Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Procesos estocásticos en tiempo discreto, Semestre 202410 **0**

Nombre, Apellidos, Código

Entrega: Martes, 13.02., antes de la clase

en formato .pdf al correo ma.hoegele(arroba)uniandes.edu.co.
Información: se reciben entregas hasta el mismo día a las medianoche (00.00), pero con una penalización de un 10% sobre los puntos alcanzados. Entregas más tarde ya no se reciben.

1) Consideremos una sucesión de variables aleatórias $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. centradas con varianza unitaria. Sea $\|x\|_{2,n} := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

1. Mostrar con la ley de los grande números que

$$\lim_{n\to\infty} \|(X_1,\ldots,X_n)\|_{2,n} - \sqrt{n} \to 0$$

   (a) en $\mathbb{P}$,

   (b) c.s.,

   (c) en distribución,

   (d) Muestre que si $X_i \in L^p$ para alguna $p > 1$ entonces también converge en L^1 (de hecho cualquier L^q para $1 \le q < p$).

2. Inferir con los resultados anteriores que para

$$\mathrm{Law}((X_1,\ldots,X_n)) \approx \mathrm{UNI}(\sqrt{n}S^{n-1})$$

   para $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{2,n} = 1\}$

2) (Centering) Mostrar que para cada v.a. en L^2 es válido

$$\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2] \le \mathbb{E}[|X|^2]$$

3) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función contínua. Muestre con la ley de los grandes que existe una sucesión de polynomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con grado$(P_n) = n$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| = 0.$$

¿Qué se puede decir sobre la tasa de convergencia?

Ayuda: Intente con

$$\mathbb{E}[f(\bar{X}_n)]$$

donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, para $(X_i)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{B}_x$.