1 Induktivní odvozování ve výrokové logice

Pracujeme s jazykem Hornových klauzulí jak pro data, tak pro naučené hypotézy. Například pro následující data se třemi atributy klasifikovaná do dvou tříd `true/false`:
`Size` ∈ {`small, medium, large`},
`Color` ∈ {`red, blue, green`},
`Shape` ∈ {`square, circle, triangle`}

small	red	triangle	true
small	green	triangle	true
large	red	triangle	false
small	blue	circle	false

budou pozitivní příklady zapsané takto:

```
p(small,red,triangle).
p(small,green,triangle).
```

a podobně negativní příklady takto:

```
p(large,red,triangle).
p(small,blue,circle).
```

Naučené hypotézy předpokládáme ve tvaru implikací (prologovských pravidel):
`p(X,Y,Z):-` <podmínky na atributy/proměnné `X,Y,Z` ve tvaru `Proměnná=hodnota`>
Nejobecnější hypotézou je tedy `p(X,Y,Z)`.

Příklady specializací:
`p(X,Y,Z):- X=a.`
(jde o maximální (nejobecnější) specializaci `p(X,Y,Z)`)

Každá formule má

- nejmenší horní mez (least upper bound), která je totožná s nejmenší generalizací (least general generalization) – odstranění podmínky z těla klauzule
- největší dolní mez (greatest lower bound), která odpovídá největší specializaci (maximal specialization) – přidání podmínky do těla klauzule

Příklad 1.1: Pro jazyk
`Size` ∈ {`small, medium, large`},
`Color` ∈ {`red, blue, green`},
`Shape` ∈ {`square, circle, triangle`}
najděte specializaci (všechny specializace) formule

a) `p(Size,Color,Shape) :- Size=large, Color=red.`

b) `p(Size,Color,Shape) :- Color=red.`

c) `p(Size,Color,Shape) :- Size=large, Color=red, Shape=circle.`

d) `p(Size,Color,Shape).`

e) Najděte všechny specializace klauzule `p(Size,Color,Shape) :- Color=red.`, které splňují `p(large,red,square)`.

f) Určete, zda a jak jsou formule z předchozích bodů vzájemně v relaci generalizace/specializace.

Řešení 1.1:

a) `p(Size,Color,Shape) :- Size=large, Color=red, A.`, kde `A` je libovolná podmínka tvaru `Shape=hodnota`. Další specializací, která se často neuvádí, je `p(Size,Color,Shape) :- false.` (Jedná se o nejspecifičtější hypotézu, která nepopisuje žádný příklad. Často se zjednodušuje pouze na nepřesný zápis `"false"`.)

b) `p(Size,Color,Shape) :- Color=red, A, B.`, kde `A` je libovolná podmínka tvaru `Size=hodnota`, `B` libovolná podmínka tvaru `Shape=hodnota`; na pořadí `A` a `B` nezáleží. Další specializace získáme buď vynecháním `A`, nebo `B`. Specializací je i `"false"`.

c) Kromě `"false"` neexistuje žádná specializace.

d) obdobně jako pro zadání b), jen libovolně klademe podmínky na všechny tři atributy

e)
```
p(Size,Color,Shape) :- Color=red, Size=large.
p(Size,Color,Shape) :- Color=red, Shape=square.
p(Size,Color,Shape) :- Color=red, Size=large, Shape=square.
```

f) např. a) je specializací b) atd.

□

Příklad 1.2: Pro jazyk
$0 < \texttt{Size} \leq 1$,
$\texttt{Color} \in \{\texttt{red, blue}\}$,
$\texttt{Square} \in \{\texttt{yes, no}\}$
popište prostor (konjunktivních) hypotéz. Nejprve můžete totéž udělat jen pro jazyk bez spojitého atributu `Size`.

Dále najděte specializaci (všechny specializace) formule

a) `p(Size,Color,Square) :- Square=yes, Color=red.`

b) `p(Size,Color,Square) :- Color=red.`

c) `p(Size,Color,Square) :- Size < 0.1, Color=red, Square=no.`

d) `p(Size,Color,Square).`

Řešení 1.2: Prostor (konjunktivních) hypotéz je svaz. Nejmenší prvek je nejspecifičtější hypotéza (`"false"`), největší prvek je nejobecnější hypotéza. Mezi nimi jsou prvky představující různé specializace. Dva prvky jsou spojeny hranou, pokud jsou vzájemně ve vztahu generalizace/specializace. Pro spojitou doménu atributu dělíme interval vždy na dva podintervaly (teoreticky do nekonečna, prakticky jen do nějaké zvolené úrovně).

Hledání specializací je obdobné jako v předchozím příkladě. Pro spojitý atribut `Size` dělíme interval libovolně (ale typicky na základě dat, která máme k dispozici) vždy na dva podintervaly. Specializace pak musí respektovat toto libovolně zvolené dělení (diskretizaci). Nesmí tedy "překřížit"hranici intervalu zvolené diskretizace.

Pro zvolenou diskretizaci
`(0,1>` děleno na `(0,0.3> (0.3,1>` a
`(0.3,1>` dále děleno na `(0.3,0.7> (0.7,1>`
jsou některé možné specializace pro zadání b) například:

```
p(Size,Color,Square) :- Color=red, Size < 0.2.
p(Size,Color,Square) :- Color=red, Size > 0.4.
p(Size,Color,Square) :- Color=red, Size > 0.4, Size < 0.5.
```

□

Příklad 1.3: Pro následující data najděte všechny disjunktivní koncepty:

small	red	triangle	true
small	green	triangle	true
large	red	triangle	true
small	blue	circle	false
small	blue	triangle	false

Řešení 1.3: Disjunktivní koncept je množina Hornových klauzulí popisující všechny pozitivní příklady a nepopisující žádný negativní příklad. Disjunktivní koncepty jsou nutné, pokud nelze vytvořit hypotézu obsahující jedinou Hornovu klauzuli (tj. konjunktivní hypotézu).

Nejobecnější disjunktivní koncept:

```
p(Size,Color,Shape) :- Color=red.
p(Size,Color,Shape) :- Color=green.
```

Další disjunktivní koncepty získáme různými specializacemi uvedených klauzulí, které nepřestanou pokrývat všechny pozitivní příklady, například

```
p(Size,Color,Shape) :- Color=red, Shape=triangle.
p(Size,Color,Shape) :- Color=green.

p(Size,Color,Shape) :- Color=red, Shape=triangle.
p(Size,Color,Shape) :- Color=green, Size=small.

p(Size,Color,Shape) :- Color=red.
p(Size,Color,Shape) :- Color=green, Size=small, Shape=triangle.

...
```

□