Series de Tiempo: Notas modelos ARIMA

Martín Prado

November 27, 2024

1 Repaso de Estimación de modelos ARMA

3.4 Función de Autocorelación Parcial (pacf)

Para una serie de tiempo estacionaria $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de media 0, función de autocovarianza $\gamma(h) = \mathbf{E}[X_{t+h}X_t] = \mathbf{E}[X_h X_0]$ y función de autocorrelación $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$, la función de autocorrelación parcial se define como

$$\alpha(1) = \mathbf{corr}(X_2, X_1) = \rho(1)$$

$$\alpha(k) = \mathbf{corr}(X_{k+1} - P_{\mathbf{sp}\{1,X_2,\dots,X_k\}}X_{k+1}, X_{k+1} - P_{\mathbf{sp}\{1,X_2,\dots,X_k\}}X_1)$$

Por otro lado, si definimos $\mathscr{H}_n := \overline{\mathbf{sp}}\{X_1,\dots,X_n\}$ y $\widehat{X}_{n+1} := P_{\mathscr{H}_n}(X_{n+1})$, del sistema de ecuaciones

$$R_k\alpha_k = \rho_k,$$

en donde $[R_k]_{ij} = \rho(i-j)$, $\rho_k = (\rho(1),\dots,\rho(k))'$, se sigue que el vector de soluciones $\alpha_k = (\alpha_{k1},\dots,\alpha_{kk})'$ satisface $\alpha(k) = \alpha_{kk}$.

7.2 Estimación de la función de autocorrelación

El estimador de la media es $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$ y el de la función de autocovarianza es

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t - \overline{X}_n)(X_{t+h} - \overline{X}_n).$$

El estimador de la función de autocorrelación se define como

$$\widehat{\rho}(h) = \widehat{\gamma}(h)/\widehat{\gamma}(0),$$

y el de la matriz de covarianza es

$$\widehat{\Gamma}_n = \begin{bmatrix} \widehat{\gamma}(0) & \widehat{\gamma}(0) & \cdots & \widehat{\gamma}(n-1) \\ \widehat{\gamma}(1) & \widehat{\gamma}(0) & \cdots & \widehat{\gamma}(n-2) \\ \vdots & & & \\ \widehat{\gamma}(n-1) & \widehat{\gamma}(n-2) & \cdots & \widehat{\gamma}(0) \end{bmatrix}$$

8.1 Ecuaciones Yule-Walker

Para un proceso $\mathbf{AR}(p)$ causal de media 0

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots \phi_p X_{t-p} = Z_t, \quad Z_t \sim \mathbf{WN}(0, \sigma^2),$$

y función de autocovarianza $\gamma(h) = \mathbf{E}[X_h X_0]$, tenemos que

$$\Gamma_p \boldsymbol{\phi} = \gamma_p,$$

en donde $[\Gamma_p]_{ij} = \gamma_{ij}(i-j)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ y $\gamma_p = (\gamma(1), \dots, \gamma(p))'$. En particular, si tomamos los estimados de la función de autocovarianza muestral $\widehat{\gamma}$, podemos estimar los coeficientes del proceso $\mathbf{AR}(p)$ como la solución del vector $\widehat{\boldsymbol{\phi}} = (\widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_p)'$ en la ecuación

$$\widehat{\Gamma}_p \widehat{\boldsymbol{\phi}} = \widehat{\gamma}_p, \quad \widehat{\gamma}_p = (\widehat{\gamma}(1), \dots, \widehat{\gamma}(p))'.$$

8.3 Estimados de coeficientes de Innovación

Para una muestra X_t del modelo $\mathbf{MA}(q)$

$$X_t = Z_t' + \theta_1 Z_{t-1}' + \dots + \theta_q Z_{t-q}', \quad Z_t' \sim \mathbf{WN}(0, \sigma^2),$$

se puede realizar un ajuste de los coeficientes con el algoritmo de innovaciones para obtener

$$X_t = Z_t + \widehat{\theta}_{m1} Z_{t-1} + \dots + \widehat{\theta}_{mm} Z_{t-m}, \quad Z_t \sim \mathbf{WN}(0, \widehat{\nu}_m)$$

con $\widehat{\theta}_{ij}$ y $\widehat{\nu}_m$ definidos a partir de la relación recursiva

$$\widehat{\theta}_{m,m-k} = \widehat{\nu_k}^{-1} \left[\widehat{\gamma}(m-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{\theta}_{m,m-j} \widehat{\theta}_{k,k-j} \widehat{\nu}_j \right], \quad k = 0, \dots, m-1,$$

y

$$\widehat{\nu}_m = \widehat{\gamma}(0) - \sum_{j=0}^{m-1} \widehat{\theta}_{m,m.j}^2 \widehat{\nu}_j.$$

8.4 Estimados de coeficientes de Innovación

En particular, para procesos $\mathbf{ARMA}(p, q)$ de media cero y causales

$$\phi(B) X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} = \theta(B) Z_t,$$

podemos encontrar una función ψ que satisfsface

$$X_t = \psi(B) Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

Los coeficientes ψ_j satisfacen

$$\psi_0 = 1, \qquad \psi_j = \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i \psi_{j-i},$$

y por ende, con la fórmula del capítulo 8.3 podemos estimar $\psi_1, \ldots, \psi_{p+q}$ con $\widehat{\theta}_{m1}, \ldots, \widehat{\theta}_{m,p+q}$, para luego obtener estimadores $\widehat{\phi}$ y $\widehat{\theta}$ con la fórmula

$$\widehat{\theta}_{mj} = \widehat{\theta}_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \widehat{\phi}_i \widehat{\theta}_{m,j-i},$$

y también el estimador de la varianza del proceso **WN** con

$$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\nu}_m.$$

8.7 Estimadores de Máxima Verosimilitud y Mínimos Cuadrados

Para una realización $X_1, \ldots, X_n$ del proceso **ARMA** (p, q) definido en la sección anterior (con Z_t Gaussianas), definimos $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q)'$, los coeficientes θ_{ij} "reales" del algoritmo de Innovación:

$$\begin{cases} \widehat{X}_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \theta_{ij}(X_{i+1-j} - \widehat{X}_{i+1-j}), & 1 \leqslant i < m = \max(p, q) \\ \widehat{X}_{i+1} = \phi(B)X_i + \sum_{j=1}^{i} \theta_{ij}(X_{i+1-j} - \widehat{X}_{i+1-j}), & i \geqslant m \end{cases}$$

y además,

$$r_i := \mathbf{E}\,[(X_{i+1} - \widehat{X}_{i+1})^2]/\sigma^2.$$

La función de verosimilitud de los parámetros del proceso **ARMA** es

$$L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}(r_0 \cdots r_{n-1})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^{-2} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \widehat{X}_j)^2 / r_{j-1}\right].$$

Después de derivar con respecto a σ^2, tenemos que el estimador de máxima verosimilitud de la varianza es

$$\tilde{\sigma}^2 = n^{-1} S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}),$$

en donde

$$S(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \widehat{X}_j)^2 / r_{j-1}$$

y $\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ son los valores de los parámetros $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}$ que minimizan la función

$$l(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \ln(n^{-1} S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})) + n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \ln r_{j-1}.$$

8.9

$\widehat{}$

8.11

2 Modelos ARIMA y SARIMA

Técnicas de Identificación