1 Tabla ve výrokové logice

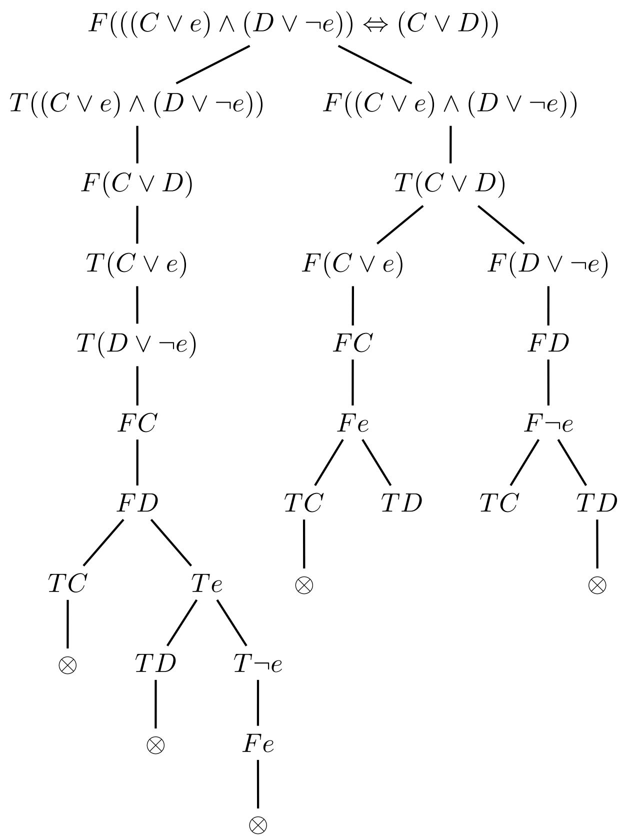
Příklad 1.1: Sestrojte *ukončené tablo* s kořenem

$$F(((C \vee e) \wedge (D \vee \neg e)) \Leftrightarrow (C \vee D)),$$

kde C, D, e jsou výrokové symboly.

Řešení 1.1: Ukončené tablo je strom, ve kterém je každá cesta *ukončená*. Cesta je ukončená, pokud je *sporná (kontradiktorická)* nebo je každý uzel ležící na této cestě *redukovaný*. Přitom cesta je *sporná* (značíme $\otimes$) právě tehdy, když se na ní vyskytují uzly $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ. Uzel E na cestě P je *redukovaný*, pokud v atomickém tablu s kořenem E existuje cesta, jejíž všechny uzly se vyskytují i na cestě P. Obsahuje-li tablo neredukovaný uzel E ležící na cestě P, která není sporná, přidáme atomické tablo s kořenem E na konec cesty P.[1] Tímto postupem se časem dopracujeme k ukončenému tablu.

Kdybychom měli vybudovat *úplné systematické tablo*, tak je třeba vždy najít uzel E, který není na nějaké cestě redukovaný a je nejblíž kořenu (pokud je takových více, vybereme ten nejlevější). Atomické tablo s kořenem E pak přidáme na konec každé nesporné cesty procházející přes E, na které není E redukovaný.



[1] Konvence: kořen E přidávaného atomického tabla se vypouští - v budovaném tablu se na cestě P již vyskytuje.

Uvedené tablo není systematické, protože v jeho pravé části jsme redukovali uzly $F(C \vee e)$ a $F(D \vee \neg e)$ dříve než výše uvedený uzel $T(C \vee D)$.

Tablo obsahuje i cesty, které nejsou sporné. Lze z nich proto tedy vyčíst interpretaci splňující kořen tabla. Například nejlevější nesporná cesta v tablu obsahuje uzly TD, Fe, FC. Přiřadíme-li tedy symbolu D hodnotu 1 a symbolům e a C hodnotu 0, získáváme valuaci, která nesplňuje formuli $((C \vee e) \wedge (D \vee \neg e)) \Leftrightarrow (C \vee D)$, takže vlastně splňuje předpoklad v kořeni tabla, že tato formule neplatí.

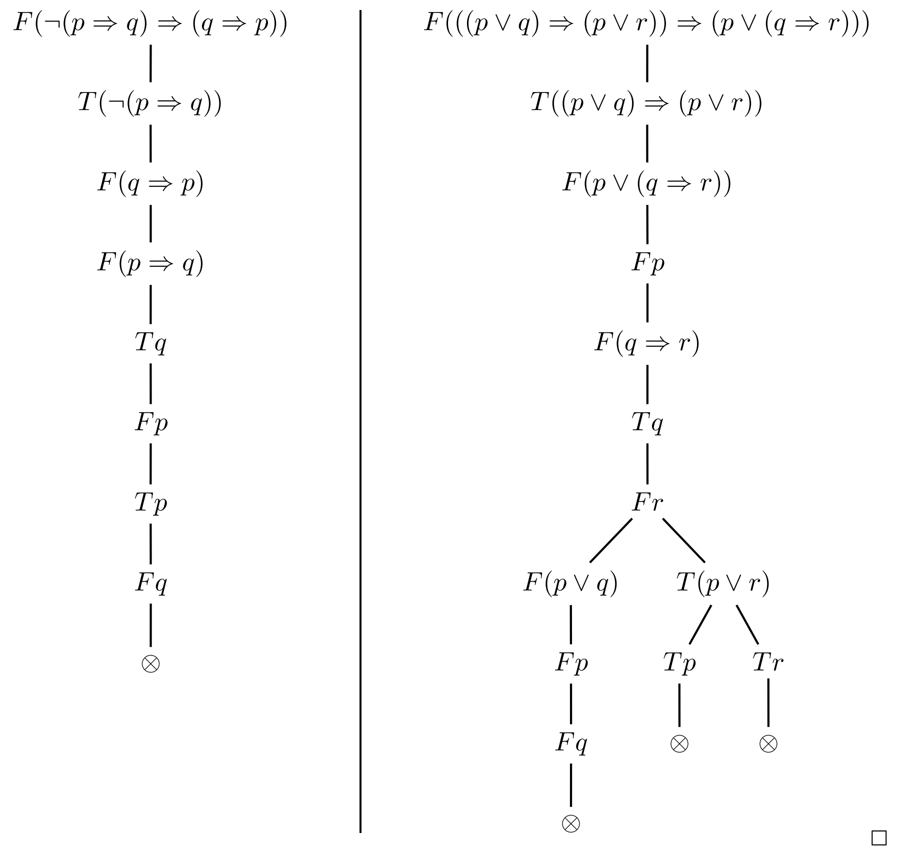
Všimněte si, že v levé části tabla jsou všechny cesty sporné. Tablo by obsahovalo pouze tuto levou část, pokud bychom v kořenu použili místo ekvivalence implikaci $\Rightarrow$. Tablo by pak bylo důkazem zmíněné implikace, která popisuje rezoluční pravidlo. □

Příklad 1.2: Pomocí tabel dokažte, že následující formule jsou tautologické:

a) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

b) $((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \Rightarrow r))$

Řešení 1.2: Pro formule vytvoříme ukončená kontradiktorická tabla následujícím způsobem:

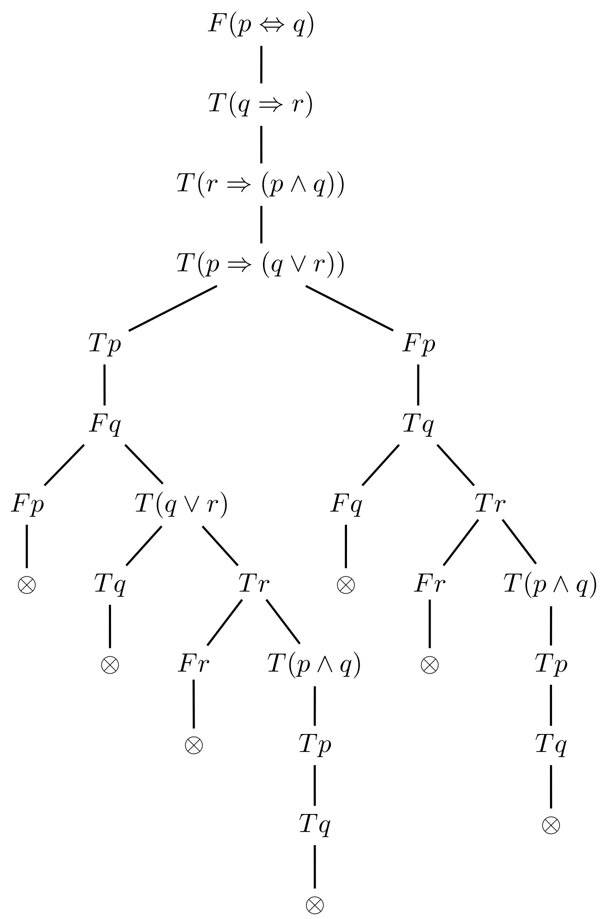


□

Příklad 1.3: Dokažte, že platí následující logické vyplývání:

$$\{q \Rightarrow r, r \Rightarrow (p \wedge q), p \Rightarrow (q \vee r)\} \models (p \Leftrightarrow q).$$

Řešení 1.3: Postupujeme stejně jako při řešení předchozího příkladu. Jediná změna je, že kdykoliv můžeme zvolit některý z předpokladů α a přidat $T\alpha$ na konec každé nesporné cesty, která $T\alpha$ zatím neobsahuje. Opět obdržíme uzavřené kontradiktorické tablo, čímž jsme dokázali, že formule $p \Leftrightarrow q$ logicky vyplývá z množiny předpokladů.



□