DOKUMENTÁCIA K PROJEKTU PRE PREDMET IZP A IUS

ITERAČNÉ VÝPOČTY

2.PROJEKT

6.11.2010

AUTOR: MICHAL LUKÁČ, xlukac05@stud.fit.vutbr.cz
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

OBSAH

KAPITOLA 1
ÚVOD

Jednou z možností ako vypočítať rôzne funkcie sú iteračné výpočty pomocou nekonečných radov, akým je napríklad Taylorov rad. Problémom takýchto radov je, že niektoré sú definované iba pre určitý interval, prípadne konvergujú teda sa približujú k výsledku veľmi pomaly. Práve pojem ako konvergencia je pri iteračných algoritmov kľúčová.

Táto dokumentácia vznikla ako súčasť pre druhý projekt do predmetu Základy programovania a Úvod do softwarového inžinierstva. V tomto dokumente je popísaná problematika riešenia iteračných výpočtov funkcie hyperbolický tangens, všeobecného logaritmu a štatistických funkcií - vážený aritmetický priemer a vážený kvadratický priemer. Vytvoreným programom je jednoduchá konzolová aplikácia, ktorá sa spúšťa spolu s parametrami príkazového riadku.

Text je členený na jednotlivé kapitoly a ich podkapitoly. Druhá kapitola sa zaoberá analýzou problému a princípom riešenia iteračných výpočtov. Kapitola 3 sa venuje navrhnutým riešeniam a testom s ktorými sa nakoniec testoval tento program. Konkrétnu implementáciu v programe popisujem v kapitole 4. V závere som zhodnotil svoje riešenie. Na konci dokumentácie je uvedená použitá literatúra a metriky kódu.

KAPITOLA 2

ANALÝZA PROBLÉMU A MOŽNOSTI JEHO RIEŠENIA

2.1 ZADANIE PROBLÉMU

Úlohou v tomto projekte bolo vytvorenie programu pre počítanie matematických a štatistických funkcií pomocou iteračných algoritmov.

Zadanými úlohamy sú: hyperbolický tangens
všeobecný logaritmus
vážený aritmetický priemer
vážený kvadratický priemer

Program podľa zadaného parametru očakáva na vstupe číselné hodnoty a posiela na výstup odpovedajúce výsledky. Výsledky funkcií sa vypisujú priebežne, pričom výsledky štatistických funkcií sa posielajú na výstup vždy po druhom zadaní vstupnej hodnoty. Pre ošetrenie výnimočných prípadov treba použiť makra NAN a INFINITY.

2.2 MATEMATICKÉ A ŠTATISTICKÉ FUNKCIE

Vlastnosti jednotlivých matematických funkcií sú zaujímavé z hľadiska podmienok a skrátenia výpočtov. Funkcia hyperbolický tangens ďalej označovaná ako tanh, je funkcia nepárna teda platí, že $f(-x) = -f(x)$. O tejto funkcií vieme, že je zdola ohraničená -1 a zhora ohraničená +1. Funkcia je definovaná na všetkých reálnych čislach a je na celom svojom definičnom obore rastúca. Pričom limita funkcie $\lim_{\pm\infty} = \pm 1$. Táto limita sa dá využiť na skrátenie iteračných výpočtov keďže od určitého intervalu bude funkcia nadobúdať vždy hodnotu ± 1. Naopak definičný obor obecného logaritmu musí byť väčší ako 0. A základ logaritmu a musí byť v intervale $A \in R^{+}$-{1}. Zadané štatistické funkcie, vážený aritmetický a kvadratický priemer, sú o niečo jednoduchšie, keďže výpočet nezohľadňujeme na presnosť epsilon. Pri štatistických funkciách musí byť hodnota váhy prvku nezáporná.

2.3 PROBLEMATIKA KONVERGENCIE A REKURENTNOSTI

Rekurentný problém je problém kedy výsledky nového výpočtu závisia na predchádzajúcich výpočtoch. S rekurentnými problémami sa stretávame napríklad pri štatistických funkciách a iných iteračných výpočtoch. Problémom výpočtu matematických funkcií pomocou taylorových radov je, že rýchlo konvergujú iba na určitom intervale.

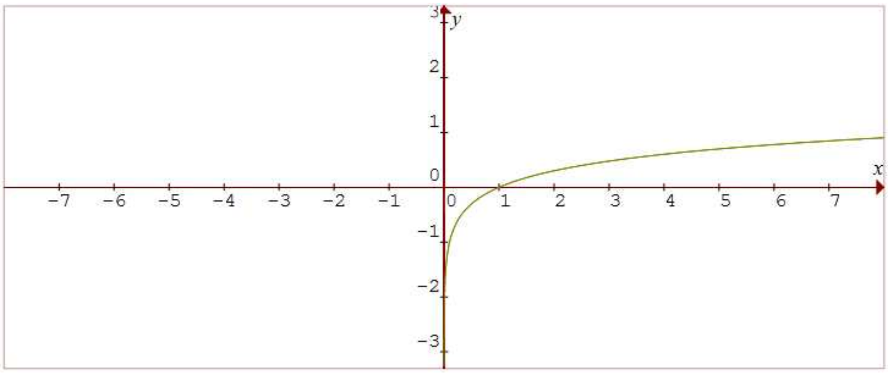
Hovoríme, že rada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentná ak existuje limita $lim_{n\to\infty} s_n$ postupnosti čiastočných súčtov $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a má konečnú hodnotu s.([1],str.692)

2.4 ITERÁČNÉ VÝPOČTY

Zadané iteračné výpočty môžeme riešiť viacerými spôsobmi. Pri štatistických funkciách sa výsledok počíta vždy z dvoch zadaných hodnôt. Vzorce pre štatistické ale aj matematické funkcie môžeme nájsť v Matematických vzorcoch od H.Bartsch(uvedené sú v ďalšej kapitole). U výpočtu hyperbolického tangensu a všeobecného logaritmu, môžeme využiť riešenie pomocou taylorovej rady. Pri všeobecnom logaritmu vychádzame zo vzťahu:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

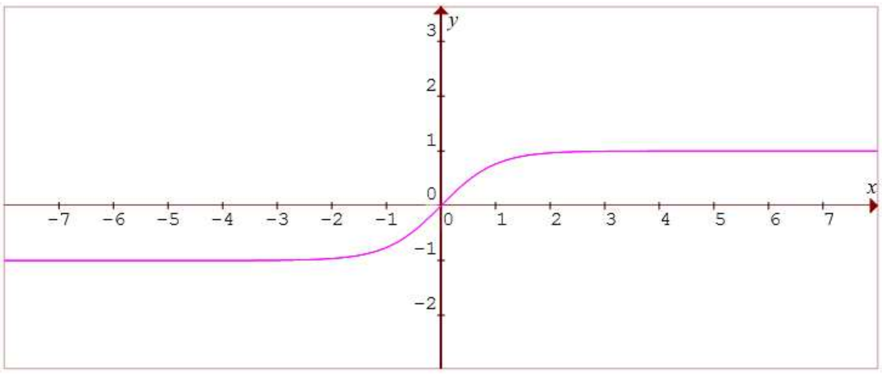
Graf funkcie logaritmus(základ 10):



Pre určité intervaly existuje viacero taylorových radov prirodzeného logaritmu. Podobný spôsob sa nám naskytuje aj pri riešení hyperbolického tangensu. Môžem použiť priamo taylorov rad pre výpočet tanh alebo využiť vzťah:

$$\tanh x = \frac{\sinh \mathrm{x}}{\cosh \mathrm{x}}$$

Graf funkcie tanh:



kde sinh aj cosh počítam opäť pomocou taylorovеho radu. Keďže sú taylorove rady nekonečné algoritmus ukončím ak absolutná hodnota dvoch po sebe idúcich krokov je menšia/rovná ako epsilon.

$$|Y_{i+1} - Y_i| \leq \epsilon psilon$$

KAPITOLA 3

NÁVRH RIEŠENIA A ŠPECIFIKÁCIA TESTOV

3.1 TYPY, FUNKCIE A FORMÁT DÁT

Hodnota výsledkov matematických a štatistických funkcií je reálna a preto je v zadaní doporučený datový typ double. Datový typ double má približne pätnásť desatinných miest a je pre výpočty plne dostačujúci. Načítanie hodnôt a výpočty jednotlivých výsledkov nesmú byť v jednej funkcií, a preto je vhodné program efektívne rozdeliť na podprogramy. Formát výstupu je zadaný ako reálne číslo na desať desatinných miest.

3.2 VÝPOČET H. TANGENSU A VŠEOBECNÉHO LOGARITMU

Pri výpočtoch hyperbolického tangensu som využil riešenie pomocou vzťahu tanh x = sinhx / coshx, kde taylorov rad pre hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots$$

$$\cosh\ \mathrm{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{(2\mathrm{n})!} = 1 + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^4}{4!} + \ \dots$$

Odvodené rekurentné vzťahy: ($R_0 -$ *poč. hodnota*, $k_0 -$ *počiatočné hodnota pri výpočte*, $k_t -$ *všeobecná hodnota*)

$$\sinh x:\ R_t = R_{t-1}\frac{x^2}{k_t(k_t-1)} \quad , \quad R_0 = x\,, \quad k_0 = 1, \quad k_t = k_{t-1} + 2$$

$$\cosh x:\ R_t = R_{t-1}\frac{x^2}{k_t(k_t-1)} \quad , \quad R_0 = 1, \quad k_0 = 2, \quad k_t = k_{t-1} + 2$$

Toto riešenie sa mi zdalo efektívnejšie ako výpočet taylorovho radu hyperbolického tangensu s využitím Bernoulliho čísel. Pri výpočte všeobecného logaritmu som využil vzťahu:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots;\ 0 < x \le 2$$

Odvodený rekurentný vzťah pre ln:($R_0 - počiatočné\ hodnota$, $k_t - všeobecná\ hodnota$,$k_0 - poč. hodnota\ pri\ výpočte$)

$$\ln x:\ R_t = -R_{t-1}\frac{(x-1)}{k_t} \quad , \quad R_0 = (x-1), \quad k_0 = 1, \quad k_t = k_{t-1} + 1$$

Ak zadané x a základ logaritmu nie sú v platnom intrevale, využijeme vedomosti zo stredoškolskej matematiky a upravíme číslo pre interval (0,2>:

$$\ln(x) = \ln(m.n^s) = \ln(m) + \ln(n^s) = \ln(m) + s.\ln(\mathrm{n})$$

Z uvedeného vzťahu vyplýva, že m je číslo prekonvertované do daného intervalu a za ln(n) som zvoli prirodzený logaritmu čísla desať.

3.3 VÝPOČET ŠTATISTICKÝCH FUNKCIÍ

Vzorec na výpočet váženého aritmetického priemeru:

$$x_{wam} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} = \frac{x_1 h_1 + x_2 h_2 + \cdots + x_n h_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$$

Vzorec na výpočet váženého kvadratického priemeru:

$$x_{waq} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 h_i\right)} = \sqrt{\frac{x_1^2 h_1 + x_2^2 h_2 + \cdots x_n^2 h_n}{h_1 + h_2 + \cdots h_n}}$$

3.4 VÝPOČET EPSILON

Jeden z parametrov príkazového riadka je počet platných číslic označovaných aj ako significiant digids. Toto číslo musíme prekonvertovať na zadanú presnosť epsilon. Ak uvažujeme presnosť na desatinné miesta, môžeme vypočítať zadanú presnosť týmto spôsobom:

$$\varepsilon = 0.1^{sigdig}$$

Pokiaľ je udaný počet platných číslic z príkazového riadka väčší ako počet desatinných miest dátového typu double, nastaviť na maximálnu hodnotu práve tohoto typu a to 15 des. miest.

3.5 ŠPECIFIKÁCIA TESTOV

Testovacie údaje vychádzajú z povolených intervalov jednotlivých funkcií, z problematických vstupov štandartného vstupu a zle zadaných parametrov príkazového riadka.

Test 1 Chybné parametre príkazového riadka -> výpis na štandartný chybový výstup
proj2 --logax 0.5 2.3
proj2 -tanh 3

proj2 -wam 3
proj2 -logaax 5 6

Test 2 Neplatné vstupné údaje pre interval logax -> výpis nan/inf
0.0000000000e+000 -> -inf
-3.000000000e+000 -> nan

Test 3 Platné vstupné údaje pre logax kde základ je 2.4 -> výpis výslednej hodnoty
2.4000000000e+000 -> 1.0000000000e+000
9.3500000000e+000 -> 2.5533479928e+000
1.0000000000e+002 -> 5.2602337348e+000

Test 4 Platné vstupné údaje pre tanh -> výpis výslednej hodnoty
1.5000000000e+000 -> 9.0514825364e-001
0.3000000000e+000 -> 2.9131261245e-001
1.5000000000e+003 -> 10000000000e+000

Test 5 Výpočet váženého aritmetického priemeru -> priebežný výpis výsledkov
5 3 4 2 1 6 8 3 -> 5 4.6 2.63 3.78
5 3 4 2 1 6 8 -> 5 4.6 2.63 nan
6 2 7 -2 1 6 3 4 -> 6 nan nan nan

Test 6 Výpočet váženého kvadratického priemeru -> priebežný výpis výsledkov
1 3 7 9 8 2 4 3 -> 1 6.08 6.39 6.039
1 4 7 8 2 4 1 -> 1 5.74 5.074 nan
2 4 3 -2 1 2 -> 2 nan nan

Test 7 Výpočet logax o základe 2.4 pre hodnoty inf,.. -> výpis nan,inf,..
-inf -> nan
inf -> inf
nan -> nan

Test 8 Výpočet tanh pre hodnoty inf,… -> výpis nan,inf,..
-inf -> -1
inf -> 1
nan -> nan

3.6 NEKOREKTNÉ VSTUPY

Pri nesprávnom vstupe som sa rozhodol neukončiť program, ale pracovať s hodnotami NAN a INFINITY. Tieto hodnoty sú však rozdielne implementované v operačných systémoch Linux a MS Windows. Nekorektným vstupom môže byť textový reťazec, číslo odlišné od zadaného intervalu funkcie, záporná váha prvku vo vážených priemeroch a ďalšie. Pri testovaní som sa výslednými hodnotami nekorektných vstupov inšpiroval z knižnice math.h.

KAPITOLA 4

IMPLEMENTÁCIA A POPIS VLASTNÉHO RIEŠENIA

4.1 OVLÁDANIE PROGRAMU

Program je jednoduchá konzolová aplikácia, ktorá sa spúšťa s parametrami v príkazovom riadku. Pokiaľ je program volaný bez parametra prípadne sú parametre zle zadané, program vypíše chybu a ukončí sa. Po zavolaní program skontroluje parametre a volá prislúchajúce funkcie. Parametrami príkazového riadku môžu byť tieto prepínače:

-h	pre volanie nápovedy
--tanh sigdig	výpočet hyp. tangensu, sigdig – presnosť výpočtu
--logax sigdig a	výpočet všeobecného logaritmu, sigdig – presnosť, a – základ logaritmu
--wam	výpočet váženého aritmetického priemeru
--wqm	výpočet váženého kvadratického priemeru

Program čaká na vstup s hodnotou a po potvrdení sa výsledok vypíše na štandartný výstup. Pokiaľ uživateľ zadá zle vstupnú hodnotu, program sa neukončí, ale vypíše sa hodnota nan.

4.2 DÁTOVÉ TYPY

Pre ukladanie hodnôt z parametrov príkazového riadku som využil štruktúru TParams. Pre ukladanie výsledkov pri matematických funkcií som použil typ double. Na ukladanie medzivýsledkov pri štatistických funkciách slúži štruktúra TAverage s dvoma dátovými položkami(pre čitateľ a menovateľ).

4.3 VLASTNÁ IMPLEMENTÁCIA

V hlavnej funkcii main sa volá funkcia *getParams*, ktorá vráti štruktúru TParams so spracovanými parametrami. Funkcia *toEpsilon* prevedie hodnotu sigdig na požadovanú presnosť. Ak je požadovaná presnosť väčšia ako dovoluje datový typ double, funkcia nastaví presnosť na hodnotu 15 desatinných miest. Podľa hodnôt v štruktúre TParams sa volajú prislúchajúce funkcie programu. Výpis chybových stavov zabezpečuje funkcia *printECode.* Funkcia *printHelp* vypíše na výstup informácie o programe s nápovedou. Ak sú parametre v poriadku zavolá sa podľa prepínača daná funkcia pre načítanie hodnôt obecného logaritmu alebo hyperbolického tangensu(*mathm*) a priemerov (*avrg*). Tieto funkcie sa volajú s ďalším prepínačom, keďže načítanie vstupných hodnôt je rovnaké. Pri štatistických funkciách program čaká vždy na dva vstupy. Pri matematických funkciách sa výsledky posielajú na výstup po každom zadaní hodnoty. Cyklus načítania súboru sa ukončí koncom súboru(EOF). Výpočet jednotlivých hodnôt prebieha vo funkciách *qaverage, waverage, logresult, logarithm, tangens, sinhx, coshx*. U výpočtoch sú skontrolované vstupné hodnoty na platný interval a ďaľšie podmienky. Pri logaritme väčšom ako dva prebieha dodatočne aj konverzia tohto čísla pomocou funkcie *countLnTen*. Pri hyperbolickom tangense som výpočet skrátil od hodnoty 15 keďže táto funkcia nadobúda približne v tejto hodnote $\lim \pm 1$ pre najmenší počet významných číslic. Celková implementácia programu vychádza z navrhnutých riešení z kapitoly 2 a 3. Keďže sa v programe využíva matematická knižnica(math.h) na pomocný výpočet pri štatistických funkciách(toto správanie je zo zadania povolené), musí sa zdrojový súbor preložiť dodatočne s prepínačom –lm.

KAPITOLA 5

ZÁVER

Program počíta zadané matematické a štatistické funkcie s presnosťou na počet významných číslic. Nepresnosť výpočtu je spôsobená reprezentáciou reálnych čísel na počítači a konvergenciou, teda približovaním k určitému výsledku, ktorý nikdy nie je úplne presný. Matematické funkcie som nepočítal priamo ale využil som odvodených vzťahov. Aby mohli byť výsledky skontrolované, dodržiava program daný formát výstupu. Medzivýsledky štatistických funkcií som ukladal do dátovej štruktúry. Výsledky jednotlivých výpočtov som testoval s výsledkami matematických funkcií z knižnice math.h. Program som taktiež skontroloval s navrhnutými testami. Všetky uvedené testy program spĺňa. Program bol odtestovaný a spustený na operačnom systéme MS Windows a Linux.

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1]BARTSCH, Hans Jochen.:Matematické vzorce. Praha: ACADEMIA, 2009, 831 s.,ISBN 80-200-1448-9.

PRÍLOHA A

METRIKY KÓDU

Počet funkcií :	16
Počet súborov:	1 súbor
Počet riadkov zdrojového kódu:	723
Veľkosť statických dát:	26 088 B
Veľkosť spustiteľného súboru:	16 384 B