3 Cadenas de Markov en tiempo y espacio discreto

3.1 Ejemplo 1: A gambling problem

- Consideramos la repartición de $S€$, $S \in \mathbb{N}$, entre dos jugadores A y B a lo largo del tiempo.
- En cada turno del juego el jugador A puede ganar 1€ y simultáno el jugador B pierde 1€ y vice versa.
- En otras palabras, en cada turno 1€ cambia su propietario del perdedor al ganador del turno.
- La probabilidad en cada turno de ganar jugador A (es decir, perder jugador B) es $p \in (0,1)$ y la probabilidad de perder jugador A (y ganar jugador B) es $q = 1 - p$.
- Se asume que los resultados de ganar y perder en cada turno es una familia independiente.
- Denotamos X_n la fortuna (acumulada) del jugador A en el turno n y respectivamente $S - X_n$ la fortuna (acumulada) del jugador B en el turno n.
- El juego arranca con $X_0 = k$ para algun valor $k \in \{0, \dots, S\}$ y termina al llegar $X_n = 0$ (el jugador A perdió todo) o $X_n = S$, es decir, $S - X_n = 0$ (el jugador B perdió todo).

Cadena de Markov confinada

- Podemos entender nuestro juego como $X_0 = k$ para alguna $k \in \{1, \dots, S-1\}$ y consideramos el proceso estocástico $X_n \in \{1, \dots, S-1\}$ tal que

  $$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1},$$

  donde la familia $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia i.i.d. de v.a. con distribución Bernoulli sobre $\{-1, 1\}$ con

  $$\theta_n \sim p\delta_1 + q\delta_{-1}, \qquad p \in (0,1),\ q = 1-p,\ n \in \mathbb{N}.$$

  En otras palabras

  $$X_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i + X_0.$$

  donde $X_0 \perp (\theta_n)_n$

- Claro:

  $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p$$

  y

  $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = q$$

Cantidades de interés

1. ¿Cuál es la probabilidad de que jugador A pierde en algún momento?

$$R_A = \text{“jugador A pierde todo su capital en algún momento”} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\}$$

   Importante: $X_n \in \{1, \dots, S-1\}$ y termina cuando $X_n \in \{0, S\}$.

2. ¿Cuánto tiempo toma el juego en promedio?

3.1.1 Probabilidades de ruina

- Obviamente la probabilidad del jugador A de arruinarse a lo largo del tiempo depende del capital inicial $X_0 = k \in \{0, \dots, S\}$.
- Por tanto nos interesa la cantidad

$$f_S(k) := \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k).$$

- Importante: el juego termina de todos modos al alcanzar al conjunto $\{0, S\}$. Por tanto R_A es el evento de terminar el juego en 0 y NO en S.
  En otras palabras: es la probabilidad de alcanzar a 0 antes de alcanzar a S.

Example 3.1. 1. $S = 1$:

$f_1(0) = 1$ el jugador A arranca arruinado
$f_1(1) = 0$ el jugador B arranca arruinado y el jugador A ya no puede arruinarse

2. $S = 2$:

$f_2(0) = 1$ el jugador A arranca arruinado
$f_2(1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 1) = q$ el jugador A se arruina al perder una vez,
y al ganar una vez A ganó para siempre
$f_2(2) = 0$ el jugador B arranca arruinado y el jugador A ya no puede arruinarse

3. $S = 3$:

$f_3(0) = 1$ el jugador A arranca arruinado

$$
\begin{aligned}
f_3(1) &= \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 1) \\
&= \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}\big(\{X_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \neq 0\} \cap \{X_n = 0\}\big) \mid X_0 = 1) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\big(\{X_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \neq 0\} \cap \{X_n = 0\}\big) \mid X_0 = 1) \\
&= q + 0 + (pq)q + 0 + (pq)(pq)q + 0 + (pq)(pq)(pq)q + 0 + (pq)(pq)(pq)(pq)q + 0 + \dots \\
&= q \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (qp)^n = \frac{q}{1-pq}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3(2) &= \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 2) = \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}_0}\{X_n = 0\} \mid X_0 = 2) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 1) \\
&= 0 + qq + 0 + q(qp)q + 0 + q(pq)(pq)q + 0 + q(pq)(pq)(pq)q + 0 + q(pq)(pq)(pq)(pq)q + 0 + \dots \\
&= q^2 \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (qp)^n = \frac{q^2}{1-pq}
\end{aligned}
$$

$f_3(3) = 0$ el jugador B arranca arruinado y el jugador A ya no puede arruinarse

Lemma 3.1. *Para cada $k \in \{1, \dots, S-1\}$ tenemos que*

$$\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k \pm 1, X_0 = k) = \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k \pm 1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k \pm +1)$$

Proof. • Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $k \pm 1 \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k \pm 1, X_0 = k) &= \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\} \mid X_1 = k \pm 1, X_0 = k) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\} \cap \{X_1 = k \pm 1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_1 = k \pm 1, X_0 = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty} \{X_n = 0\} \cap \{X_1 = k \pm 1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_1 = k \pm 1, X_0 = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty} \{X_n = 0\} \cap \{X_1 = k \pm 1\} \cap \{X_1 - X_0 = \pm 1\})}{\mathbb{P}(X_1 = k \pm 1, X_1 - X_0 = \pm 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty} \{X_n = 0\} \cap \{X_1 = k \pm 1\})\ \mathbb{P}(X_1 - X_0 = \pm 1)}{\mathbb{P}(X_1 = k \pm 1)\ \mathbb{P}(X_1 - X_0 = \pm 1)} \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\} \mid X_1 = k \pm 1) \\
&= \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k \pm 1).
\end{aligned}$$

- En el antepenúltimo paso usamos que el proceso que arranca en tiempo 1 y cuyo valor está conocido, no depende del paso de como llegar del valor de 0 a 1:
  Recordamos que

  $$X_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i + X_0$$

  Ahora el proceso X_n condicionado a $\{X_1 = k \pm 1\}$ es

  $$X_n = \sum_{i=2}^{n} \theta_i + X_1 = \sum_{i=2}^{n} \theta_i + k + 1.$$

  y

  $$X_1 - X_0 = X_0 + \theta_1 - X_0 = \theta_1.$$

  El primer proceso es una función de $(\theta_n)_{n\geqslant 2}$ y θ_1 que son independientes.

- Además tenemos que

  $$\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k \pm 1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k \pm 1)$$

  porque los procesos

  $$X_n = \sum_{i=2}^{n} \theta_i + k + 1$$

  y

  $$X_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i + k + 1$$

tienen la mísma distribución y por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k+1) &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\} \mid X_1 = k+1) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty}\{X_n = 0\} \mid X_1 = k+1) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty}\{X_{n-1} = 0\} \mid X_0 = k+1) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\} \mid X_0 = k+1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k+1)\end{aligned}$$

□

Ahora podemos derivar una recursión para la probabilidad de la ruina.

Lemma 3.2. *Para cada $k \in \{1, \ldots, S-1\}$ tenemos que*

$$f_S(k) = p \cdot f_S(k+1) + q \cdot f_S(k-1)$$

con

$$f_S(0) = 1$$

y

$$f_S(S) = 0.$$

Remark 3.3. Fíjese que para $p = q = \frac{1}{2}$ esta ecuación se puede reescribir como

$$f_S(k+1) - 2f_S(k) + f_S(k-1) = 0$$

con $f_S(0) = 1$ y $f_S(S) = 0$ que es es una discretización de

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0$$

con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
¿Cuál solución se le occurre espontáneamente?

Proof. Condicionando obtenemos

$$\begin{aligned}
f_S(k) &= \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k) \\
&= \mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k+1\} \mid X_0 = k) + \mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k-1\} \mid X_0 = k) \\
&= \frac{\mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k+1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_0 = k)} + \frac{\mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k-1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k+1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}(R_A \cap \{X_1 = k-1\} \cap \{X_0 = k\})}{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \\
&= \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k+1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) \\
&\quad + \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k-1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\
&= p \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k+1, X_0 = k) + q \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k-1, X_0 = k) \\
&= p \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k+1) + q \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k-1) \\
&= p \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k+1) + q \cdot \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k-1) \\
&= p \cdot f_S(k+1) + q \cdot f_S(k-1).
\end{aligned}$$

En las últimas igualdades usamos el lema anterior. □

Lemma 3.4. *Para cada $S \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, S\}$ y $p \in (0,1)$ y $q = 1-p$ tenemos*

$$f_S(k) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^S}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S} & \text{para } p \neq q, \\ 1 - \frac{k}{S} & \text{para } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Corollary 3.5. *1. Por simetría tenemos que*

$$\mathbb{P}(R_B \mid X_0 = k) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{S-k} - \left(\frac{p}{q}\right)^S}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^S} & \text{para } p \neq q, \\ \frac{k}{S} & \text{para } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

donde

$$R_B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X_n = S\}.$$

En particular:

$$\mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k) + \mathbb{P}(R_B \mid X_0 = k) = 1$$

Esto implica que la probabilidad de que el juego sigue hasta infinito tiene probabilidad 0.

2. Para recursos illimitados (es decir, el jugador B nunca se puede quebrar) tenemos que

$$f_\infty(k) = \lim_{S \to \infty} f_S(k) = \begin{cases} 1 & p \leqslant q \\ \left(\frac{q}{p}\right)^k & p > q \end{cases}$$

3. *Si denotamos la dependencia de $f_S(k)$ por $f_S(k,p)$ entonces para toda $S \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\dots,S-1\}$ tenemos que*

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} f_S(k,p) = \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^S}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S} = 1 - \frac{k}{S} = f_S(k, \frac{1}{2})$$

Lemma 3.3.

- Por $p+q=1$ podemos reescribir la recursión

$$\begin{aligned}&(p+q)\cdot f_S(k) = p\cdot f_S(k+1) + q\cdot f_S(k-1) \quad \Leftrightarrow\\ &0 = p\cdot(f_S(k+1)-f_S(k)) - q\cdot(f_S(k)-f_S(k-1)) \quad \Leftrightarrow\\ &f_S(k+1)-f_S(k) = \frac{q}{p}\cdot(f_S(k)-f_S(k-1)).\end{aligned}$$

- Por tanto la suma telescópica

$$f_S(n) = f_S(0) + \sum_{k=0}^{n-1}(f_S(k+1)-f_S(k)) = f_S(0) + (f_S(1)-f_S(0))\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k$$

- **Caso 1:** $p \neq q$ Para $p\neq q$ tenemos la fórmula geométrica

$$f_S(n) = f_S(0) + (f_S(1)-f_S(0))\cdot\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}.$$

- Ahora usando $f_S(0)=1$ y $f_S(S)=0$ obtenemos

$$0 = f_S(S) = 1 + (f_S(1)-f_S(0))\cdot\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S}{1-\frac{q}{p}}$$

  y por tanto

$$f_S(1)-f_S(0) = -\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S}$$

  tal que

$$f_S(n) = 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S}.$$

- **Caso 2:** $p=q=\frac{1}{2}$ Para $\frac{q}{p}=1$ tenemos que

$$f_S(k+1)-f_S(k) = f_S(k)-f_S(k-1)$$

  y por tanto

$$f_S(n) = f_S(0) + n\cdot(f_S(1)-f_S(0))$$

- Ahora $f_S(0) = 1$ y

$$0 = f_S(S) = 1 + S \cdot (f_S(1) - f_S(0)),$$

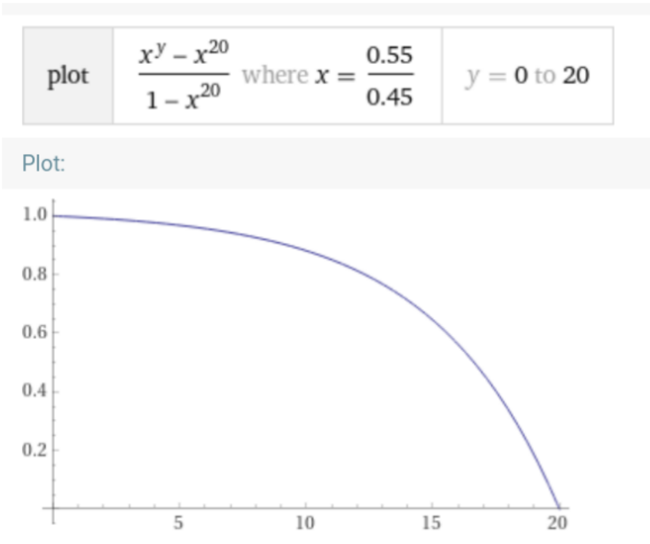
es decir,

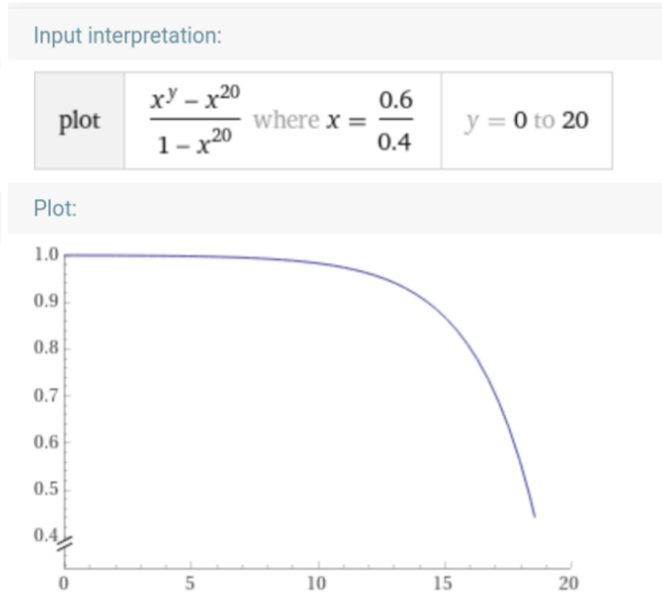
$$f_S(1) - f_S(0) = -\frac{1}{S}$$

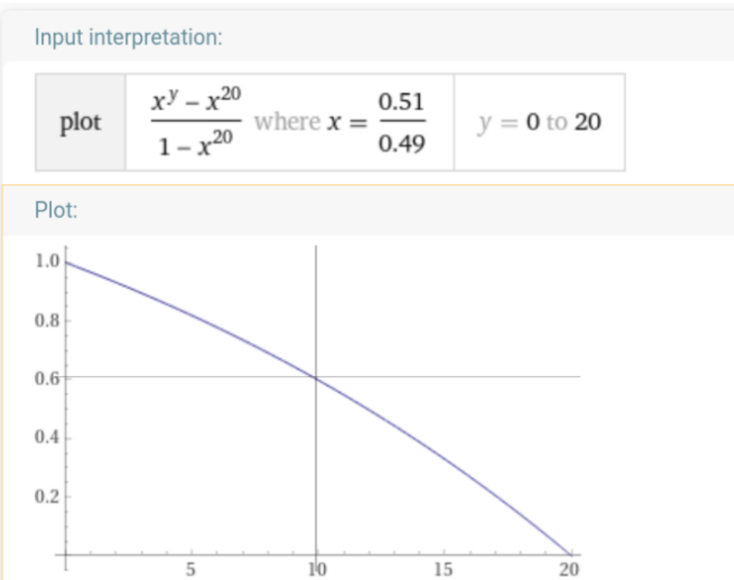
y

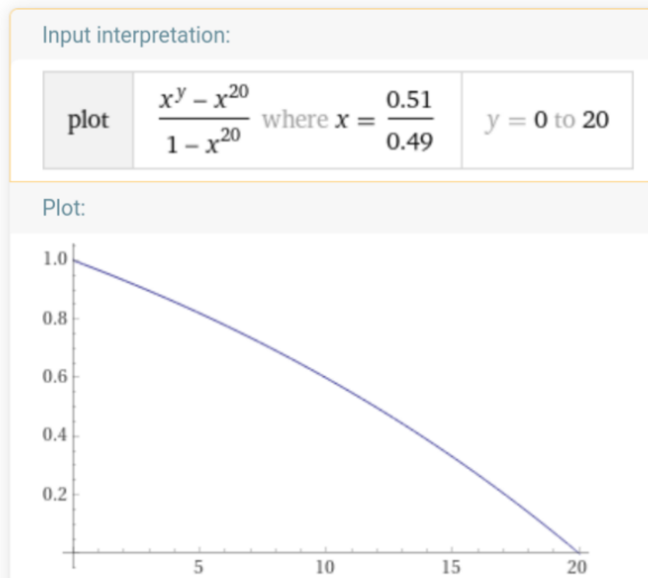
$$f_S(n) = 1 - \frac{n}{S}.$$

□


plot
$\frac{x^y - x^{20}}{1 - x^{20}}$ where $x = \frac{0.55}{0.45}$
$y = 0$ to 20
Plot:
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
5
10
15
20


Input interpretation:
plot
$\frac{x^y - x^{20}}{1 - x^{20}}$ where $x = \frac{0.6}{0.4}$
$y = 0$ to 20
Plot:
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
5
10
15
20

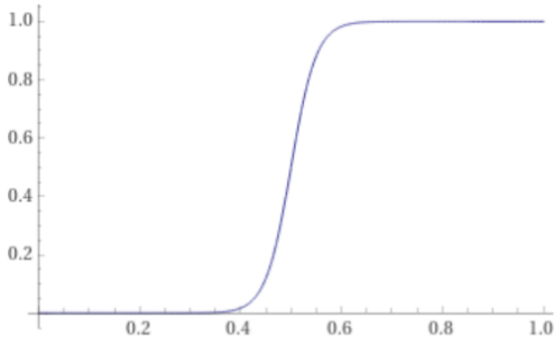

Input interpretation:
plot
$\frac{x^y - x^{20}}{1 - x^{20}}$ where $x = \frac{0.51}{0.49}$
$y = 0$ to 20
Plot:
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
5
10
15
20


Input interpretation:
plot
$\frac{x^y - x^{20}}{1 - x^{20}}$ where $x = \frac{0.51}{0.49}$
$y = 0$ to 20
Plot:
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
5
10
15
20

Input interpretation:

plot	$\dfrac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^y - \left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}$ where $y = 10$	$x = 0$ to 1

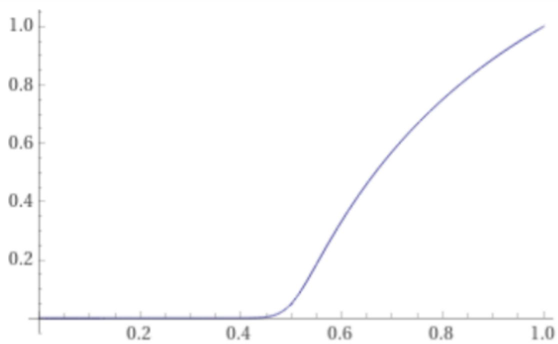
Plot:



Input interpretation:

plot	$\dfrac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^y - \left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}$ where $y = 19$	$x = 0$ to 1

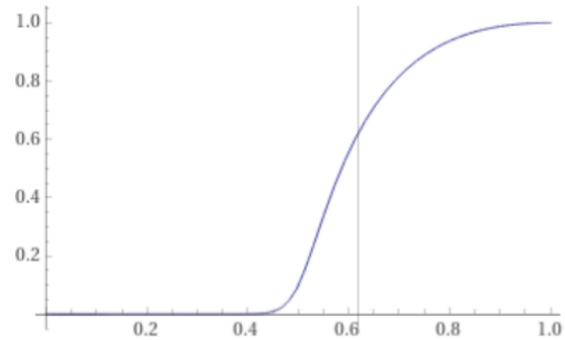
Plot:



Input interpretation:

plot	$\dfrac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^y - \left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^{20}}$ where $y = 18$	$x = 0$ to 1

Plot:



3.1.2 Duracíon media del juego

- Consideramos la duración del juego

$$T_{0,S} := \inf\{n \geqslant 0 \mid X_n \in \{0, S\}\}$$

y su promedio para un dato inicial $k \in \{0, \dots, S\}$ del proceso $(X_n)_n$ dado

$$h_S(k) := \mathbb{E}\Big[T_{0,S} \mid X_0 = k\Big]$$

- Claro

$$h_S(0) = 0 \qquad \text{el jugador } A \text{ ya perdió se acabó el juego antes de arrancar}$$

y

$$h_S(S) = 0 \qquad \text{el jugador } B \text{ ya perdió se acabó el juego antes de arrancar}$$

Example 3.2. 1. $S = 2$: Tenemos el caso deterministico

$$T_{0,2} = \begin{cases} 0 & X_0 = 0 \\ 1 & X_0 = 1 \\ 0 & X_0 = 2 \end{cases}$$

2. $S = 3$: Claramente $h_3(0) = h_3(3) = 0$
Para $X_0 = 1$

$$\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k \mid X_0 = 1) = p^2(pq)^{k-1} \qquad \text{para } k \geqslant 1$$
$$\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k+1 \mid X_0 = 1) = q(pq)^k \qquad \text{para } k \geqslant 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{0,3} \mid X_0 = 1] &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k \mid X_0 = 1) + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k+1 \mid X_0 = 1) \\
&= 2p^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(pq)^{k-1} + q \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(pq)^k \\
&= 2p^2 \frac{1}{(1-pq)^2} + 2pq^2 \frac{1}{(1-pq)^2} + \frac{q}{1-pq} \\
&= \frac{2p^2 + 2pq^2 + q(1-pq)}{(1-pq)^2} \\
&= \frac{2p^2 + pq^2 + q}{(1-pq)^2}.
\end{aligned}$$

Para $X_0 = 2$

$$\mathbb{P}(T_{0,2} = 2k \mid X_0 = 2) = q^2(pq)^{k-1} \qquad \text{para } k \geqslant 1$$
$$\mathbb{P}(T_{0,2} = 2k+1 \mid X_0 = 2) = p(pq)^{k} \qquad \text{para } k \geqslant 0$$

y analogamente

$$\mathbb{E}[T_{0,3} \mid X_0 = 1] = \frac{2q^2 + qp^2 + p}{(1-pq)^2}$$

3. $S = 4$: La situación ya es mucho más complicado.

Lemma 3.3. *Para $k \in \{1, \dots, S_1\}$ tenemos la recursión*

$$h_S(k) = 1 + p \cdot h_S(k+1) + q \cdot h_S(k-1)$$

con

$$h_S(0) = 0 \qquad y \qquad h_S(S) = 0.$$

Remark 3.4. Fijese que para $p = q = \frac{1}{2}$ esta ecuacíion se puede reescribir como

$$\frac{1}{2}(h_S(k-1) - 2h_S(k) + h_S(k+1)) = -1$$

con $h_S(0) = 0$ y $h_S(S) = 0$, que es una versión discretizada de la ecuacíion

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -1$$

con $f(0) = 0$ y $f(S) = 0$ y que tiene por solucíion

$$f(x) = f(0) + xf'(0) - x^2.$$

Proof.
- Usando la igualdad (para $\mathbb{P}$-casi toda ω)

$$\mathbf{1}\{X_0 = k\} = \mathbf{1}\{X_1 = k+1, X_0 = k\} + \mathbf{1}\{X_1 = k-1, X_0 = k\}$$

tenemos

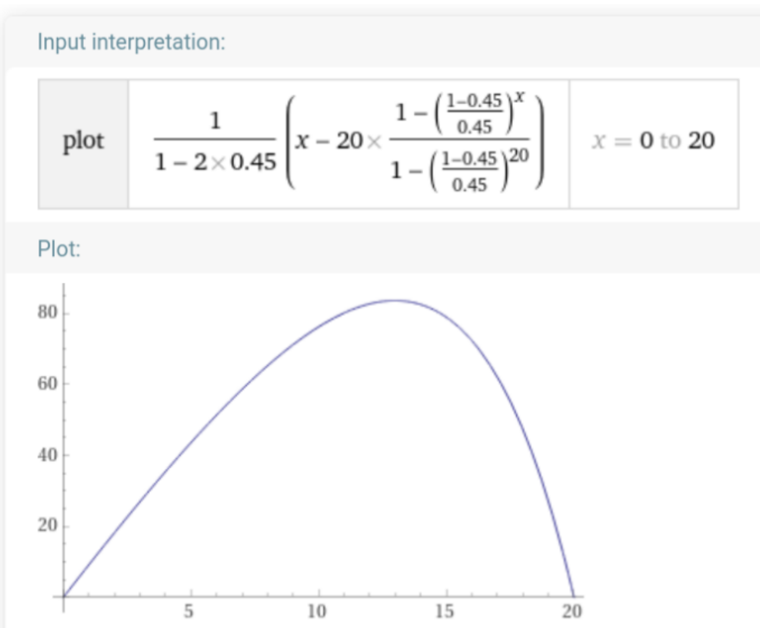
$$\begin{aligned}
h_S(k) &= \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = k)}\mathbb{E}[T_{0,S}\mathbf{1}\{X_0 = k\}] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = k)}\mathbb{E}[T_{0,S}\big(\mathbf{1}\{X_1 = k+1, X_0 = k\} + \mathbf{1}\{X_1 = k-1, X_0 = k\}\big)] \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)}\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_1 = k+1, X_0 = k] \\
&\qquad + \frac{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)}\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_1 = k-1, X_0 = k] \\
&= p \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_1 = k+1, X_0 = k] + q \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_1 = k-1, X_0 = k] \\
&\overset{*}{=} p \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} + 1 \mid X_0 = k+1, X_{-1} = k] + q \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} + 1 \mid X_0 = k-1, X_{-1} = k] \\
&= p \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} + 1 \mid X_0 = k+1] + q \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} + 1 \mid X_0 = k-1] \\
&= (p+q) + p \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k+1] + q \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k-1] \\
&= 1 + p \cdot h_S(k+1) + q \cdot h_S(k-1).
\end{aligned}$$

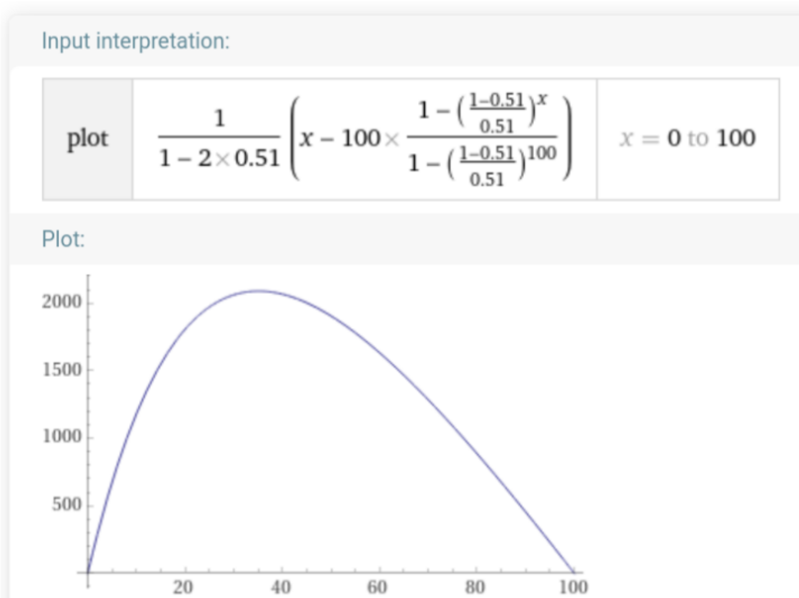
- En el paso $*$ tenemos en cuenta que $T_{0,S}$ cuenta a partir del momento 0. Sin embargo, condicionando a que $X_1 = k \pm 1$ ya sabemos que $T_{0,S} \geqslant 1$ con un primer paso determinístico. Por tanto, tiene la misma distribución que $T_{0,S} + 1$ condicionando a $X_0 = k \pm 1$.

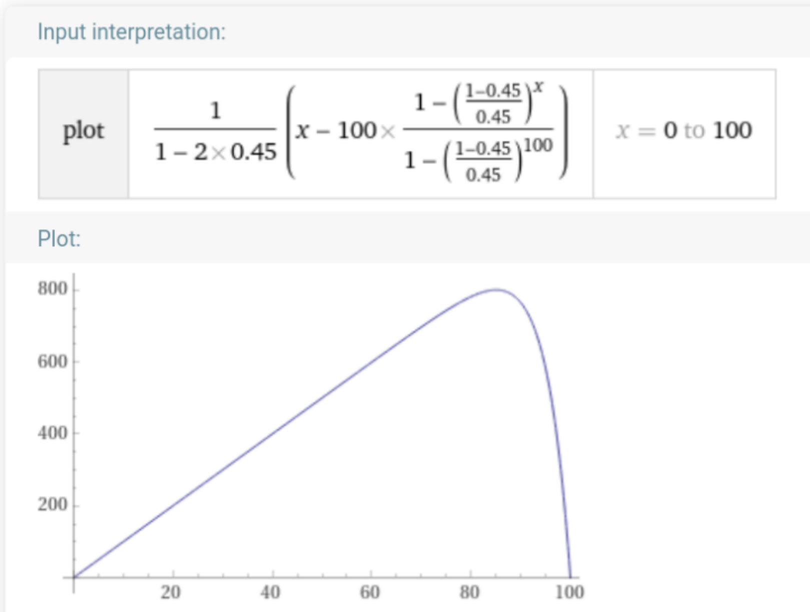
$\square$

Lemma 3.6. *Para cada $S \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, S\}$ y $p \in (0,1)$ y $q = 1 - p$ tenemos*

$$h_S(k) = \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k] = \begin{cases} \frac{1}{q-p}\left(k - S\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S}\right) & \text{para } p \neq q, \\ k(S-k) & \text{para } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$







Corollary 3.7. • *Para recursos illimitados tenemos que*

$$h_\infty(k) = \begin{cases} \infty & p \geqslant q \\ \frac{k}{q-p} & p < q \end{cases}$$

- *Tenemos la continuidad*

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{1}{q-p}\left(k - S\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^S}\right) = k(S-k).$$

Lema 3.6. • Primero reescribimos la recursión como

$$p(h_S(k+1) - h_S(k)) - q(h_S(k) - h_S(k-1)) = -1$$

con

$$h_S(0) = 0 \qquad y \qquad h_S(S) = 0.$$

- Consideramos la ecuación homogénea

$$p(h(k+1) - h(k)) - q(h(k) - h(k-1)) = -1$$

con

$$h(0) = 0 \qquad y \qquad h(S) = 0.$$

- Por la linealdad sabemos que la recursión lineal inhomogenea tiene como solución general la solución homogenea general + una solución particular inhomogenea.

- **Caso $p \neq q$:** Probando $k \mapsto C \cdot k$ obtenemos que $k \mapsto \frac{k}{q-p}$ es una solución particular.

- Solución homogénea general: La solucíon general funciona análogamente al caso de f_S y nos da que
$$k \mapsto C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^k$$
para constantes C_1 y C_2.

- Por tanto la solución inhomogenea general tiene la forma
$$\frac{k}{q-p} + C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^k$$
y con los datos del borde obtenemos el sistema lineal para C_1 y $C2$
$$\begin{aligned} h_S(0) &= 0 = C_1 + C_2 \\ h_S(S) &= 0 = \frac{S}{q-p} + C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^S. \end{aligned}$$
Resolviendo este sistema lineal obtenemos
$$C_1 = -\frac{S}{(q-p)(1-\big(\frac{q}{p}\big)^S}, \qquad y \qquad C_2 = \frac{S}{(q-p)(1-\big(\frac{q}{p}\big)^S}$$
Insertando estas constantes en la solucíon particular general nos da el resultado.

- **Caso 2: $p = q = \frac{1}{2}$.** La solución homoénea general tiene la forma $k \mapsto C_1 + C_2 k$. Por tanto tenemos que buscar otra solucíon particular y intentamos $k \mapsto Ck^2$ que nos da que $C = -1$.

- Por tanto la solución inhomogenea general es
$$h_S(k) = C_1 + C_2 k - k^2.$$
Los datos del borde determinan las constantes:
$$\begin{aligned} h_S(0) &= 0 = C_1 \\ h_S(S) &= C_1 + C_2 S - S^2 \end{aligned}$$
que nos da que $C_1 = 0$ y $C_2 = S$. Por tanto
$$h_S(k) = Sk - k^2.$$

□

3.2 Ejemplo 2: Simple (unrestricted) random walks

- Una **caminata aleatória simple** (sin restricción) que arranca en $S_0 = X_0$ es un proceso estocástico $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con
$$S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n,$$
donde $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia i.i.d. y $X_0 \perp (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con
$$X_i \sim p\cdot\delta_{-1} + r\cdot\delta_0 + q\cdot\delta_1$$
con $p + r + q = 1$.

- Si $r = 0$ se llama **caminata aleatória de Bernoulli**.

3.2.1 Esperanza y varianza

Lemma 3.8. *Para una caminata aleatoria de Bernoulli* $(S_n)_n$ *tenemos que*

$$\mathbb{E}[S_n \mid S_0 = 0] = (p-q) \cdot n$$

y

$$\mathbb{V}(S_n \mid S_0 = 0) = 4pq \cdot n.$$

Proof.

- Primero, vemos que

$$\mathbb{E}[X_n] = -1 \cdot q + 1 \cdot p = p - q$$

y por tanto

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n(p-q).$$

- Ahora

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n^2 \mid S_0) &= \mathbb{E}[S_n^2 \mid S_0] - \mathbb{E}^2[S_n \mid S_0] \\
&= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big]\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) \cdot \big(\sum_{j=1}^{n} X_j\big)\Big] - \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i\Big]\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_j\Big]\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j\Big] - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i\Big]\mathbb{E}\Big[X_j\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i^2\Big] + \sum_{i,j=1_{i\neq 1}}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i X_j\Big] - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}^2\Big[X_i\Big] - \sum_{i,j=1_{i\neq j}}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i\Big]\mathbb{E}\Big[X_j\Big].
\end{aligned}$$

Por la independencia tenemos para $i \neq j$

$$\mathbb{E}\Big[X_i X_j\Big] = \mathbb{E}\Big[X_i\Big]\mathbb{E}\Big[X_j\Big],$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n \mid S_0) &= \mathbb{E}[S_n^2 \mid S_0] - \mathbb{E}^2[S_n \mid S_0] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_i^2\Big] - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}^2\Big[X_i\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = 4(p-q) \cdot n.
\end{aligned}$$

□

3.2.2 La distribución marginal

- Primero notemos que S_n arrancando en 0 sólo puede alcanzar a estados pares en tiempos pares. Por tanto para toda $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k + 1 \mid S_0 = 0) = 0$$

  y vice versa en tiempos impares sólo puede alcanzar estados impares, tal que

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k \mid S_0 = 0) = 0$$

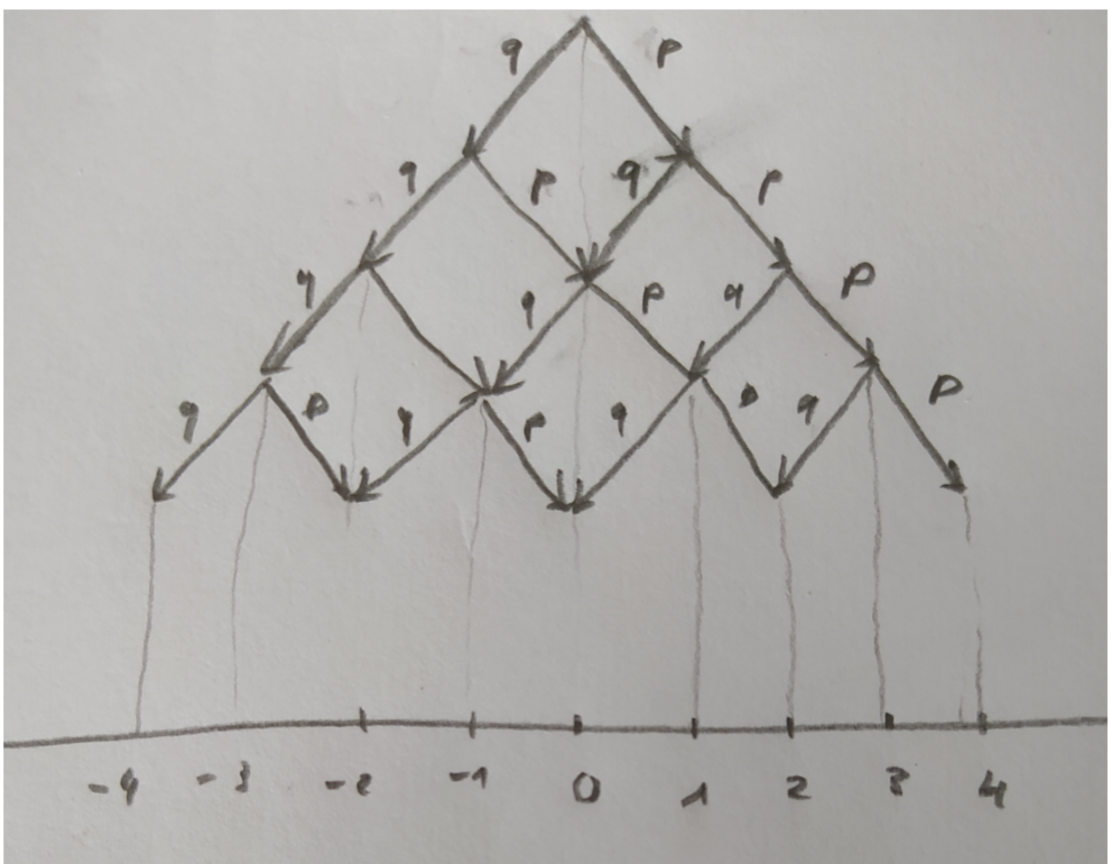
- Segundo el alcance máximo de $|X_i| = 1$ en cada paso nos da que en n pasos no podemos haber sobrepasado n a la derecha o izquierda:

$$\mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0) = 0 \qquad |k| > n.$$

Lemma 3.5. *Para toda* $-n \leqslant k \leqslant n$ *tenemos que*

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \mid S_0 = 0) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}, \qquad y$$

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k + 1 \mid S_0 = 0) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} q^{n-k}.$$



Remark 3.9. La primera probabilidad nos dice que

$$n + \frac{S_{2n}}{2} \sim \mathcal{B}_{2n,p}.$$

ya que

$$\mathbb{P}(n + \frac{S_{2n}}{2} = k \mid S_0 = 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 2(k-n) \mid S_0 = 0) = \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}.$$

La segunda probabilidad nos dice que

$$\frac{2n + 1 - S_{2n+1}}{2} \sim \mathcal{B}_{n,p}.$$

Proof. Mostramos el caso par.

- Por $X_i \sim q\delta_{-1}$ sabemos que se hicieron en el tiempo $2n$ exactamente $2n$ pasos.
- Llamemos ℓ el número (aleatório) de pasos positivos en este tiempo y $2n - \ell$ el número (aleatória de pasos negativos en este tiempo.
- Entonces el evento $S_{2n} = 2k$ es equivalente a que

  $$2k = \ell - (2n - \ell) = 2\ell - 2n \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \ell - n \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = n + k.$$

  Es decir tenemos exactamente $\ell = n+k$ pasos a la derecha y $2n-\ell = 2n-(n+k) = n-k$ pasos a la izquierda.
- Para cada camino dado la probabilidad de tener $\ell = n + k$ a la derecha y de tener $2n - \ell$ pasos a la izquierda es

  $$p^{n+k} q^{n-k}.$$
- El número de caminos con $\ell = n + k$ pasos a la derecha y $2n - \ell = n - k$ pasos a la izquierda equivale a las escogencias posibles de $n + k$ veces 1 (y portanto $n - k$ veces -1) en el tiempo $2n$ que son

  $$\binom{2n}{n+k}.$$

  Por tanto

  $$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \mid S_0 = 0) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}.$$

□

3.2.3 First return time distribution

- El tiempo de la primera vuelta a 0 es (importante $0 \notin \mathbb{N}$)

$$T_0^r := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0\}$$

con la convención de $\inf \emptyset = \infty$ en caso de no volver.

- Nos interesa la distribución

$$g(n) := \mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0)$$

- Claro:

$$\mathbb{P}(T_0^r = 2k+1 \mid S_0 = 0) = 0.$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$

- Ejemplo:

$$g(2) = 2pq$$

y

$$g(4) = 2p^2q^2$$

Lemma 3.10 (Convolution equation)**.** *La función* $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ *con*

$$g(n) := \mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0)$$

con $g(1) = 0$ *satisface la ecuación de convolución*

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n-2} g(n-k)h(k)$$

con $h(n) = \mathbb{P}(S_n = 0 \mid S_0 = 0)$*. Además sabemos*

$$h(n) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Proof.

- Primero reescribimos

$$\{S_n = 0\} = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n-2} \{S_k = 0\} \cap \{S_{k+1} \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{n-1} \neq 0\} \cap \{S_n = 0\}$$

según el último momento $k = \{0, \ldots, n-2\}$ de haber vuelto a 0.

- Ahora

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \mathbb{P}(S_n = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{k=0}^{n-2} \{S_k = 0\} \cap \{S_{k+1} \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{n-1} \neq 0\} \cap \{S_n = 0\} \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(\{S_k = 0\} \cap \{S_{k+1} \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{n-1} \neq 0\} \cap \{S_n = 0\} \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(\{\{S_{k+1} \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{n-1} \neq 0\} \cap \{S_n = 0\} \mid S_k = 0)\mathbb{P}(S_k = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(\{\{S_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{n-k-1} \neq 0\} \cap \{S_{n-k} = 0\} \mid S_0 = 0)\mathbb{P}(S_k = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(T_0^r = n-k \mid S_0 = 0)\mathbb{P}(S_k = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} g(n-k)h(k).
\end{aligned}
$$

□

- En consecuencia, toca resolver una ecuación de convolucíon.
- Para eso se introduce una funcíon generadora de momentos:

$$
G_{T_0^r} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad s \mapsto G_{T_0^r}(s) := \mathbb{E}[s^{T_0^r}\mathbf{1}\{T_0^r < \infty\} \mid S_0 = 0]
$$

- Ahora

$$
\begin{aligned}
G_{T_0^r}(s) &= \mathbb{E}[s^{T_0^r}\mathbf{1}\{T_0^r < \infty\} \mid S_0 = 0] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} s^n g(n).
\end{aligned}
$$

- Se sabe que

$$
\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) = \mathbb{E}[\mathbf{1}\{T_0^r < \infty\} \mid S_0 = 0] = G_{T_0^r}(1)
$$

y

$$
\mathbb{E}[T_0^r\mathbf{1}\{T_0^r < \infty\} \mid S_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0) = G'_{T_0^r}(1-).
$$

- We define

$$
H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_k = 0 \mid S_0 = 0)
$$

Proposition 3.11. *La función H tiene la forma siguiente:*

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} \qquad \textit{para} \qquad |s| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

y satisface

$$G_{T_0^r}(s)H(s) = H(s) - 1, \qquad s \in [-1,1].$$

Proof.

-
$$\begin{aligned}
H(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_k = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^{2k} \mathbb{P}(S_{2k} = 0 \mid S_0 = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^{2k} \binom{2k}{k} p^k q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (pqs^2)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (pqs^2)^k 2^{2k} \frac{\frac{(2k)!}{4^k}}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (4pqs^2)^k \frac{k \cdot (k-\frac{1}{2}) \cdot (k-1) \cdot (k-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (4pqs^2)^k \frac{(k-\frac{1}{2}) \cdot (k-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4pqs^2)^k \frac{(\frac{1}{2}-k) \cdot (\frac{3}{2}-k) \cdot \ldots \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-4pqs^2)^k \frac{(-\frac{1}{2}-(k-1)) \cdot (-\frac{1}{2}-(k-2)) \cdot \ldots \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{k} (-4pqs^2)^k \\
&= (1 + (-4pqs^2))^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}
\end{aligned}$$

para toda $|s| < 4pqs^2$ usando la definición de coeficientes binomiales generalizados

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}-1) \cdot (-\frac{1}{2}-2) \cdot \ldots \cdot (-\frac{1}{2}-(k-3)) \cdot (-\frac{1}{2}-(k-2)) \cdot (-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}$$

y la serie binomial para toda $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

- Ahora podemos verificar

$$
\begin{aligned}
G_{T_0^r}(s)H(s) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s^n g(n)\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_k=0 \mid S_0=0)\Big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} s^{n+k} g(n)\mathbb{P}(S_k=0 \mid S_0=0)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s^{n+k} g(n)\mathbb{P}(S_k=0 \mid S_0=0)\\
&= \sum_{\ell=2}^{\infty} s^{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-2} g(\ell-k)\mathbb{P}(S_k=0 \mid S_0=0)\\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} s^{\ell}\mathbb{P}(S_\ell=0 \mid S_0=0)\\
&= -1+\sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell}\mathbb{P}(S_\ell=0 \mid S_0=0) = H(s)-1.
\end{aligned}
$$

- Por tanto

$$
G_{T_0^r}(s) = 1-\frac{1}{H(s)} = 1-\sqrt{1-4pqs^2}, \qquad 4pqs^2<1.
$$

□

Now we are in the position to calculate the desired distribution of the first return time:

Lemma 3.12. *For all $n\in\mathbb{N}$ we have*

$$
\mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0=0) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & n \text{ par}\\ 0 & n \text{ impar}\end{cases}
$$

Proof.
- Again by the binomial series we have

$$
\begin{aligned}
G_{T_0^r}(s) &= 1-\sqrt{1-4pqs^2}\\
&= 1-\sum_{k=0}^{\infty}(-4pqs^2)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}\\
&= 1-\sum_{k=0}^{\infty}(-4pqs^2)^k\frac{(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-(k-3))\cdot(\frac{1}{2}-(k-2))\cdot(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-4pqs^2)^k\frac{(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-(k-3))\cdot(\frac{1}{2}-(k-2))\cdot(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(4pq)^k s^{2k}\frac{(1-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot((k-3)-\frac{1}{2})\cdot((k-2)-\frac{1}{2})\cdot((k-1)-\frac{1}{2})}{k!}.
\end{aligned}
$$

- At the same time we had identified

$$G_{T_0^r}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0).$$

- Ya que los coeficientes de las series de potencias son únicas obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_0^r = n \mid S_0 = 0) \\
&= g(2k) \\
&= (4pq)^k \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot((k-3)-\frac{1}{2})\cdot((k-2)-\frac{1}{2})\cdot((k-1)-\frac{1}{2})}{k!} \\
&= (4pq)^k \frac{1}{2k!}\prod_{m=1}^{k-1}(m-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}(pq)^k.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.13 (Probabilities of finite / infinite return times)**.**

$$\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) = 2\cdot\min\{p,q\}$$

y

$$\mathbb{P}(T_0^r = \infty \mid S_0 = 0) = |p-q|.$$

En particular, obtenemos para el caso simétrico $p = q = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) = 1 \qquad y \qquad \mathbb{P}(T_0^r = \infty \mid S_0 = 0) = 0,$$

mientras en el caso asimétrico $p \neq q$ tenemos

$$\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) < \infty \qquad y \qquad \mathbb{P}(T_0^r = \infty \mid S_0 = 0) > 0.$$

Proof.

- Recordamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) &= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}\{T^r < \infty\} \mid S_0 = 0]\\
&= \mathbb{E}\Big[1^{T_0^r}\cdot\mathbf{1}\{T^r < \infty\} \mid S_0 = 0]\\
&= G_{T_0^r}(1)\\
&= 1-\sqrt{1-4qp}\\
&= 1-\sqrt{1-4p(1-p)}\\
&= 1-\sqrt{1-4p+4p^2)}\\
&= 1-|1-2p|\\
&= 1-|p-q| = \begin{cases} 2p & \geqslant p \geqslant \frac{1}{2}\\ 2q & p < \frac{1}{2}\end{cases}\\
&= 2\cdot\min\{p,q\}
\end{aligned}$$

- Por el penúltimo paso sabemos que

$$\mathbb{P}(T_0^r = \infty \mid S_0 = 0) = 1 - \mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) = 1 - (1 - |p-q|) = |p-q|.$$

$\square$

3.2.4 Expected return times

Lemma 3.14 (Expected return times)**.** *Para toda $p \in [0,1]$ tenemos que*

$$\mathbb{E}[T_0^r \mid S_0 = 0] = \infty$$

sin embargo

$$\mathbb{E}[T_0^r \mid T_0^r < \infty, S_0 = 0] = \frac{2\min\{p,q\}}{|p-q|} \in [0, \infty].$$

En particular, en el caso simétrico $p = q = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\mathbb{E}[T_0^r \mid T_0^r < \infty, S_0 = 0] = \mathbb{E}[T_0^r \mid S_0 = 0] = \infty.$$

Remark 3.15. Este resultado coincide con el caso unidimensional donde

$$h_\infty(k) = \lim_{S\to\infty} \mathbb{E}[T_{0,S} \mid S_0 = k] = \begin{cases} \infty & p \geqslant q \\ \frac{k}{q-p} & p < q \end{cases}$$

Proof.

- Primero para $p \neq \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\mathbb{E}[T_0^r \mid S_0 = 0] = \infty \cdot |p-q| + \underbrace{\ldots}_{\geqslant 0} = \infty.$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_0^r \mid T_0^r < \infty, S_0 = 0] &= \frac{\mathbb{E}[T_0^r \cdot \mathbf{1}\{T_0^r < \infty,\} \mid S_0 = 0]}{\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0)} \\ &= \frac{2\min\{p,q\}}{|p-q|} = \frac{1-|p-q|}{|p-q|} < \infty.\end{aligned}$$

- Para $p = \frac{1}{2}$ sabemos que $\mathbb{P}(T_0^r < \infty \mid S_0 = 0) = 1$ y por tanto

$$\mathbb{E}[T_0^r \mid S_0 = 0] = \mathbb{E}[T_0^r \mathbf{1}\{T_0^r < \infty\} \mid S_0 = 0] = \mathbb{E}[T_0^r \mid T_0^r < \infty, S_0 = 0].$$

El valor se obtiene como límite el caso asimétrico:

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \mathbb{E}[T_0^r \mid T_0^r < \infty, S_0 = 0] = \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{1-|p-q|}{|p-q|} = \infty.$$

$\square$

3.3 Cadenas de Markov en tiempo y espacio discreto

3.3.1 Propiedades y ejemplos elementales

En esta sección $\mathbb{S}$ será un conjunto numerable, tícicamente un conjunto finito o $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$.

Definition 3.16. Una **cadena de Markov homogenea** es un proceso estocástico $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ con valores en $\mathbb{S}$ que satisface lo sigiente:

1. La Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{S}$
$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, \ldots Z_0 = i_0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n)$$
2. y
$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i) = \mathbb{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i).$$

Remark 3.17. En particular:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, Z_n = i_{n-1}) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n) = \mathbb{P}(Z_1 = i_{n+1} \mid Z_0 = i_n)$$

y para $n = 1$

$$\mathbb{P}(Z_2 = i_2 \mid Z_n = i_1, Z_n = i_0) = \mathbb{P}(Z_2 = i_2 \mid Z_1 = i_1) = \mathbb{P}(Z_1 = i_2 \mid Z_0 = i_1)$$

Lemma 3.18 (La distribución de un camino (finito))**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ la longitud del camino y $(i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{S}^{n+1}$ un "camino" de la cadena de Markov. Entonces*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((Z_n, \ldots, Z_0) = (i_n, \ldots, i_0))\\ &= \mathbb{P}(Z_n = i_n \mid Z_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(Z_{n-1} = i_{n-1} \mid Z_{n-2} = i_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(Z_1 = i_1 \mid Z_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(Z_0 = i_0).\end{aligned}$$

Proof.

- Usamos la fórmula de la intersección
$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Z_n, \ldots, Z_0) = (i_n, \ldots, i_0)) &= \mathbb{P}(\bigcap_{j=0}^{n}\{Z_i = i_j\})\\ &= \prod_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z_j = i_j\} \mid \bigcap_{k=1}^{j-1}\{Z_k = i_k\})\end{aligned}$$
con la convenciíon de que $\bigcap_{\iota\in\emptyset} A_\iota = \Omega$.
- Ahora podemos usar la Markovianidad para cada factor
$$\mathbb{P}(\{Z_j = i_j\} \mid \bigcap_{k=1}^{j}\{Z_k = i_k\}) = \begin{cases}\mathbb{P}(Z_j = i_j \mid Z_{j-1} = i_{j-1}), & j \geqslant 1,\\ \mathbb{P}(Z_0 = i_0), & j = 0.\end{cases}$$

□

Remark 3.19.

- Esto significa que para cadenas de Markov distribución de los caminos $(i_0, i_1, \ldots, i_1)$ está completamente determinada por el conocimiento de las probabilidades de transición $i_0 \to i_1$, $i_1 \to i_2$, $\ldots$, $i_{n-1} \to i_n$.

- Es decir, conocer los valores
$$\mathbb{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i)$$
para cada $i, j \in \mathbb{S}$ nos da toda la información sobre la distribución de la cadena de Markov.

- Fíjese que
$$\sum_{j \in \mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i) = 1$$
para cada $i \in \mathbb{S}$ por ser una distribución. Esta suma, en caso de $\mathbb{S}$ ser contable es una serie con términos no negativos y por tanto absolutamente convergente (y por tanto incondicionalmente convergente, es decir, el órden de la sumación no importa).

Remark 3.20. Sea $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov homogéna con valores en el conjunto discreto $\mathbb{S}$. Entonces los valores $\mathbb{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i)$ definien una matriz generalizada $\Pi = (\Pi(i,j))_{i,j \in \mathbb{S}}$
$$\Pi(i,j) := \mathbb{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i), \qquad i, j \in \mathbb{S}$$
cuyas lineas se suman a 1, ya que trivialmente
$$\sum_{j \in M} \mathbb{P}(Z_1 = y \mid Z_0 = i) = 1.$$
Esta matriz se llama la **matriz de transición** de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Lemma 3.21 (Chapman-Kolmogorov equation)**.**
Sea Π la matriz de transición con para una cadena de Markov $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $i, j \in \mathbb{S}$ tenemos que
$$\mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_0 = i) = \Pi^n(i,j) = \sum_{k_1, \ldots k_{n-1} \in \mathbb{S}} \Pi(i, k_1)\Pi(k_1, k_2) \ldots \Pi(k_{n-2}, k_{n-1})\Pi(k_{n-1}, j).$$
Si adicionalmente Z_0 tiene distribución $\mathbb{P}_{Z_0} = \sum_{i \in \mathbb{S}} \mu_j \delta_j$, entonces
$$\Pi(\mu, j) = (\mu \Pi^n)_j$$
es decir la j-ésima entrada del vector $\mu^T \Pi^n$, donde $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{S}}$.

Proof. • For $n = 2$ we see

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_0 = i) &= \frac{\mathbb{P}(Z_2 = j, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z_2 = j, Z_1 \in \mathbb{S}, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \frac{\sum_{k\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_2 = j, Z_1 = k, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} \frac{\mathbb{P}(Z_2 = j, Z_1 = k, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_1 = k, Z_0 = i)} \frac{\mathbb{P}(Z_1 = k, Z_0 = j)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = k, Z_0 = i)\mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_0 = j) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = k)\mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_0 = i) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_0 = i)\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} \Pi(i,k)\Pi(k,j) = \Pi^2(i,j).
\end{aligned}$$

• For $n > 3$ it follows analogously

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_0 = i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_{n-1}, \dots, Z_2 \in \mathbb{S}, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in\mathbb{S}} \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_{n-1} = k_{n-1}, \dots, Z_2 = k_1, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1 \mid Z_{n-2} = k-2)\dots \\
&\qquad \dots\mathbb{P}(Z_2 = k_2 \mid Z_1 = k_1)\mathbb{P}(Z_1 = k_1 \mid Z_0 = i) \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in\mathbb{S}} \Pi(i,k_1)\dots\Pi(k_n,j) = \Pi^n(i,j).
\end{aligned}$$

• Si $\mathbb{P}_{Z_0} = \sum_{j\in\mathbb{S}} \mu_j \delta_j$ entonces

$$\mathbb{P}(Z_n(\mu) = i) = \sum_{i\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_0 = i)\mathbb{P}(Z_0 = i) = \sum_{i\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_0 = i)\mathbb{P}(Z_0 = i)\mu_i = \mu^T\Pi^n(j).$$

□

Example 3.6 (La caminata aleatória sin restricción).

- Consideramos la caminata aleatória $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$

  $$S_n := X_1 + \cdots + X_n,$$

  la caminata aleatória con $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con $X_i \sim q\delta_{-1} + p\delta_1$.

- Entonces para $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n, j \in \mathbb{S}$

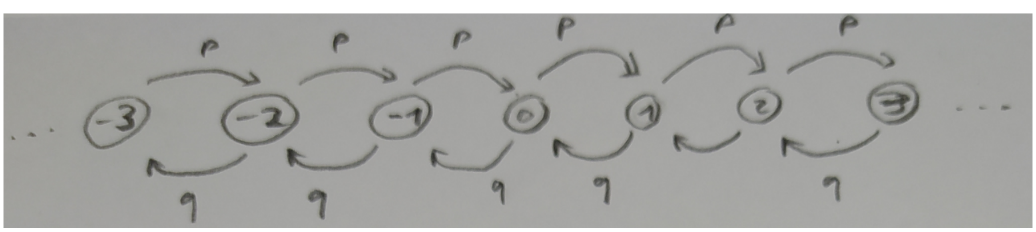
  $$\begin{aligned}
  &\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_2 = i_2, S_1 = i_1) \\
  &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = j, S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_2 = i_2, S_1 = i_1)}{\mathbb{P}(S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_2 = i_2, S_1 = i_1)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = j - i_n, S_n - S_{n-1} = i_n - i_{n-1}, \ldots, S_2 - S_1 = i_2 - i_1, S_1 = i_1)}{\mathbb{P}(S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_2 = i_2, S_1 = i_1)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n, X_n = i_n - i_{n-1}, \ldots, X_2 = i_2 - i_1, X_1 = i_1)}{\mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1}, X_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \ldots, X_2 = i_2 i_1, X_1 = i_1)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n)\mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1}, X_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \ldots, X_2 = i_2 - i_1, X_1 = i_1)}{\mathbb{P}(X_n = i_n - i_{n-1}, X_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \ldots, X_2 = i_2 i_1, X_1 = i_1)} \\
  &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n) \\
  &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n)\mathbb{P}(X_1 + \ldots X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_1 + \ldots X_n = i_n)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n, X_1 + \ldots X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_1 + \ldots X_n = i_n)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n, S_n = i_n)}{\mathbb{P}(S_n = i_n)} \\
  &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = j, S_n = i_n)}{\mathbb{P}(S_n = i_n)} \\
  &= \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i_n),
  \end{aligned}$$

  es decir, satisface la propiedad de Markov.

- Además

  $$\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j - i_n) = \mathbb{P}(X_1 = j - i_n) = \mathbb{P}(S_2 = j \mid S_1 = i_n)$$

  signfica que es homogéneo.



Example 3.7 (Juego de gambling). • Igual que la caminata aleatória sin restricciones el proceso del juego al azar es una cadena de Markov, solo que $\mathbb{S} = \{0, \ldots, S\}$ y

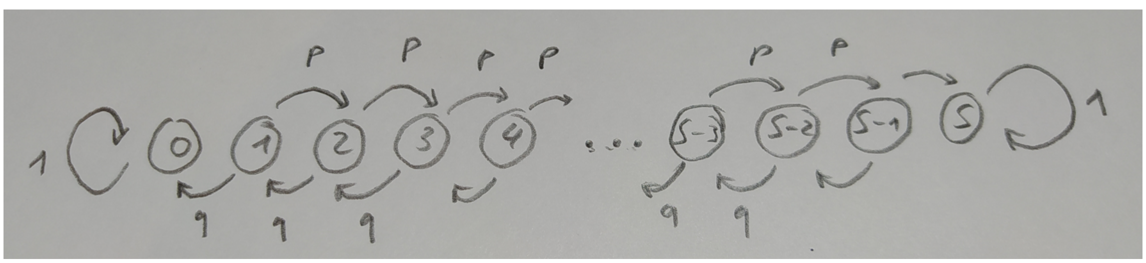
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = i \mid S_n = 0) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = i \mid S_n = S) = \begin{cases} 0 & i \neq S \\ 1 & i = S \end{cases}$$

• Por tanto

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & & & & \vdots \\ 0 & q & 0 & p & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & q & 0 & p & 0 \\ \vdots & & & & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$



Estados como 0 y S en este caso, con probabilidad 1 quedarse en ellos se llaman estados absorbentes. Una pregunta importante es el estudio del tiempo de llegar a estados (o conjuntos) absorbentes para cadenas de Markov en general.

Ejemplo 3.22 (Clasificación de créditos). A veces las probabilidades transición se pueden aproximar en terminos de frecuencias relativas (porcentajes).

Principio del año $i+1 \rightarrow$ Principio del año $i \downarrow$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	$N.R.$	total
AAA	90.34	5.62	0.39	0.08	0.03	0	0	0	3.50	100
AA	0.64	88.78	6.72	0.47	0.06	0.09	0.02	0.01	3.21	100
A	0.07	2.16	87.94	4.97	0.47	0.19	0.01	0.04	4.16	100
BBB	0.03	0.24	4.56	84.26	4.19	0.76	0.15	0.22	5.59	100
BB	0.03	0.06	0.04	6.09	76.09	6.82	0.96	0.98	8.58	100
B	0	0.09	0.29	0.41	5.11	74.62	3.43	5.3	10.76	100
CCC	0.13	0	0.26	0.77	1.66	8.93	53.19	21.94	13.14	100
$N.R.$	0	0	0	0	0	0.1	8.55	74.06	17.07	100

3.3.2 La equivalencia con sistemas dinámicos aleatórios y ejemplos más avanzados

En las caminatas aleatorias usamos que Ahora vamos a conocer otra clase de procesos que van a resultar lo mísmo que cadenas de Markov y que nos van a permitir una fácil

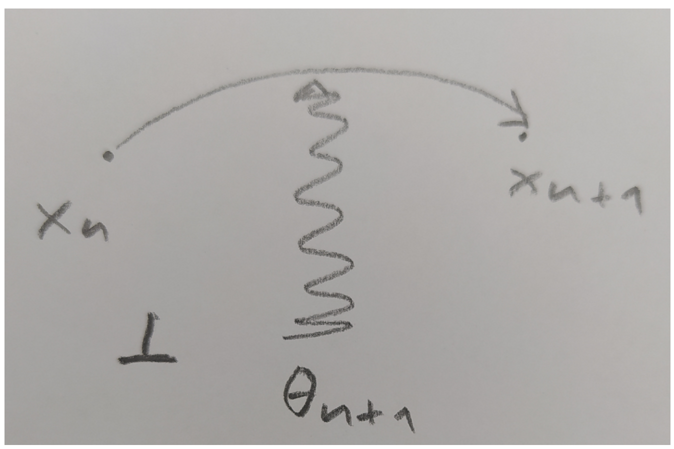
Definition 3.23.
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\Theta, \tilde{\mathcal{A}})$, $(\mathbb{S}, \mathcal{B})$ dos espacios medibles.
- $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia independiente de variables aleatórias $\theta_n : \Omega \to \Theta$ identicamente distribuidas en $\mathbb{S}$ con distribucíon μ.
- $f : \Theta \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ medible en el sentido de $(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$
- $Y : \Omega \to \mathbb{S}$ un elemento aleatorio en $\mathbb{S}$.

Entonces la sucesión aleatoria

$$X_0 = Y, \qquad X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n)$$

define una sucesión de variables aleatórias en el sentido de que para toda $\omega \in \Omega$

$$X_0(\omega) = Y(\omega), \qquad X_{n+1}(\omega) = f(\theta_{n+1}(\omega), X_n(\omega)).$$



Ejemplo 3.24 (Sistema determinista).
- Si $f(\theta, x) = f(x)$ obtenemos un sistema dinámico determinista.

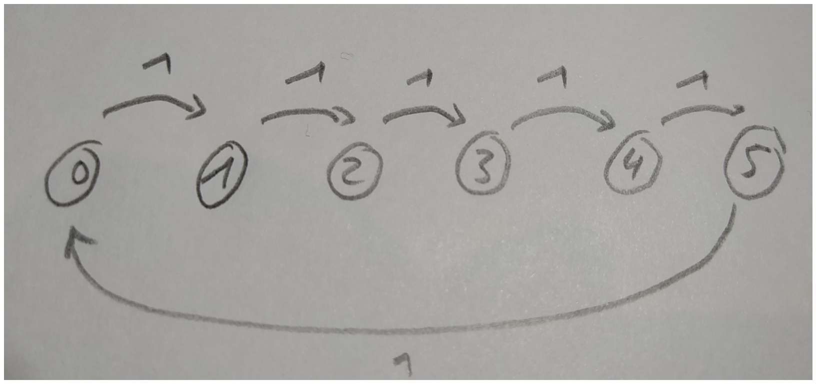
$$X_{n+1} = f(X_n), \qquad X_0 = i_0$$

  tal vez con dato inicial aleatório.
- Para $\mathbb{S}$ finito es obvio que la sucesión es periódica con período $\leqslant |\mathbb{S}|$.
- En caso $\mathbb{S}$ discreto también define una cadena de Markov von matriz de transición

$$\Pi(i, j) = \mathbf{1}\{f(i) = j\}, \qquad i, j \in \mathbb{S}.$$

  Es decir, la matriz (generalizada) es una matriz de permutación.

- Ejemplo $X_{n+1} := X_n + 1 \mod 6$



con

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.25 (Sucesión i.i.d)**.**

- Si $f(\theta, x) = f(\theta)$ obtenemos

$$X_{n+1}(\omega) = f(\theta_{n+1}(\omega)),$$

es decir, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia i.i.d.

- Esto es un caso muy específico, en general $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es una familia independiente.
- Además $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también define una cadena de Markov con matriz de transición

$$\Pi(i, j) = \mathbb{P}_{f(\theta_1)}(\{j\}),$$

es decir, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también define una matriz de transición con filas identicas con la distribución de la i.i.d.

- También ya verificamos que define una cadena de Markov con matriz de transición

$$\Pi(i, j) = q\mathbf{1}\{j = i + 1\} + p\mathbf{1}\{j = i - 1\}$$

Ejemplo 3.26 (Caminata aleatória)**.**

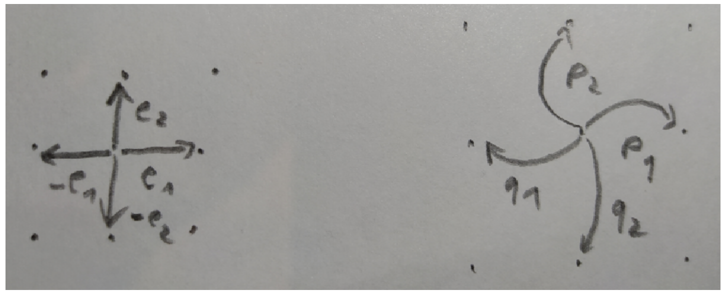
- En $\mathbb{S} = \mathbb{Z}^d$ tenemos definimos una sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con $\theta_n \sim p_1 \cdot \delta_{e_1} + q_1 \cdot \delta_{-e_1} + \ldots p_d\delta_{e_d} + q_d\delta_{-e_d}$ con $\sum_{i=1}^d (p_i + q_i) = 1$.
- Entonces para $f(\theta, x) = x + \theta$ con $X_0 = 0$ obtenemos la sucesión

$$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1},$$

que se llama **marcha aleatória simple sobre la retícula** $\mathbb{Z}^d$.

- Obviamente

  - Sea $\theta_n \sim \mathrm{UNI}(\{e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d\})$ la **caminata aleatória simple simétrica** en $\mathbb{Z}^d$



  - **Pregunta famosa de Polya:** ¿En cuáles dimensiónes vuelve la caminata aleatória simétrica con probabilidad 1 a punto de aranque, digamos $X_0 = 0$?
    Ya sabemos: en dimensión $d = 1$ ✓.

En seguida vemos que SDA y CDM son equivalentes y tenemos muchas una herramienta poderosa para modelar.

Proposition 3.27 (Equivalencia de SDA y CDM en espacios discretos $\mathbb{S}$)**.**

1. *Sea* $(f, \mu, \Theta, \mathbb{S})$ *un sistema dinámico aleatório sobre* $\mathbb{S}$*. Entonces la matríz*

$$\Pi(x, y) := m(\{\theta \in \Theta \mid f(\theta, x) = y\})$$

es una matríz de transición y se llama la ***matriz de transición inducida por*** $(f, \mu, \Theta, \mathbb{S})$*. Para cada dato inicial* $X_0 \perp (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la trayectoria del sistema dinámico aleatório* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *es una cadena de Markov con matriz de transición* Π*.*

2. *Sea* Π *una matriz de transición sobre* $\mathbb{S}$*. Entonces existe* $f : [0, 1] \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ *tal que* Π *sea la matriz inducida por* $(f, UNI([0, 1]), \Theta, \mathbb{S})$*. Además, para cada dato inicial* $X_0 \perp (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *cada cadena de Markov* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con matriz de transición* Π *es un sistema dinámico aleatório con matriz inducida* Π*.*

Proof. 1. Primero

$$\begin{aligned}\sum_{y \in \mathbb{S}} \Pi(x, y) &= \sum_{y \in \mathbb{S}} \mu(\{\theta \in \Theta \mid f(\theta, x) = y\}) \\ &= \mu(\bigcup_{y \in \mathbb{S}} \{\theta \in \Theta \mid f(\theta, x) = y\}) \\ &= \mu(\{\theta \in \Theta \mid f(\theta, x) \in \mathbb{S}\}) = 1.\end{aligned}$$

Segundo la independencia de la familia $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $X_0 \perp (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implica para cada $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \dots, i_n, i_{n+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(\theta_{n+1}, x_n) = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(\theta_{n+1}, x_n) = i_{n+1})\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(f(\theta_{n+1}, i_n) = i_{n+1}) = \Pi(i_n, i_{n+1}).$$

2. Como $\mathbb{S}$ es contable podemos asumir sin pérdidad de generalidad $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, \}$. Para $i, j \in \mathbb{S}$ asumimos

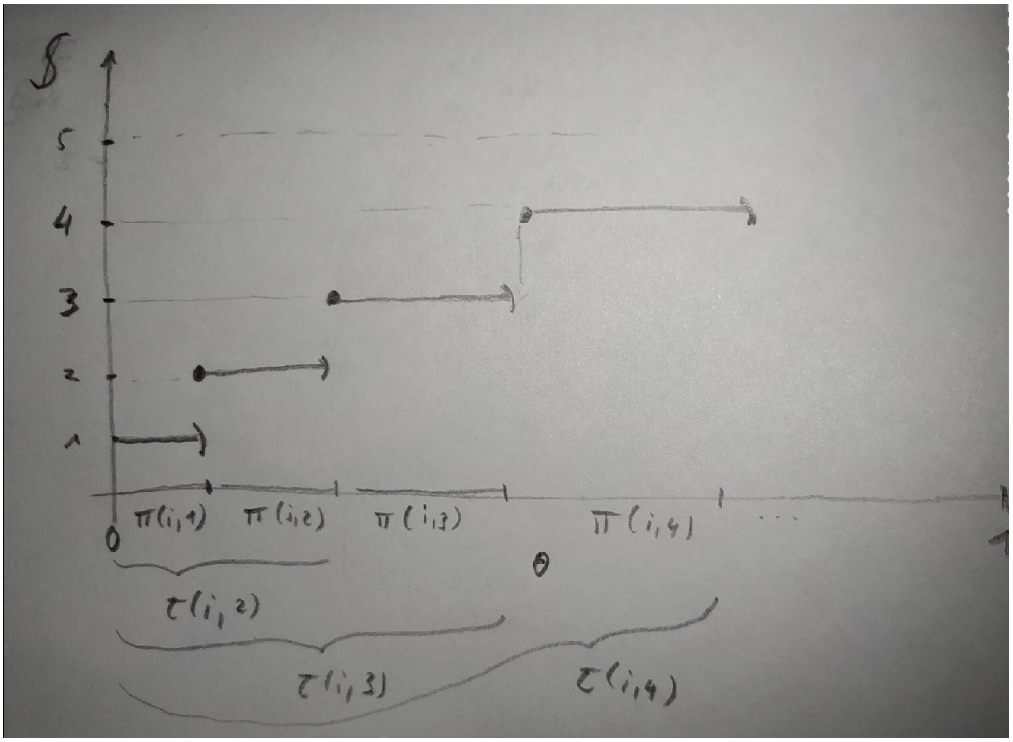
$$\tau(i, j) = \Pi(i, 1) + \cdots + \Pi(i, j), \qquad \tau(i, 0) = 0.$$

Sea $\Theta = [0, 1]$ y UNI$[0, 1]$ la distribución uniforme sobre Θ. Entonces $f : \Theta \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ definido como

$$f(\theta, i) := \sum_{j \in \mathbb{N}} j \cdot \mathbf{1}\{\tau(i, j-1) \leqslant \theta < \tau(i, j)\}.$$

Entonces por construcción para cada $j \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{UNI}(\{\theta \in [0, 1] \mid f(\theta, i) = j\}) &= \mathbb{P}(\{f(\theta_1, i) = j\}) \\ &= \tau(i, j) - \tau(i, j-1) = \Pi(i, j).\end{aligned}$$



$\square$

Ejemplo 3.28. Caminata sobre un grafo ponderado.

- Como ejemplo de una candena de Markov, se considera una caminata aleatoria sobre un grafo conectado (Figura abajo).
- Considere un grafo con m nodos etiquetados $\{1, 2, ..., m\}$, con pesos $W_{ij} \geq 0$ en la arista que une el nodo i con el nodo j.
- Se asume que el grafo es **no dirigido**, por lo que $W_{ij} = W_{ji}$. Si no hay arista que una los nodos i y j, entonces $W_{ij} = 0$.
- Una partícula se mueve aleatoriamente de nodo a nodo en este grafo. La caminata aleatoria $(X_n)_{\in\mathbb{N}}$, donde $X_n \in \{1, 2, ..., m\}$, es una sucesión de vértices del grafo.
- Si $X_n = i$, entonces el próximo vértice j se elige entre los nodos conectados al nodo i, con una probabilidad proporcional al peso de la arista que une i con j. Así,

$$\Pi_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{k=1}^{m} W_{ik}}.$$

- Sea

$$W_i = \sum_{j=1}^{m} W_{ij}$$

el peso total de las aristas que parten del nodo i. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = 2W$$

Fíjese que la suma total es el doble todos los pesos porque cada peso por ser no dirigido el grafo se cuenta doble.

- Entonces

$$W = \sum_{i,j:j>i} W_{ij}$$

la suma de los pesos de todas las aristas (contado una vez).

- Por otra parte se puede verificar facilmente que distribución estacionaria es

$$\mu_j = \frac{W_j}{2W}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

ya que

$$\begin{aligned}
(\mu\Pi)_j &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \Pi_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{W_i}{2W} \frac{W_{ij}}{W_i} \\
&= \frac{1}{2W} \sum_{i=1}^{m} W_{ij} \\
&= \frac{1}{2W} \sum_{i=1}^{m} W_{ji} \\
&= \frac{W_j}{2W} = \mu_j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad estacionaria del estado i es proporcional al peso de las aristas que parten del nodo i.

- Esta distribución estacionaria tiene una propiedad interesante de localidad, depende únicamente del peso total y del peso de las aristas conectadas al nodo, por lo que no cambia si los pesos en alguna otra parte del grafo se modifican mientras se mantiene constante el peso total.

- Ahora se puede calcular la tasa de entropía como

$$\begin{aligned}
H[X] &= H[X_1|X_0] \\
&= -\sum_i \mu_i \sum_j \Pi_{ij} \log_2 \Pi_{ij} \\
&= -\sum_i \frac{W_i}{2W} \sum_j \frac{W_{ij}}{W_i} \log_2 \frac{W_{ij}}{W_i} \\
&= -\sum_i \frac{W_i}{2W} \sum_j \frac{W_{ij}}{W_i} \log_2 (\frac{W_{ij}}{2W} \frac{2W}{W_i}) \\
&= -\sum_i \sum_j \frac{W_{ij}}{2W} \log_2 \frac{W_{ij}}{2W} + \sum_i \sum_j \frac{W_{ij}}{2W} \log_2 \frac{W_i}{2W} \\
&= -\sum_i \sum_j \frac{W_{ij}}{2W} \log_2 \frac{W_{ij}}{2W} + \sum_i \frac{W_i}{2W} \log_2 \frac{W_i}{2W} \\
&= H\left((\frac{W_{ij}}{2W})_{ij} \right) - H\left((\frac{W_i}{2W})_i \right)
\end{aligned}$$

- **Caso especial:** Si todas las aristas tienen el mismo peso, la distribución estacionaria asigna un peso de $\frac{E_i}{2E}$ al nodo i, donde E_i es el número de aristas que parten del nodo i y E es el número total de aristas en el grafo. En este caso, la tasa de entropía de la caminata aleatoria es

$$H[X] = \log(2E) - H\left(\frac{E_1}{2E}, \frac{E_2}{2E}, ..., \frac{E_m}{2E} \right).$$

Ejemplo 3.29 (Barajar cartas)**.**

- Consideramos un juego de cartas con 52 cartas que enumeramos de $\mathbb{S} = S_52 = \{1, \dots, 52\} = \{\phi : \{1, \dots, 52\} \to \{1, \dots, 52\} \text{ biyectivo}\}$.

- Barajar las cartas significar cambiar el orden de las cartas, es decir consideramos $\Theta = S_{52}$.

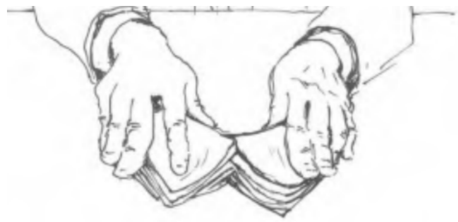
- El orden inicial está dado como la permutación inactiva determinista, es decir $X_0 = e := id_{\{1,\dots,52\}}$.

- En el paso $n+1$ el jugador escoge una permutación aleatória θ_{n+1} sobre $\mathbb{S}$ aleatoriamente con distribución μ y la aplica al estado X_n.

- Para $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d., $\theta_1 \sim \mu$ con valores en $\mathbb{S}$ obtenemos definimos el sistema dinámico aleatório

$$X_{n+1} = \theta_{n+1}(X_n) \qquad X_0 = e.$$

  Muchas veces no es posible que $\theta_n = \mathrm{UNI}(\Theta)$ o $\mathrm{supp}(\theta_n) = \Theta$ sino que por ejemplo $\mathrm{supp}(\theta_n) = \Theta_0 \subsetneq \Theta$. Es decir, menos movimientos de barajar son realizables en realidad (son los diferentes maneras de barrajar cartas).



- Podemos calcular la matriz de transición asociada

$$\Pi(x,y) = \mu(\theta \in \Theta \mid \theta \circ x = y) = \begin{cases} \mu(\{y \circ x^{-1}\}) & \text{si } y \circ x^{-1} \in \Theta_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Ejemplo 3.30 (Procesos de ramificación)**.**

- Consideramos la evolución aleatória simplificada de descendencia.

- Asumimos que tenemos $X_0 = 1$, es decir en la generación 0 hay 1 persona, la "mater patriae".

- Esta persona tiene un a un número aleatório θ_1^1 de personas como descendientes, con una distribución ν sobre $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2 \ldots, \}$. Entonces el número de descendientes del

$$X_1 = \theta_1^1.$$

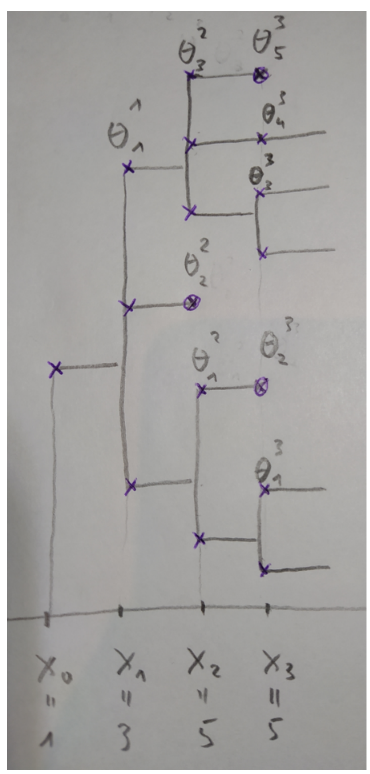
- En la segunda generación, cada descendiente i de la "mater patriae" tenga un número aleatório de descendientes θ_i^2, con la mísma distribución μ y además que este número sea independiente del número de descendientes de cada uno de sus "hermanas" y de sus antepasados.

$$X_2 = \sum_{i=1}^{X_1} \theta_i^2$$

- Cada uno de los nietos i del "mater patriae" tenga un número aleatório de descendientes $\theta_i^3 \sim \mu$ independiente de sus "hermanas" y antepasados.

- De esta manera obtenemos el sistema dinámico aleatório

$$X_{n+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{X_n(\omega)} \theta_i^n(\omega)$$

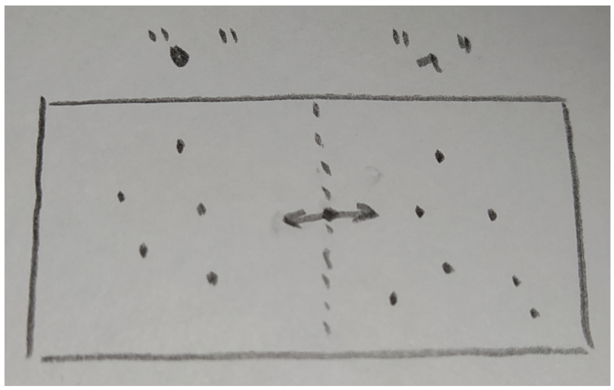


- ¿Cuáles son los espacios $\mathbb{S}$ y Θ?
- Primero $\mathbb{S} = \mathbb{N}_0$ representa el número de descendientes.
- $((\theta_i^n)_{i\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión (!) de familias de variables aleatorias i.i.d. donde cada $\theta_i^n \sim \nu$ con valores en $\mathbb{N}_0$. Por tanto $\Theta = \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{N}_0\}$. Es decir $\mu = \nu^{\otimes\mathbb{N}}$.

  $\boxed{\text{¿Por qué una infinidad de variables aleatórias?}}$
  $\to$ porque el número de v.a. que voy a sumar en la próxima generación es aleatório y a priori puede tomar cualquier valor.
- Sea $X_0 = 1$ y
$$X_{n+1} = f((\theta_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}, X_n) := \sum_{i=0}^{X_n} \theta_i^{n+1}$$
  es decir $f : \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.
- Este proceso representa el número de descendientes de cada generación, si cada miembro tiene la mísma distribución del numero descendientes independiente todos los demás. Eso es un modelo para la desintegración radiactiva (que es aleatoria) en diferentes isótopos o la reproducción idelizada de populaciónes femininas (o unisexuales como hongos).
- Calculemos la matriz de transición asociada: Si $\mu = r_0\delta_0 + r_1\delta_1 + r_2\delta_2 + \dots$ con $i, j \in \mathbb{N}_0$
$$\begin{aligned}\Pi(i,j) &= \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)\\ &= \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{X_0} \Theta_k^1 = j \mid X_0 = i)\\ &= \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{i} \Theta_k^1 = j)\\ &= \nu^{*i}(\{j\})\\ &= \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_i)\in\mathbb{N}_0^i\\ k_1+\dots+k_i=j}} r_{k_1} r_{k_2}\dots r_{k_i}.\end{aligned}$$
- Ejemplo: $\nu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$
$$\begin{aligned}\Pi(i,j) &= \nu^{*i}(\{j\})\\ &= \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_i)\in\{0,1\}^i\\ k_1+\dots+k_i=j}} p^j(1-p)^{i-j}\\ &= \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.31 (Los modelos de Ehrenfest de la difusión de gases)**.**

- Asumimos un contenedor dividido en dos compartamentos 0 y 1 con una pared porosa entre los dos.
- Metemos N moléculas repartidas en k y $N-k$ entre el compartamento 0 y el compartamento 1 sin importar en qué compartamento.
- En cada unidad del tiempo una única particula escogida cambia el compartamento al azar.



Este modelo representa un modelo simplificado de la difusión de gases.

Existen dos versiones de este modelo:

1) La version microscópica: El estado del sistema está representado por un vector $x = (x_i)_{i=1,\ldots,N} \in M := \{0,1\}^N$ indicando la posición de la particula i

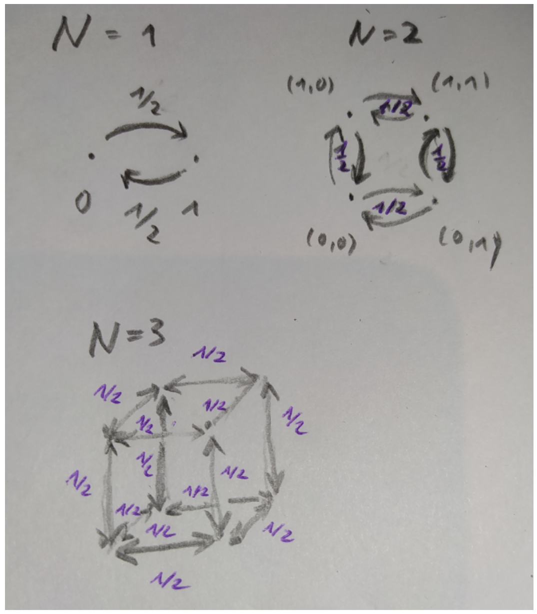
$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{particula } i \text{ está en compartamento } 0 \\ 1 & \text{particula } i \text{ está en compartamento } 1. \end{cases}$$

El estado entonces es el hypercubo $\{0,1\}^N$.
La matriz da transición Π entonces tiene la forma

$$\Pi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| = 1 \\ 0 & \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \neq 1. \end{cases}$$

Para $n = 2$ ordenamos lexicograficamente $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



2) La version macroscópica: Consideramos ahora la cantidad macroscopica

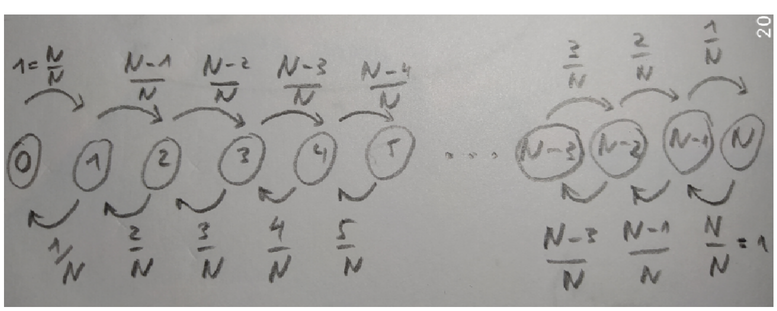
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \#\{i \in \{1, \ldots, N\} \mid x_i = 1\}$$

que representa el numero de particulas en el contenedor 1. El espacio M en este caso es $\{0, \ldots, N\}$. Por construcción tenemos la matriz de transición

$$\Pi(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{N} & y = x-1 \\ 1 - \frac{x}{N} & y = x+1 \\ 0 & y = x+1 \end{cases}$$

Para $n = 3$ esto significa $M = \{0, 1, 2, 3\}$ y

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Cuál es el sitema dinámico aleatoria asociado?

(a) La versión macroscópica: $\Theta = \{1, \ldots, N\}$ y $\theta_n \sim U_{\{1,\ldots,N\}}$ con

$$f(k, (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_N)) = (x_1, \ldots, 1 - x_k, \cdots, x_N).$$

(b) La versión micorscópica: Sea $\theta_n \sim U_{[0,1]}$ y

$$S_{n+1} = S_n + (1 - 2\mathbf{1}\{(0, S_n/N]\}(\theta_{n+1})).$$

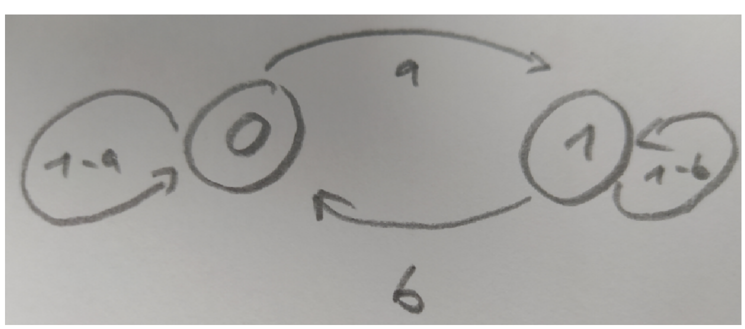
Este ejemplo muestra que hay veces el leguaje de las cadenas de Markov aparece más natural.

Ejemplo 3.32 (Transmisión de un mensaje = CDM en 2 estados)**.**

- Un mensaje codificado en binarios se trasmite por un canal.
- Cada “bit” se trasmite con las probabilidades de error siguientes
  - La probabilidad $a \in (0, 1)$ de emitir 1, si recibe 0.
  - La probabilidad $b \in (0, 1)$ de emitir 0, si recibe 1.
- Sea X_n el resultado del n-esimo relé. Asumimos que
  - Todos los relés trabajan independientemente uno del otro.
  - La distribución de errores es igual para todos los relés.
- Uno quiere calcular la talla maxima para que la probabilidad del error sea menor que un valor $\varepsilon \in (0, 1)$ dado.

Sea ℓ la longitud del mensaje. Para $\ell = 1$ tenemos para la matriz de transición de la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $M = \{0, 1\}$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$



- Sea $g_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Entonces por la igualdad de Chapman-Kolmogorov tenemos que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1),$$

es decir,

$$g_{n+1} = (1-a)\cdot g_n + b\cdot(1-g_n).$$

Notamos que $g = \frac{b}{a+b}$ es el punto fijo de esta ecuación:

$$\frac{(1-a)\cdot b}{a+b} + \frac{a\cdot b}{a+b} = \frac{b}{a+b} = g.$$

- Entonces por la linealdad de la recursión obtenemos que

$$\begin{aligned} g_n - g &= (1-a)\cdot(g_{n-1}-g) + b\cdot(1-g_{n-1}) - b\cdot(1-g_{n-1}) \\ &= (1-a)\cdot(g_{n-1}-g) + b\cdot(g_{n-1}-g) \\ &= (1-a-b)^1(g_{n-1}-g) = (1-a-b)^n(g_0-g). \end{aligned}$$

Ahora,

$$g_0 - g = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b},$$

y la probabilidad de no equivocarse en el n-esimo paso, si $X_0 = 0$, es decir $g_0 = 1$ y por tanto está dado como

$$g_n(0) = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n.$$

- Análogamente la probabilidad de no equivocarse si $X_0 = 1$ está dado como

$$g_n(1) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n.$$

- Es decir, en general, usando la estocasticidad de la matriz Π y Π^n obtenemos que

$$\Pi^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a(1-(1-a-b)^n) \\ b(1-(1-a-b)^n) & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}.$$

- Notemos que para $a, b \in (0,1)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} =: \Pi_\infty.$$

- En otras palabras, en el límite obtenemos una cadena de Markov que representa una cadena de Markov que no depende del estado inicial (son i.i.d.). Además:

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \begin{pmatrix} g & 1-g \\ g & 1-g \end{pmatrix}.$$

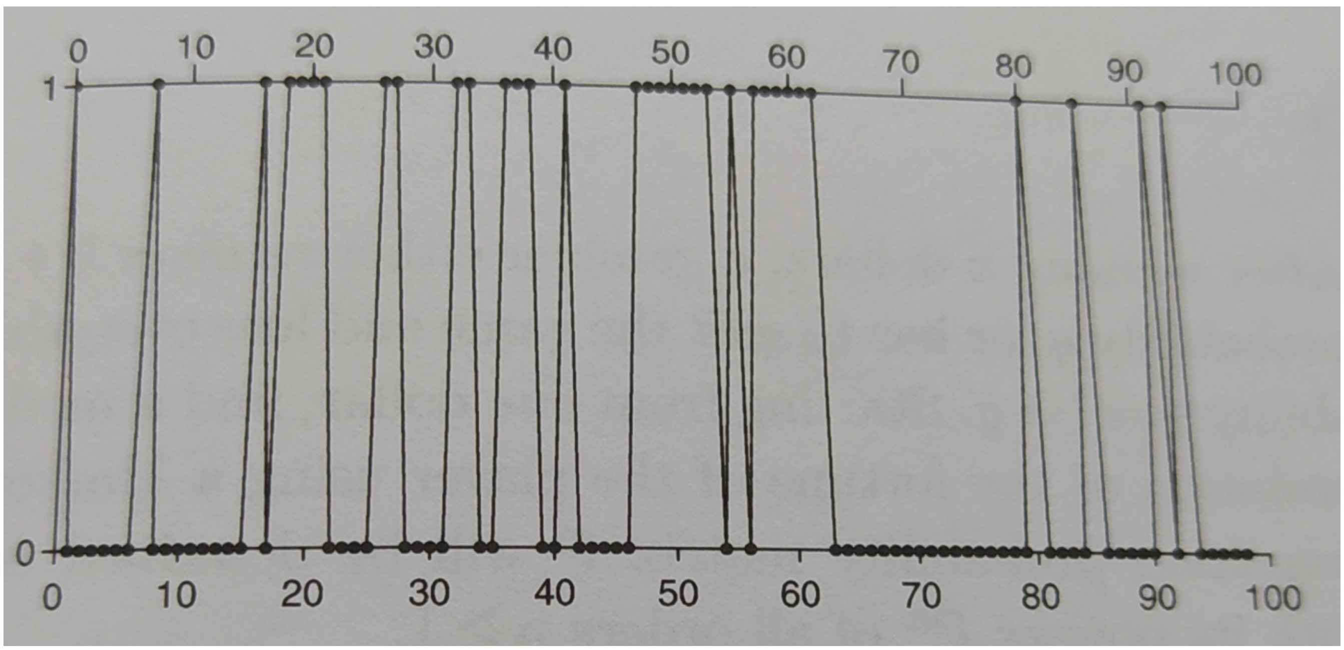
Es decir, el punto fijo $\mu = (g, 1-g)$ representa un "equilibrio dinámico" en el sentido siguiente:

$$X_0 \sim \mu \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \sim \mu \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

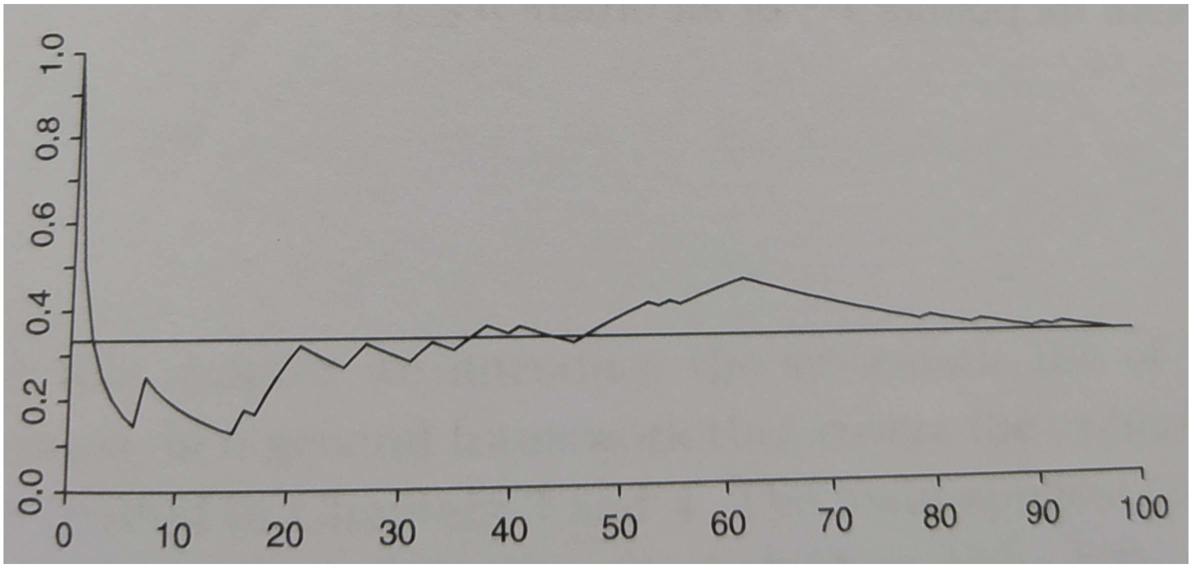
Además sea ν cualquier distribución en $\{0, 1\}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n} = \lim_{n\to\infty} \nu\Pi^n = (\nu_1, 1-\nu_1)\Pi_\infty = (\nu_1 g+(1-\nu_1)g, \nu_1(1-g)+(1-\nu_1)(1-g)) = (g, 1-g).$$

Es decir es un punto atractivo para cualquier distribución inicial.



Simulación de 100 puntos.



Proporción de la simulación (medida empírica) convergiendo al promedio $\frac{a}{a+b} = 1/3$.

[1]

- Ahora, para $a, b = 1$ la matriz

$$\Pi^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a(1-(1-a-b)^n) \\ b(1-(1-a-b)^n) & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n & (1-(-1)^n) \\ (1-(-1)^n) & 1 + (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n \text{ impar} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n \text{ par} \end{cases}$$

que es periódica y por tanto no converge (!).

- Ahora sea $\ell \geqslant 1$, $a, b > 0, a, b \neq 1$ y $\varepsilon > 0$.
Entonces $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^\ell)$ con los procesos X_n^ℓ i.i.d.

  – La probabilidad que el mensaje es correcta después de n pasos tiene una cota inferior

$$r_n = \prod_{i=1}^{\ell} r_n(X_0^i) \geqslant \Big(c + (1-c)(1-a-b)^n\Big)^\ell \overset{!}{>} 1 - \varepsilon,$$

  con $c = \min\{\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\}$. Resolviendo por ℓ obtenemos que para logitud n la talla ℓ de la red entonces debería ser más grande que

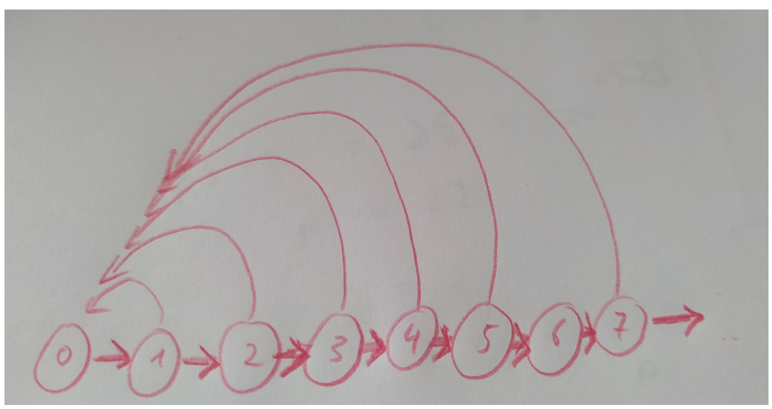
$$\ell \geqslant \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(c + (1-c)(1-a-b)^n)}.$$

[1] N. Privault, Understanding Markov chains, Springer, 2013, p. 93

Ejemplo 3.33 (Edad de la máquina actual)**.**

- Una máquina arranca a tiempo $x = 0$ y tiene una distribución del tiempo del primer defecto $(p(x))_{x\in\mathbb{N}}$.
- En el momento cuando averíe, está remplazada por otra máquina identica, cuya duración de vida está identicamente distribuida y independiente de la primera.
- Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las duraciones de vida $X_n \sim p$ de todas las maquinas y $A = (A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la edad de la máquina actualmente en uso en el momento $t \in \mathbb{N}$. Por convención en el momento de remplazo, la edad $A_t = 0$ de la máquina nueva.
- No es fácil escribir $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ como sistema dinamico aleatório.
- Sin embargo, podemos mostrar que es una cadena de Markov.
- Sea $a = (a_1, a_2, \ldots,)$ una sucesión de numeros enteros. Vamos a llamar una tal sucesión una **sucesión de edades**, si

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_{n+1} \in \{0, a_n + 1\} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ &a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



p.e. una posible sucesión es

$$(1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...)$$

- Está claro que entónces $A = (A_1, A_2, \ldots,)$ es una sucésión aleatória.
- Para una sucesión de edades $a = (a_1, a_2, \ldots,)$ denotamos el *número de máquinas hasta el tiempo t*

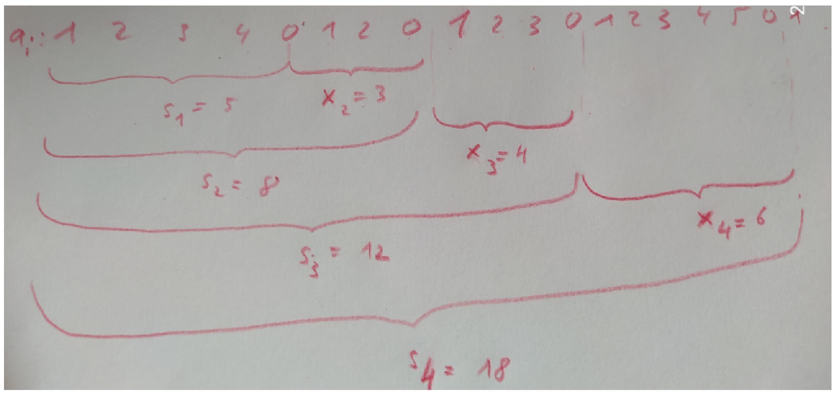
$$n(a, t) := 1 + \sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}\{a_i = 0\}.$$

- Definimos la *sucesión de tiempos las llegadas de los cero.*

$$s_0(a) := 1$$
$$s_1(a) := \inf\{i > s_0(a) \mid a_i = 0\}$$
$$s_{i+1}(a) := \inf\{i > s_i(a) \mid a_i = 0\}$$

- Y por fin la *sucesión de tiempos de espera entre los ceros*

$$x_i(a) := s_i(a) - s_{i-1}(a).$$



Para verificar que $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ define una cadena de Markov vemos primero

- Sea $a = (a_1, \dots, a_t)$ una sucesión de edades. Entonces vemos

$$\begin{aligned}&\{A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3, \dots, A_{t-2} = a_{t-2}, A_{t-1} = a_{t-1}, A_t = a_t\}\\ &= \{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a), A_t = a_t\}\\ &= \{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a), X_{n(a,t)} > a_t\}.\end{aligned}$$

- Ahora nos damos cuenta que $A_{t+1} \in \{A_t, 0\}$. Pero A_t es desconocido, sin embargo es más fácil calcular la probabilidad para $A_{t+1} = 0$. Usando que los (X_n) son i.i.d. obtenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_{t+1} = 0 \mid A_t = a_t, \dots, A_1 = a_1)\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}, X_{n(a,t)} = a_t + 1\})}{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}, X_{n(a,t)} > a_t\})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}\})\mathbb{P}(\{X_{n(a,t)} = a_t + 1\})}{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1(a), X_2 = x_2(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}\})\mathbb{P}(\{X_{n(a,t)} > a_t\})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = a_t + 1)}{\mathbb{P}(X_1 > a_t)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = a_t + 1, X_1 > a_t)}{\mathbb{P}(X_1 > a_t)}\\ &= \mathbb{P}(A_{t+1} = 0 \mid A_t = a_t)\end{aligned}$$

  En el penúltimo paso usamos la independencia de la sucesión $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Por eso $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov sobre $\mathbb{N}_0$.

- La matriz de transición es muy escasa

$$
\begin{aligned}
&\Pi(0,1) = 1 \\
&\Pi(a,b) = 0 \qquad \text{para toda } b \notin \{0, a+1\} \\
&\Pi(a,0) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = a+1)}{\mathbb{P}(X_1 > a)} = \mathbb{P}(X_1 = a+1 \mid X_1 > a) \\
&\Pi(a,a+1) = 1 - \Pi(0,1) = \mathbb{P}(X_1 > a+1 \mid X_1 > a) \qquad a \geqslant 1
\end{aligned}
$$

3.4 El análisis de un paso

3.4.1 Probabilidades de llegada a un estado

Definition 3.8. *1. Para una matriz de transición Π sobre espacio de estado discreto $\mathbb{S}$ se dice que un estado s es **absorbente** si*

$$\Pi(s,s) = 1$$

(y por tanto $\Pi(s,t) = 0$ para cualquier $t \neq s$).

2. Un conjunto $A \subset \mathbb{S}$ que satisface que

$$\Pi(s,t) = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

se llama absorbente.

Remark 3.34. Cada conjunto absorbente es la unión de estados absorbentes. Por tanto diferentes conjuntos absorbentes pueden tener una estructura complicada entre sí.

- $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ cadena de Markov con valores en $\mathbb{S}$ y $A \subset \mathbb{S}$.
- Sea

  $$T_A := \inf\{n \in \mathbb{N}_n \mid Z_n \in A\}$$

  con las convenciones $T_A = 0$ si $Z_0 \in A$ y $T_A = \infty$ si $Z_n \notin A$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
- Igual que en el caso de la caminata aleatória se busca calcular

  $$\boxed{g_\ell(k) := \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 \in k)}$$

  la probabilidad de llegar a A en el estado $\ell \in A$ si se arranca desde $k \in \mathbb{S}$.
- Parecido al cálculo para caminatas aleatórias se puede calcular lo siguiente. Para $k \in \mathbb{S} \setminus A$ tenemos que $T_A \geqslant 1$. Por tanto, tenemos para $k \in \mathbb{S} \setminus A$:

  $$\begin{aligned} g_l(k) &= \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = k) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_1 = m)\mathbb{P}(Z_1 = m \mid Z_0 = k) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_1 = m)\Pi(k,m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = m)\Pi(k,m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{S}} \Pi(k,m) \cdot g_\ell(m). \end{aligned}$$

Notemos que usamos para $m \in \mathbb{S} \setminus A$

$$\mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_1 = m) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = m).$$

Esto se debo al hecho de que el evento

$$\{Z_{T_A} = \ell\}$$

dice que Z finalmente **termina en el estado** ℓ. Este evento no tiene en cuenta <u>cuando termina allá</u>. Entonces la probabilidad de terminar en $\ell \in A$ al entrar al conjunto A no depende del <u>tiempo inicial</u>.

- Notemos que

$$\begin{aligned} g_l(k) &= \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = k) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{S}} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_1 = m)\mathbb{P}(Z_1 = m \mid Z_0 = k) \\ &= \sum_{m \in (\mathbb{S} \setminus A) \bigcup \{\ell\}} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_1 = m)\mathbb{P}(Z_1 = m \mid Z_0 = k) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{S} \setminus A} \Pi(k, m) \cdot g_\ell(m) + g_\ell(\ell). \end{aligned}$$

- En otras palabras el vector (generalizado) $g_\ell : \mathbb{S} \to [0, 1]$ satisface la relación

$$g_l(k) = \sum_{m \in \mathbb{S}} \Pi(k, m) \cdot g_\ell(m)$$

donde los $k \in A$ satisfacen <u>de antemano</u> las “condiciones del borde”

$$g_\ell(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = k) = \begin{cases} 1 & \text{para } \ell = k \\ 0 & \text{para } \ell \neq k \end{cases}$$

porque $T_A = 0$ para $k \in A$ y entonces, para $k \in A$, terminar en tiempo $T_A = 0$ en la posición $\ell \in A$ o bien es imposible si $\ell \neq k$ o es cierto.

- En términos matriciales esta relación es muy interesante:
¡Se puede escribir como un problema de autovectores con autovalor 1!

$$g_\ell = \Pi g_\ell, \qquad \text{para cada } \ell \in A,$$

donde g es un vector vertical y satisface para las entradas de $k \in A$ la condicion del borde

$$g_\ell(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } \ell = k \\ 0 & \text{para } \ell \neq k \end{cases}$$

para cada $k, \ell \in A$.

- Adicionalmente las probabilidades de terminar en los diferentes estados de A o nunca entrar a A siempre (i.e. para cualquier $k \in \mathbb{S}$) deben sumarse a 1

$$1 = \mathbb{P}(T_A = \infty \mid Z_0 = k) + \sum_{\ell \in A} \mathbb{P}(Z_{T_A} = \ell \mid Z_0 = k).$$

Example 3.9. Para $\mathbb{S} = \{0, 1, 2\}$ y para $p \in (0, 1)$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que $A = \{0\}$ es absorbente y

$$\mathbb{P}(T_A = \infty \mid Z_0 = 1) = 1 - p > 0.$$

- La fórma específica del sistema con conjunto absorbente. Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ finito. Si $A \subset \mathbb{S}$ con $|A| = N - r$ es absorbente, siempre se puede reetiquetar $\mathbb{S}$ de tal manera que

$$A = \{r + 1, \ldots, N\}.$$

Además para cualquier $k \in A$ ya sabemos que no puede salir ni pasar a otro estado $\ell \in A$, $\ell \neq k$. Por tanto, si Π tiene un conjunto absorbente A entonces Π tiene la forma triangular por bloques

$$\Pi = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & Id_A \end{array}\right).$$

donde Q es alguna matriz (subestocástica) de tamaño $(r + 1) \times (r + 1)$ y R es una matriz de tamaño $(r + 1) \times (N - r)$.

- Hasta ahora, no estaba excluida que en $\mathbb{S} \setminus A$ hubiera otro estados absorbentes. Ahora, si A contiene todos los estados absorbentes de la cadena de Markov tenemos que

$$g_\ell(k) = \mathbf{1}\{\ell = k\}, \qquad \ell \in \mathbb{S}, k \in A$$

y la ecuación se puede reescribir como

$$\begin{aligned} g_l(k) &= \sum_{m \in \mathbb{S}} \Pi(k, m) g_\ell(m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{S} \setminus A} \Pi(k, m) g_\ell(m) + \sum_{m \in A} \Pi(k, m) g_\ell(m) \\ &= \sum_{m=0}^{r} \Pi(k, m) g_\ell(m) + R_{k,\ell}, \qquad k \in \mathbb{S} \setminus A, \ell \in A \end{aligned}$$

- En el caso de la cadena de Markov de dos estados tenemos que

$$g_0(0) = 1$$

y

$$g_0(1) = b + (1 - b) \cdot g_0(1).$$

Por tanto $g_0(1) = 1$ para $b > 0$ y $g_0(1) = 0$ si $b = 0$.

3.4.2 Duracíon media hasta la llegada a un estado y tiempos de absorbción

- Ahora estudiamos
$$h_A(k) := \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = k]$$

- $\boxed{\text{¡Cuidado!}}$ Si existen estados absorbentes $a \in \mathbb{S}\,\{A\}$ y existe un camino con probabilidad > 0 de un estado inicial k a a entonces
$$\mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = k] = \infty$$
porque se llega con probabilidad positiva al estado absorbente a y de allí uno nunca sale, es decir, el tiempo de llegar de a a A es infinito con probabilidad 1 y por tanto $h_A(k) = \infty$.

- Claro,
$$h_A(k) = 0, \qquad \text{para todas las } k \in A.$$

- Adicionalmente tenemos para todas las $k \in \mathbb{S} \setminus A$ que
$$\begin{aligned}
h_A(k) &= \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = k] \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = k)\mathbb{E}[T_A + 1 \mid X_0 = \ell] \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = k)(1 + \mathbb{E}[T_A \mid X_0 = \ell]) \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = k) + \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = k)\mathbb{E}[T_A \mid X_0 = \ell] \\
&= 1 + \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = k)\mathbb{E}[T_A \mid X_0 = \ell] \\
&= 1 + \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \Pi(k,\ell) \cdot h_A(\ell).
\end{aligned}$$

- Es decir,
$$h_A(k) = 1 + \sum_{\ell\in\mathbb{S}} \Pi(k,\ell) \cdot h_A(\ell), \qquad k \in \mathbb{S} \setminus A,$$
y
$$h_A(\ell) = \mathbb{E}[T_A \mid X_0 = \ell] = 0, \qquad \ell \in A.$$
que es lo mísmo que
$$h_A(k) = 1 + \sum_{\ell\in\mathbb{S}\setminus A} \Pi(k,\ell) \cdot h_A(\ell), \qquad k \in \mathbb{S} \setminus A,$$
y
$$h_A(\ell) = \mathbb{E}[T_A \mid X_0 = \ell] = 0, \qquad \ell \in A.$$

- En forma matricial se puede reescirbir como

$$h_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \Pi h_A, \varepsilon$$

si consideramos las filas de los índices $\mathbb{S} \setminus A$ y el complemento $= 0$.

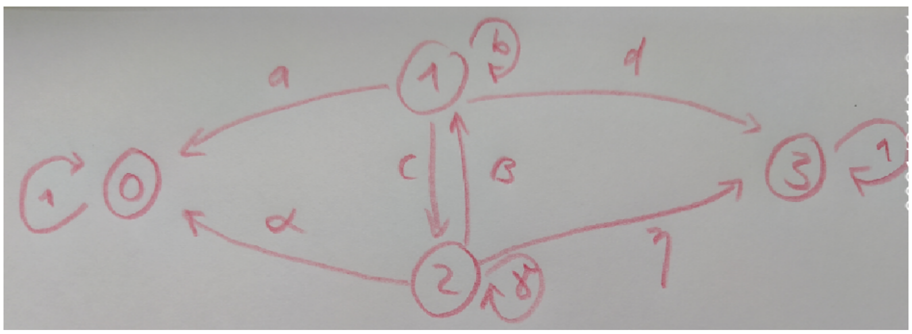
- En forma triangular por bloques sobre $\mathbb{S} = \{0, \dots, N\}$ con conjunto absorbente $A = \{r+1, \dots, N\}$ también tenemos que

$$\begin{aligned} h_A(k) &= 1 + \sum_{\ell=0}^{N} \Pi(k,\ell) h_A(\ell) \\ &= 1 + \sum_{\ell=0}^{r} \Pi(k,\ell) h_A(\ell) + \sum_{\ell=r+1}^{N} \Pi(k,\ell) h_A(\ell) \\ &= 1 + \sum_{\ell=0}^{r} \Pi(k,\ell) h_A(\ell) \end{aligned}$$

Example 3.10. Consideramos la cadena de Markov sobre $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ con

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es el grafo de transición?
2. ¿Cuál es el conjunto A con los estados absorbentes?
3. ¿cuál es el sistema lineal para las probabilidades entrar a A por el estado ℓ de los diferentes estados de $\ell \in A$?
4. ¿Cual es la solución para g_ℓ, $\ell \in A$?

- 

- $A = \{0, 3\}$, $T_{0,3}$.
- Para $\ell = 0 \in A$ tenemos el sistema

$$\begin{aligned} g_0(0) &= 1 \\ g_0(1) &= a + b g_0(1) + c g_0(2) \\ g_0(2) &= \alpha + \beta g_0(1) + \gamma g_0(2) \\ g_0(3) &= 0 \end{aligned}$$

que tiene la solución

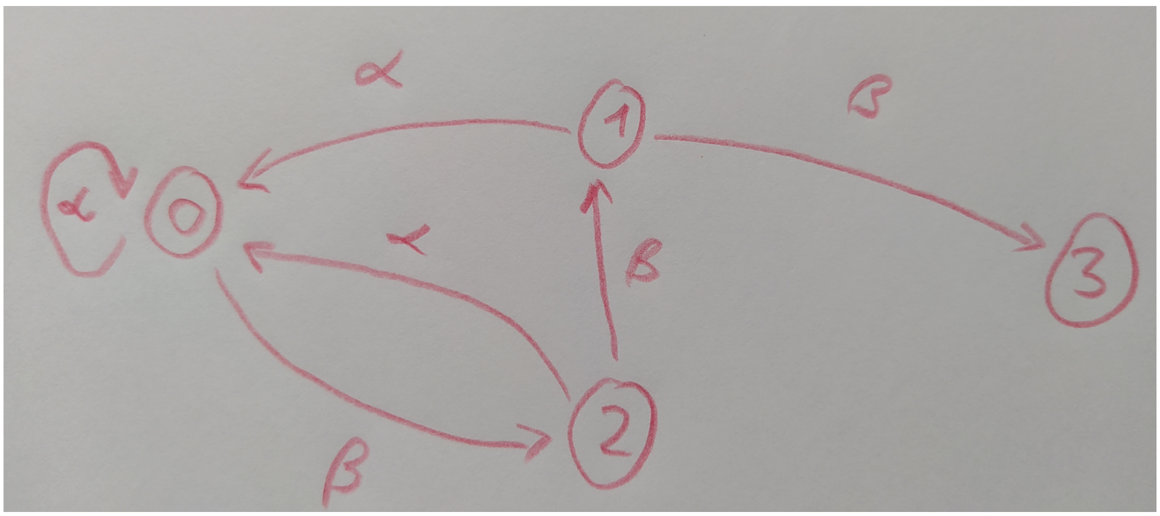
$$\begin{aligned} g_0(0) &= 1 \\ g_0(1) &= \frac{c\alpha + a - a\gamma)}{(1-b)(1-\gamma) - c\beta)} \\ g_0(2) &= \frac{a\beta + \alpha - \alpha b}{(1-b)(1-\gamma) - c\beta)} \\ g_0(3) &= 0. \end{aligned}$$

Example 3.11. – Consideramos $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\alpha + \beta = 1$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuál es la duración media de llegar de 0 a 3?

$$h_3(k) = \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = k] =?$$

- 

- El sistema lineal es:

$$\begin{aligned} h_3(0) &= 1 + \alpha h_3(0) + \beta h_3(2) \\ h_3(1) &= 1 + \alpha h_3(0) \\ h_3(2) &= 1 + \alpha h_3(0) + \beta h_3(1) \\ h_3(3) &= 0 \end{aligned}$$

- La solución teniendo en cuenta $\alpha = 1 - \beta$ es

$$\begin{aligned} h_3(3) &= 0 \\ h_3(1) &= \frac{1}{\beta^3} \\ h_3(2) &= \frac{1 + \beta}{\beta^3} \\ h_3(0) &= \frac{1 + \beta + \beta^2}{\beta^3}. \end{aligned}$$

3.4.3 Tiempos del primer retorno (o llegada)

- Consideramos el tiempo del primer retorno para el estado $j \in \mathbb{S}$

$$T_j^r := \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n = j\} \tag{3.3}$$

  con la convención de que

$$T_j^r = \infty \qquad \text{si } X_n \neq j, \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

- Contrastando el tiempo de primera llegada a j, se toma el ínfimo solo sobre $n \in \mathbb{N}$, es decir toma por lo menos un paso para volver a j si se arrancó allí.
- En caso de NO arrancar en j sino en $i \neq j$ se obtiene que $T_j = T_j^r$.
- Denotemos

$$\mu_j(i) = \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = i].$$

  es decir el tiempo medio para volver a j si se arranca en i.
- Podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mu_j(i) &= \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = i] \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i) \cdot (1 + \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = \ell]) \\
&= \Pi(i,j) + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell)(1 + \mu_j(\ell)) \\
&= \Pi(i,j) + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell) + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell)\mu_j(\ell) \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{S}} \Pi(i,\ell) + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell)\mu_j(\ell) \\
&= 1 + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell)\mu_j(\ell)
\end{aligned}$$

  Es decir,

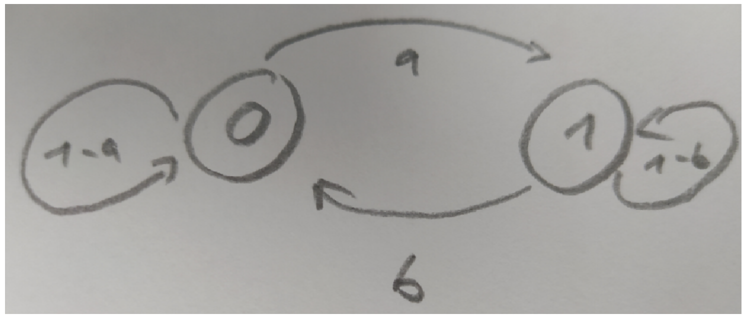
$$\mu_j(i) = 1 + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{S} \\ \ell \neq j}} \Pi(i,\ell)\mu_j(\ell)$$

- Notemos que para el cálculo para tiempos de primer retorno no hay que calcular para ninguna condición del borde.

Example 3.12. – Para una cadena de dos estados $\{0, 1\}$

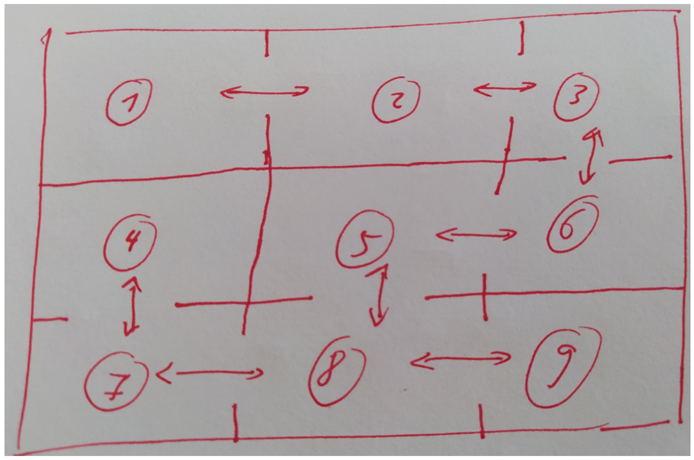
–

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$



- Para
$$\mu_0(i) = \mathbb{E}[T_0^r \mid X_0 = i], \quad i \in \{0,1\}.$$
tenemos que
$$\begin{aligned}\mu_0(0) &= (1-a)\times 1 + a \times (1+\mu_0(1)) = 1 + a\mu_0(1)\\ \mu_0(1) &= b \times 1 + (1-b)\times(1+\mu_0(1)) = 1 + (1-b)\mu_0(1)\end{aligned}$$
que nos da
$$\mu_0(0) = \frac{a+b}{b} \qquad \mu_0(1) = \frac{1}{b}.$$
Ahora
$$\mathbb{P}(T_0^r = n \mid x_0 = 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0\\ 1-a & \text{para } n = 1\\ ab(1-b)^{n-2} & \text{para } n \geqslant 2\end{cases}$$
Por tanto
$$\begin{aligned}\mu_0(0) &= \mathbb{E}[T_0^r \mid X_0 = 0]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T_0^r = n \mid X_0 = 0)\\ &= 1 - a + ab\sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-2}\\ &= 1 - a + ab\sum_{n=0}^{\infty} n(1-b)^{n}\\ &= 1 - a + ab(1-b)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)n(1-b)^{n-1}\\ &= 1 - a + ab(1-b)\sum_{n=0}^{\infty} n(1-b)^n - 2ab\sum_{n=0}^{\infty}(1-b)^n\\ &= \frac{b(1-a) + a(1-b) + 2ab}{b}\\ &= \frac{a+b}{b}.\end{aligned}$$

Example 3.13 (El labirinto). – Consideremos el labirinto siguiente.



– Asumiendo que los peces se mueven de forma aleatória entre los compartamentos obtenemos lo siguiente.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

– Sea el primer tiempo de retorno al estado ℓ

$$T_\ell^r := \inf\{n \geqslant 1 \mid X_N = \ell\}$$

y

$$\mu_\ell(k) = \mathbb{E}[T_\ell^r \mid X_0 = k]$$

el primer tiempo de retorno medio al estado ℓ arrancando en k obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu_1(1) &= 1 + \mu_1(2)\\
\mu_1(2) &= 1 + \frac{1}{2}\mu_1(3)\\
\mu_1(3) &= 1 + \frac{1}{2}\mu_1(2) + \frac{1}{2}\mu_1(6)\\
\mu_1(4) &= 1 + \mu_1(7)\\
\mu_1(5) &= 1 + \frac{1}{2}\mu_1(8) + \frac{1}{2}\mu_1(6)\\
\mu_1(6) &= 1 + \frac{1}{2}\mu_1(3) + \frac{1}{2}\mu_1(5)\\
\mu_1(7) &= 1 + \frac{1}{2}\mu_1(4) + \frac{1}{2}\mu_1(8)\\
\mu_1(8) &= 1 + \frac{1}{3}\mu_1(7) + \frac{1}{3}\mu_1(5) + \frac{1}{3}\mu_1(9)\\
\mu_1(9) &= 1 + \mu_1(8)
\end{aligned}$$

que nos da

$$\begin{aligned}
\mu_1(1) &= 16\\
\mu_1(2) &= 15\\
\mu_1(3) &= 28\\
\mu_1(4) &= 59\\
\mu_1(5) &= 48\\
\mu_1(6) &= 39\\
\mu_1(7) &= 58\\
\mu_1(8) &= 55\\
\mu_1(9) &= 56
\end{aligned}$$