1 Tabla v modální logice

Při konstrukci ukončeného kontradiktorického tabla v modální logice postupujeme podobně jako v případě logiky prvního řádu. Máme-li dokázat, že formule φ je tautologií (tj. platí ve všech světech všech Kripkeho rámců nad použitým jazykem modální logiky), stačí zkonstruovat kontradiktorické tablo s kořenem $Fw \Vdash \varphi$. Každý uzel vytvářeného binárního stromu pak obsahuje výraz $Fv \Vdash \varphi$ nebo $Tv \Vdash \varphi$. Narozdíl od logiky prvního řádu je tedy nutné brát v úvahu také svět, ve kterém danou položku redukujeme.

Cesta v tablu je *sporná (kontradiktorická)*, pokud se na ní vyskytuje položka $Tv \Vdash \varphi$ a zároveň $Fv \Vdash \varphi$ pro nějaký svět v a formuli φ.

Kvůli technickému zjednodušení přijímáme konvenci, že jazyk modální logiky neobsahuje funkční symboly. Při expanzi položek $Tv \Vdash (\forall x)\varphi(x)$ a $Fv \Vdash (\exists x)\varphi(x)$ proto místo ground termů používáme pouze konstanty. Musíme však volit takové konstanty, o kterých víme, že se vyskytují ve světě v. Taková konstanta je buď součástí jazyka modální logiky, nebo se na expandované cestě již vyskytuje v nějaké položce týkající se světa v nebo nějakého jeho předchůdce (tj. světa w, pro který se na cestě vyskytuje wSv). Další možností je naopak volit konstantu, která se nevyskytuje nikde v celém tablu. Při expanzi položek $Tv \Vdash (\exists x)\varphi(x)$ a $Fv \Vdash (\forall x)\varphi(x)$ dosadíme namísto x libovolnou konstantu, která se dosud nevyskytuje v žádné položce tabla.

Položky s operátory $\Box$ a $\Diamond$ redukujeme následovně. Při redukci položky $Tv \Vdash \Diamond\varphi$ nebo $Fv \Vdash \Box\varphi$ na cestu nejdříve přidáme výraz vSw, kde w je nějaký nový svět, který ještě v tablu nebyl použit. Poté přidáme nový uzel $Tw \Vdash \varphi$ resp. $Fw \Vdash \varphi$. Položky typu $Tv \Vdash \Box\varphi$ a $Fv \Vdash \Diamond\varphi$ expandujeme na $Tw \Vdash \varphi$ a $Fw \Vdash \varphi$, kde w je libovolný svět, pro který je na expandované cestě položka vSw. Pokud žádný takový svět neexistuje, můžeme položky považovat za redukované.

Kořeny atomických tabel pro položky $Tv \Vdash (\forall x)\varphi(x)$, $Fv \Vdash (\exists x)\varphi(x)$, $Tv \Vdash \Box\varphi$ a $Fv \Vdash \Diamond\varphi$ bychom neměli při redukci vynechávat.

Příklad 1.1: Pomocí tabel dokažte, že následující formule jsou tautologie.

a) $\Phi_1 \equiv (\Box\forall x\varphi(x)) \Rightarrow (\forall x\Box\varphi(x))$

b) $\Phi_2 \equiv (\Box(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi))$

c) $\Phi_3 \equiv \neg\Diamond(\neg(\varphi \wedge \exists x\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi(x)))$, x není volné ve formuli φ

d) $\Phi_4 \equiv \Diamond\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Diamond(\forall x\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$, x není volné ve formuli ψ

Řešení 1.1: Viz obrázky 1 a 2.

$\Box$

Příklad 1.2: Mějme modální tablo s kořenem $Fw \Vdash \forall x\Box\varphi(x) \Rightarrow \Box\forall x\varphi(x)$ definované v obrázku 3. Rozhodněte o korektnosti uvedeného důkazu a své tvrzení zdůvodněte.

Řešení 1.2: Zadané tablo není (v naší sémantice modální logiky) korektně utvořené a nedokazuje tak pravdivost formule.

Chyba spočívá ve špatném použití atomického tabla pro operátor $\forall$, ve kterém jsme substituovali proměnnou x nevhodnou konstantou c. Při expanzi

$$\begin{array}{c}
Fw \Vdash (\Box\forall x\varphi(x)) \Rightarrow (\forall x\Box\varphi(x)) \\
| \\
Tw \Vdash \Box\forall x\varphi(x) \\
| \\
Fw \Vdash \forall x\Box\varphi(x) \\
| \\
Fw \Vdash \Box\varphi(c) \\
| \\
wSv \\
| \\
Fv \Vdash \varphi(c) \\
| \\
Tw \Vdash \Box\forall x\varphi(x) \\
| \\
Tv \Vdash \forall x\varphi(x) \\
| \\
Tv \Vdash \forall x\varphi(x) \\
| \\
Tv \Vdash \varphi(c) \\
| \\
\otimes
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
Fw \Vdash (\Box(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)) \\
| \\
Tw \Vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \\
| \\
Fw \Vdash (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi) \\
| \\
Tw \Vdash \Box\varphi \\
| \\
Fw \Vdash \Box\psi \\
| \\
wSv \\
| \\
Fv \Vdash \psi \\
| \\
Tw \Vdash \Box\varphi \\
| \\
Tv \Vdash \varphi \\
| \\
Tw \Vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \\
| \\
Tv \Vdash \varphi \Rightarrow \psi \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
Fv \Vdash \varphi & Tv \Vdash \psi \\
| & | \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}$$

Obrázek 1: Ukončená kontradiktorická tabla pro Φ_1 (vlevo) a Φ_2 (vpravo).

$$Fw \Vdash \neg\Diamond(\neg(\varphi \wedge \exists x\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi(x)))$$
$$Tw \Vdash \Diamond(\neg(\varphi \wedge \exists x\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi(x)))$$
$$wSv$$
$$Tv \Vdash \neg(\varphi \wedge \exists x\psi(x)) \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi(x))$$
$$Tv \Vdash \neg(\varphi \wedge \exists x\psi(x))$$
$$Tv \Vdash \exists x(\varphi \wedge \psi(x))$$
$$Tv \Vdash \varphi \wedge \psi(c)$$
$$Tv \Vdash \varphi$$
$$Tv \Vdash \psi(c)$$
$$Fv \Vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x)$$
$$Fv \Vdash \varphi \qquad\qquad Fv \Vdash \exists x\psi(x)$$
$$\otimes \qquad\qquad Fv \Vdash \exists x\psi(x)$$
$$Fv \Vdash \psi(c)$$
$$\otimes$$

$$Fw \Vdash \Diamond\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Diamond(\forall x\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$Tw \Vdash \Diamond\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$Fw \Vdash \Diamond(\forall x\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$wSv$$
$$Tv \Vdash \exists x(\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$Tv \Vdash \varphi(c) \Rightarrow \Box\psi$$
$$Fw \Vdash \Diamond(\forall x\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$Fv \Vdash (\forall x\varphi(x) \Rightarrow \Box\psi)$$
$$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)$$
$$Fv \Vdash \Box\psi$$
$$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)$$
$$Tv \Vdash \varphi(c)$$
$$Fv \Vdash \varphi(c) \qquad\qquad Tv \Vdash \Box\psi$$
$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

Obrázek 2: Ukončená kontradiktorická tabla pro Φ_3 (vlevo) a Φ_4 (vpravo).

$$
\begin{array}{c}
Fw \Vdash \forall x \Box \varphi(x) \Rightarrow \Box \forall x \varphi(x) \\
| \\
Tw \Vdash \forall x \Box \varphi(x) \\
| \\
Fw \Vdash \Box \forall x \varphi(x) \\
| \\
wSv \\
| \\
Fv \Vdash \forall x \varphi(x) \\
| \\
Fv \Vdash \varphi(c) \\
| \\
Tw \Vdash \forall x \Box \varphi(x)^{*} \\
| \\
Tw \Vdash \Box \varphi(c) \\
| \\
Tw \Vdash \Box \varphi(c) \\
| \\
Tv \Vdash \varphi(c) \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

Obrázek 3:

položky označené symbolem “*” nemůžeme nahradit proměnnou x konstantou c. Konstantu c jsme do tabla zavedli v kontextu možného světa v, zatímco při expanzi položky * se pohybujeme ve světě w. Expanze by byla správná, pokud by byl svět w následníkem světa v a nikoliv jeho předchůdcem.

$\Box$

Příklad 1.3: Dokažte platnost úsudků:

a) $\{\varphi\} \models \Box\varphi$

b) $\{\forall x \varphi(x)\} \models \Box \forall x \varphi(x)$

c) $\{\forall x \varphi(x)\} \models \forall x \Box \varphi(x)$

d) $\{\varphi \Rightarrow \Box\varphi\} \models \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$

Řešení 1.3: Formule φ v modální logice je logickým důsledkem množiny formulí S, pokud φ platí ve všech Kripkeho rámcích, v nichž platí všechny prvky S. (Připomeňme, že formule platí v Kripkeho rámci, pokud platí ve všech světech tohoto rámce.)

Tablo pro logický úsudek $S \models \varphi$ konstruujeme stejně jako tablo pro φ, ale navíc můžeme kdykoliv na konec nějaké cesty P přidat položku tvaru $Tv \Vdash \alpha$, kde v je nějaký svět vyskytující se na cestě P a $\alpha \in S$.

Ukončená kontradiktorická tabla pro úsudky (a), (b) a (c) jsou uvedena na obrázku 4. Tablo pro úsudek (d) ponecháváme jako cvičení. $\square$

$Fw \Vdash \Box\varphi$	$Fw \Vdash \Box\forall x\varphi(x)$	$Fw \Vdash \forall x\Box\varphi(x)$
wSv	wSv	$Fw \Vdash \Box\varphi(c)$
$Fv \Vdash \varphi$	$Fv \Vdash \forall x\varphi(x)$	wSv
$Tv \Vdash \varphi^*$	$Fv \Vdash \varphi(c)$	$Fv \Vdash \varphi(c)$
$\otimes$	$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)^*$	$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)^*$
	$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)$	$Tv \Vdash \forall x\varphi(x)$
	$Tv \Vdash \varphi(c)$	$Tv \Vdash \varphi(c)$
	$\otimes$	$\otimes$

Obrázek 4: Ukončená kontradiktorická tabla pro úsudky (a),(b) a (c). Položky odpovídající aplikaci předpokladů jsou označeny hvězdičkou.