2.2.4 Técnica esencial: convergencia de los tipos distribucionales

El ingrediente esencial es la proposición siguiente.

Definition 2.10. *1. Funciones de distribución F y G son **del mísmo tipo** de distribución, si existen $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $F(ax+b) = G(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.*

*2. Una distribución F se llama **degenerada** si existe una $b \in \mathbb{R}$ tal que*

$$F(x) = \mathbf{1}_{[b,\infty)}(x).$$

En el caso contrario se llama no degenerado.

Theorem 2.11 (Convergencia a los tipos distribucionales)**.**

- *Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de distribución, G y H distribuciones **no-degeneradas**.*
- *Sean $(a_n)_n$, $a_n > 0$, y $(b_n)_n$ sucesiones reales tal que*

$$F_n(a_n x + b_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x) \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de } G.$$

- *Sean $(u_n)_n$, $u_n > 0$, y $(v_n)_n$ sucesiones reales tal que*

$$F_n(u_n x + v_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x) \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de } H.$$

Entonces existen $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{u_n},$$
$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - v_n}{u_n}$$

y

$$H(x) = G(\alpha x + \beta).$$

Remark 2.16. En el lenguaje de variables aletórias se lee así. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, B, C variables aleatórias y constantes $a_n, u_n > 0$ y b_n, b_n. Asumiendo que

$$\frac{A_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{\to} B,$$

y

$$\frac{A_n - v_n}{u_n} \stackrel{d}{\to} C,$$

para otra v.a. C si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{u_n} = a \in [0,\infty)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - v_n}{u_n} = b \in \mathbb{R}.$$

Si el primer límite es cierto entonces

$$C \stackrel{d}{=} aB + b.$$

En particular, C es no-degenerado si y sólo si $b > 0$.

Lemma 2.17 (Claim 1).
Si $F_n \xrightarrow{d} H$, $a_n \to a$ *y* $b_n \to b$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = H(ax+b) \qquad \textit{para todos los puntos de continuidad } ax+b \textit{ de } H.$$

Este es el caso "bueno" que vamos a usar para concluir en la demostración del teorema.

Proof.

- Sea $ax+b$ un punto de continuidad de H.
- Sea $\varepsilon > 0$ entonces existen puntos $u < ax+b < v$ tal que

$$H(u) - H(v) \leqslant |H(u) - H(ax+b)| + |H(ax+b) - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Además u, v puede ser también puntos de continuidad de H. Esto es posible H es una función monótona y acotada y sólo puede tener un número contable de discontinuidades.

- Por $F_n \to H$ en distribución (convergencia puntual en los puntos de continuidad) tenemos que para $n \geqslant N$ suficientemente grande

$$\begin{aligned} &u < ax+b < v \\ &|F_n(u) - H(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &|F_n(v) - H(v)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- Entonces para toda $n \geqslant N$ tenemos que

$$\begin{aligned} H(ax+b) - \varepsilon < H(u) - \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant F_n(u) \\ &\leqslant F_n(a_n x + b_n) \\ &\leqslant F_n(v) < H(v) + \frac{\varepsilon}{2} < H(ax+b) + \varepsilon. \end{aligned}$$

  que es la definición de

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = H(ax+b).$$

□

Lemma 2.18 (Claim 2).
Si $F_n \xrightarrow{d} H$ *y* $a_n \to \infty$, *entonces* $F_n(a_n x) \longrightarrow \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, *es decir, converge, pero degenera.*

Proof.

- Sea $\varepsilon > 0$, u punto de continuidad de H tal que $H(u) > 1 - \varepsilon$.
- Si $x > 0$ entonces para toda n suficientemente grande tenemos que

$$\begin{aligned} &(a) \quad a_n x > u \\ &(b) \quad |F_n(u) - H(u)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

- Por tanto para n suficientemente grande tenemos que

$$F_n(a_n x) \geqslant F_n(u) > H(u) - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

- En otras palabras
$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x) = 1 \qquad \text{para } x > 0.$$

- Análogamente para $x < 0$ obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x) = 0 \qquad \text{para } x < 0.$$

(¡múestrelo!)

$\square$

Lemma 2.19 (Claim 3)**.**
Si $F_n \xrightarrow{d} H$ y $(b_n)_n$ no está acotada, entonces cualquier función límite

$$H(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x + b_n), \qquad n \to \infty, x \in \mathbb{R} \textit{ punto de continuidad}$$

no es una función de distribución. (¡ni siquiera a una distribución degenerada!)
Por contraposición: *Este resultado nos dice: La convergencia débil de*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x + b_n) = H(x)$$

a una función de distribución H, implica que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esté acotada.

Proof.

- Sea $(b_n)_n$ no acotada y $b_n \to \infty$ a lo largo de una subsucesión.

- Asumimos que
$$F_n(x + b_n) \longrightarrow H(x), \quad n \to \infty,$$
para una función de distribución H y para toda x un punto de continuidad de H.

- Sea $\varepsilon > 0$ y u un punto de continuidad de H tal que $H(u) > 1 - \varepsilon$.

- Para toda x tenemos que para n suficientemente grande que $x + b_n > u$ tal que

$$F_n(x + b_n) \geqslant F_n(u) > 1 - 2\varepsilon.$$

Consecuentemente tenemos que

$$H(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x + b_n) = 1 \qquad \text{para todos los puntos de continuidad } x \text{ de } H,$$

lo que es una contradicción a H ser una función de distribución. Si H fuera una función de disribución tendríamos que $\lim_{x\to-\infty} H(x) = 0$. Sin embargo, función constante $H(x) = 1$ en todos los puntos de continuidad (que son todas las $x \in \mathbb{R}$ menos un número contable) no puede tender a 0 para $x \to -\infty$.

$\square$

Lemma 2.20 (Claim 4)**.**
Sean H, G no degenerados. Si $F_n(x) \longrightarrow H(x)$ y $F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow G(x)$ entonces

$$0 < \inf_n a_n \leqslant \sup_n a_n < \infty$$
$$\sup_{n\to\infty} |b_n| < \infty.$$

Proof. **Asumimos** $\sup_n a_n = \infty$

- Sea $\sup_n a_n = \infty$ entonces existe una subsucesión $a_n \to \infty$ (abuso de notación).
- Por Claim 2 sabemos que
$$\tilde{F}_n(x) := F_n(a_n x) \to \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$
Ahora como por hipótesis
$$\tilde{F}_n(x + \frac{b_n}{a_n}) = F_n(a_n(x + \frac{b_n}{a_n})) = F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow G(x).$$
Claim 3 nos da que para la sucesión de funciones de distribución $\tilde{F}_n$ que
$$\tilde{b}_n := \frac{b_n}{a_n}$$
es forzosamente acotado (a lo largo de esta subsucesión de los a_n).
- Por tanto (sucesiones acotadas en los números reales están contenido en un intervalo cerrado, que es compacto, y por tanto) existe una subsucesión de esta subsucesión (otra vez abuso de notación) tal que
$$\tilde{b}_n = \frac{b_n}{a_n} \longrightarrow c.$$
para algún valor c.
- Pero
$$F_n(a_n x) \to \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$
y Claim 1 nos dicen entonces que a lo large de nuestra subsucesión
$$G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} F_n(a_n(x + \frac{b_n}{a_n})) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x + c)$$
lo que implica que G es degenerada, contradiciendo la hipótesis global.

Por tanto
$$\sup_n a_n < \infty.$$

- Si
$$G_n(x) := F_n(a_n x + b_n)$$
entonces por hipótesis $G_n \xrightarrow{d} G$ y
$$G_n(\frac{x}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}) = F_n(x) \longrightarrow H(x)$$
por construcción.

- Podemos repetir la demostración del primer resultado cambiando los papeles de F_n por G_n, G por H y a_n por $\frac{1}{a_n}$ nos muestra que
$$\sup_n a_n^{-1} < \infty$$
y por tanto $0 < \inf_n a_n$. (¡muéstrelo!).

Por tanto
$$0 < \inf_n a_n \leqslant \sup_n a_n < \infty,$$
es decir que a_n queda separado de 0 y ∞ para toda n suficientemente grande.

Asumimos que $(b_n)_n$ no esté actodado.

- Si b_n no está acotado entonces bajo las conclusiones arriba tampoco lo será $\frac{b_n}{a_n}$ por $0 < \inf_n a_n \leqslant \sup_n a_n < \infty$.
- Pasando a una subsucesión obtenemos que $\frac{b_n}{a_n} \to \infty$ y a_n converge a un valor $a > 0$.
- Claim 1 nos da que
$$F_n(a_n x) \longrightarrow F(ax).$$
- Por Claim 3 y
$$\frac{b_n}{a_n} \to \infty$$
obtenemos que
$$\tilde{F}_n(x + \frac{b_n}{a_n}) = F_n(a_n(x + \frac{b_n}{a_n})) = F_n(a_n x + b_n)$$
no converge, mientras por hipótesis
$$F_n(a_n x + b_n) \to H(x).$$
Esto genera una contradicción a la hipótesis global.

Por tanto $\sup_n |b_n| < \infty$. □

Lemma 2.21 (Claim 5)**.**
Si $F(x) = F(ax+b)$ para todas x y F no es degenerado entonces $a = 1$ y $b = 0$.
Esto significa evidentemente que $F(ax+b) = F(ux+v)$ implica que $a = u$ y $a = v$.

Proof.

- $F(x) = F(ax+b) = F(a(ax+b)+b) = F(a^2x + (a+1)b) = F(a^n x + (a^{n-1} + \cdots + a + 1)b)$ para toda n y x
- Claim 4 nos dice que a^n entonces está acotado separado de 0 y de ∞. Por tanto $a = 1$.
- Además para que $(1^{n-1} + \cdots + 1^1 + 1)b = nb$ esté acotado implica que $b = 0$ por Claim 3.

□

Proof of Theorem 2.11

Proof.

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$$
$$F_n(u_n x + v_n) \xrightarrow{d} H(x)$$

Primer caso:

- Asumimos $a_n \to \alpha$ y $b_n \to \beta$.
- Si $u_n = 1$ y $v_n = 0$ entonces tenemos que

$$0 < \inf_n u_n \leqslant \sup_n u_n < \infty$$
$$\sup_{n\to\infty} |v_n| < \infty.$$

- Fijemos una subsucesión tal que $a_n \to \alpha$ y $b_n \to \beta$.
- Claim 1 nos dice que entonces (por $u_n = 1$ y $v_n = 0$).

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} H(\alpha x + \beta).$$

- La hipótesis nos da que $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$.

La únicidad del límite nos da que

$$H(ax + b) = G(x).$$

Segundo caso:

- $a_n \to u > 0$ y $b_n \to v$ a lo largo de otra subsucesión. Entonces

$$F(ux + v) = G(x)$$

  y también

$$F(\alpha x + \beta) = G(x).$$

  Por tanto por Claim 5 tenemos que $u = \alpha$ y $v = \beta$.

- Por tanto todas las subsucesiones de $(a_n, b_n) \to (\alpha, \beta)$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} (a_n, b_n) = (\alpha, \beta).$$

Caso general:

- $H_n(x) = F_n(u_n x + v_n)$
- Entonces $H_n(x) \to H(x)$ y

$$H_n(\frac{a_n}{u_n} x + \frac{(b_n - v_n)}{u_n}) \to G(x)$$

- Ahora por el caso anterior tenemos que $a_n/u_n \longrightarrow \alpha > 0$ y $\frac{b_n - v_n}{u_n} \to \beta$ y como antes

$$H(\alpha x + \beta) = G(x).$$

$\square$