Análisis complejo

Taller 2

Funciones holomorfas; exp, sin, cos.

Fecha de entrega: 22 de agosto de 2024

1. Determine todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las siguientes funciones son diferenciables y encuentre el conjunto abierto U más grande en el que son holomorfas.
   (a) $f(z) = \overline{z}$,
   (b) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (a) Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Determine todas las funciones enteras f tal que $u = \mathrm{Re}(f)$.
   (b) Sea $v(x, y) = x^2 + y^2$. Determine todas las funciones enteras f tal que $u = \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y sean $f, g : U \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tal que f tiene valores solo en los números reales y g tiene valores solo en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Demuestre que f y g son constantes.

3. Claramente se tiene que $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre las siguientes propiedades de las funciones exp, sin, cos.
   (a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
   (b) $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (c) $|\exp(z)| = 1$ si y solo si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (e) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ y $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (f) $\cos z = 0$ o $\sin z = 0 \implies z \in \mathbb{R}$.
   (g) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\pm\infty} |\cos(x + \mathrm{i}t)| = \infty$ y $\lim_{t\to\pm\infty} |\sin(x + \mathrm{i}t)| = \infty$. El límite es uniforme en x.

4. Demuestre que
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ no converge en ningún punto del círculo unitario.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en cada punto del círculo unitario.
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en cada punto del círculo unitario excepto en 1.

   Hint. Sumar por partes.[1]

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Un subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ es en *progresión aritmética* si existen $a, d \in \mathbb{N}$ tal que
$$S = \{a + nd : n \in \mathbb{N}_0\}.$$
   El número d se llama *diferencia* de la progresión. Demuestre que $\mathbb{N}$ no se puede particionar en un número finito, > 1, de conjuntos en progresión aritmética con diferencias distintas. (Claramente $S = \mathbb{N}$ si $a = d = 1$.)

   Hint. Escriba $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ *como suma de series según la partición de* $\mathbb{N}$ *en progresiones aritméticas.*

[1] Sean $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sucesiones en un espacio normado y defina $B_{-1} := 0$ y $B_k := \sum_{n=0}^{k} b_n$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1} - a_n)B_n$ para todo $M < N \in \mathbb{N}$.