

23. Numerické metody a matematická pravděpodobnost

numerické řešení algebraických a obyčejných diferenciálních rovnic, rozložení pravděpodobnosti, generování pseudonáhodných čísel.

Na úvod malé opakovanie ako sa počítajú determinanty:

Nechť A je matice řádu n . Determinantem matice $A = (a_{ij})$ nazýváme číslo

$$\det A = |A| = \sum (-1)^{\pi(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace (i_1, i_2, \dots, i_n) množiny $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Matice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Existují dvě permutace množiny $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$, a to $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Pak

$$\det A = (-1)^{\pi(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\pi(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Křížové pravidlo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

Matice 3×3:

Sarrusovo pravidlo:

K matici připseme na pravou stranu ještě raz její první a druhý sloupec v tomto pořadí. Potom vyrátame všetky diagonálne súčiny, ktoré majú po tri činitele. Spolu je takýchto súčinov šesť. Výslednú sumu tvorí súčet týchto šiestich súčinov, pričom zo znamienkom "+" sú tie tri z nich, ktoré sú rovnobežné s hlavnou diagonálou, so znamienkom "-" sú zvyšné tri z nich, tj. tie, ktoré sú rovnobežné s vedľajšou diagonálou.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Matice 4×4 a väčšie:

Matice musíme „rozsekat“ na menšie matice (musíme sa dostať k maticiam 3×3, ktorých determinant vieme počítať). Vyberieme si niektorý stĺpec matice a postupujeme ako na nasledovnom príklade:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

„Rozsekané“ matice neobsahujú vybraný stĺpec a tiež riadok, v ktorom sa nachádza písmeno ktorým sa násobí matica.

V prvom kroku nemusíme vybrať stĺpec, ale môžeme aj riadok, „rozsekané“ matice potom neobsahujú tento riadok a tiež jeden stĺpec (podľa toho čím sa násobí matica).

Príklad zo skrípt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

Použijeme Laplaceova rozvoje podle třetího řádku. Tento postup je výhodný zejména proto, že třetí řádek matice A obsahuje několik nul, takže odpovídající členy rozvoje budou nulové a nemusíme je počítat. Tedy

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (6 + (-16) + 0 - \\ &- 0 - (-12) - (-18)) + 3 \cdot (-4 + 0 + 4 - (-12) - 0 - 16) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot (-4) = \\ &= 60 - 12 = 48. \end{aligned}$$

1 Numerické řešení soustavy lineárních rovnic

Budeme se zabývat řešením soustavy n lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

S neznámými x_1, x_2, \dots, x_n . Matice $A = (a_{ij})$ kde $i, j = 1, \dots, n$ se nazývá matice soustavy a sloupcový vektor $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ vektor pravých stran. Všude v dalším textu budeme předpokládat, že matice soustavy je regulární, tj. že řešená soustava má právě jedno řešení.

1.1 Přímé metody pro řešení algebraických rovnic

Přímé metody vedou k řešení soustavy po konečném počtu kroků. Takto nalezené řešení by bylo přesné, kdybychom se v průběhu výpočtu nedopouštěli zaokrouhlovacích chyb.

- **Cramerovo pravidlo**

Je-li matice soustavy regulární, tj. její determinant je nenulový, pak řešení soustavy lze vypočítat jako

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

kde D je determinant matice soustavy A a D_k kde $k = 1, \dots, n$ jsou determinanty matic, které vzniknou z matice A nahrazením k -tého sloupce této matice vektorem pravých stran b .

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -21$$

$$x_1 = \frac{-14}{7} = -2 \quad x_2 = \frac{-21}{7} = -3$$

Cramerovo pravidlo je vhodné pouze pro velmi malé soustavy rovnic.

- **Gaussova eliminační metoda**

Základem této metody je úprava soustavy na trojúhelníkový tvar pomocí elementárních úprav. Snažíme se získat 0 pod hlavní diagonálou matice. Postupně od řádků odečítáme předchozí řádky vynásobené tak aby v daném sloupci vznikla odečtením 0 (příklad zo skript je v súbore `priklad_gauss.pdf`).

Základom metódy je úprava na trojuholníkový tvar matice pomocou elementárnych úprav. Najprv odpočítame prvú rovnicu od všetkých pod ňou, pričom vždy ju vynásobíme takým číslom aby sme v príslušnej rovnici vynulovali prvú neznámu. Následne pre druhú, a všetky ostatné postupujeme rovnako.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Nakoniec z poslednej rovnice vypočítame x_3 , zo strednej x_2 a z prvej x_1 (v tomto poradí).

1.2 Iterační metody

Iterační metody na rozdíl od přímých metod, nevedou k přesnému řešení po konečném, předem daném počtu kroků. U iteračních metod zvolíme počáteční aproximaci řešení a určitým postupem ji v každém kroku metody zlepšíme. K řešení se přibližujeme postupně a obecně ho dosáhneme až v limitě. Protože výpočet nelze provádět do nekonečna, po jisté době jej ukončíme. Výsledkem bude přibližné řešení soustavy.

- **Jacobiho metoda**

Máme soustavu rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}$$

Z prvej rovnice si vyjadríme x_1 , z druhej x_2 až na koniec z n -tej x_n .

$$x_1 = \frac{a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{a_{24} - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{a_{34} - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Potom si zvolíme počiatočnú aproximáciu pre x_1 až x_n (napr. 0; $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$) a dosadíme do pravej strany rovníc. Z toho nám vyjde nová aproximácia, ktorú opätovne dosadzujeme do pravej strany až kým nemáme dostatočne presný výsledok. Každú ďalšiu aproximáciu riešenia získame pomocou predpisu (dúfam, že je jasné aký je princíp, a ako sa vytvorí nasledujúci predpis):

$$\begin{aligned}
x_1^{(r+1)} &= \frac{a_{14} - a_{12}x_2^{(r)} - a_{13}x_3^{(r)}}{a_{11}} \\
x_2^{(r+1)} &= \frac{a_{24} - a_{21}x_1^{(r)} - a_{23}x_3^{(r)}}{a_{22}} \\
x_3^{(r+1)} &= \frac{a_{34} - a_{31}x_1^{(r)} - a_{32}x_2^{(r)}}{a_{33}}
\end{aligned}$$

Podmienky konvergenzie: Jacobiho metóda konverguje (neustále sa približuje k výsledku), ak je matica sústavy rovníc riadkovo alebo stĺpcovo diagonálne dominantná (keď je v každom riadku matice absolútna hodnota prvku na diagonále väčšia ako súčet absolútnych hodnôt všetkých ostatných prvkov v onom riadku, alebo keď je v každom stĺpci matice absolútna hodnota prvku na diagonále väčšia ako súčet absolútnych hodnôt všetkých ostatných prvkov v onom stĺpci).

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Příklad:

$$\begin{aligned}
15x_1 - x_2 + 2x_3 &= 30 \\
2x_1 - 10x_2 + x_3 &= 23 \\
x_1 + 3x_2 + 18x_3 &= -22
\end{aligned}$$

Matice soustavy je diagonálně dominantní, protože platí:

$$|15| > |-1| + |2|, \quad |-10| > |2| + |1|, \quad |18| > |1| + |3|.$$

Proto je konvergence metody vždy zaručena. Vypíšeme iterační vztahy:

$$\begin{aligned}
x_1^{(r+1)} &= \frac{1}{15}(30 + x_2^{(r)} - 2x_3^{(r)}) \\
x_2^{(r+1)} &= -\frac{1}{10}(23 - 2x_1^{(r)} - x_3^{(r)}) \\
x_3^{(r+1)} &= \frac{1}{18}(-22 - x_1^{(r)} - 3x_2^{(r)})
\end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci zvolíme $x = (0,0,0)^T$. Postupné získávané aproximace řešení budeme zapisovat do tabulky:

r	$x_1^{(r)}$	$x_2^{(r)}$	$x_3^{(r)}$
0	0	0	0
1	2	-2,3	-1,2222
2	2,0096	-2,0222	-0,9500
3	1,9918	-1,9930	-0,9968
4	2,0000	-2,0013	-1,0007

Je vidět, že posloupnost postupných aproximací konverguje k řešení soustavy $(2; -2; -1)$. Chybu můžeme určit jako absolutní hodnotu rozdílu výsledků dvou po sobě jdoucích iterací. Určuje se postupně pro jednotlivé proměnné.

- **Gauss-Seidelova metóda**

Je veľmi podobná Jacobiho metóde. Jediný rozdiel je, že v každom kroku (napríklad pri výpočte nového x_2), už používame najnovšiu hodnotu x_1 (nie hodnotu z predchádzajúcej iterácie). Pri rovniciach z príkladu u Jacobiho metódy by sme teda mali iteračné vzťahy vyjadrené takto:

$$\begin{aligned}x_1^{(r+1)} &= \frac{a_{14} - a_{12}x_2^{(r)} - a_{13}x_3^{(r)}}{a_{11}} \\x_2^{(r+1)} &= \frac{a_{24} - a_{21}x_1^{(r+1)} - a_{23}x_3^{(r)}}{a_{22}} \\x_3^{(r+1)} &= \frac{a_{34} - a_{31}x_1^{(r+1)} - a_{32}x_2^{(r+1)}}{a_{33}}\end{aligned}$$

Podmienky konvergence: Je-li matice soustavy pozitivně definitní, Gauss-Seidelova metoda konverguje. Ověření toho, že je daná matice pozitivně definitní, je náročné a pro velké matice prakticky neproveditelné. Naštěstí je u některých úloh z povahy řešeného problému předem jasné, že matice soustavy pozitivně definitní bude.

Neviem či treba toto vedieť (snáď nie):

Symetrická matice \mathbf{A} rádu n se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže pro každý nenulový sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$$

Příklad: Pozitivně definitní je např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

protože pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \neq (0, 0)^T$ platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

zatím co matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

není pozitivně definitní, protože např. pro $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ platí

$$(1,0)\mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 < 0 .$$

2 Numerické metódy riešenia jednej nelineárnej rovnice

Hľadáme korene x ($x \in R$) v nelineárnej rovnici $f(x) = 0$. Pri hľadaní koreňov najprv zistíme, koľko má rovnica koreňov a nájdeme intervaly obsahujúce práve jeden koreň rovnice – separácia koreňov rovnice. Následne budeme niektorou z nasledujúcich metód hľadať približný koreň rovnice.

- **Separace kořenů**

Pro nalezení počtu a polohy kořenů je vhodné prozkoumat vlastnosti funkce f a načrtnout její graf. U některých úloh je možné funkci rozdělit na dvě jejichž grafy známe (např. f_1 parabola a f_2 přímka a pod.)

$$f_1(x) = f_2(x).$$

V bodech, kde se grafy funkcí f_1 a f_2 protnou, se nacházejí kořeny původní rovnice. Při hledání kořenů je užitečná následující věta:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

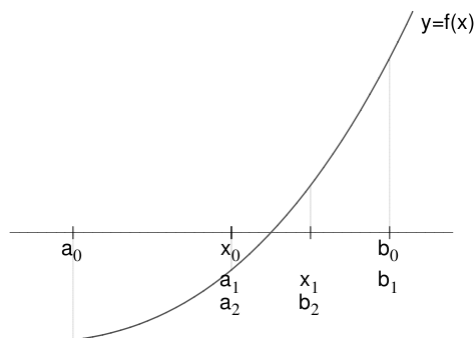
pak v intervalu $\langle a, b \rangle$ leží alespoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$. Znaménka funkčních hodnot v krajních bodech tohoto intervalu jsou opačná (tzn. funkce v tom intervalu někde protíná osu x). Kořenů rovnice může být v uvedeném intervalu i více, o jejich počtu věta nic neříká. Na druhou stranu, není-li podmínka věty splněna, neznamená to, že v intervalu $\langle a, b \rangle$ žádný koreň rovnice neleží.

- **Metóda polenia (půlení ☺) intervalov (metóda bisekcie)**

Najjednoduchšia metóda hľadania koreňa rovnice. Majme interval $\langle a, b \rangle$ taký, že $f(a) \cdot f(b) < 0$ t.j. nachádza sa v ňom aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$ (funkcia musí byť spojitá v tomto intervale). V každom kroku tento interval rozpolíme – nájdeme stred

podľa vzorca $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ a vyberieme tú polovicu intervalu v ktorej je zaručená

existencia koreňa. Která z nich to je, rozeznáme podle znamének funkčních hodnot v krajních bodech. Je-li $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$, budeme pokračovat s intervalem $\langle a_k, x_k \rangle$, v opačném případě s intervalem $\langle x_k, b_k \rangle$. (Platí-li $f(x_k) = 0$, našli jsme kořen rovnice a výpočet ukončíme.) Iteráciu ukončíme pokiaľ je polovica veľkosti posledného intervalu menšia alebo rovná požadovanej presnosti (podmienka ukončenia: $b_k - a_k < 2\varepsilon$). Potom za koreň zoberieme stred aktuálneho intervalu. Táto metóda konverguje vždy ak sa v počiatočnom intervale nachádza aspoň jeden koreň. Ak je ich tam viac nájdeme jeden z nich. Nevýhodou je pomalá konvergencia.



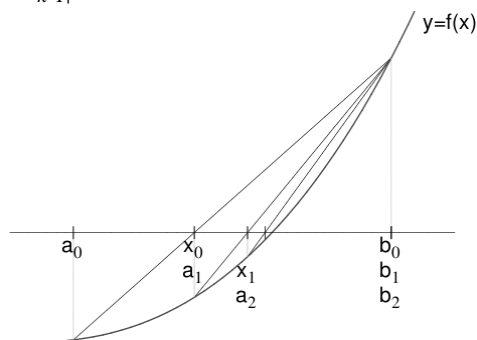
- **Metoda regula falsi**

Je velmi podobná metodě polení intervalov. Jediný rozdíl je v tom, že interval nedělíme v polovici, ale v místě průsečíku úsečky mezi body $[a_k, f(a_k)]$ a $[b_k, f(b_k)]$. Průsečík vypočítáme ako:

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(b_k) .$$

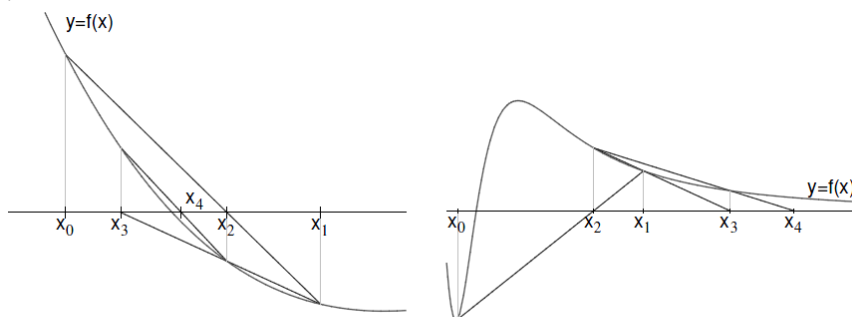
Metoda vždy konverguje, je obvykle rychlejší jako předcházející metoda ale v určitých případech může být pomalší.

Podmínka ukončení: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.



- **Metoda sečen (sečnic)**

Metoda sečen je velmi podobná jako metoda regula falsi. Vyjdeme z intervalu $\langle a, b \rangle$ obsahujícího kořen rovnice. Označíme $x_0 = a$ a $x_1 = b$. Vedeme sečnu body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ a najdeme její průsečík s osou x. Ten označíme x_2 . Na rozdíl od metody regula falsi však nyní nevybíráme interval obsahující kořen, ale vedeme sečnu body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, její průsečík označíme x_3 , pak vedeme sečnu body $[x_2, f(x_2)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ atd. – viz obrázek.



Metoda sečen může divergovat.

V k-tem kroku metody počítáme aproximaci kořene podle vzorce

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k)$$

kde $x_0 = a$, $x_1 = b$. Výpočet ukončíme, když je splněna podmínka $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

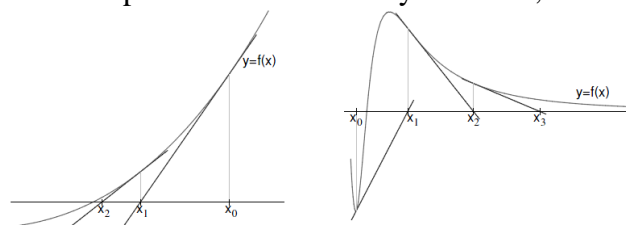
Metoda sečen je rychlejší než metoda regula falsi, nemusí ale vždy konvergovat. Protože je obtížné předem zjistit, zda metoda pro danou rovnici konverguje nebo diverguje, je vhodné zadat při výpočtu maximální počet kroků. Je-li tento počet překročen a kořen rovnice jsme nenašli, výpočet ukončíme s tím, že metoda diverguje. Pak je nutno změnit počáteční aproximace nebo zvolit jinou metodu.

- **Newtonova metóda (metóda dotyčníc (tečen))**

Pracuje sa s dotyčnicami – predpokladáme, že funkcia f má deriváciu. Princíp je taký, že zvolíme počiatočnú aproximáciu x_0 , vedieme dotyčnicu v bode $[x_0, f(x_0)]$, jej priesečník s osou x označíme x_1 . Teda x_1 je nová aproximácia a pokračujeme tak isto ako pri prvej aproximácii stále dokola až kým $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Novú aproximáciu vypočítame rovnicou:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Je to najefektívnejšia metóda pre riešenie nelineárnych rovníc, nemusí však konvergovať.



Newtonova metóda môže divergovať

Podmienky konvergenzie: (Fourierova podmienka) Nech v intervale $\langle a, b \rangle$ leží jediný koreň $f(x) = 0$ a nech $f'(x)$ a $f''(x)$ sú spojité a nemenia znamienka na intervale $\langle a, b \rangle$. Ak zvolíme za počiatočnú podmienku aproximáciu $x_0 \in \langle a, b \rangle$ tak, aby bola splnená podmienka

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Newtonova metóda bude konvergovať.

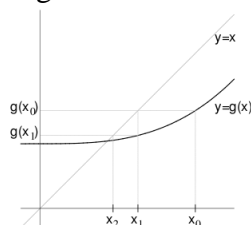
To, že $f'(x)$ nemění znaménko na intervale $\langle a, b \rangle$, znamená, že funkcie f buď na celém intervale roste, alebo na celém intervale klesá. To, že znaménko nemění $f''(x)$, znamená, že funkcie f je buď na celém intervale konvexní (nad tečnou), alebo je na celém intervale konkávní (pod tečnou). Podmínka znamená, že za x_0 vybereme bod, v němž má funkční hodnota stejné znaménko jako druhá derivace.

- **Metóda prostej iterácie**

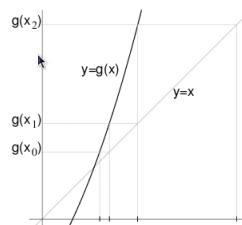
Princíp je v úprave funkcie $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$. Funkcia g sa nazýva iteračná funkcia. Miesto koreňa pôvodnej funkcie budeme hľadať pevný bod funkcie $g(x)$. Zvolíme počiatočnú aproximáciu x_0 a postupne budeme počítat novú aproximáciu podľa vzťahu:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Funkcia nemusí konvergovať.



Obrázek 5.16: Metóda prostej iterácie



Obrázek 5.17: Metóda prostej iterácie môže divergovať

Podmienky konvergenzie: Nech g zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ do seba a má na tomto intervale deriváciu. Ak existuje číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že

$$|g'(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in \langle a, b \rangle,$$

potom v intervale $\langle a, b \rangle$ existuje pevný bod ξ funkcie g a postupnosť postupných aproximácií k nemu konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

3 Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Společným znakem všech dále uvedených metod je, že řešení nehledáme jako spojitou funkci, definovanou na celém zkoumaném intervalu $\langle a, b \rangle$, ale hodnoty přibližného řešení počítáme pouze v konečném počtu bodů $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Těmto bodům říkáme uzlové body nebo uzly sítě a množině x_0, x_1, \dots, x_n říkáme síť. Rozdíl $h_i = x_{i+1} - x_i$ se nazývá krok sítě v uzlu x_i .

Řešení diferenciální rovnice prvního řádu se zadanou počáteční podmínkou

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Uvedené metody patří mezi jednokrokové – vycházejí jen z aktuálního stavu, vícevkrokové metody používají historii stavů.

- **Eulerova metoda**

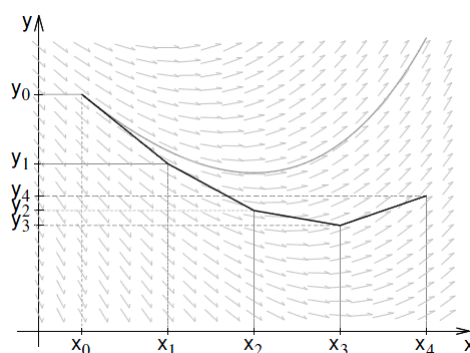
Je metoda prvního stupně. Vo všech bodech v síti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ platí:

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)).$$

Derivace funkce $y'(x_i)$ vlastně vyjadřuje směrnicu tečny ku grafu původní funkce v daném bodě.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Pomocí tohoto vzorce můžeme počítat hodnoty v dalších uzlech pomocí hodnot v předcházejícím uzlu. h je velikost kroku (x postupně zvyšujeme o h). Hodnoty řešení v bodě x_0 poznáme z počáteční podmínky (např.: PP: $y(0) = 1$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$). V reálných příkladech: $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$.



1. modifikace Eulerovy metody:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2$$

2. modifikace Eulerovy metody:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)$$

- **Metódy Runge-Kutta**

Obečný vzorec pre Runge-Kuttové metódy je:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + \dots + w_s k_s)$$

kde:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_i = f\left(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right), \quad i = 2, \dots, s$$

a w_i , α_i a β_{ij} sú konštanty volené tak, aby metóda mala maximálny stupeň.

Modifikácie Eulerovej metódy patria tiež medzi Runge-Kuttové metódy.

Najznámejšia je nasledujúca Runge-Kutta metóda 4-tého stupňa. Často keď sa hovorí o Runge-Kutta metóde, myslí sa práve táto.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

Runge-Kutta 2. stupňa (rádu):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2 \end{aligned}$$

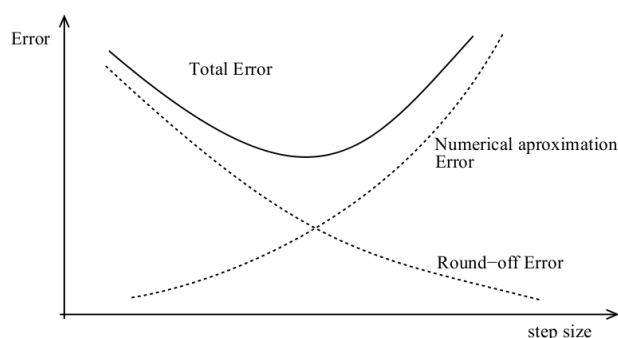
- **Vícekrokové metódy**

U vícekrokových metod počítame približné riešenie v ďalšom uzlovém bode sítě pomocí několika předchozích uzlu. K výpočtu následujícího členu je využito předchozích výsledků. Jejich slabina spočívá v pomalém „rozjezdu“. Pokud je pro výpočet třeba např. čtyř předchozích členů, musíme je na začátku aproximace spočítat jedou z jednokrokových metod, většinou RK4. Vícekrokové metody přestávají být efektivní ve chvíli, kdy je funkce nespojitá. Při nespojitostech je třeba opětovného hledání prvních bodů a to metodu brzdí. *(Neviem či má význam sa k nim učiť niečo viac, ja ich v poznámkach z matiky ani nemám.)*

- **Chyby numerických metod**

Při každé aproximaci musíme počítat s faktorem chyby. Známe chyby dvojího typu – lokální a akumulované. Lokální chyby vznikají v každém kroku a může jít buď o chybu zaokrouhlovací (round-off error) nebo o chybu numerické aproximace (truncation error). Akumulované chyby se sbírají po celou dobu výpočtu.

Přesnost výpočtu je závislá na velikosti integračního kroku. Neplatí však, že čím menší krok, tím vyšší přesnost. Při zmenšení kroku pod určitou hodnotu dojde k velkému nárůstu chyby numerické aproximace (je to záležitost toho jak počítač reprezentuje data a že bude mít málo platných číslic – viz reprezentace desetinných čísel). Obrázek ilustruje hledání ideální délky kroku.



Hledání ideální délky kroku.

4 Pravděpodobnost

Písmeno Ω bude značit množinu všech hodnot, kterých náhodná veličina X může nabývat. Bude to zpravidla množina všech možných výsledků experimentu nebo hry. Velkými písmeny (např. A, B, \dots) budeme označovat nějaké podmnožiny množiny Ω a budeme jim říkat náhodné jevy. Když řekneme, že nastal jev A , budeme tím rozumět, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z množiny A . Symbol $P(A)$ bude označovat pravděpodobnost, že nastane jev A . Pravděpodobnost splňuje následující vlastnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Ω označuje jev jistý, jehož pravděpodobnost je $P(\Omega) = 1$, prázdná množina \emptyset znamená jev nemožný, pro který $P(\emptyset) = 0$.
- Pokud náhodné jevy A_1, A_2, \dots, A_n jsou po dvou disjunktní, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu jednotlivých pravděpodobností.
- **Klasická pravděpodobnost**
Klasická pravděpodobnost jevu A se definuje jako podíl počtu příznivých výsledků (počet prvků množiny A) a všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω). Zvislé číary v nasledujúcom vzorci označujú počet prvkov množiny.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Klasickú pravdepodobnosť môžeme použiť len vtedy ak je množina Ω konečná a všetky výsledky pokusu alebo hry nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou (napr. hod kockou).

- **Geometrická pravděpodobnost**
Geometrická pravděpodobnost jevu A se definuje jako podíl miery (CZ: míry) množiny příznivých výsledků (miery množ. A) a miery množiny všech možných výsledků (miery množ. Ω). Míra množiny je složitý pojem, zjednodušeně se dá povedat že mierou intervalu rozumíme jeho dĺžku, mierou roviny jej obsah a mierou časti priestoru jeho objem.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Geometrickú pravdepodobnosť používame vtedy ak je množina Ω nespočetná a všetky výsledky pokusu alebo hry nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou (sú rovnako pravdepodobné).

- **Diskrétna pravdepodobnosť**

Používame je vtedy keď množina Ω je konečná ($\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$) alebo spočetná ($\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots$), pričom všetky ω_i nemusia nastať s rovnakou pravdepodobnosťou. Musí však platiť že súčet pravdepodobností je 1: $\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$.

Diskrétnu pravdepodobnosť javu A definujeme ako súčet pravdepodobností tých elementárnych javov ω_i , ktoré sú prvkami množiny A .

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i)$$

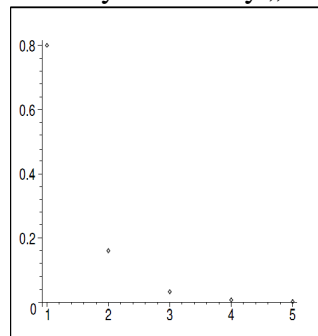
Právě jsme popsali rozdělení veličiny, kde jednotlivé elementární hodnoty 1, 2, 3, 4, ... nastávají s různou pravděpodobností. Těchto hodnot je nekonečně mnoho a víme, že musí splňovat vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1 .$$

Veličina X se nazývá **diskrétní náhodná veličina** – nikoliv proto, že je nenápadná, ale že nabývá tzv. diskrétních hodnot, což jsou například takové hodnoty, které se liší o násobek určité konstanty (v našem případě konstanty 1). Funkce, jejíž hodnoty jsme právě určili, se nazývá pravděpodobnostní funkce a označuje se většinou $p(x)$, což je ještě více zkrácený zápis:

$$p(x) = P(X = x)$$

(čti: pravděpodobnost, že „velké X “ nabývá hodnoty „malé x “).



Príklad diskkrétnej pravdepodobnostnej funkcie.

Pro popis rozdělení náhodných veličin se definuje tzv. **distribuční funkce** $F(x)$ předpisem

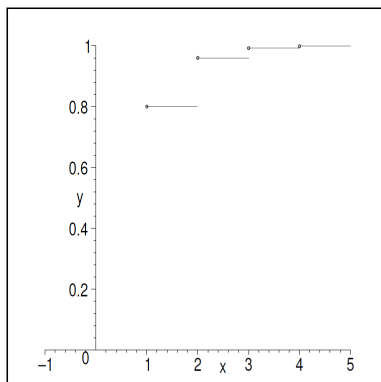
$$F(x) = P(X < x) .$$

Aby nedošlo k nedorozumění, tento vztah čteme: hodnota funkce F v bode „malé x “ je rovna pravděpodobnosti, že náhodná veličina „ velké X “ nabude hodnoty menší než „malé x “, tj. hodnoty z intervalu $(-\infty, x)$.

Pro diskrétní veličinu lze dosadit do pravé strany tohoto definičního vztahu:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k < x} p(k) .$$

U diskretní veličiny je distribuční funkce schodového tvaru - jedná se o funkci, která je po částech konstantní, pouze v bodech 1, 2, 3, ... dochází ke změně (ke schodu), kde velikost změny (= výška schodu) v bode k je rovna právě hodnotě $p(k)$. Body vyznačené na levém konci každého ze schodu prázdným kolečkem naznačují, že funkční hodnota distribuční funkce v bode schodu je definována ne v bode prázdného kolečka, ale dole u paty nižšího schodu (ještě nezvýšená). Například $F(2) = 0,8$. Distribuční funkce je tedy zleva spojitá funkce.



Příklad diskretní distribuční funkce.

- **Spojité pravděpodobnost'**

Spojité rozdelenie k popisu veličiny X môžeme použiť vtedy, keď X nadobúda hodnoty z množiny Ω , ktorá je nespočetne nekonečná (spravidla $\Omega = \mathbf{R}$), pritom jednotlivé hodnoty nemusí nadobúdať s rovnakou pravdepodobnosťou. Rôznosť s akou veličina X nadobúda jednotlivé hodnoty je určená funkciou $f(x)$ ktorá sa nazýva hustota. Musí pritom vždy platiť, že $\int_{\Omega} f(x)dx = 1$.

Spojité pravdepodobnosť javu, že veličina X nadobudne hodnotu z intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a \leq b$, definujeme ako integrál z hustoty:

$$P(X \in \langle a, b \rangle) = \int_a^b f(x)dx .$$

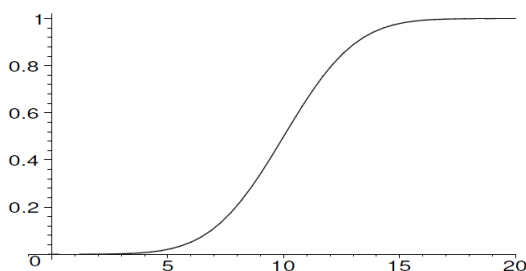
Podobne ako pri diskretnej pravdepodobnosti, aj tu sa definuje distribučná funkcia (rovnakým spôsobom):

$$F(x) = P(X < x) .$$

Teraz sa však ku konkrétnemu výpočtu funkčnej hodnoty používa hustota $f(x)$:

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x f(t)dt .$$

Mezi hustotou a distribuční funkcí u spojitého rozdělení pravděpodobnosti platí zajímavý vztah, a sice hustota je derivací distribuční funkce $F'(x) = f(x)$ v těch bodech x , kde existuje derivace funkce $F(x)$.



Příklad spojitě distribuční funkcie $F(x)$ daného normálneho rozdelenia.

5 Rozloženie pravdepodobnosti

- **Binomické rozdelenie pravdepodobnosti**

Uvažujme experiment takej povahy, že môžu nastať len dva rôzne výsledky, ktoré se navzájom vylučujú (nemôže k nim dojsť súčasne): úspech a neúspech.

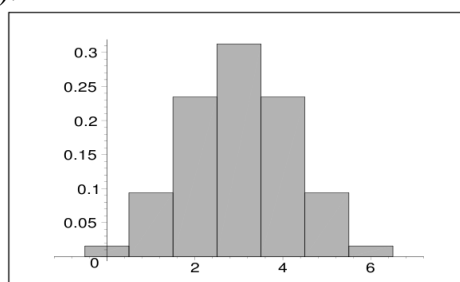
Pravdepodobnosť úspechu je p , pravdepodobnosť neúspechu $1 - p$. Náhodná veličina X , ktorá udáva počet výskytu úspechu pri N nezávislých opakovaniach experimentu, má tzv. binomické rozdelenie pravdepodobnosti (s parametrami N, p) a nabýva hodnôt z množiny $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = r) = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{N-r}.$$

Mluví sa zde o nezávislých opakovaniach experimentu. Slovo „nezávislých“ znamená, že výskyt úspechu pri prvom opakovaní experimentu nemá vliv na to, zda pri druhom a ďalších opakovaniach nastane úspech alebo ne. Skutočnosť, že veličina X má binomické rozdelenie s parametrami N, p , budeme označovať

$$X \sim Bi(N, p).$$

N je počet opakovaniach pokusu, p je pravdepodobnosť úspechu, r je počet úspechu pro ktoré hľadáme pravdepodobnosť (napr. pravdepodobnosť že pri 6 hodech kostkou padne 3× šestka $p = 1/6$, $N = 6$, $r = 3$).



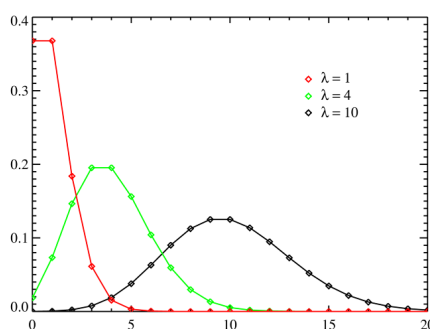
Obrázek 11.63: Histogram pravdepodobností binomického rozdelenia pro $N = 6$, $p = 0,5$.

- **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti**

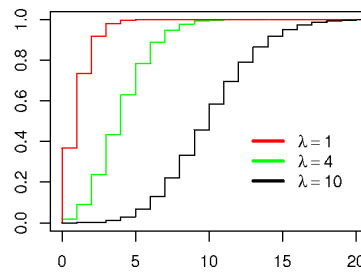
Pokud diskretná veličina Y udáva počet výskytu udalosti za časovou jednotku $t = 1$, její rozdelenie se nazýva **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti**: veličina Y nabýva hodnôt $0, 1, 2, 3, \dots$ s pravdepodobnosťami

$$p_k = P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

Konstanta λ označuje priemerný počet výskytů udalosti za časovou jednotku $t = 1$ a k počet výskytů pro které hľadáme pravdepodobnosť.



Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti.



Graf distribučnej funkcie (čo síce nie je ideálny graf - nemali by tam byť zvislé čiarky, ale budiš)

- **Exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti**

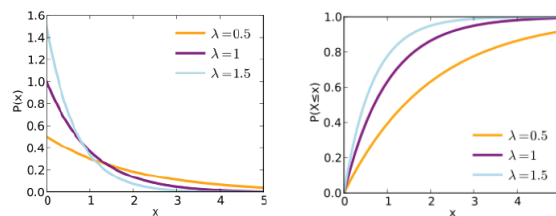
Pravdepodobnosť výskytu udalosti v intervale $(t, t+h)$. Tá závisí iba na h , nie na počte udalostí ktoré nastali pred okamžikom t ani na t samotnom (používa sa na vyjadrenie doby čakania na určitú udalosť). Spojitá veličina X udáva dobu medzi dvoma výskytmi náhodnej udalosti. Pre hustotu $f(t)$ exponenciálneho rozloženia platí:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}$$

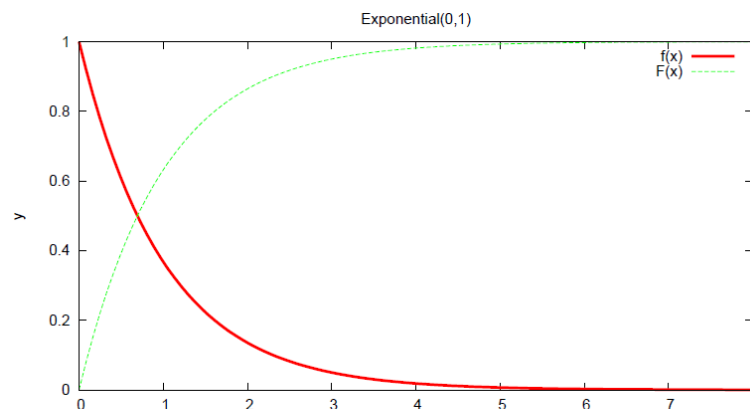
Distribučná funkcia:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \int_0^x f(x)dx & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}$$

Exponenciálne rozloženie pravdepodobnosti teda hovorí, že k výskytu náhodnej udalosti dochádza priemerne raz za $\frac{1}{\lambda}$ časových jednotiek, t.j. λ -krát za časovú jednotku (taký je význam konštanty λ).



exponenciálne rozdelenie a jeho distribučná funkcia



Príklad exponenciálneho rozdelenia

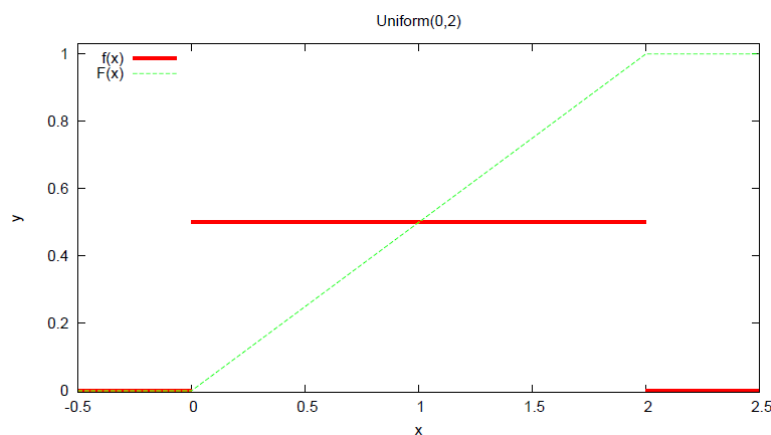
- **Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti**

Povedzme, že funkcia má rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti ak nadobúda hodnoty z intervalu $\langle a, b \rangle$ konečnej dĺžky a ľubovoľná hodnota z tohto intervalu je rovnako pravdepodobná ako tie ostatné. Hustota tejto veličiny je daná vzťahom:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in \langle a; b \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribučná funkcia $F(t)$:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a; b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$



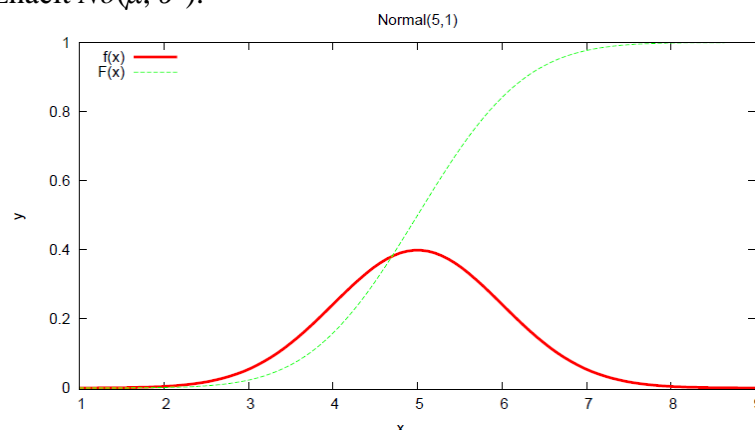
Príklad rovnomerného rozdelenia.

- **Normálne rozdelenie pravdepodobnosti**

Normální rozdělání pravděpodobnosti je rozdělání pro veličiny spojitého typu a má hustotu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Vzorec této funkce na první pohled nemá příjemný tvar – asi by ji nikdo nechtěl potkat v noci na liduprázdné ulici. Dalo by se spočítat, že střední hodnota veličiny X s rozdělením zadaným touto hustotou je rovna parametru μ , rozptyl je roven parametru σ^2 . Proto budeme značit $No(\mu, \sigma^2)$.



Príklad normálneho rozdelenia.

6 Generovanie pseudonáhodných čísel

Generovanie skutočne náhodných čísel je problematické. Je na to potrebné špeciálne vybavenie a trvá to veľa času. Preto generujeme len pseudonáhodné čísla. Základom je kvalitný generátor rovnomerného rozloženia v intervale $<0, 1)$. Typicky sa potom transformujú (tie vygenerované čísla) špeciálnymi algoritmami na potrebné rozloženie pravdepodobnosti.

- **Kongurentný generátor**

Generuje rovnomerné rozloženie. Generuje konečnú postupnosť – perióda generátoru.

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \bmod m$$

kde konštanty a, b, m musia mať vhodné hodnoty.

Generuje čísla v rozsahu $0 \leq x_i < m$. Pre prevod do intervalu $<0, 1)$ musíme spraviť modulo m . Na začiatku treba zvoliť x_0 , tzv. seed.

- **Transformácie na iné rozloženia**

metódy:

- inverzná transformácia – vychádza z inverznej podoby distribučnej funkcie cieľového rozloženia. Pri niektorých rozloženiach sa nedá použiť (napr. keď sa nedá distrib. funkcia vyjadriť elementárnymi funkciami).
- vyučovacia – sériou pokusov hľadáme číslo, ktoré vyhovuje funkcii hustoty cieľového rozloženia. Nie je vhodná pre neobmedzené rozloženia.
- kompozičná – zložitú funkciu hustoty rozložíme na niekoľko jednoduchších (intervaly, na každý sa dá použiť iná metóda).
- iné špecificky vytvorené pre dané rozloženia

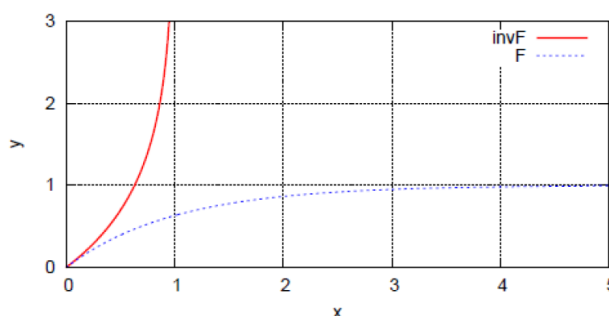
- **Metóda inverznej transformácie**

Používa sa inverzná transformačná funkcia. Tá je definovaná práve na intervale $<0; 1)$. Generujú sa čísla v tomto intervale, a tie sa nahrádzajú funkčnou hodnotou inverznej distribučnej funkcie v danom bode.

- inverze distribuční funkce: F^{-1}
- generování $x = R(0, 1)$ (s rovnoměrným rozložením)
- výsledek: $y = F^{-1}(x)$

Příklad:

Exponenciální rozložení $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-A}{b}}$
 $y = A - b \cdot \ln(1 - x)$

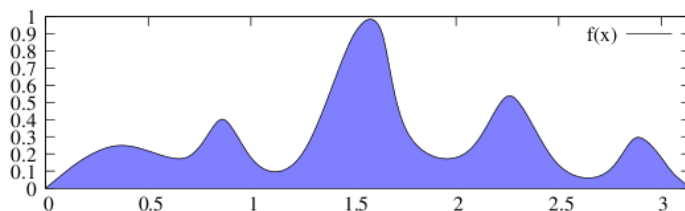


Obrázek 11: Inverzní transformace pro exponenciální rozložení.

- **Vylučovacia metóda**

Využíva princíp náhodného bodu na obdĺžniku ohraničujúcom graf funkcie. Ak sa trafíme pod funkciu, berieme práve vygenerované náhodné číslo, inak ho zahodíme a generujeme novú dvojicu súradníc.

Táto metóda nie je vhodná pre funkcie ktoré sa blížia k nekonečnu alebo s malým pomerom plochy pod funkciou a obdĺžnika ohraničujúceho funkciu. Dokáže ale generovať funkcie pre ktoré je obtiažne vypočítať distribučnú funkciu a jej inverziu.



Obrázek 3.7: Příklad použití vylučovací metody