Notas informales del curso
“Procesos estocásticos en tiempo discreto”

dictado por Michael Anton Hoegele

Universidad de los Andes,
Bogotá, Colombia

en el semestre 202310

January 30, 2024

Contents

1 Procesos estocásticos

ToDo:

- Einarbeiten: Caminata aleatória sobre grafos ponderados.
- Einarbeiten: Unas de Polya.

Literatura:

1. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch: Modelling extremal events for Insurance and Finance (1997) Springer-Verlag Berlin.
2. Prévalt: Undestanding Markov Chains (2018), Springer-Verlag New York.
3. El Karoui, Benaïm: Promenades aléatoires (2003), Editions de l'Ecole Polytechnique.
4. Norris: Markov Chains (1997), Cambride University Press.

1.1 Repaso: Probabilidad (Honores)

- Espacio de probabilidad
- Variables y vectores aleatorias y sus leyes
- Leyes condicionadas e independencia
- La convolución
- Integración abstracta, momentos
- Desigualdades de momentos por momentos: Minkowski, Young, Hölder, Jensen
- Desigualdades de probabilidades por momentos: Markov, Chebyshev, Hoeffding
- distribuciones discretas
  1. Bernoulli + Binomial,
  2. uniforme discreto,
  3. multinomial,
  4. hipergeométrica,
  5. hipergeométrica multivariad,
  6. geométrica + binomial negativa
  7. Poisson,
- distribuciones absolutamente contínuas
  1. uniforme
  2. beta
  3. exponencial + Gamma
  4. Cauchy
  5. normal
  6. normal multivariada
  7. chicuadrada
- Convergencias de sucesiones de variables aleatórias
  1. $\mathbb{P}$-c.s.
  2. en probabilidad
  3. en L^p
  4. en distribución
- La ley de los grandes números (débil, fuerte, Glivenko-Cantelli, M-estimator)
- El teorema límite central (Caso discreto, de-Moivre-Laplace, General, Lindeberg).

1.2 Procesos estocásticos en tiempo discreto

Definition 1.1. *Un proceso estocástico en tiempo discreto con valores en* $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ *fijo, es una familia contable de variables aleatórias sobre el mismo espacio de probabilidad* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d, \qquad \textit{medible.}$$

Remark 1.1. • Existen varias perspectivas sobre procesos estocásticos:

1. El índice $n \in \mathbb{N}$ se interpreta como **"tiempo"** y para cada $\omega \in \Omega$ el mapa $n \mapsto X_n(\omega) \in \mathbb{R}^d$ se llama **trayectoria**.
2. Por lo anterior, para cada $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^d$, es decir, un proceso $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede entenderse como **un solo vector aleatório**

$$\Omega \ni \omega \mapsto (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$$

con valores en las sucesiones de $\mathbb{R}^d$.

Ejemplo 1.2. 1. Sucesión i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia independiente de variables aleatórias y $X_n \stackrel{d}{=} X_1$. Entonces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso estocástico. Es decir, en el espacio de distribuciones $\mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_{X_1}$ es solo un punto. En estadística se llama una **muestra (independiente)**.

2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. y

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

entonces $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso estocástico.

Si $X_i \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ se llama **caminata aletória simétrica** , y que satisface

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \qquad S_0 = 0.$$

En caso de tener $X_i \sim (1-p)\delta_{-1} + p\delta_1$, $p \neq \frac{1}{2}$ se llama **caminata aleatória asimmétrica** y satisface la mísma ecuación (verificar!).

3. Del curso Probabilidad (Honores) sabemos ya varias cosas sobre el **proceso del promedio empírico** de la muestra $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dado por

$$\bar{S}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

¿Cuáles resultados sabemos sobre $(\bar{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ entonces tenemos la ley débil de los grandes números

$$\bar{S}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1],$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon) = 0.$$

Obviamente es muy fuertes esta hipótesis de la independencia, y el resultado se puede inferir bajo hipótesis mucho más débiles (¿cuáles?).

(b) Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ entonces tenemos la ley fuerte de los grandes números

$$\bar{S}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1] \quad c.s.,$$

es decir, existe un evento $\tilde{\Omega} \in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, tal que para cada $\omega \in \tilde{\Omega}$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n(\omega) = \mathbb{E}[X_1].$$

En otras palabras la probabilidad del evento de los ω donde este límite no ocurre tiene peso 0. Notemos que este límite es particularmente fácil por que el objeto límite es una constante, es decir, con probabilidad 1 NO depende de ω.

¿Cuál es el resumen de las leyes de los grandes números?

$$\bar{S}_n \overset{\mathbb{P}/c.s.}{\approx_n} \mathbb{E}[X_1] + o(\frac{1}{n})_{n\to\infty}$$

el promedio empírico converge al valor esperado suyaciente (desconocido), es decir, se estabiliza. Otra manera de escribir los sería

$$S_n \overset{\mathbb{P}/c.s.}{\approx_n} n \cdot \mathbb{E}[X_1] + o(n)_{n\to\infty}.$$

Es decir, caminatas aleatórias crecen astintónticamente de manera lineal.

(c) El próximo paso era indentifiar el error en la ley débil de los grandes números

$$b_n^\varepsilon := \mathbb{P}(|\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon), \qquad b_n \to 0, \varepsilon > 0.$$

Es decir identificar la sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \in \mathbb{N}$, tal que la sucesión

$$b_n := b_n^{\varepsilon_n} := \mathbb{P}(|\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon_n) = \mathbb{P}(|\frac{1}{\varepsilon_n}(\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1])| > 1)$$

converga a un valor no trivial, es decir, ni 0 ($\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, converge demasiado lento a 0) ni 1 ($\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, converge demasiado rápido a 0).

¿Cómo derivar b_n?

Sabemos que la convergenica en distribución está implicada por la convergencia en probabilidad y la última por la convergencia en L^2 (uno de los sentidos más fuertes). Por lo tanto la no convergenia de los seguntos momentos y la varianza excluye la convergencia en distribución. Por tanto, asumimos que la la varianza

$$1 = \mathbb{V}(\frac{1}{\varepsilon_n}(\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1])) = \frac{1}{n^2\varepsilon_n^2} n\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{n\varepsilon_n^2}\sigma^2.$$

Despejando a ε_n obtenemos

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En otras palabras, esta condicion es necesaria para que la variable aleatória

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{S}_n - \mathbb{E}[X_1])$$

convega en algún sentido implicado por la convergencia en L^2, es decir, virtualmente todo.

¿Cuál es el resúmen del teorema límite central?

$$\bar{S}_n \overset{d}{\approx}_n \mathbb{E}[X_1] + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} N + o(\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad N \sim N(0,1)$$

el promedio muestral converge al valor esperado subyaciente y podemos determinar la tasa del error por como $\frac{1}{\sqrt{n}}$, aunque el prefactor N es aleatório.

Caminatas aleatorias asimétricas están asintóticamente dominadas por la tasa de del valor esperado,

$$S_n \overset{d}{\approx}_n n \cdot \mathbb{E}[X_1] + \sigma\sqrt{n} N + o(\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad N \sim N(0,1).$$

En el caso de aleatórias simétricas tenemos la convergencia del orden $\sqrt{n}\sigma$. Existen teoremas muy fuertes sobre estos (la ley del logaritmo iterado).

2 Ordenando muestras

2.1 La estadística del orden finito

2.1.1 La distribución beta

Definition 2.1. *La distribuciíon BETA(α, β), $\alpha, \beta > -1$ es una distribuciíon absolutamente contínua con*

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

Definition 2.2. *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, una familia i.i.d. con $X_i \sim U_{[0,1]}$. Sea $X_{i:n}$ el i-esimo valor más pequeño entonces $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ se llama el* ***estadístico del orden****.*

Remark 2.1. En este caso podemos excluir el caso de dobles porque los X_i son independientes y absolutamente contínuas es decir

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{1}_{[0,1]^n}(t_1, \ldots, t_n)$$

y la medida de Lebesgue sobre $[0,1]^n$ tiene medida cero para cualquier intersección con un subespacio de codimensión $\geqslant 1$. Se puede ver fácilmente

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \neq j}\{X_i = X_j\}) \leqslant n^2 \cdot \mathbb{P}(X_1 = X_2)$$

pero $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \int_{[0,1]^n \cap \{t_1 = t_2\}} dt_1, dt_2 \ldots, dt_n = 0$.

Lemma 2.2. *Sea $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión i.d.d. con $X_m \sim U(0,1)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leqslant i \leqslant n$ tenemos que*

$$X_{i:n} \sim \mathit{BETA}(i, n-i+1).$$

Proof. 1. Primero vemos que

$$\int_0^t dt_1 = t,$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} dt_2 dt_1 = \int_0^t t_1 dt_1 = \frac{t^2}{2}$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_3 dt_2 dt_1 = \int_0^t \frac{t_1^2}{2} dt_1 = \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{3!}$$

y por inducción:

$$\int_{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1} dt_n \ldots dt_1 = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \ldots dt_1 = \frac{t^n}{n!}.$$

Por tanto para $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < a_3 \leqslant b_4 < \ldots \leqslant b_n$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]) \\
&= \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \{(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]\}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}((X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in ((a_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(1)}] \times (a_{\sigma^{-1}(2)}, b_{\sigma^{-1}(2)}] \times \cdots \times (a_{\sigma^{-1}(n)}, b_{\sigma^{-1}(n)}]) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \big(b_{\sigma^{-1}(i)} - a_{\sigma^{-1}(i)}\big) \\
&= n! \prod_{i=1}^{n} \big(b_i - a_i\big).
\end{aligned}
$$

En otras palabras: si $X_i \sim U_{0,1}$ con densidad 1, tenemos que

$$f_{(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})}(t_1, \ldots, t_n) = n! \mathbf{1}\{t_1 < \cdots < t_n\}(t_1, \ldots, t_n).$$

Se puede ver directamente para $a_i = 0$ y $b_i = t_i$, diferenciando por todas las variables una vez $\frac{d}{dt_i}$.

2. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{i:n} \leqslant x) \\
&= n! \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n\} \cdot \mathbf{1}_{[0,x]}(t_i)\ dt_1 \ldots dt_{i-1} dt_i dt_{i+1} \ldots dt_n \\
&= n! \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 \ldots t_{i-1} < t_i\} \cap \{t_i < t_{i+1} \ldots t_{n-1} < t_n\} \cdot \mathbf{1}\{t_i \leqslant x\}\ dt_1 \ldots dt_i \ldots dt_n \\
&= n! \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 \ldots t_{i-1} < s\} \cdot \mathbf{1}\{s < t_{i+1} < \cdots < t_n\} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathbf{1}\{s \leqslant x\}\ dt_1 \ldots dt_{i-1} ds dt_{i+1} \ldots dt_n \\
&= n! \int_0^1 \Big(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 \ldots t_{i-1} < s\} \cdot \mathbf{1}\{s < t_{i+1} < \cdots < t_n\} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathbf{1}\{s \leqslant x\}\ dt_1 \ldots dt_{i-1} dt_{i+1} \ldots dt_n \Big) ds \\
&= n! \int_0^1 \Big(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 \ldots t_{i-1} < s\} dt_1 \ldots dt_{i-1} \Big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{s < t_{i+1} < \cdots < t_n\}\ dt_{i+1} \ldots dt_n \Big) \mathbf{1}\{s \leqslant x\} ds \\
&= n! \int_0^x a(i-1, s) a(n-i, 1-s) ds,
\end{aligned}
$$

para

$$
\begin{aligned}
a(i-1, s) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < s\} dt_1 \ldots dt_{i-1} \\
&= \int_0^s \cdots \int_0^s \mathbf{1}\{t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1}\} dt_1 \ldots dt_{i-1} \\
&= \frac{s^{i-1}}{(i-1)!}.
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathbf{1}\{s < t_{i+1} < \cdots < t_n\} dt_{i+1} \dots dt_n \\
&= \int_s^1 \cdots \int_s^1 \mathbf{1}\{t_{i+1} < \cdots < t_n\} dt_{i+1} \dots dt_n \\
&= \int_0^{1-s} \cdots \int_0^{1-s} \mathbf{1}\{t_{i+1} < \cdots < t_n\} dt_{i+1} \dots dt_n = \frac{(1-s)^{n-i}}{(n-i)!} = a(n-i, 1-s).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i:n} \leqslant x) &= n! \int_0^x \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} \frac{(1-s)^{n-i}}{(n-i)!} ds \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^x s^{i-1}(1-s)^{n-i} ds \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^x s^{i-1}(1-s)^{(n-i+1)-1} ds
\end{aligned}$$

Entonces

$$X_{i:n} \sim \mathrm{BETA}(i, n-i+1).$$

□

Lemma 2.3 (Propiedades de distribución de BETA)**.** *Sea* $X \sim BETA(\alpha, \beta)$

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
2. $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha+1}{(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)) - \alpha(\alpha+\beta) - \alpha)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

□

2.1.2 La extensión para distribuciones absolutamente contínuas

Ejemplo 2.4.
- $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. con X_i con densidad f y función de distribución F

- Entonces para $U_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ y $\perp$ $(U_1, \dots, U_n)$ tenemos que

$$X_i \sim F^{-1}(U_i)$$

- ¿Por qué?

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U_i) \leqslant x) = \mathbb{P}(U_i \leqslant F(x)) = \int_0^{F(x)} dt = F(x).$$

y la independencia se hereda (¡verificar eso!). Ya sabemos que

$$U_{i:n} \sim BETA(i, n-i+1)$$

Además F y F^{-1} son no decrecientes tal que

$$X_{i:n} = F^{-1}(U_{i:n}).$$

Por tanto

$$\mathbb{P}(X_{i:n} \leqslant x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U_{i:n}) \leqslant x) = \mathbb{P}(U_{i:n} \leqslant F(x)).$$

Ahora para obtener la densidad derivamos

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n}}(x) &= \frac{d}{dx}\mathbb{P}(X_{i:n} \leqslant x) \\ &= \frac{d}{dx}\mathbb{P}(U_{i:n} \leqslant F(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^{F(x)} t^{i-1}(1-t)^{n-i}dt \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\big(F(x)\big)^{i-1}\big(1-F(x)\big)^{n-i}f(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{X_{i:n}}(x) = \tfrac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\big(F(x)\big)^{i-1}\big(1-F(x)\big)^{n-i}f(x)}$$

2.2 Un teorema límite para los valores extremales (Fisher-Tippett-Gnedenko)

2.2.1 Preliminares

- Por la subsucesión precedente sabemos que para un número $n \in \mathbb{N}$ fijo siempre podemos calcular la distribución en conjunto del vector $(X_{0:n}, \ldots, X_{n:n})$ y también las distribuciones marginales $X_{i:n}$. Sin embargo, muchas veces (p.e. en un seguros) es importante saber cómo se comporta $X_{n:n}$ en tériminos de n en para X_i con una distribución genérica.

Definition 2.3. *Definimos para $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. with values in $\mathbb{R}$*

$$M_n := X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

el máximo para cada valor $n \in \mathbb{N}$.

Remark 2.5.

- Todo lo que mostramos para los máximos sigue equivalente para el mínimo

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} = -\max\{-X_1, \ldots, -X_n\}.$$

- M_n tiene la función de distribución

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant x\}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \leqslant x) = F^n(x).$$

Remark 2.6.

- Sea $x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < 1\}$ el "punto final de la derecha del soporte de F" finito $x_F < \infty$. Por tanto para toda $x < x_F$

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = F^n(x) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

y para toda $x \geqslant x_F$

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = F^n(x) = 1, \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

- Por tanto

$$\mathbb{P}(|M_n - x_F| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x_F - \varepsilon) + \mathbb{P}(M_n \geqslant x_F + \varepsilon) = F^n(x_F - \varepsilon) + 0 \to 0, \quad n \to \infty$$

es decir $M_n \to x_F$ en probabilidad.

- Además la sucesión

$$n \mapsto M_n(\omega)$$

es no decreciente por construcción.

1. Por tanto: $x_F < \infty$ implica que $M_n \to x_F$, $n \to \infty$, $\mathbb{P}$-c.s.
   En otras palabras: Si tenemos un valor máximo de alcanzar y una infinidad de intentos independientes, no sorprende que nos acercamos a este valor arbitrariamente cercano.
   La pregunta aquí es: ¿Con cuál velocidad converge $M_n \to x_F$?
2. Si $x_F = \infty$, entonces $F(x) < 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $F^n(x) \to 0$. Por tanto, $M_n \to \infty$ casi seguro.
   La pregunta aquí es: ¿Con cuál velocidad diverge $M_n \to \infty$?

2.2.2 Criterios para convergencia renormalizada

- Lo que es más interesante son las preguntas de estilo siguiente: "Cómo se comporta M_n en terminos de n?" Con el mísmo razonamiento empezamos buscando sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n > 0$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$
$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \to H$$
en distribucón para H desconocido, es decir:
$$M_n \approx_d c_n \cdot H + d_n, \qquad n \text{ valores grandes}$$
para un valor H aleatório.

- Cuidado: En comparacion con el CLT NO conocemos candidatos para H.

- El teorema de Fisher-Tippet-Gnedenko nos enseñará que según las características de la distribución de X_1 obtendremos diferentes H.

- Es decir, buscamos las distribuciones límites de H y los coeficientes c_n y d_n a la vez.

Criterios de convergencia:

- Para $u_n = c_n x + d_n$
$$\mathbb{P}(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leqslant x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant u_n)$$

- "¿Cuáles condiciones de F asegura que $\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n)$ converge para una sucesion u_n?" Notemos que
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = \Big(F_X(u_n)\Big)^n$$
Para n grande hay un juego entre las dos apariencias de n: para cualquier valor $f \in (0,1)$ tenemos que $f^n \to 0$ y $1^n = 1$, mientras para cada $u_n \to \infty$ tenemos que $F_X(u_n) \to 1$.

La siguiente aproximación ayuda a relacionar la convergencia con el comportamiento de la función de la cola $\bar{F}$.

Lemma 2.7 (Aproximación de Poisson)**.** *Dado X con F_X y $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, y*

- $\tau \in [0, \infty]$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión no decreciente.*

Entonces son equivalentes:

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = e^{-\tau}$
2. $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}_{X_1}(u_n) \to \tau$.

Remark 2.8. Mientras el primer límite es una condicion para M_n (complicado), la segunda lo relaciona con el decreciento de la función de distribución de X.

Este resultado debe leerse que solo existen probabilidades propiamente hablando, es decir, si el límite en (1) es un valor $0 < e^{-\tau} < \infty$ (inclusiónes estríctas). Ni siquierea estamos hablando de los valores de $e^{-\tau}$ para identificar alguna distribución en concreto, meramente la convergencia a una "masa" no trivial.

Proof. Primero el caso $\tau < \infty$:

- (2) $\Rightarrow$ (1): Asumimos (2). Entonces

  $$n\bar{F}_X(u_n) - \tau = n(\bar{F}_X(u_n) - \frac{\tau}{n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  That is $\bar{F}_X(u_n) - \frac{\tau}{n} = o(\frac{1}{n})_{n\to\infty}$. Calculemos

  $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) &= \lim_{n\to\infty} F(u_n)^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \bar{F}(u_n))^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{\tau}{n} + (F_X(u_n) - \frac{\tau}{n})\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\tau}{n} + o(\frac{1}{n})_{n\to\infty}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \stackrel{(2)}{\longrightarrow} e^{-\tau}.\end{aligned}$$

- (1) $\Rightarrow$ (2): Primero, notemos que (1) implica que $\bar{F}(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.
  - En el caso contrario hubiera una subsucesion u_{n_k} con $\liminf_{k\to\infty} \bar{F}(u_{n_k}) > 0$.
  - Por tanto $\mathbb{P}(M_{n_k} \leqslant u_{n_k}) = (1 - \bar{F}(u_{n_k}))^{n_k} \to 0$ lo que contradice (1).

  Segundo, tomando logaritmos en (1) solo tenemos que mostrar que

  $$\lim_{n\to\infty} \ln(\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n)) = -\tau.$$

  Con la fórmula exacta de F_{M_n} podemos calcular que

  $$\ln(\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n)) = \ln((1 - \bar{F}_n(u_n))^n) = n \ln(1 - \bar{F}_n(u_n))$$

  por tanto

  $$-n \ln(1 - \bar{F}_n(u_n)) \longrightarrow \tau, \qquad n \to \infty.$$

Por la fórmula de Taylor sabemos que

$$-ln(1-x) = x + o(x)_{x\to 0+}.$$

Como ya mostramos que $\bar{F}_n(u_n) \to 0$ y la fórmula precedente obtenemos

$$\tau = \lim_{n\to\infty} -n\ln(1-\bar{F}_n(u_n)) = \lim_{n\to\infty} n\cdot \bar{F}(u_n).$$

que es el enunciado (2).

Caso $\tau = \infty$: Ejercicio. $\square$

Remark 2.4. • En el nivel probabilistico se se basa en el teorema límite de Poisson:

Teorema límite de Poisson:
Sea X_n una sucesión de variables aleatórias con B_{n,p_n} y $p_n \to 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n \to \lambda$$

es equivalente a

$$\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

En otras palabras

$$\mathcal{B}_{n,p_n} \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(\lambda)$$

Demostración: "$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}p_n^k\frac{1}{k!}(1-p_n)^n \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}(n\cdot p_n)^k\frac{1}{k!}(1-\frac{np_n}{n})^n \\ &= \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1}\underbrace{(n\cdot p_n)^k}_{\to\lambda^k}\frac{1}{k!}\underbrace{(1-\frac{np_n}{n})^n}_{\to e^{-\lambda}}\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" (muestrela) $\square$

Detrás de la demostracón es el teorema límite de Poisson. If $\tau < \infty$ we define

$$S_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i > u_n\}$$

Ahora, $S_n \sim \mathcal{B}_{n,\bar{F}(u_n)}$ and $S_n \to \mathcal{P}_\tau$ if and only if

$$\mathbb{E}[S_n] = n\bar{F}(u_n) \to \tau.$$

- Then $\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = \mathbb{P}(S_n = 0) \longrightarrow e^{-\tau}\frac{\tau^0}{0!}$. Por eso se llama “Aproximación de Poisson”.

Remark 2.5. ¿Qué tan universal es esta escogencia? $\to$ bastante.

- Si existe una τ y una sucesión $(u_n(\tau))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que
$$n\bar{F}(u_n(\tau)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau$$
entonces encontramos una subsucesión $(u_n(\tau'))_{n\in\mathbb{N}}$ para cualquier $\tau' > 0$.

- Por ejemplo si tenemos $u_n(1)$
$$n\bar{F}(u_n(1)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
entonces para
$$v_n(\tau) := u_{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil}(1)$$
tenemos (reemplazando n por $\lceil \frac{n}{\tau} \rceil$) que
$$\lceil \frac{n}{\tau} \rceil \cdot \bar{F}(v_n(\tau)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ahora
$$\frac{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil}{n} = \frac{\frac{n}{\tau} + \left(\lceil \frac{n}{\tau} \rceil - \frac{n}{\tau}\right)}{n} = \frac{1}{\tau} + \frac{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil - \frac{n}{\tau}}{n} \to \frac{1}{\tau}.$$
Por tanto
$$n \cdot \bar{F}(v_n(\tau)) = \frac{n}{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil}\lceil \frac{n}{\tau} \rceil \cdot \bar{F}(v_n(\tau)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau.$$

Ahora miramos cuando podemos decir algo sobre la convergencia $M_n \to x_F < \infty$, es decir si tenemos un maximo posible finito de la distribución. Primero excluyamos distribuciones finitas que se “rompen” al final.

Lemma 2.9 (Criterio de degeneración)**.**
Sea

- $x_F := \inf\{t > 0 \mid F_X(t) = 1\} < \infty$, *maximo accesible finito.*
- $\bar{F}(x_F-) = F(x_F) - F(x_F-) > 0$, *es decir, hay un “salto discreto” de* $\bar{F}$ *en este punto final* x_F*.*

Entonces para cada sucesión no decreciente $(u_n)_n$ *tal que*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = \rho,$$
tenemos que $\rho \in \{0, 1\}$.

Este resultado excluye límites no degenerados en el lema 2.7 (1)).

Proof.
- Como $\rho \in [0, 1]$ podemos reescribirlo como $\rho = \exp(-\tau)$ para alguna $\tau \in [0, \infty]$.

- Por la aproximación de Poisson tenemos que $\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) \longrightarrow \rho$ es equivalente a

$$n\bar{F}(u_n) \to \tau.$$

- Ahora cuales (u_n) podemos considerar?

  1. $u_n < x_F$ una infinidad de n
  2. $u_n < x_F$ para un número finito de n

- Si $u_n < x_F$ para una infinidad de n entonces

$$\bar{F}(u_n) \geqslant \bar{F}(x_F-) > 0 \text{ para estas } n.$$

  Es decir

$$\liminf_{n\to\infty} \bar{F}(u_n) > 0$$

  lo que con $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ implica que $\tau = \infty$ y $\rho = 0$.

- Si $u_n < x_F$ para solo un numero finito, existe un número N suficientemente grande a partir del cual $u_n \geqslant x_F$, $n \geqslant N$ y por tanto entonces $n\bar{F}(u_n) = 0$ y por tanto $\tau = 0$ y $\rho = 1$.

$\square$

Remark 2.10. Si para $x_F < \infty$ tenemos un "salto" a cero, entonces para toda u_n es decir para cualquier renormalizaciíon c_n, d_n tenemos que

$$\mathbb{P}(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leqslant x) \to \mathbf{1}(-\infty, x_F](x).$$

es decir

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \longrightarrow \delta_{x_F},$$

y ninguna "distribución limite no trivial".

En el lema anterior vimos (para el caso de $x_F < \infty$) que tener una discontinuidad de $\bar{F}$ en x_F excluye teoremas límites no triviales. El siguiente teorema en combinación con la aproximación de Poisson (Lema 2.7) nos da que la continuidad de $\bar{F}$ en x_F es equivalente a tener una distribución limite no trivial.

Theorem 2.6 (Resultado negativo)**.**
Dado X con F_X y $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ y

- $x_F \leqslant \infty$,
- $\tau \in (0, \infty)$.

Entonces son equivalentes

1. *Existe una sucesión $(u_n)_n$ tal que*
$$n\bar{F}(u_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau$$
2. $$\lim_{x\to x_F-} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1.$$

Remark 2.11.

- El juego se determina por la continuidad de F_X (y de $\bar{F}_X$) en x_F.
- Para distribuciones contínuas F_X esto siempre se satisface, sea $x_F < \infty$ o $x_F = \infty$.
- Para distribuciones discretas con valores en $\mathbb{N}$ y $x_F = \infty$ podemos calcular
$$\begin{aligned}\frac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n-1)} &= \frac{\sum_{i=n}^{\infty} f(i)}{\sum_{i=n-1}^{\infty} f(i)}\\ &= \frac{\sum_{i=n-1}^{\infty} f(i)}{\sum_{i=n-1}^{\infty} f(i)} - \frac{f(n-1)}{\sum_{i=n-1}^{\infty} f(i)}\\ &= 1 - \frac{f(n-1)}{\bar{F}(n-1)}.\end{aligned}$$
Entonces el límite en 2. es equivalente a que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\bar{F}(n)} = 0.$$
- Este criterio precedente excluye muchas distribuciones discretas con soporte infinito. En particular los casos donde la densidad es proporcional a su antiderivada, como en los casos "geometricos".

  In the absolutely continuous case this is very different. "Almost all" absolutely continuous distributions have extreme value distributions.

Ejemplo 2.12 (Geometrica: excluida)**.**

- $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$
- Para $k \in \mathbb{N}$
$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{(1-p)^{k-1}}{\sum_{r=k}^{\infty}(1-p)^{r-1}} = 1 - p < 1.$$

- Por tanto cada límite de (u_n) satisface

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) \longrightarrow \rho \in \{0,1\}.$$

- La distribución binomial negativa (¿de dónde viene?)

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{v+k-1}{k-1} p^v (1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}_0, 0<k<1, v>0.$$

tambien satisface que

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} \leqslant (1-p) < 1.$$

- Paila.

Ejemplo 2.13 (Poisson: pa fuera). • $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$

- Calculemos

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} &= 1 - \frac{F(k)-F(k-1)}{\bar{F}(k-1)} \\
&= 1 - \frac{\frac{\lambda^l}{k!}}{\sum_{r=k}^\infty \frac{\lambda^r}{r!}} = 1 - \frac{\frac{\lambda^l}{k!}}{\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{r=k+1}^\infty \frac{\lambda^r}{r!}} \\
&= 1 - \frac{1}{\left(1 + \sum_{r=k+1}^\infty \frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)} \\
&= 1 - \frac{1}{\left(1 + \sum_{s=1}^\infty \frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\ldots(k+s)}\right)}
\end{aligned}$$

- Esta última series se estima como

$$\sum_{s=1}^\infty \frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\ldots(k+s)} \leqslant \sum_{s=1}^\infty \left(\frac{\lambda}{k}\right)^s = \frac{\frac{\lambda}{k}}{1-\frac{\lambda}{k}}, \qquad k > \lambda.$$

Para $k \to \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \sum_{s=1}^\infty \frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\ldots(k+s)}\right)} \\
&\leqslant 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\frac{\lambda}{k}}{1-\frac{\lambda}{k}}\right)} = 1 - \frac{1}{1+0} = 0.
\end{aligned}$$

- Por tanto cada límite de una sucesión $(u_n)_n$ posible satisface

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) \longrightarrow \rho \in \{0,1\}.$$

Ejemplo 2.14 (Colas pesadas: no excluidas)**.**

- Consideramos $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)\delta_i$.
- Ahora la densidad discreta es

$$f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- mientras

$$\bar{F}(n) = \sum_{i=n}^{\infty} f(i) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \geqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \geqslant \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n}$$

- Consequently,

$$\frac{f(n)}{\bar{F}(n)} = \frac{1}{n(n+1)} n = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

2.2.3 Los ejemplos prototípicos y la formulación del teorema principal

Finalmente queremos conocer posibles distribuciones límites a las cuales $(M_n - d_n)/c_n \to ?$ puedan converger.

Example 2.7 (Exponentials: growing maximum, Gumbel, Type 1)**.**

- $(X_i)_i$ i.i.d. con $X_1 \sim \mathrm{EXP}(\alpha)$, $\alpha > 0$
- Ya que $\bar{F}(x) = e^{-\alpha x} \in (0,1)$ para toda $x > 0$ tenemos que
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = (1 - \bar{F}(x))^n \to 0.$$
Adivinando que M_n crece como función n de manera logaritmica.
- Sustrayendo el logaritmo podría estabilizar. Consideramos $M_n - \frac{\ln(n)}{\alpha}$. Notemos que la x siguiente puede estar en toda $\mathbb{R}$ porque se pueden producir valors negativos por recentrar. Es decir, para $x \in \mathbb{R}$ tenemos
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n - \frac{\ln(n)}{\alpha} \leqslant x) &= \mathbb{P}(M_N \leqslant x + \frac{\ln(n)}{\alpha})\\ &= (1 - \bar{F}(x + \frac{\ln(n)}{\alpha}))^n\\ &= (1 - \exp(-\alpha(x + \frac{\ln(n)}{\alpha})))^n\\ &= (1 - \exp(-(\alpha x + \ln(n))))^n = (1 - \frac{e^{-\alpha x}}{n})^n \longrightarrow e^{-e^{-\alpha x}}.\end{aligned}$$
Wow, esto es algo inesperado, y no es una de las distribuciones típicas. La función de distribución que obtenemos es
$$G(x) = e^{-e^{-\alpha x}}$$
- Es una función de distribución? Es contínua,
$$\lim_{x\to\infty} e^{-e^{-\alpha x}} = e^{-\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}} = 1.$$
y
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-\alpha x}} = 0.$$
Es una distribución Gumbel.
- En este caso $c_n = 1$ y $d_n = \frac{\ln(n)}{\alpha}$.

Example 2.8 (Paretos: growing maxima, Fréchet, Type 2)**.**

- Para $\alpha > 0$ sea $\bar{F}(x) := \begin{cases} 1 & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^\alpha} & x > 1 \end{cases}$.

- Entonces para $x > 1$ tenemos que $\bar{F}(x) \in (0,1)$ y
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) \to 0, n \to \infty \text{ para } x > 1.$$
- Entonces M_n crece en n. Como es de colas pesadas en vez recentrar podría parecer natural renormalizar por una potencia de n.
- Consideramos $M_n/n^{\frac{1}{\alpha}}$. Por la renormalización puede haber valores en todos positivos por tanto asumimos $x > 0$
$$\mathbb{P}(\frac{M_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant n^{\frac{1}{\alpha}} x) = (1 - \frac{1}{x^\alpha n})^n \longrightarrow e^{-\frac{1}{x^\alpha}}.$$
Wow, otra función de distribución no estándar! Es contínua con
$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} = 1$$
y
$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} = 0$$
Se llama la distribucón de Fréchet.
- en este caso $d_n = 0$, $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Example 2.9 (Finite range, approximation to the maximum, Weibull, Type 3)**.**

- $\bar{F}(x) = \begin{cases} 1 & x \leqslant 0 \\ (1-x)^\alpha & x \in [0,1] \\ 0 & x > 1 \end{cases}$
- $x_F = 1$ por tanto $M_n \to 1$ c.s. ¿la pregunta es: qué tan rápido converge? Si inflamos esta convergencia
$$n^{\frac{1}{\alpha}}(M_n - 1)$$
y converge podemos ver la tasa de convergencia precisa:
Para $-n^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant x \leqslant 0$ tenemos
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha}}(M_n - 1) \leqslant x) &= \mathbb{P}(M_n \leqslant \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + 1) \\ &= (1 - (1 - (\frac{-x}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + 1))^\alpha)^n \\ &= (1 - \frac{(-x)^\alpha}{n})^n \longrightarrow e^{-(-x)^\alpha}\end{aligned}$$
- Por tanto
$$\mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha}}(M_n - 1) \leqslant x) \longrightarrow \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
Otra vez, es una distribución no estándar, y se llama la distribución de Weibull.
- En este caso: $c_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ y $d_n = 1$.

A word about the limit distributions:

1. La distribución de Gumbel:

   - Para los parametros $m \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ la distribución de **Gumbel** $\Lambda_{m,\beta}$ tiene la función de distribución siguiente

   $$F(x) = \exp\Big(- e^{-\frac{(x-m)}{\beta}}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}$$

   - La densidad es

   $$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\Big(\big(- \frac{(x-m)}{\beta}\big) \cdot \big(- e^{-\frac{(x-m)}{\beta}}\big)\Big) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-m)}{\beta}}}{\exp\Big(e^{-\frac{(x-m)}{\beta}}\Big)}$$

   - Esencialmente una distribución exponencial "adornada" con algún prefactor entre $e^0 = 1$ y e^1 pero con valores negativos que son muy pequeños. Se verifica por l'Hopital se muestra la convergencia para valores negativos. Es una Entonces tiene todos los momentos.
   - Es una distribución asimétrica, no centrada, con máximo de la densidad en m.
   - Momentos: en general complicado, integración por partes en el caso del valor esperado permite calcular

   $$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\beta} e^{\big(-\frac{(x-m)}{\beta}\big) \cdot \big(-e^{-\frac{(x-m)}{\beta}}\big)} dx = m + \gamma\beta$$

   para

   $$\gamma = \lim_{n\to\infty} \ln(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx 0.57721... \qquad \text{la constante de Euler-Mascheroni}$$

   y

   $$\mathbb{V}[X] = \frac{\pi^2}{6}\beta^2.$$

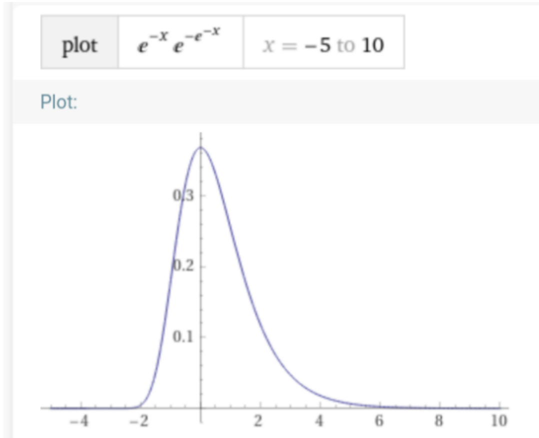
   - Gumbel estándar $\Lambda = \Lambda_{0,1}$, $m = 0$, $\beta = 1$

   $$F(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

   - con densidad

   $$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{(-x)(-e^{-x})} = \frac{1}{\beta} \frac{e^{-x}}{\exp(e^{-x})}.$$

WolframAlpha plot: Standard Gumbel density.



2. Distribución de **Fréchet** $\Phi_{\alpha,\beta,m}$ con parametros $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $m \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} e^{-(\frac{x-m}{\beta})^{-\alpha}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

- con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \frac{e^{-(\frac{x-m}{\beta})^{-\alpha}}}{(\frac{x-m}{\beta})^{\alpha+1}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

- Fréchet estándar $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha,1,0}$ para $\alpha > 0$

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \frac{e^{-x^{-\alpha}}}{x^{\alpha+1}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

sólo momentos para $\alpha < k$. Es una distribución con colas pesadas, con soporte solo positivo.

- Para $k < \alpha$ tenemos los momentos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^k] &= \int_0^\infty x^k f_\alpha(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^k \alpha \frac{e^{-x^{-\alpha}}}{x^{\alpha+1}} dx \\
&= \int_0^\infty t^{-\frac{k}{\alpha}} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^{(-\frac{k}{\alpha}+1)-1} e^{-t} dt \\
&= \Gamma(1 - \frac{k}{\alpha})
\end{aligned}$$

  por la sustitución $t = x^{-\alpha}$ con los detalles $x = t^{-\frac{1}{\alpha}}$, $\frac{dt}{dx} = -\alpha x^{-\alpha-1}$, $x = 0$ implica $t = \infty$ y $x = \infty$ implica $t = 0$.

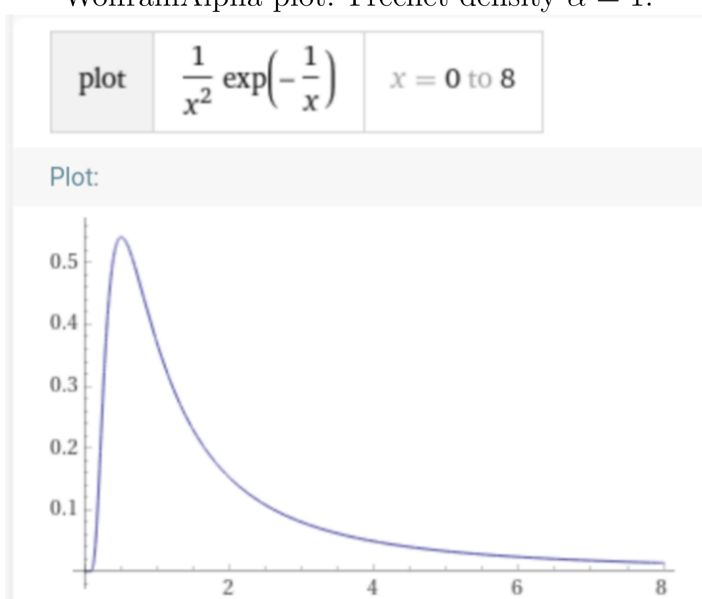
- La varianz se calcula por

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

  por la formula anterior: Para $\alpha > 2$ tenemos que

$$\mathbb{V}(X) = \Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha}).$$

WolframAlpha plot: Frechet density $\alpha = 1$.



3. La distribución de Weibull $\tilde{\Psi}_{\alpha,\lambda}$ con parametros $\alpha, \lambda > 0$

- tiene la función de distribución

$$F(x) = e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathbf{1}\{x \geqslant 0\}$$

- y la densidad

$$f(x) = \alpha \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathbf{1}\{x \geqslant 0\}$$

- En el teorema aparece la distribución de **Weibull estándar** Ψ_α **reflejada**, es decir, $X \sim \Psi_\alpha$ significa que $-X \sim \tilde{\Psi}_{\alpha,1}$ para $\alpha > 0$.

$$F(x) = e^{-(-x)^\alpha} \mathbf{1}\{x \leqslant 0\} + \mathbf{1}\{x > 0\}$$

- y la densidad

$$f(x) = \alpha (-x)^{\alpha-1} e^{-(-x)^\alpha} \mathbf{1}\{x \leqslant 0\}$$

- Es una función de Gamma "reescalada". La distribución tiene valores estríctamente negativas y una decaencia exponencial en la cola, y por tanto tiene todos los momentos que se pueden calcular explícitamente para Ψ_α.

$$\mathbb{E}[X] = -\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$$

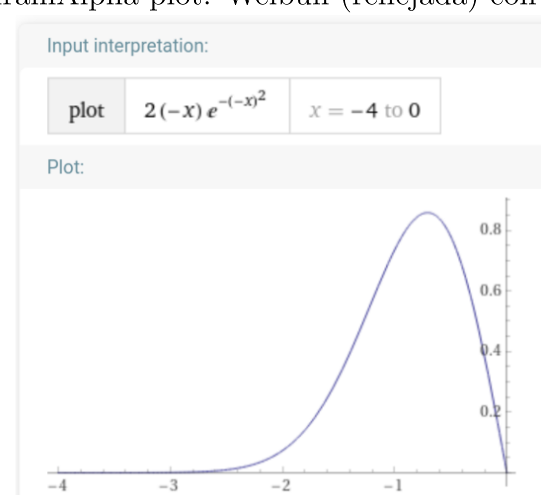
y

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} -\Gamma(1 + \frac{k}{\alpha}) & k \text{ par} \\ \Gamma(1 + \frac{k}{\alpha}) & k \text{ impar} \end{cases}$$

Además

$$\mathbb{V}(X) = \Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\alpha})$$

WolframAlpha plot: Weibull (reflejada) con $\alpha = 2$



Theorem 2.15 (Fisher-Tippett-Gnedenko extreme value theorem)**.**

- $(X_n)_n$ *i.i.d.*

Si existen constantes $c_n > 0$ *y* d_n *y* H *no degenerado tal que*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H$$

entonces H *pertenece a una de las distribuciones siguientes:*

Gumbel

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}.$$

Fréchet $\alpha > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^\alpha}) & x > 0 \end{cases}$$

Weibull $\alpha > 0$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leqslant 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$