2024

MODELO DE ASIGNACIÓN

INVESTIGACION OPERATIVA

ING. OSCAR EDGARDO N. GOMEZ

INGENIERIA INDUSTRIAL
INGENIERIA AGROINDUSTRIAL
INGENIERIA EN ALIMENTOS
INGENIERIA EN SISTEMAS DE INFORMACION

MODELO DE ASIGNACIÓN

INTRODUCCION:

El problema de asignación debe su nombre a la aplicación particular de asignar hombres a trabajos (o trabajos a máquinas), con la condición de que cada hombre puede ser asignado a un trabajo y que cada trabajo tendrá asignada una persona.

Los problemas de asignación presentan una estructura similar a los de transporte, pero con dos diferencias: asocian igual número de orígenes con igual número de demandas y las ofertas en cada origen es de valor uno, como lo es la demanda en cada destino.

Se conoce la eficiencia con que cada hombre ejecuta cada trabajo y las asignaciones que se realicen deben ser las que permitan optimizar la operación en su conjunto.

Si la medida de esa eficiencia es un costo, tendremos que determinar el costo total mínimo (problema de minimización). Si por el contrario es una utilidad, tendremos un caso de maximización.

En ambos casos las unidades son monetarias (pesos, dólares, etc.), pero podrían ser de otro tipo de unidades, como dimensiones, tiempos, etc. Lo importante será que ese valor represente la eficiencia y sepamos reconocer si es un caso de minimización o uno de maximización.

La determinación de estos coeficientes de eficiencia debe ser realizada cuidadosamente. En caso contrario todos los cálculos que se hagan a partir de allí serán inútiles.

El modelo de asignación tiene sus principales aplicaciones en: trabajadores, oficinas al personal, vehículos a rutas, operarios a máquinas, vendedores a regiones, productos a fabricar en diferentes máquinas, etc.

Podríamos decir que el modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, en el que los recursos se asignan a las actividades en términos de uno a uno, haciendo notar que la matriz correspondiente debe ser cuadrada. Así entonces cada recurso debe asignarse, de modo único, a una actividad particular.

Entonces, la condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga solución, es que se encuentre balanceado, es decir, que los recursos totales sean iguales a las demandas u ofertas totales.

Supongamos un caso donde tenemos cuatro (4) máquinas que deben ser operadas por cuatro trabajadores. La decisión clásica sin analizar eficiencia, es asignar la M1 al T1, la M2 al T2 y así sucesivamente, lo que podemos esquematizarlo en una tabla.

	M1	M2	M3	M4	
T1	1				1
T2		1			1
T3			1		1
T4				1	1
	1	1	1	1	

Pero, si se tiene un costo Cij asociado con el recurso que es asignado, o sea un coeficiente de eficiencia (costo, utilidad, etc.) en cada celda o casilla de la matriz del problema, de modo que el objetivo es determinar en qué forma deben realizarse todas las asignaciones para minimizar los costos totales o maximizar la utilidad total, tenemos un problema de los que resolvemos en Investigación Operativa. Para este caso la tabla de Costos sería:

	M1	M2	M3	M4	
T1	**C11**	**C12**	**C13**	**C14**	1
T2	**C21**	**C22**	**C23**	**C24**	1
T3	**C31**	**C32**	**C33**	**C34**	1
T4	**C41**	**C42**	**C43**	**C44**	1
	1	1	1	1	

Y debemos elegir las asignaciones más convenientes, en función de esos coeficientes de eficiencia.

Dejando de lado estas similitudes con el modelo de transporte, y pecando de reiterativos, veamos la situación clásica que se describe en la mayoría de la bibliografía, de la asignación de trabajadores a los empleos, donde cualquier empleado puede desempeñar cualquier trabajo, aún con diversos grados de habilidad.

Tenemos que elegir que trabajador ocupará cada uno de los empleos o puestos de trabajo. El objetivo del modelo es determinar la asignación óptima (la menos costosa) de trabajadores a los puestos.

		EMPLEOS					ASIGNA-CIONES
		1	2	3	*j*	m	
TRABAJADOR	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1m}	1
	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2m}	1
	3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	C_{3m}	1
	i	...	...	...	C_{ij}	...	1
	m	C_{n1}	C_{m2}	C_{m3}	...	C_{mm}	1
ASIGNACIONES		1	1	1	1	1	m

En la tabla se representa el modelo general de asignación con m trabajadores y m empleos. El elemento C_{ij} representa el costo de asignar el empleado i al trabajo j.

Dijimos que éste es un caso especial del modelo de transporte, donde la cantidad de la oferta en cada punto de origen y la cantidad de la demanda en cada punto de destino es igual a 1. La suma de las asignaciones es m (orden de la matriz) o sea igual a la cantidad de filas y/o columnas.

El problema consiste en efectuar una distribución de los empleos entre todos los trabajadores, pero de manera tal que a cada empleo le asignamos un único trabajador y que no existan ni empleos ni trabajadores que no hayan sido asignados.

Supongamos que en lugar de costos se tienen valores de utilidades. Estos valores figurarán en cada celda y en este caso la solución óptima consistirá en buscar la solución que signifique el mayor beneficio para la empresa.

DESARROLLO TEORICO DEL MODELO DE ASIGNACION

La condición en el planteo es que haya un elemento asignado en cada fila y uno en cada columna, de manera que habrá tantas unidades disponibles como haya filas, y tantas unidades requeridas como columnas.

Lo que se busca en el problema de asignación es determinar en base a la matriz de costos C_{ij}, una nueva matriz X_{ij} que cumpla con esas restricciones marginales y que al mismo tiempo resulte ser la solución óptima.

Las expresiones matemáticas del modelo serían las siguientes:

Los X_{ij} sólo podrán tomar valores de 1 en aquéllos lugares en donde han sido asignados trabajos y valores de 0 en aquéllos otros en donde no ha habido asignaciones. Esta condición que debe cumplirse puede expresarse como que cualquier X_{ij} sea igual a X_{ij}^2

$$X_{ij} = X_{ij}^2 \qquad \text{(sucede sólo con los valores 0 y 1)}$$

Se debe cumplir también la condición de no negatividad (condición sobreabundante).

$$X_{ij} \geq 0$$

La suma de los X_{ij} que corresponden a cada fila debe ser igual a 1, es decir,

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \text{(i =1 a m)}$$

La suma de los X_{ij} de cada columna debe ser igual a la unidad, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \text{(j =1 a m)}$$

El funcional es la suma de todos los costos C_{ij} por los respectivos X_{ij}, y el objetivo es minimizarlo

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}.x_{ij} \qquad \text{(MIN)}$$

METODOLOGÍA DE SOLUCION - MÉTODO HÚNGARO.

Caso A: Minimización.

1. Balancear el modelo, es decir obtener m=n (obtener una matriz cuadrada)

En donde m= número de filas y n= número de columnas.

Si m>n, agregamos (m-n) columnas, o sea que creamos (m-n) empleos ficticios. A estos empleos ficticios les corresponde imponer costos altos, el mismo valor en todas las celdas, para que las asignaciones no sean preferenciales para alguna de esas celdas de las columnas ficticias.

Conviene poner directamente 0 en esas celdas ficticias, pues al ser el mismo valor, quedan 0 al aplicar los pasos siguientes.

Si m<n, agregamos (m-n) filas con lo que creamos (m-n) trabajadores ficticios, y luego operamos como en el caso anterior.

2. Para cada fila escoger el MENOR VALOR (C_{ij} mínimo) y restarlo de todos los demás en la MISMA FILA.

3. Para cada columna escoger el MENOR VALOR (C_{ij} mínimo) y restarlo de todos los demás en la MISMA COLUMNA.

Con esto, toda fila o columna tendrá un costo unitario cero en alguna de sus celdas. Se llaman ceros esenciales a aquéllos que son únicos en su fila o columna.

4. Trazar el MÍNIMO número de líneas o segmentos verticales y/u horizontales de forma tal que todos los ceros queden tachados.

Un segmento es una línea vertical u horizontal que se va a trazar a lo largo de toda la fila o toda la columna, no se pueden trazar segmentos en forma diagonal.

5. Criterio de optimidad: ¿Es el número de líneas igual al orden de la matriz?

Si la respuesta es SI, el modelo es óptimo y por tanto hacer la asignación y traducir la solución.

La asignación se debe hacer en las casillas donde haya ceros cuidando que cada fila y cada columna tenga una sola asignación. Comenzamos asignando en las celdas donde hay ceros esenciales por fila y columna. Seguimos con los esenciales por fila o columna. Luego elegiremos los ceros que resulten convenientes para cumplir con la condición ya indicada (una sola asignación por fila y columna).

Podremos tener varias posibilidades en este sentido, lo que significa que tenemos soluciones alternativas.

Si la respuesta es NO, pasar al siguiente punto.

6. Seleccionar el menor valor no tachado de toda la matriz. Este valor restarlo de todo elemento no tachado y sumarlo a los elementos tachados dos veces, o sea que estén en el cruce de dos líneas.

7. Regresar al paso 4.

Caso B: Maximización.

Metodología:

- Seleccionar el MAYOR ELEMENTO de toda la matriz de coeficientes de beneficio. Este valor restarlo de todos los demás, los valores negativos que se obtengan representan los costos de oportunidad, lo que se deja de ganar o producir.
- Con esta transformación se ha obtenido un modelo de minimización y por tanto podemos resolverlo como tal.
- Para el caso de buscar la solución del modelo, considerar solo valores absolutos, y aplicar el proceso ya descripto para el caso de minimización.
- El funcional será la suma de los coeficientes originales del problema de las celdas asignadas.

Caso C: Problemas con asignación inaceptable.

- Supóngase que se está resolviendo un problema de asignación y que se sabe que ciertas asignaciones son inaceptables. Para alcanzar esta meta, simplemente asigna un costo arbitrariamente grande representado mediante la letra M. M es un número tan grande que, si se le resta un número finito cualquiera, queda todavía un valor mayor que los demás.

EJEMPLO:

Se necesita procesar 4 diferentes tareas para lo cual se cuenta con 4 máquinas. Por diferencias tecnológicas el desperdicio que se produce depende del tipo de tarea y la máquina en la cual se ejecuta, dada la matriz de Desperdicios expresada en pesos definir la asignación óptima.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	49	86	54	70

	B	45	79	66	81
	C	46	58	78	88
	D	44	38	66	69

Como se trata de Desperdicios, buscaremos MINIMIZARLOS.

Verificamos que todas las casillas tengan su costo unitario, en este caso se cumple sin ningún problema.

1. Balanceamos la tabla M= filas = 4 N= columnas= 4

Por lo que M=N, quedando balanceada.

2. POR FILA

Elegimos el menor valor de fila y restarlo a los demás. En este caso son: 49,45,46,38.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	**49**	86	54	70
	B	**45**	79	66	81
	C	**46**	58	78	88
	D	44	**38**	66	69

Restamos ese valor a cada uno de los demás de la fila y formamos la nueva tabla:

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	49-49=0	86-49=37	54-49=5	70-49=21
	B	45-45=0	79-45=34	66-45=21	81-45=36
	C	46-46=0	58-46=12	78-46=32	88-46=42
	D	44-38=6	38-38=0	66-38=28	69-38=31

3. POR COLUMNA

Elegimos los menores valores de cada columna. En este caso son: 0,0,5,21

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**

	A	**0**	37	**5**	**21**
	B	0	34	21	36
	C	0	12	32	42
	D	6	**0**	28	31

Restamos esos valores a los demás números de las columnas:

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	0-0=0	37-0=37	5-5=0	21-21=0
	B	0-0=0	34-0=34	21-5=16	36-21=15
	C	0-0=0	12-0=12	32-5=27	42-21=21
	D	6-0=6	0-0=0	28-5=23	31-21=10

Obtenemos la nueva tabla:

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	0	37	0	0
	B	0	34	16	15
	C	0	12	27	21
	D	6	0	23	10

4. Trazamos las líneas.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	0	37	0	0
	B	0	34	16	15
	C	0	12	27	21
	D	0	0	23	10

5. Contamos el número de líneas y observamos que son 3 líneas y el número de la matriz es de 4 por lo que NO ES ÓPTIMO.

6. Buscamos dentro de la tabla el menor valor no tachado y en este caso es 12.

Lo restamos a todos los demás, respetando los valores de los ya tachados y adicionándolos a los que están intersectados. Obtenemos una nueva matriz.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	0+12=12	37	0	0
	B	0	34-12=22	16-12=4	15-12=3
	C	0	12-12=0	27-12=15	21-12=9
	D	6+12=18	0	23	10

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	12	37	0	0
	B	0	22	4	3
	C	0	0	15	9
	D	18	0	23	10

7. Repetimos los pasos desde el 4. Trazamos nuevamente las líneas.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	12	37	0	0
	B	0	22	4	3
	C	0	0	15	9
	D	18	0	23	10

3 ≠ 4 NO ES ÓPTIMO

Volvemos a buscar el menor número de los no tachados. En este caso es 3 y se lo restamos a los demás no tachados. Respetamos a los tachados y se los sumamos a los intersectados o tachados dos veces.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	12+3=15	37+3=40	0	0
	B	0	22	4-3=1	3-3=0
	C	0	0	15-3=12	9-3=6
	D	18	0	23-3=20	10-3=7

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	15	40	0	0

	B	0	22	1	0
	C	0	0	12	6
	D	18	0	20	7

Y volvemos a trazar las líneas.

MAQUINAS					
TAREAS		1	2	3	4
	A	15	40	0	0
	B	0	22	1	0
	C	0	0	12	6
	D	18	0	20	7

4=4 ES ÓPTIMO

Estamos en el óptimo.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A	15	40	0	0
	B	0	22	1	0
	C	0	0	12	6
	D	18	0	20	7

8. Elegimos y/o dejamos solos a los ceros.
Resulta práctico aislarlos para elegirlos, verificando que las asignaciones, sean 1 a 1.

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A			0	0
	B	0			0
	C	0	0		
	D		0		

Empezamos por los ceros esenciales por fila **y** columna. No hay ninguno.
Seguimos con los ceros esenciales por fila **o** columna.
Sería el (4,2), esencial por fila, por lo que tachamos el de la celda (3,2).

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A			0	0

	B	0			0
	C	0	~~0~~		
	D		**0**		

El (3,1) se transforma en esencial por fila y nos indica tachar el (2,1).

MAQUINAS					
		1	**2**	**3**	**4**
	A			0	0
TAREAS	**B**	~~0~~			0
	C	**0**	~~0~~		
	D		**0**		

El (2,4) se transforma en esencial por fila y nos indica tachar el (1,4), por lo que tengo que elegir el (1,3), y en la próxima tabla, tendríamos que los ceros no tachados nos indican las celdas donde asignamos o sea las variables no nulas o básicas.

MAQUINAS					
		1	**2**	**3**	**4**
	A			**0**	~~0~~
TAREAS	**B**	~~0~~			**0**
	C	**0**	~~0~~		
	D		**0**		

Si no hubiésemos aislado los ceros, la tabla quedaría:

MAQUINAS					
		1	**2**	**3**	**4**
	A	15	40	**0**	~~0~~
TAREAS	**B**	~~0~~	22	1	**0**
	C	**0**	~~0~~	12	6
	D	18	**0**	20	7

0 = se escogen

~~0~~= se deshabilitan

La solución se debe expresar:

MAQUINAS					
TAREAS		**1**	**2**	**3**	**4**
	A			**1**	

	B				**1**
	C	**1**			
	D		**1**		

El resultado final sería, expresando los desperdicios en $ = costo:

- Realizar la tarea A en la máquina 3 con un costo de $54
- Realizar la tarea B con la máquina 4 con un costo $81.
- Realizar la tarea C en la máquina 1 con un costo $46.
- Realizar la tarea D en la máquina 2 con un costo $38.

El valor del Funcional seria:

Z = 54+81+46+38= $219 (COSTO TOTAL MÍNIMO)