<u>16. Množiny, relace a zobrazení</u>

Množinou rozumíme souhrn objektú, které jsou vymezeny tak, že o každém prvku lze rozhodnout, zda do souhrnu patří nebo nepatří. Objekty, ktoré do souhrnu patří nazývame prvky množiny. Množinu nejčasteji zapisujeme veľkým písmenom např. M a jej prvky malým písmenem např m1. To, že prvek m1 patří do množiny M zapisujeme m1 $\in$ M. Nepatří li prvek potom m1 $\notin$ M.

Množina, která:

- neobsahuje žádný prvek, se nazýva prázdná množina a označujeme ji symbolem $\oslash$
- je zapísaná $\{\oslash\}$ je množina obsahující prázdnou množinu
- obsahuje alespoň jeden prvek, je množina neprázdná
- obsahuje konečný počet prvkú, nazývame konečnými množinami narozdiel od nekonnečných množin které mají nekonečný počet prvkú.

Množinu vymezujeme **výčtem prvkú** nebo predikátem(**charakteristickou vlastností**). Charakteristickou vlastností prvkú dané množiny je vlastnost, kterou mají všechny prvky dané množiny a kterou nemají prvky, jež do množiny nepatří. Množinu M s danou char. vlastností zapisujeme v tvaru $M = \{x \in D : S(x)\}$, kde D je definičný obor, potom $M = \{x \in N : 5 < x < 10\}$ značí množinu $M = \{6, 7, 8, 9\}$. Počet prvkú konečné množiny nazývame **mohutnost** a značíme symbolem |M|. Jestliže S je množina, jejíž prvky jsou množiny nazývame ji **systémem množin**.

Základné operace množin:

- sjednocení množin $X \cup Y = \{x | x \in X \vee x \in Y\}$
- průnik množin $X \cap Y = \{x | x \in X \wedge x \in Y\}$
- rozdíl množin $X - Y = \{x | x \in X \wedge x \notin Y\}$
- symetrický rozdíl množin $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$
- rovnost množin $X = Y \Leftrightarrow \forall x(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$
- podmnožina $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$
- vlastní podmnožina $X \subset Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge X \neq Y)$

Prázdná množina je podmnožinou každé množiny a X je vždy podmnožinou X. Je li $Y \subseteq X$, píšeme $\overline{Y} = X - Y$ a nazývame **doplňkem** nebo komplementem množiny Y v množine X. Množina obsahuje neuspořádaný soubor prvkú. Preto dvě množiny $X = \{1, 2\}\ a\ Y = \{2, 1, 2\}$ jsou stejné. Stejně tak nás nezajímají duplicitní prvky. A preto |X|=|Y|=2. Pokiaľ $Z = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ potom |Z| = 3. **Potenční množina** je množina všech podmnožin dané množiny. Značí se obvykle P(M) alebo 2^M. Príklad M = {1,2,3} potom P(M) = $\{\oslash, M, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Vztahy mezi množinami a operace s množinami znázorňujeme pomocí vénových diagramú, ve kterých množiny představují kruhy...

Pro množinové opera **platia pravidlá**:

1.komutativní zákon $Y \cup X = X \cup Y$, ...
2.asociativní $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, ...
3.distributivní $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, ...
4.de morganova pravidla $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$,....

Uspořádanou dvojica (x,y) prvku x,y $\in$ X nazývame dvojici, u které záleží na pořadí prvků x, y pričemž prvek x je první člen a prvek y druhý člen dvojice (x,y), pričom $x \neq y \;\; a \;\; (x,y) \neq (y,x)$. Obecně mužeme zavíst uspořádanou n-tici prvku x,y,z...a ako n-ticu (x,y,z.....a)..

Kartézským súčinom $X \times Y$ neprázdných množin X,Y (v tomto poradi) nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojic (x,y) kde $x \in X, y \in Y$. Zapisujeme $X \times Y = \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y\}$. Je li alespoň jedna z množin X, Y prázdna potom $X \times Y = \emptyset$. Je li X = Y, nazveme takýto součin **kartézskou mocninou množiny X,** označujeme X^2. Kartézsky součin X $\times$Y není komutativní operací, protože obecně platí $X \times Y \neq Y \times X$ pokiaľ $X \neq Y$. Obecně lze zavést kartézsky součin $X \times Y \times Z ...$ jako množinu všech uspořádaných n-tic (x,y,....z) kde $x \in X, y \in Y, ...$ Nechť $X = \{x1, x2\}, Y = \{y1, y2, y3\} \; potom \; X \times Y = \{(x1,y1)(x1,y2)(x1,y3)(x2,y1)(x2,y2)(x2,y3)\}$.

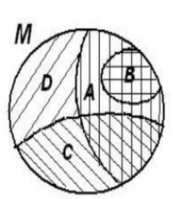
Relace oběcne vyjadruje vztah mezi objekty. **Binární relací** mezi libovolnými neprázdnymi množinami X,Y nazývame podmnožinu R kartézského součinu teda $R \subseteq X \times Y$ (binární relace z X do Y). Je li $X = Y, R \subseteq X \times Y$ hovoříme o binární relaci na množine X. Vztah $(x,y) \in R$, zapisujeme ve tvaru xRy (infix) nebo $R(x,y)$ (prefix).

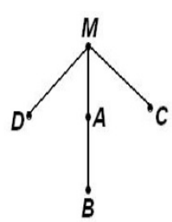
Buď $R \subseteq X \times X$ relace na X. Řekneme, **že R je**

- reflexivní, jestliže $(x,x) \in R$ pro každé $x \in X$ teda $xRx \; \forall x \in X$
- symetrická, jestliže platí implikace $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \forall$ teda $xRy \Rightarrow yRx \; \forall x,y \in X$
- antisymetrická, jestliže platí $[(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R] \Rightarrow x = y$ teda $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \; \forall x,y \in X$
- tranzitivní, jestliže platí [(x,y)$\in R \wedge (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R$ teda $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \; \forall x,y,z \in X$
- a ďaľšie ako ireflexivná, suvislá, trichotomická,....

Dále, relaci R nazveme **ekvivalencí** na množine X, je li současne reflexivní, symetrická i tranzitivní. Podobně, relace R se nazýva částečné **uspořádání** na množine X, je-li současně reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Nech $R \subseteq X \times Y, S \subseteq YxZ$ sú relace. **Složením relací** R,S nazývame relaci $S \circ R = \{(x,z) | \exists y \in Y, \; že \; (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$, takúto relaci čteme "S po R". Buď X = {1, 2, 3, 4}, Y = {a, b,c} a Z = {t; u; v;w}. Nech R = {(1; a); (1; b); (2; b); (3; c)} a S = {(a; u); (a; v); (b; t); (c; t); (c;w)}. Pak S $\circ$ R ={(1; u); (1; v); (1; t); (2; t); (3; t); (3;w)}.

Majme množinu X a uspořádaní δ, říkame že (X,δ) je **uspořádaná množina.**





Uvažujme množinu M a její Δsoubor podmnožin množiny M. Δ obsahuje množiny A,B,C,D v nasledujícím obrázku, potom ({M,A,B,C,D}, $\subset$) je uspořádaná množina. Uspořádanú množinu môžeme zobraziť **hasseovým diagramom**(vpravo). Pokiaľ M = $\cup \Delta$ a súbor Δ je po dvou disjunktní(to jest že libovolné dvě množiny z Δ majú prázdny prienik, nazývasa sa Δ rozklad na množine M.

Uspořádaná množina, ve které nejsou nesrovnatelné prvky, se nazývá řetezec resp. lineárne usporádaná množina. Např ({1,2,3,4}, $\leq$) je řetezec, také (N, $\leq$) je řetezec. Bud (M, $\leq$) usporádaná množina, a, b $\in$ M. Rekneme, že b pokrývá a, jestliže platí a $\leq$ b a neexistuje x $\in$ M tak, aby platilo a $\leq$ x$\leq$ b. Prvek a $\in$ M nazveme **suprémem** množiny A, jestliže $\forall$x$\in$ A : x $\leq$ a. **Infinom** je zas $a \leq x$.

Zobrazení(funkce):
Zobrazení je v matematice předpis, jak přiřazovat prvkům nějaké množiny jednoznačně prvky obecně jiné množiny. Pojem zobrazení má většinou stejný význam jako pojem funkce. Zobrazení se definuje ako $f : A \rightarrow B$, kde A je def. obor alebo dom(f) a B je oborem hodnot.

Nechť $F \subseteq X \times Y$ je relace pro kterou platí $\forall x \in X \exists ! y \in Y : (x, y) \in F$ neboli ke každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$, pro které je (x,y)$\in F$ .Potom řekneme, že F je zobrazení z A do B a píšeme $F : X \rightarrow Y,\ y = F(x),$ x se nazýva argument funkce F, y funkční hodnota. F1 = {(a1, b1), (a1, b2), (a2, b1), (a3, b2), (a4, b3)} není zobrazení protože (a1, b1), (a1, b2). F2 = {(a1, b3), (a2, b2), (a3, b1), (a4, b2)} zobrazení je.

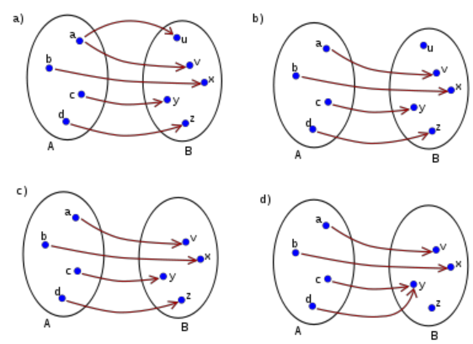
Zobrazení $F : X \rightarrow Y$:

- se nazývá surjekce jestliže platí $\forall y \in Y \exists x \in X :$ y = F(x).
- se nazývá injekce(prosté) jestliže platí $\forall x1, x2 \in X(x1 \neq x2 \Rightarrow F(x1) \neq F(x2))$
- se nazývá bijekce(jednoznačné) jestliže je současne surjekce a injekce.

Zobrazení $F : X \rightarrow Y$ je bijektivní, právě když inverzní relace $F^{-1} \subseteq BxA$ je zobrazení $F^{-1} : B \rightarrow A$ .Pomocí zobrazení se definují **mohutnosti** nekonečných množin. Množiny celých čísel i čísel racionálních jsou stejně mohutné. Necť N značí množinu přirozených čísel. Řekneme, že množina X je spočetná, jestliže existuje bijekce $F : N \rightarrow X$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazýva nespočetná. Množina všech sudých celých čísel $A = \{2, 4, ..\} = \{y | y = 2x, x \in N\}$ je spočetná, hledaná bijekce má tvar $F : N \rightarrow A, F(x) = 2x.$ Zobrazení $F : X \rightarrow X$ nazývame identitou na X prípadne diagonální relace.

Jsou li $f : X \rightarrow Y,\ g : Y \rightarrow Z$ zobrazení, složená relace $g \circ f$ je opět zobrazení a nazýva se složené zobrazení $g \circ f$.

- Na *a)* je příklad kdy se nejedná o zobrazení.
- Na *b)* je příklad prostého zobrazení množiny A do množiny B.
- Na *c)* je vzájemně jednoznačné zobrazení A na B.
- Na *d)* je zobrazení, které není prosté.



Toto dúfam už nemusíme:
Buď X množina, $\tau \subseteq 2^X$ systém jistých podmnožin množiny X. Prvky systému τ nazývame otevřené množiny, doplňky nazývame uzavřené množiny. Dvojici (X,τ) nazývame topologický prostor..

Vypracoval:Pišta, *čerpané z:*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BEina
http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/06_MI_KAP%201_2.pdf
http://www.matweb.cz/mnoziny
IDA Skripta 1 = ida2004.pdf, IDA Skripta 2 = IDM.pdf (nájdete na fitserver)