Métodos estadísticos

Unidad 4
Presentación 4.1: Estadística no paramétrica

Ramiro M. Irastorza, Marcelo Cappelletti

Curso de Posgrado

UNAJ

IIYA | UNAJ
Instituto de Ingeniería y Agronomía

Universidad Nacional ARTURO JAURETCHE

Antes de empezar

- ¡Verficar si existe Normalidad!

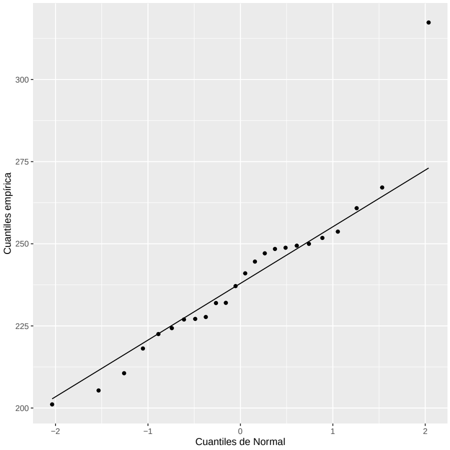
  Algunos métodos, pero notar que es una **hipótesis nula compuesta**. Por qué? Porque hay que probar si $X \sim \mathbf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, y debo estimar μ y σ.

  - Kolmogorov–Smirnov modificado, Crámer-von Mises, Anderson-Darling, ver referencia (**enlace**). La idea es comparar las funciones de distribución acumulada (Fda).
  - **Shapiro–Francia**, similar a Shapiro–Wilk.

Shapiro-Francia: ejemplo ejemplo33.R

En el ejemplo33.R, una empresa afirma que la vida media de un tipo de batería que fabrica es mayor a 250 horas. Un estudio de consumidores, que busca determinar que esta afirmación está justificada, calcula la vida media de 24 baterías (vida_media_nuevo.csv).

- ¿Qué test tendríamos que hacer?
- Veamos el qqplot.
- ¿Es Normal? ¿Cómo lo cuantifico?



Shapiro-Francia: ejemplo ejemplo33.R

- Una buena forma de cuantificarlo sería evaluar cuán lineal es el qqplot.
- Como vimos en la unidad anterior, un buen Estadístico puede ser el **cuadrado del coeficiente de correlación lineal** (coeficiente de determianción). Si está cerca de 1, será lineal.[1]

En R, instalar primero install.packages('nortest'):

```
nortest::sf.test(datos$bateria)
```

codigo/ejemplo33.R

La conclusión es que no es Normal: p-value = 0.01286.

[1] Royston calculó su distribución, **enlace**.

Resumen

Estadística no paramétrica

Test del signo

Test de Rangos Signados de Wilcoxon

Estadística no paramétrica

- Los test de hipótesis vistos hasta ahora están basados en la suposición de tener muestras aleatorias con distribuciones normales. Estos procedimientos de prueba se denominan métodos paramétricos, los cuales continúan siendo confiables aún para pequeñas desviaciones de la normalidad, en particular cuando el tamaño de la muestra es grande.
- Sin embargo, hay situaciones en las que no se satisface el supuesto de normalidad. Veremos en esta Unidad test de hipótesis alternativos, denominados métodos no paramétricos o de distribución libre, los cuales no suponen conocimiento alguno acerca de las distribuciones de las poblaciones, excepto que éstas son continuas.
- Los métodos no paramétricos son muy utilizados por los analistas de datos. Existen muchas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería donde los datos se reportan no como valores de un continuo sino como una escala ordinal, donde puede ser posible asignarle rangos.

Ejemplo y características de métodos no paramétricos

- **Ejemplo donde se puede aplicar un método no paramétrico:** Dos jueces deben clasificar cinco marcas de cerveza de mucha demanda mediante la asignación de un grado de 1 a la marca que se considera que tiene la mejor calidad global, un grado 2 a la segunda mejor, etcétera. Se puede utilizar entonces una prueba no paramétrica para determinar si existe algún acuerdo entre los dos jueces.
- **Características de los métodos no paramétricos:**
  - Tienen un nivel de significancia (α) para diferentes distribuciones.
  - No requieren de datos cuantitativos sino que pueden ser datos categóricos (sí o no, defectuosos o no defectuosos) o en forma de rangos.
  - Son muy rápidos y fáciles de implementar.
  - No utilizan toda la información que proporciona la muestra. Por ello, una prueba no paramétrica es menos eficiente que un método paramétrico, cuando la población dada es normal.
  - En general, proporcionan una mejora considerable sobre los métodos paramétricos cuando las poblaciones se alejan de la distribución normal.

Resumen

Estadística no paramétrica

Test del signo

Test de Rangos Signados de Wilcoxon

Test del Signo

- Se utiliza el test del signo para probar la hipótesis sobre la mediana $\tilde{\mu}$ de una distribución continua.
- Recordemos que la mediana de una distribución es un valor de la variable aleatoria X tal que la probabilidad que un valor observado de X sea menor o igual, o mayor o igual, que la mediana es 0.5. Es decir:

$$P(X \leq \tilde{\mu}) = P(X \geq \tilde{\mu}) = 0{,}5$$

- Dado que la distribución normal es simétrica, la media es igual a la mediana. Por lo tanto, el Test del Signo puede usarse como test de hipótesis sobre la media de una población normal.

Test del Signo

- Suponiendo las siguientes hipótesis nula H_0 y la alternativa unilateral H_1:
$$H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$$
$$H_1 : \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$$
- Y suponiendo que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de la población de interés, se forman las diferencias:
$$X_i - \tilde{\mu}_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
- Si H_0 es verdadera, cualquier diferencia $X_i - \tilde{\mu}_0$ tiene la misma probabilidad de ser positiva o negativa.
- El número de estas diferencias que son positivas, por ejemplo R^+, es un estadístico de prueba apropiado.

Test del Signo

- Por lo tanto, la prueba de la hipótesis nula es en realidad una prueba de que el número de signos positivos es un valor de una variable aleatoria binomial con parámetro $p = \frac{1}{2}$.
- Puede calcularse un valor P para el número observado de signos positivos r^+ directamente de la distribución binomial:

$$P = P\left(R^+ \leq r^+ \text{ cuando } p = \frac{1}{2}\right)$$

- Se rechaza H_0 en favor de H_1 sólo si la proporción de signos positivos es suficientemente inferior a $\frac{1}{2}$ (número observado de signos positivos r^+ muy pequeño), es decir, si el valor calculado de P es menor que algún nivel de significancia α seleccionado previamente. En este caso se concluye que H_1 es verdadera.

Test del Signo

- $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$
- Para probar la otra hipótesis unilateral:

$$H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$$

- En este caso, puede calcularse un valor P para el número observado de signos positivos r^+ directamente de la distribución binomial:

$$P = P\left(R^+ \geq r^+ \text{ cuando } p = \frac{1}{2}\right)$$

- Se rechaza H_0 en favor de H_1 sólo si la proporción de signos positivos es suficientemente superior a $\frac{1}{2}$ (número observado de signos positivos r^+ muy grande), es decir, si el valor calculado de P es menor que algún nivel de significancia α seleccionado previamente. En este caso se concluye que H_1 es verdadera.

Test del Signo

- $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$
- También se puede probar la hipótesis bilateral:

$$H_1 : \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$$

- En este caso, se rechaza H_0 en favor de H_1 sólo si la proporción de signos positivos difiere significativamente de $\frac{1}{2}$ por debajo o por encima (número observado de signos positivos r^+ muy pequeño o muy grande).
- Por lo tanto, si $r^+ < \frac{n}{2}$ el valor P es:

$$P = 2P\left(R^+ \leq r^+ \text{ cuando } p = \frac{1}{2}\right)$$

- Y si $r^+ > \frac{n}{2}$ el valor P es:

$$P = 2P\left(R^+ \geq r^+ \text{ cuando } p = \frac{1}{2}\right)$$

- Si el valor calculado de P es menor que algún nivel de significancia α seleccionado previamente, entonces se rechaza H_0 y se concluye que H_1 es verdadera.

Continuamos con el ejemplo ejemplo33.R

- El test que signo que es conveniente hacer en este caso es:

$$H_0 : \text{la mediana es } \tilde{\mu} = \tilde{\mu_0} = 250 \text{ hs.}$$
$$H_1 : \text{la mediana es } \tilde{\mu} < \tilde{\mu_1} = 250 \text{ hs.}$$

- Instalamos previamente el paquete BSDA (install.packages(”BSDA”)).

```
require(BSDA)
#Test del Signo para hipótesis unilateral
SIGN.test(datos$bateria, md = 250, alternative = "less", conf.
    level = 0.95)
```

codigo/ejemplo33.R

La conclusión es que no es mayor que 250 hs la mediana de la vida útil: p-value = 0.003305[2].

[2]Note que es lo mismo que usar la función binom.test

Test del Signo: Aproximación Normal

- Si $p = 0{,}5$ y n es al menos 10, la distribución binomial puede ser aproximada adecuadamente por la distribución normal.
- Por lo tanto, dado que la media de la distribución binomial es np y la varianza es $np(1-p)$, la distribución de R^+ es aproximadamente normal con media $0{,}5n$ y varianza $0{,}25n$, para n moderadamente grande.
- Para estos casos, la hipótesis nula $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ puede probarse utilizando el siguiente estadístico:

$$Z_0 = \frac{R^+ - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}}$$

- Las reglas de decisión se establecen como en cualquier ensayo en una distribución muestral en donde se utilice la distribución normal.

Test del Signo para muestras apareadas

- Un caso habitual en la práctica es el caso en que se miden muestras apareadas o de a pares.
- El test del signo se puede utilizar también para datos apareados extraídos de poblaciones continuas.
- Sea (X_{1j}, X_{2j}), $j = 1, 2, \ldots, n$ una colección de observaciones apareadas provenientes de dos poblaciones continuas, y sea $D_j = X_{1j} - X_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ las diferencias apareadas.
- Se puede utilizar el test del signo para probar la hipótesis nula de que las dos poblaciones tienen una mediana común: $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ (o de manera equivalente $H_0 : \tilde{\mu}_D = 0$).
- En este caso el test del signo es aplicado a las n diferencias observadas como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

- La tabla `Artritis.csv` del ejemplo 34 muestra las horas de alivio proporcionadas por dos medicamentos analgésicos en 12 pacientes que sufren de artritis. ¿Existe alguna evidencia de que un medicamento proporcione un alivio más prolongado que el otro? Utilizar un nivel de 0.05 de significancia.
- En R:

```
#Test del Signo para hipótesis bilateral
SIGN.test(datos$droga_A, datos$droga_B, md = 0, alternative
     = "two.sided", conf.level = 0.95)
```

codigo/ejemplo34.R

- Dado que se obtiene un p-valor = 0.146, entonces no hay evidencia para rechazar $H_0 : \tilde{\mu}_D = 0$ y pensar que un medicamento es mejor que otro.

Resumen

Estadística no paramétrica

Test del signo

Test de Rangos Signados de Wilcoxon

Test de Rangos Signados de Wilcoxon

- El Test del Signo utiliza sólo los signos más y menos de las diferencias entre las observaciones y la mediana $\tilde{\mu}_0$ para el caso de una muestra (o los signos más y menos de las diferencias entre los pares de observaciones en el caso de muestras apareadas). Sin embargo, no toma en cuenta la magnitud de estas diferencias.
- El Test de Rangos Signados de Wilcoxon utiliza dirección (signo) y magnitud, y se aplica en el caso de distribuciones continuas simétricas. Bajo esta condición, la media es igual a la mediana, y se puede probar la hipótesis nula $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$.

Test de Rangos Signados de Wilcoxon

- Suponiendo que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución continua y simétrica con media (y mediana) $\tilde{\mu}$. Se forman las diferencias:

$$X_i - \tilde{\mu}_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Se clasifican las diferencias absolutas $|X_i - \tilde{\mu}_0|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en orden ascendente, y luego se asigna un rango a los signos de las diferencias correspondientes.
- Sea W^+ la suma de los rangos positivos; sea W^- el valor absoluto de la suma de los rangos negativos; y sea $W = \min(W^+, W^-)$.
- Si el valor observado del estadístico w, w^- o w^+ es menor que algún valor crítico w_α, entonces se rechaza H_0 en favor de las hipótesis alternativas: $H_1 : \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$, $H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$ o $H_1 : \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$, respectivamente.

Ejemplo

- El ejemplo 35 presenta un estudio dedicado a averiguar el tipo de población atendida en un centro hospitalario y se ha encontrado que la mediana de edad de los enfermos era de 57 años. En un estudio similar de otro hospital se ha tomado una muestra de 15 personas cuyas edades se muestran en la tabla `Pacientes.csv`. Se desea saber si la mediana de edad de los pacientes en ambos hospitales es la misma, con un nivel de 0.05 de significancia.
- En R:

```
#Test de Rangos Signados de Wilcoxon para hipótesis bilateral
wilcox.test(datos$edades, mu = 57, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95,exact=FALSE)
```

codigo/ejemplo35.R

- Se obtiene un p-valor = 0.2558 > 0.05, entonces no hay evidencia para rechazar $H_0 : \tilde{\mu} = 57$, es decir que existe evidencia que la mediana de edad de los pacientes en ambos centros es la misma.

Test de Rangos Signados de Wilcoxon: Aproximación Normal

- Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, digamos $n > 20$, se puede demostrar que W^+ (o W^-) tiene una distribución aproximadamente normal con media y varianza dada por:

$$\mu_W = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_W^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

- Para estos casos, la hipótesis nula $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ puede probarse utilizando el siguiente estadístico:

$$Z_0 = \frac{W^+ - \mu_W}{\sigma_W}$$

- Las reglas de decisión se establecen como en cualquier ensayo en una distribución muestral en donde se utilice la distribución normal.

Test de Rangos Signados de Wilcoxon para muestras apareadas

- Este test también se puede aplicar a datos apareados.
- Sea $(X_{1j}, X_{2j}), j = 1, 2, \ldots, n$ una colección de observaciones apareadas provenientes de dos poblaciones continuas, que difieren solo con respecto a sus medias. Entonces la distribución de las diferencias $D_j = X_{1j} - X_{2j}$ es continua y simétrica. (Observación: No es necesario que las distribuciones de X_1 y X_2 sean simétricas).
- La hipótesis nula es $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ (o de manera equivalente $H_0 : \tilde{\mu}_D = 0$).
- Para usar este test, se clasifican las diferencias de las muestras apareadas sin importar el signo y luego se procede como en el caso de una muestra.

Test de Rangos Signados de Wilcoxon para muestras apareadas

- La siguiente tabla resume los diversos procedimientos de prueba para los casos de una sola muestra y de una muestra apareada.

Para probar H_0	Contra H_1	Calcular
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	w_+
	$\mu > \mu_0$	w_-
	$\mu \neq \mu_0$	w
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	w_+
	$\mu_1 > \mu_2$	w_-
	$\mu_1 \neq \mu_2$	w

Resumen

- Comparación de test paramétricos y no paramétricos

(WSiRT/WSuRT stands for Wilcoxon Signed/Sum Rank Test).

PARAMETRIC	NON-PARAMETRIC
Pearson coefficient of correlation	Spearman coefficient of correlation
One sample t-test for the location	sign test, WSiRT
paired test t test	sign test, WSiRT
two sample t test	WSurT, Mann-Whitney
ANOVA	Kruskal-Wallis Test
Block Design ANOVA	Friedman Test

Bibliografía

1. D. C. Montgomery and G. C. Runger, “Applied Statistics and Probability for Engineers Third Edition”, John Wiley & Sons, Inc.
2. E. García-Portugués, “Notes for Nonparametric Statistics”,`https://bookdown.org/egarpor/NP-UC3M/`
3. Paul H. Kvam y Brani Vidakovic, “Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering”, 2007.