MSE)** es similar al **MAE**, pero ahora calculamos el cuadrado de los residuos.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - \hat{y}_{[i]})^2$$

Un detalle importante son los residuos grandes (**outliers**). En esta métrica, su impacto es mayor que en el **MAE**.

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

Raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE)

Si al **MSE** le calculamos la raíz cuadrada, obtenemos una métrica llamada **RMSE**, que tiene la misma unidad que la salida original, a diferencia del **MSE**, que no la tiene.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - \hat{y}_{[i]})^2}$$

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

## Outliers

Los valores atípicos son un tema de constante discusión. *¿Se deben incluir o no?*

La respuesta dependerá del problema en particular, de los datos disponibles y de las consecuencias que tenga el considerar o no esos valores.

Si quiero tenerlos en cuenta a la hora de comparar modelos, me convendrá usar **MSE**. En cambio, si quiero reducir su importancia, puedo usar **MAE**.

---

# MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

## Error absoluto porcentual medio (MAPE)

El **error absoluto porcentual medio (MAPE)** es el cálculo del error **MAE**, pero escalado al valor verdadero, por lo que el resultado es porcentual:

$$MAPE = \frac{100\%}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{y[i] - \hat{y}[i]}{y[i]} \right|$$

No es una métrica ideal porque es susceptible a errores numéricos. No puede calcularse cuando  $y[i]$  es igual a cero. Además, tiene sesgo cuando la predicción subestima:

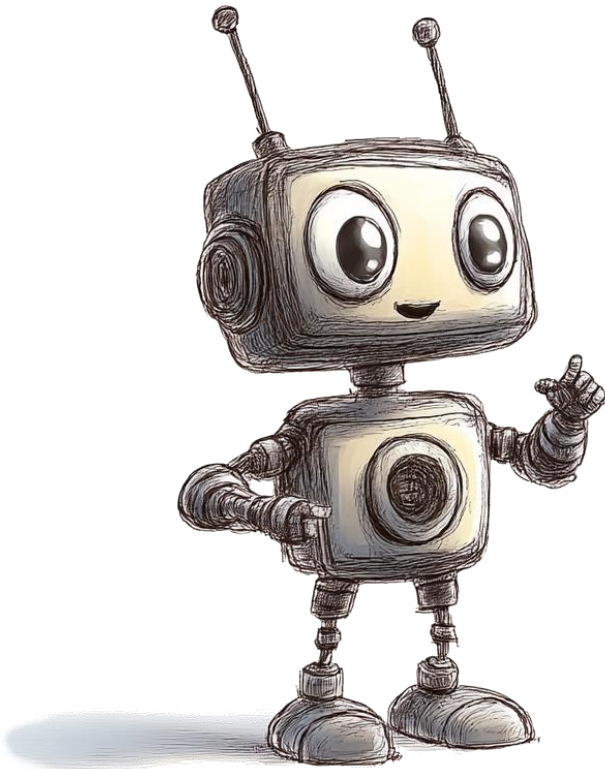
$$n = 1 \quad \hat{y} = 10 \quad y = 20 \\ MAPE = 50\%$$

$$n = 1 \quad \hat{y} = 20 \quad y = 10 \\ MAPE = 100\%$$



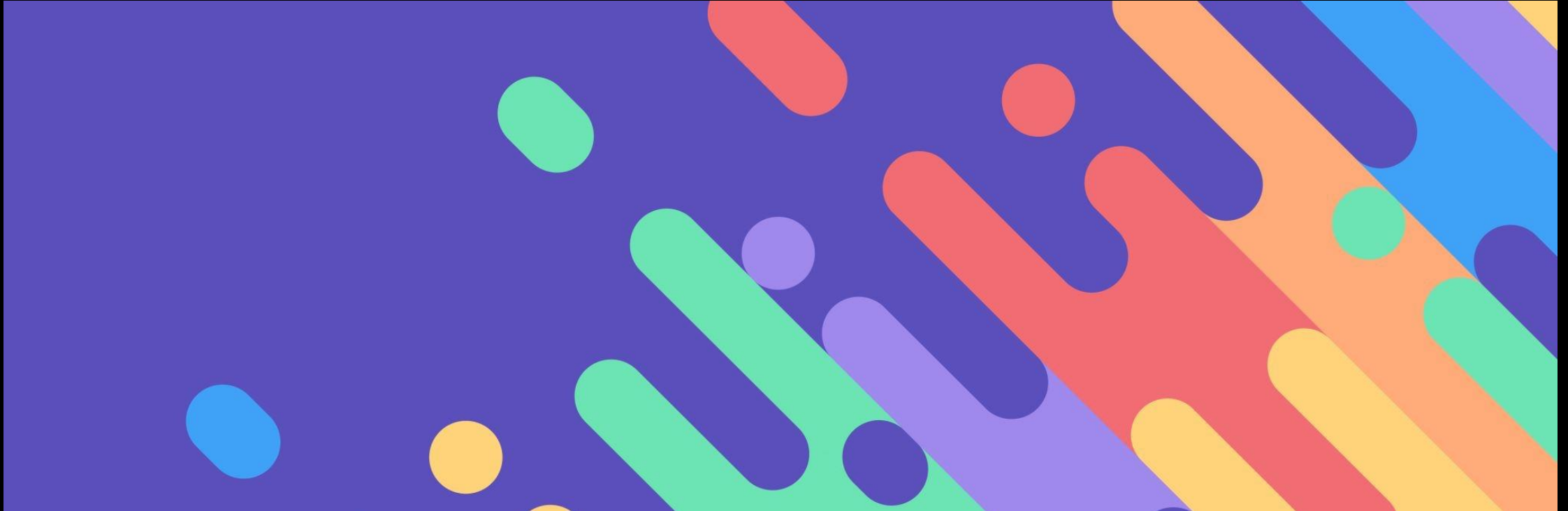
---

# REGRESIÓN



Los temas que vamos a ver en este video son:

- Construcción de un modelo
  - Eliminación hacia atrás
  - Selección hacia adelante
  - Eliminación bidireccional
- Regresión de Ridge
- Regresión de Lasso



---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

Cuando construimos un modelo de regresión múltiple, ¿cómo elegimos los atributos que formarán parte del modelo?

*Ver la correlación entre variables es un primer paso, pero surge la pregunta: si dos variables están correlacionadas, ¿cuál de las dos descartamos?*

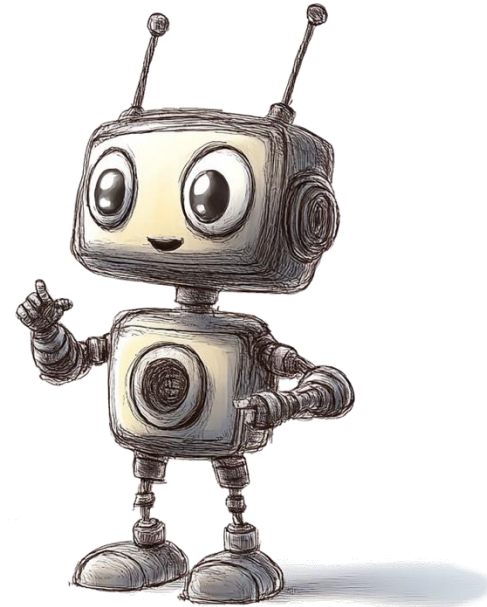
*Por lo tanto, existen diferentes métodos para construir un modelo.*

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

Podemos mencionar 4 formas:

- Exhaustivo
- Eliminación hacia atrás
- Selección hacia adelante
- Eliminación bidireccional



---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

## Eliminación hacia atrás

- Se comienza con un modelo completo que incluye todas las variables.
- Luego, se eliminan de **forma greedy** las variables de entrada que menos "*aportan*" al modelo, una por vez.
- El proceso continúa hasta que eliminar más variables no mejora significativamente el modelo.
- Este proceso se puede realizar utilizando alguna métrica que nos mida la información que aporta cada variable.

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

## Selección hacia adelante

- Comienza con un modelo *vacío* que solo incluye la ordenada al origen:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_{[i]}.$$

- Luego, se agregan las variables que más aportan al modelo (usando el criterio de ajuste), una por vez.
- El proceso termina cuando agregar más variables no mejora significativamente el modelo.

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

## Eliminación bidireccional

- Es, en esencia, la selección hacia adelante, pero con la posibilidad de eliminar variables en cada iteración si se observa correlación entre ellas.

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

¿Cómo sabemos el aporte de cada atributo?

- **Bondad de ajuste:** Se realiza una prueba de hipótesis para determinar si el coeficiente de una entrada en particular es cero. Luego, se evalúa el valor p. Un valor p bajo ( $< 0,05$ ) indica que se puede rechazar la hipótesis nula, lo que sugiere que cambios en esta variable probablemente generen cambios en la respuesta.



---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

¿Cómo sabemos el aporte de cada atributo?

- **Coeficiente de Pearson ajustado:** Es el cual es el  $R^2$  pero penalizando la complejidad del modelo:

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - d - 1}$$

Donde N es número de observaciones y d es el número de atributos.

---

# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

¿Cómo sabemos el aporte de cada atributo?

- **Criterio de Información de Aikake (AIC):** El AIC maneja un equilibrio entre la bondad de ajuste del modelo y la complejidad de este. En otras palabras, el AIC aborda tanto el riesgo de sobreajuste como el riesgo de subajuste.

$$AIC = 2d - 2 \ln(\hat{L})$$

El valor de AIC debe ser más bajo para indicar un mejor modelo.

---

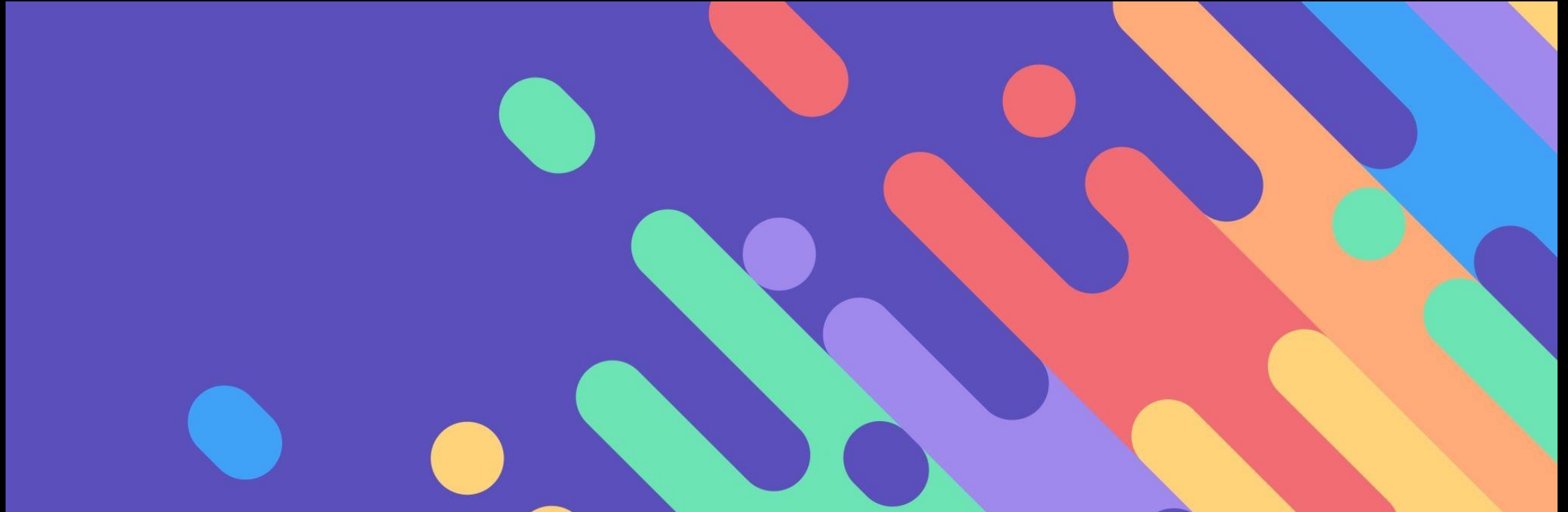
# CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

¿Cómo sabemos el aporte de cada atributo?

- **Criterio de información bayesiano (BIC):** Se basa en el principio de la navaja de Occam, que establece que es preferible el modelo más simple que explique los datos. A diferencia del AIC, el BIC penaliza más al modelo por su complejidad.

$$BIC = d \ln(N) - 2\ln(\hat{L})$$

El valor de BIC debe ser más bajo para indicar un mejor modelo.



---

# REGRESIÓN LASSO Y RIDGE

---

# REGRESIÓN DE RIDGE Y LASSO

¿Cómo sabemos el aporte de cada atributo?

Con los métodos de regularización, podemos ajustar un modelo que contenga todos los atributos utilizando una técnica que restrinja o regularice las estimaciones de los coeficientes.

Puede que no sea inmediatamente obvio por qué tal restricción debería mejorar el ajuste, pero resulta que **reducir las estimaciones de los coeficientes** puede **disminuir significativamente su varianza**.

Las dos técnicas más conocidas para reducir los coeficientes de regresión a cero son la regresión de **Ridge** y la regresión de **Lasso**.

---

# REGRESIÓN DE RIDGE

En la regresión lineal, vimos que se buscaban los coeficientes que minimizaban la suma de los residuos al cuadrado. La **regresión de Ridge** es muy similar, pero con la diferencia de que los coeficientes se estiman minimizando una cantidad diferente:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - \mathbf{w}^T \mathbf{X}_{[i]})^2 + \alpha \sum_{j=0}^{d-1} w_j^2$$

Donde  $\alpha$  es un hiperparámetro de ajuste.

---

# REGRESIÓN DE RIDGE

En esta regresión, se buscan los coeficientes que minimizan  $S_{res}$ . Sin embargo, el segundo término:

$$\alpha \sum_{j=0}^{d-1} w_j^2$$

Se conoce como el termino de **penalización por encogimiento**. Este término es pequeño cuando los coeficientes están cerca de cero.

---

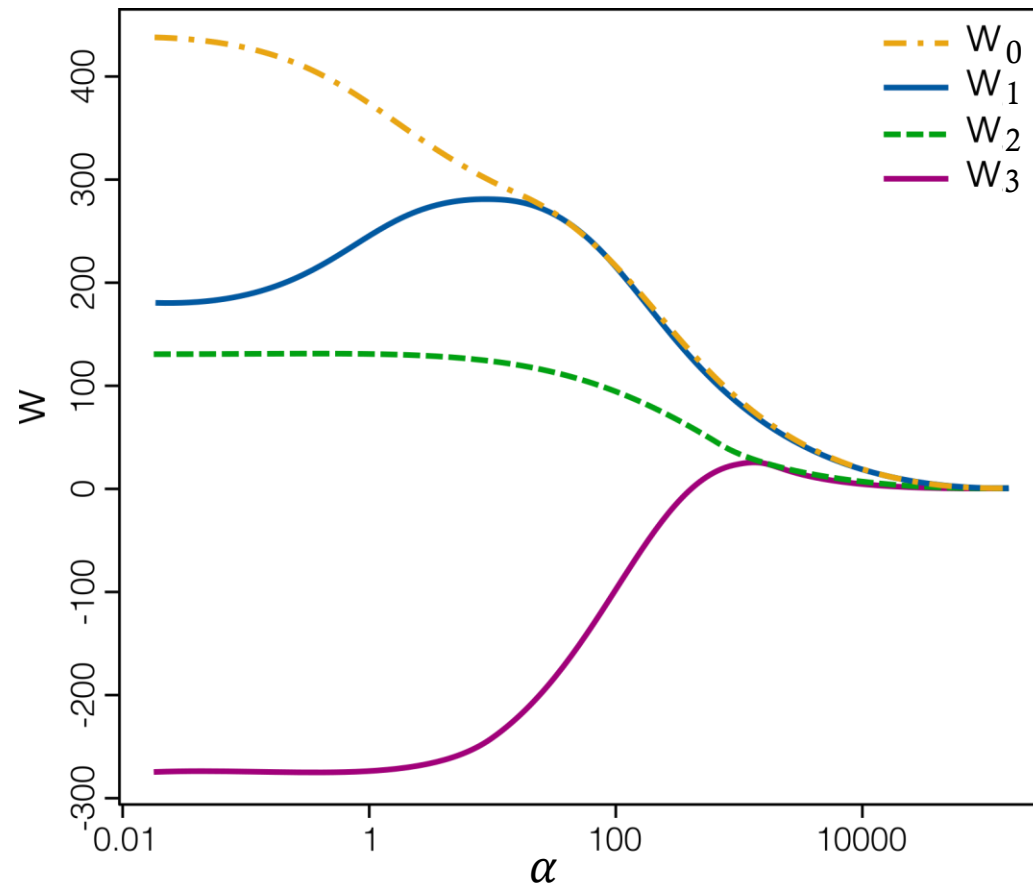
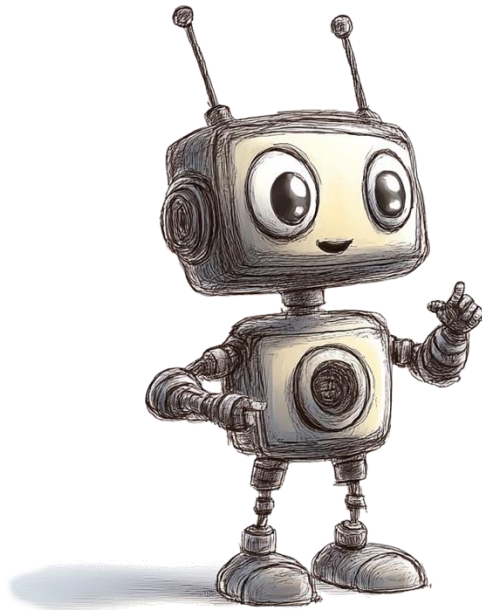
# REGRESIÓN DE RIDGE

Nótese que la penalización **no afecta la ordenada al origen  $b$** . Si  $\alpha$  tiende a  $\infty$ , todos los coeficientes se vuelven cero, y la regresión queda de la siguiente forma:

$$\hat{y} = b = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_{[i]}$$



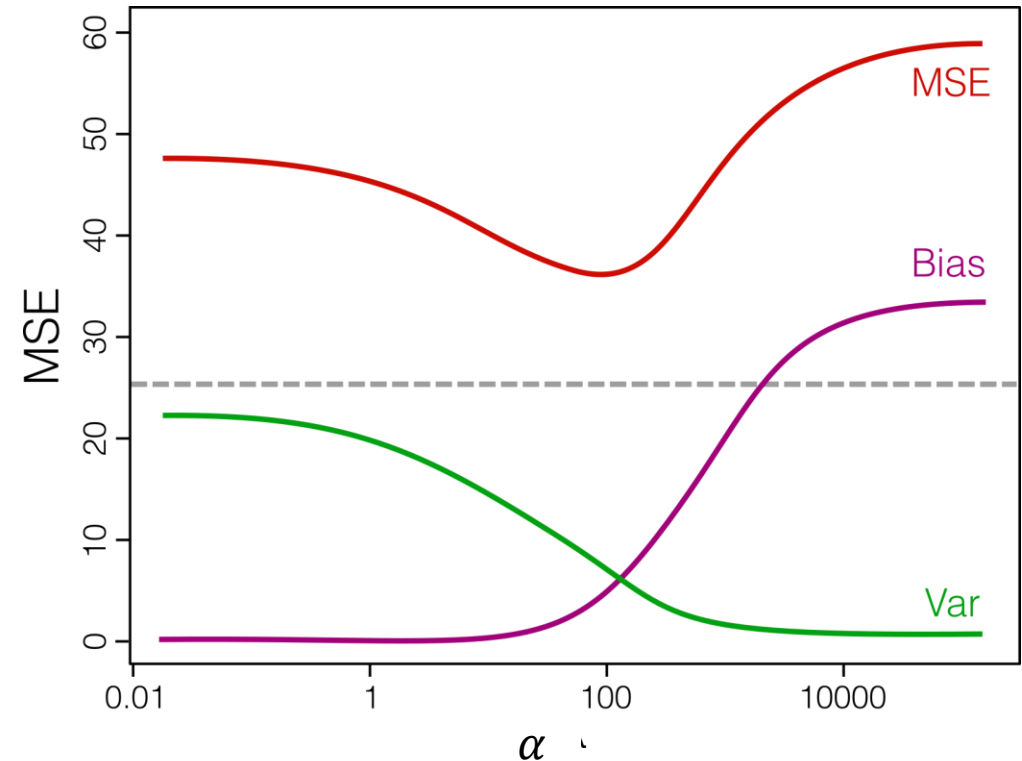
# REGRESIÓN DE RIDGE



# REGRESIÓN DE RIDGE

*¿Para qué nos sirve?*

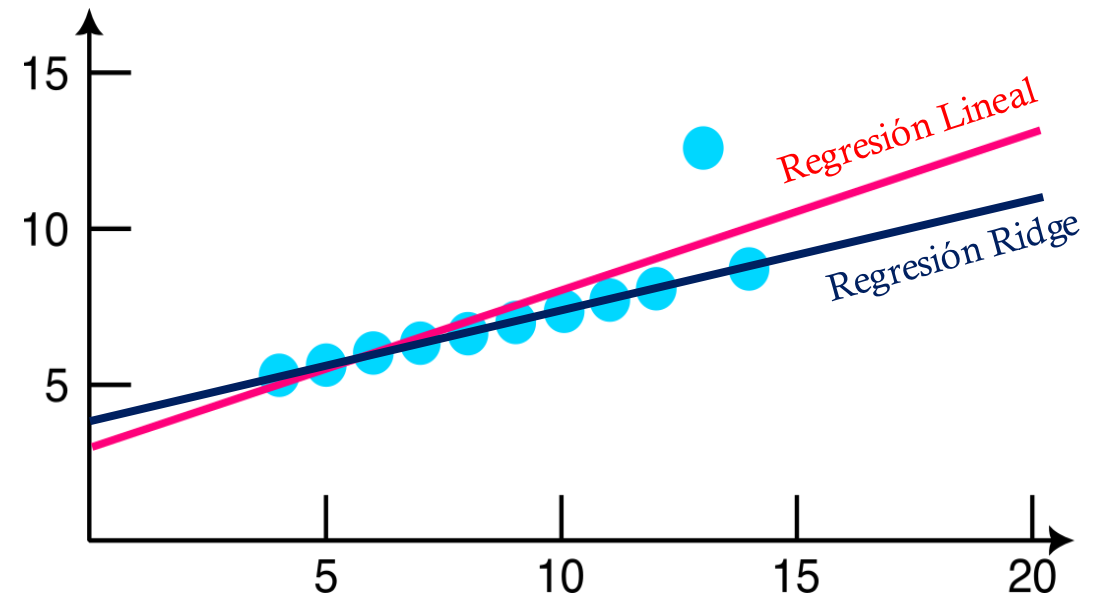
La ventaja de la regresión de Ridge sobre la regresión lineal de mínimos cuadrados radica en el equilibrio entre sesgo y varianza. A medida que  $\alpha$  aumenta, la **flexibilidad del ajuste disminuye**, lo que lleva a una **menor varianza**, pero a un **mayor sesgo**.



# REGRESIÓN DE RIDGE

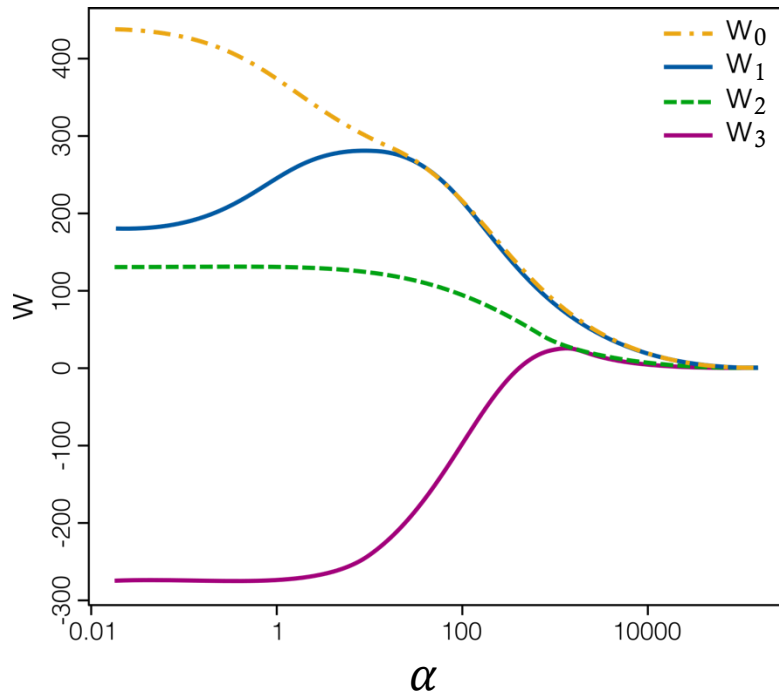
*¿Para qué nos sirve?*

En general, cuando **la verdadera relación es lineal**, la **regresión lineal tiende a tener mucha varianza**. Esto ocurre principalmente cuando el *número de observaciones es cercano al número de coeficientes*.



---

# REGRESIÓN DE LASSO



La regresión de Ridge, a priori, nos parece interesante para hacer una selección de modelo, ya que, al ajustar  $\alpha$ , podemos ver si algún coeficiente se acerca a cero.

El problema es que los coeficientes se reducen hacia cero, pero no se hacen exactamente cero, a menos que  $\alpha$  sea infinito. Por lo tanto, **no podemos eliminar atributos**.

---

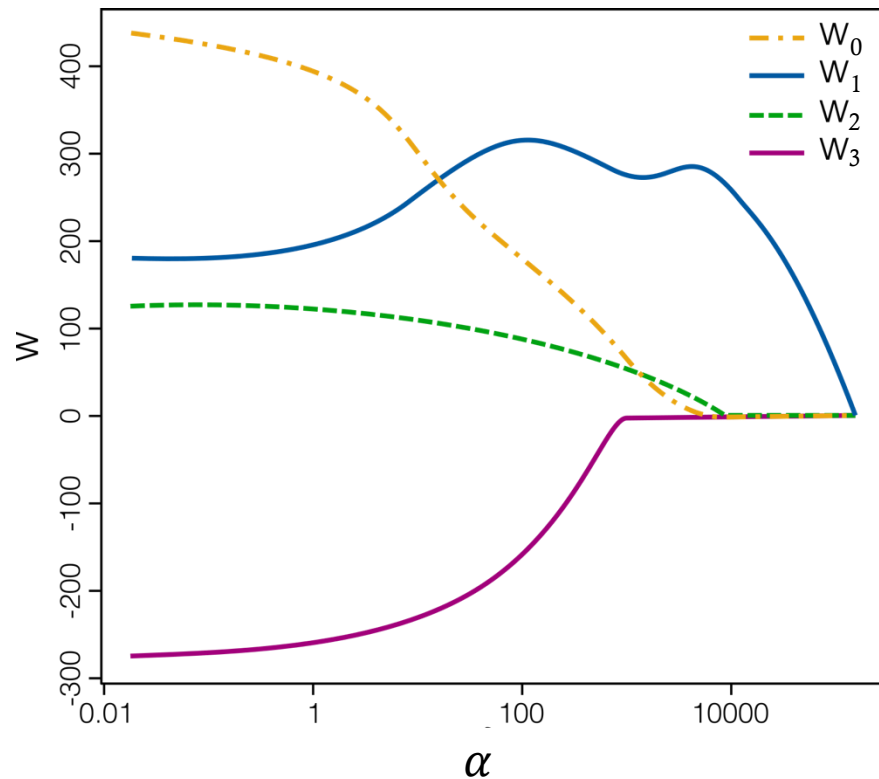
# REGRESIÓN DE LASSO

La regresión de Lasso cubre esta desventaja:

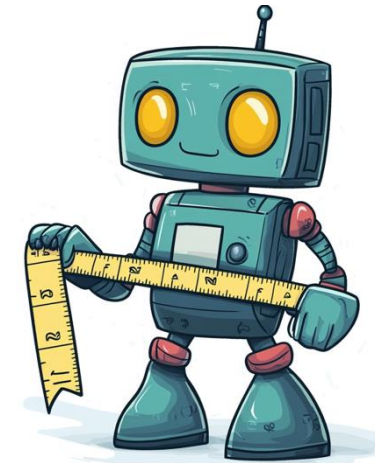
$$\sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - \mathbf{w}^T \mathbf{X}_{[i]})^2 + \alpha \sum_{j=0}^{d-1} |w_j|$$

La regresión de Lasso utiliza una **penalización L1**, mientras que Ridge utiliza una **penalización L2**.

# REGRESIÓN DE LASSO



Esta regresión, cuando  $\alpha$  crece, hace que algunos coeficientes se conviertan exactamente en cero. *Por lo tanto, Lasso realiza una selección de atributos.*



---

# REGRESIÓN DE LASSO

*¿Para qué nos sirve?*

Para entender por qué esto ocurre, debemos reescribir las regresiones de una forma equivalente:

*Regresión Lasso*

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - \mathbf{w}^T \mathbf{X}_{[i]})^2 \right\} \quad \text{sujeto a } \sum_{j=0}^{d-1} |w_j| \leq s$$

*Regresión Ridge*

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (y_{[i]} - b - \mathbf{w}^T \mathbf{X}_{[i]})^2 \right\} \quad \text{sujeto a } \sum_{j=0}^{d-1} w_j^2 \leq s$$

---

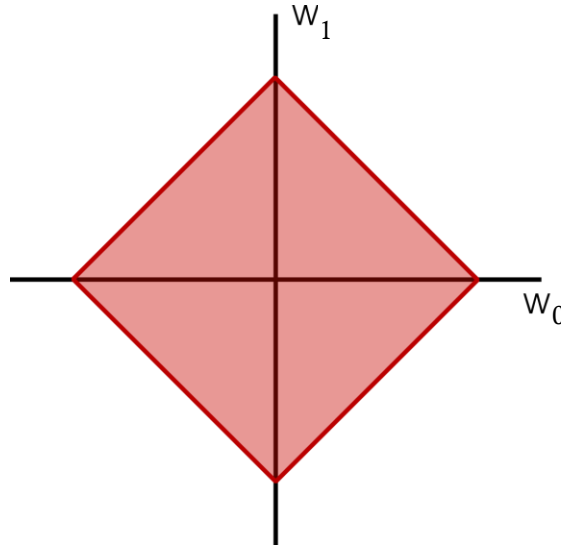
# REGRESIÓN DE LASSO

*¿Para qué nos sirve?*

Veamos el efecto de la penalización en un caso con 2 atributos ( $d=2$ ):

*Regresión Lasso*

$$|w_0| + |w_1| \leq s$$



*Regresión Ridge*

$$w_0^2 + w_1^2 \leq s$$

