1 Tabla v predikátové logice

Příklad 1.1: Pomocí tabel dokažte, že následující formule jsou tautologie.

a) $\Phi_1 \equiv \forall x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$

b) $\Phi_2 \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$

c) $\Phi_3 \equiv \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x))$

d) $\Phi_4 \equiv \exists y \forall x(P(x,y) \Leftrightarrow P(x,x)) \Rightarrow \neg \forall x \exists y \forall z(P(z,y) \Leftrightarrow \neg P(z,x))$

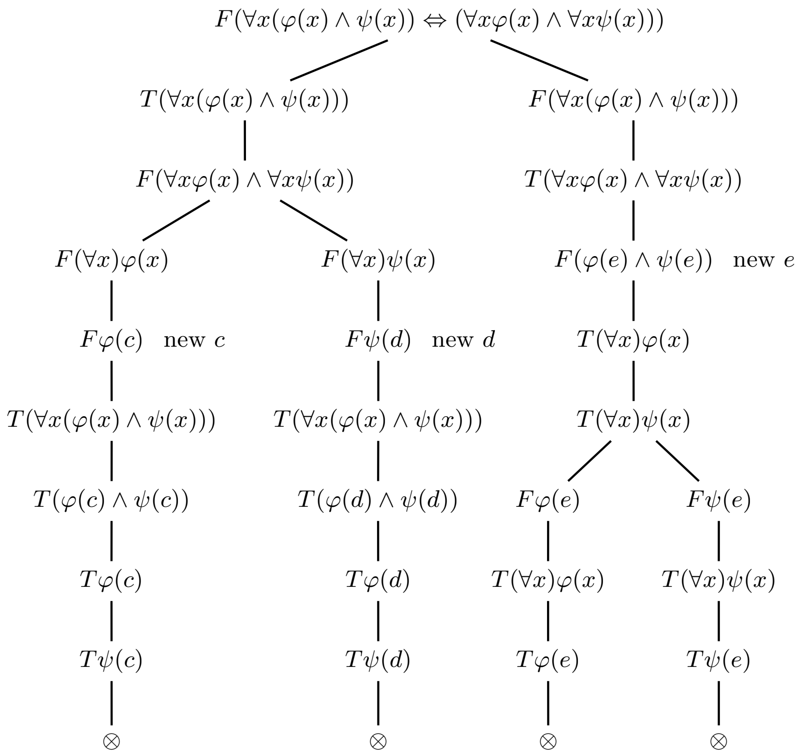
Řešení 1.1: Při konstrukci ukončeného tabla v predikátové logice postupujeme podobně jako v případě logiky výrokové. Redukci položky $T(\exists x)\varphi(x)$ (resp. $F(\forall x)\varphi(x)$) provedeme tak, že na konec cesty přidáme položku $T\varphi(c)$ (resp. $F\varphi(c)$), kde c je nová konstanta, která se nevyskytuje v žádném uzlu expandované cesty. Položku $T(\forall x)\varphi(x)$ (resp. $F(\exists x)\varphi(x)$) redukujeme na $T\varphi(t)$ (resp. $F\varphi(t)$), kde t je libovolný ground term (tj. term bez proměnných). Pozor, při redukci položek $T(\forall x)\varphi(x)$ a $F(\exists x)\varphi(x)$ nelze z přidávaného atomického tabla vynechat jeho kořen - je tedy nutné vždy zopakovat redukovanou položku.

Ukončená tabla pro formule Φ_1 (vlevo) a Φ_2 (vpravo):

$$
\begin{array}{c}
F(\forall x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \varphi(x)) \\
| \\
T\forall x \varphi(x) \\
| \\
F\exists x \varphi(x) \\
| \\
T\forall x \varphi(x) \\
| \\
T\varphi(c) \\
| \\
F\exists x \varphi(x) \\
| \\
F\varphi(c) \\
| \\
\otimes
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
F\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)) \\
| \\
T\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
| \\
F(\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)) \\
| \\
T\forall x P(x) \\
| \\
F\forall x Q(x) \\
| \\
FQ(c) \quad \text{new } c \\
| \\
T\forall x P(x) \\
| \\
TP(c) \\
| \\
T\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
| \\
T(P(c) \Rightarrow Q(c)) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
FP(c) \qquad TQ(c) \\
| \qquad\qquad | \\
\otimes \qquad\qquad \otimes
\end{array}
$$

Tablo je *ukončené*, pokud je každá cesta v tablu ukončená. Cesta je *ukončená*, pokud je sporná nebo je každý uzel ležící na této cestě redukovaný. Cesta je sporná, pokud se na ní vyskutuje $T\alpha$ a $F\alpha$ pro nějakou uzavřenou formuli α. Uzel odpovídající i-tému výskytu položky $T(\forall x)\varphi(x)$ na cestě P je redukovaný, pokud se na cestě vyskytuje položka $T\varphi(t_i)$ a $(i+1)$-ní výskyt položky $T(\forall x)\varphi(x)$, kde $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ jsou všechny ground termy. Analogicky je definovaná redukovanost položek $F(\exists x)\varphi(x)$. Položka jiného typu je na cestě P redukovaná, pokud bylo při tvorbě tabla přidáno atomické tablo pro tuto položku k prefixu cesty P.

Ukončené tablo pro formuli Φ_3:

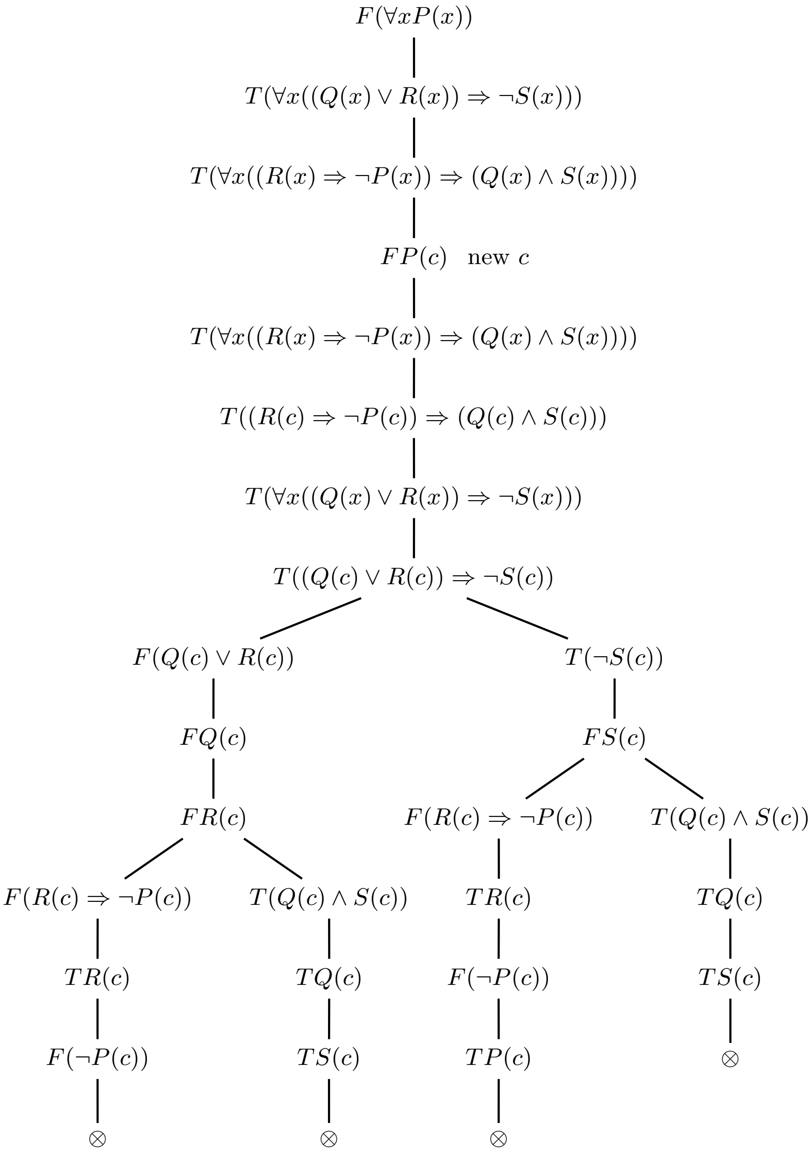


Řešení posledního příkladu ponecháváme na čtenáři. □

Příklad 1.2: Dokažte, že formule $\forall x P(x)$ logicky vyplývá z předpokladů:

$$\forall x((Q(x) \vee R(x)) \Rightarrow \neg S(x))$$
$$\forall x((R(x) \Rightarrow \neg P(x)) \Rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$$

Řešení 1.2: Dokazování platnosti logických úsudků (formule závěru ψ logicky vyplývá z předpokladů Σ) provádíme stejně jako v případě logiky výrokové.



□

Příklad 1.3: Pomocí tabel dokažte platnost následujících tvrzení.

a) Předpokládejte, že platí následující tři tvrzení:

- Existuje drak (označme $D/1$).
- Draci spí ($S/1$) nebo loví ($L/1$).
- Když jsou draci hladoví ($H/1$), tak nespí.

Důsledek: *Když jsou draci hladoví, tak loví.*

b) Předpokládejte, že platí následující dvě tvrzení:

- Všichni holiči ($B/1$) holí ($S/2$) každého, kdo se neholí sám.
- Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

Důsledek: *Holiči neexistují.*

Řešení 1.3: Úsudky nejprve převedeme z vět přirozeného jazyka na formule predikátové logiky prvního řádu. Tablový důkaz poté konstruujeme nad získanými formulemi stejně jako v předchozím příkladě (v tablech již neznačíme nové konstanty).

a) převodem úsudku o spících dracích obdržíme formule:

$$\begin{array}{rl} \text{Předpoklady:} & \exists x D(x), \\ & \forall x(D(x) \Rightarrow (S(x) \vee L(x))), \\ & \forall x((D(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg S(x)), \\ \text{Závěr:} & \forall x((D(x) \wedge H(x)) \Rightarrow L(x)). \end{array}$$

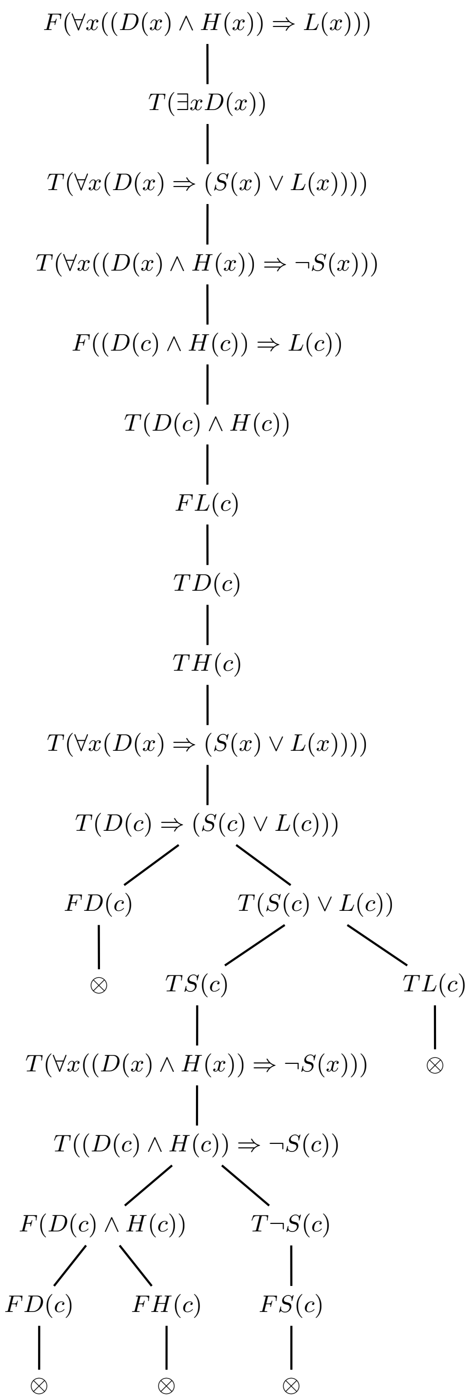
Tablový důkaz úsudku je uveden na obrázku 1.

b) Formule získané převodem na formule predikátové logiky prvního řádu jsou:

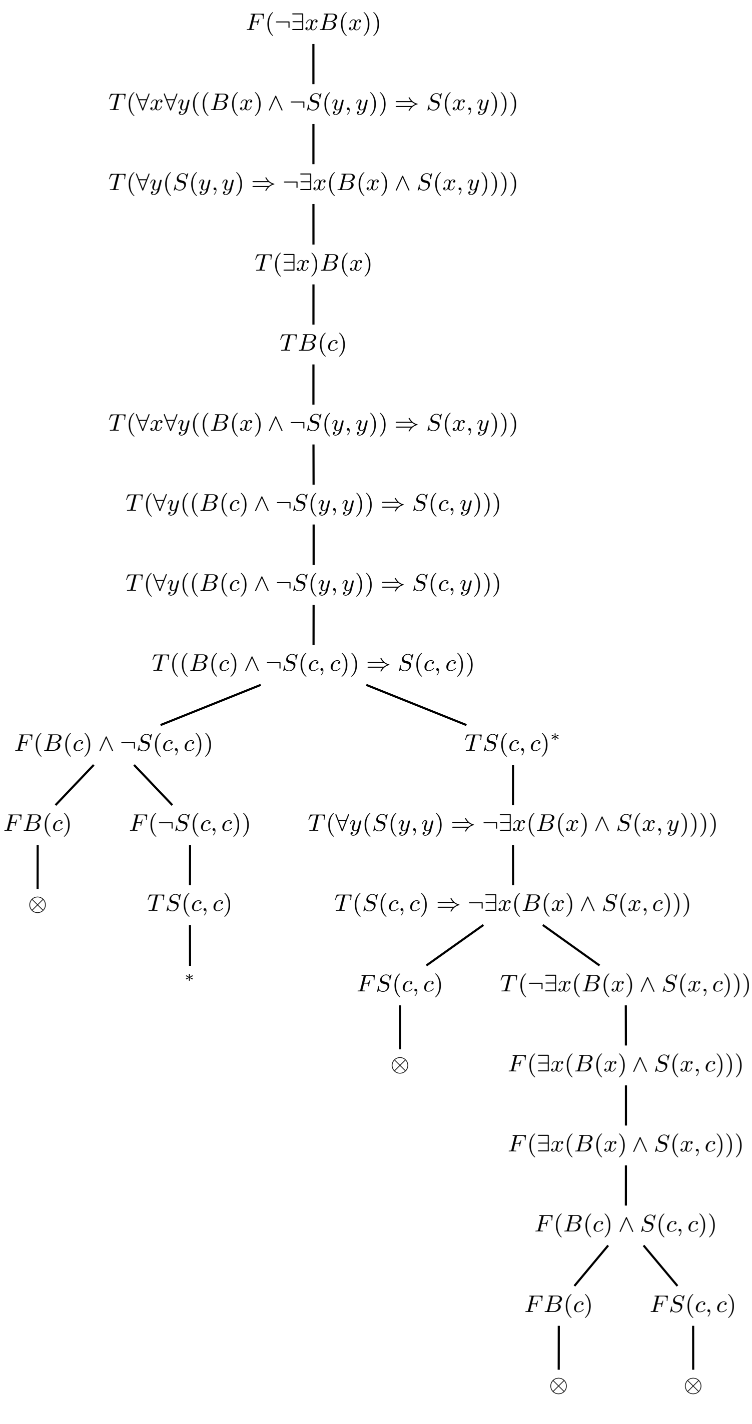
$$\begin{array}{rl} \text{Předpoklady:} & \forall x \forall y((B(x) \wedge \neg S(y,y)) \Rightarrow S(x,y)), \\ & \forall y(S(y,y) \Rightarrow \neg \exists x(B(x) \wedge S\ (x,y))), \\ \text{Závěr:} & \neg \exists x B(x). \end{array}$$

Tablo dokazující platnost úsudku je uvedena na obrázku 2. Přitom ukončené kontradiktorické tablo získáme nahrazením uzlu * podstromem uzlu $TS(c,c)^*$.

□



Obrázek 1: Tablový důkaz úsudku o spících dracích.



Obrázek 2: Tablový důkaz úsudku o holičích.