



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

86.15 - ROBÓTICA

PROF. PABLO GONZALEZ

Trabajo Práctico 5

Dinámica

Integrantes

Martín Quattrone
mquattrone@fi.uba.ar
Lola Segura
lsegura@fi.uba.ar

Padrón

98644
99254

26 DE JULIO DE 2021

1 Modelo Dinámico

Se trabajó con un mecanismo consistente de un eslabón móvil articulado por un eje de revolución situado en la dirección z_0 . Este se puede observar en la **Figura 1.1**

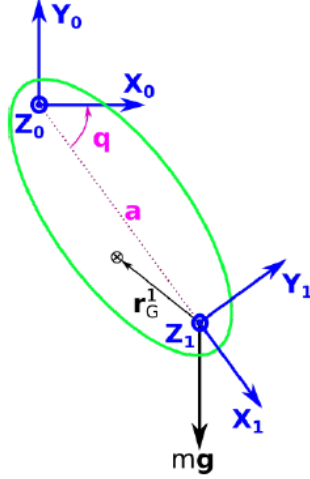


Figura 1.1: Modelo del mecanismo trabajado.

Se hallaron las ecuaciones del modelo dinámico inverso que vincula las posiciones generalizadas y sus derivadas con el torque:

$$\tau = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

donde $M(\mathbf{q})$ representa la matriz de inercia, que se puede hallar como:

$$m_{sk} = \sum_{i=1}^N Tr \left[\frac{\partial A_0^i}{\partial q_s} J_i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_s} \right)^t \right] \quad (1.2a)$$

En este caso, al tener únicamente un eslabón el calculo se reduce a

$$m_{11} = Tr \left[\frac{\partial A_0^1}{\partial q} J_1 \left(\frac{\partial A_0^1}{\partial q} \right)^t \right] \quad (1.2b)$$

Como se puede observar, se debieron calcular, previos al paso (1.2c) las matrices A_0^1 y J_1 . Para la primera, se definieron los parámetros de *Denavit-Hartenberg*:

d	θ	α	a
0	\mathbf{q}	0	0.2

Conociendo los parámetros se calcularon las matrices de roto-traslación

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q) & -\sin(q) & 0 & a \cos(q) \\ \sin(q) & \cos(q) & 0 & a \sin(q) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

y la matriz de pseudo inercia

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{-I_{0xx} + I_{0yy} + I_{0zz}}{2} & -I_{0xy} & -I_{0xz} & x_G m \\ -I_{0xy} & \frac{I_{0xx} - I_{0yy} + I_{0zz}}{2} & -I_{0yz} & y_G m \\ -I_{0xz} & -I_{0yz} & \frac{I_{0xx} + I_{0yy} - I_{0zz}}{2} & z_G m \\ x_G m & y_G m & z_G m & m \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Se pudo obtener de manera simbólico en *MATLAB*

$$\boxed{m_{11} = ma^2 + 2mx_Ga + I_{ozz}} \quad (1.5)$$

Luego, para obtener la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, cuya expresión resulta:

$$c_{sj} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{sj}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{sj}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{sj}}{\partial q_s} \right] \dot{q}_k \quad (1.6a)$$

expresión que se reduce a

$$c_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial q} \dot{q} \quad (1.6b)$$

Observando la expresión de m_{11} previamente hallada, se puede observar que no depende de q , por lo que resulta

$$\boxed{C = c_{11} = 0} \quad (1.6c)$$

Por último se halló el valor de $G(\mathbf{q})$

$$G = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g}^t \frac{\partial A_0^i}{\partial q_s} \mathbf{r}_G \quad (1.7a)$$

donde se define:

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7b)$$

y

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7c)$$

siendo g_1 la aceleración de la gravedad en el vacío.

Nuevamente, teniendo en cuenta que se tiene un único eje, la expresión se simplifica a

$$G = m \mathbf{g}^t \frac{\partial A_0^1}{\partial q} \mathbf{r}_G \quad (1.7d)$$

resultando

$$\boxed{G = g_1 m (a \cos(q) + x_G \cos(q) - y_G \sin(q))} \quad (1.7e)$$

Una vez obtenidos todas las expresiones de las matrices de la dinámica, se pudo obtener la expresión del torque:

Torque

$$\tau = \ddot{q} (ma^2 + 2mx_Ga + I_{ozz}) + g_1 m (a \cos(\mathbf{q}) + x_G \cos(\mathbf{q}) - y_G \sin(\mathbf{q})) \quad (1.8)$$

2 Identificación

Luego, conociendo únicamente los parámetros $a = 0,2\text{ m}$ y $m = 2\text{ Kg}$ y con los datos t , \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ y τ obtenidos a partir de un ensayo en el que se aplicó un determinado torque sobre el eje. Se pudo obtener una estimación de los parámetros dinámicos desconocidos. Para ello, siguiendo los pasos indicados en la práctica se factorizó el modelo dinámico inverso en los parámetros dinámicos de forma tal de llegar a una expresión del tipo:

$$\tau = \phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{p} \quad (2.1)$$

Para ello, partiendo de la expresión de torque hallada, y distribuyendo las variables $\ddot{\mathbf{q}}$ y $g_1 m$

$$\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} a^2 + g_1 a \cos(\mathbf{q}) & 2\ddot{\mathbf{q}} a + g_1 \cos(\mathbf{q}) & -g \sin(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ mx_G \\ my_G \\ I_{0zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (2.2)$$

Luego se dividió al vector \mathbf{p} hallado en una parte conocida y otra parte a estimar, pudiendo de esta manera expresar al modelo como:

$$\tau - \phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_{kn} \mathbf{p}_{kn} = \phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})_{un} \mathbf{p}_{un} \quad (2.3a)$$

$$\tau - (\ddot{\mathbf{q}} a^2 + g_1 a \cos(\mathbf{q})) m = [2\ddot{\mathbf{q}} a + g_1 \cos(\mathbf{q}) \quad -g \sin(\mathbf{q}) \quad \ddot{\mathbf{q}}] \begin{bmatrix} mx_G \\ my_G \\ I_{0zz} \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

Luego, se obtuvo a partir de los datos dados la matriz Φ sobre la parte desconocida. Obteniendo un valor de condicion de:

$$\boxed{\text{cond}(\Phi) = 20,44} \quad (2.4)$$

Una vez obtenida Φ , se halló una estimación de los parámetros dinámicos no conocidos como:

$$\hat{\mathbf{p}}_{un} = (\Phi^t \Phi)^{-1} \Phi^t \Gamma \quad (2.5)$$

Los parámetros estimados resultaron:

$$\begin{cases} X_G = -0,050 \\ y_G = -0,000005 \\ I_{0zz} = 0,00605 \end{cases} \quad (2.6)$$

3 Simulación

Por último se implementó un simulador dinámico en *MATLAB* utilizando la función provista por el software *ode45* e implementando una propia a modo de *wrapper* con el fin de poder pasarle mas argumentos.

Con esto se pudo hallar la respuesta del sistema ante escalones de torques de distintas amplitudes partiendo de un punto de equilibrio estable, y observando el desarrollo del sistema por 5 seg.

Además se estudio, para las simulaciones mencionadas, como influye en el movimiento si se agrega al modelo un término disipativo de tipo $B\dot{\mathbf{q}}$, con $B = 0,1 \text{ Nm}/(\text{rad/s})$.

En primer lugar se obtuvo el punto de equilibrio eliminando el torque y las componentes de velocidad y aceleración del modelo directo, obteniendo como resultado

$$\begin{aligned} 0 &= (a + x_G) \cos(q_{eq}) - y_G \sin(q_{eq}) \\ q_{eq} &= \text{tg} \left(\frac{a + x_G}{y_G} \right) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\boxed{q_{eq} = -1,5708 \text{ rad}} \quad (3.1b)$$

Se obtiene un valor muy cercano a $-pi/2$, que correspondería al punto de equilibrio de un péndulo simple con centro de masa centrado en el eje 1. Como en este caso el centro de masa esta levemente desplazado del eje, difiere en algunos decimales de ese valor.

Por otra parte, a partir del modelo inverso, se obtuvo el modelo directo, el cuál expresa la aceleración en función de las matrices de la dinámica y de $\dot{\mathbf{q}}$, \mathbf{q} y τ .

$$\ddot{\mathbf{q}} = 1M (\tau - b\dot{\mathbf{q}} - C - G) \quad (3.2a)$$

reemplazando por las expresiones correspondientes

$$\boxed{\ddot{q} = \frac{-b\dot{q} - \tau + g_1 m (a \cos(\mathbf{q}) + x_G \cos(\mathbf{q}) - y_G \sin(\mathbf{q}))}{(I_{ozz} + a^2 m + 2amx_G)}} \quad (3.2b)$$

Finalmente, con esta expresión hallada, y nuestra función *myOde45* se pudieron graficar las trayectorias realizadas por el mecanismo para trs toques distintos: $\tau = 0,1 \text{ Nm}$, $\tau = 2 \text{ Nm}$ y $\tau = 3 \text{ Nm}$ con y sin el término disipativo. La salida del programa para cada caso se presentan a continuación.

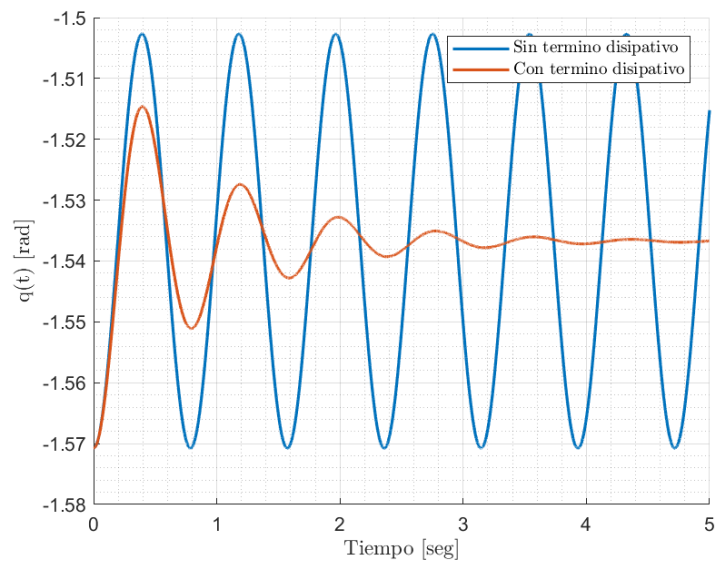


Figura 3.1: Respuesta a un escalón de torque de 0.1 Nm.

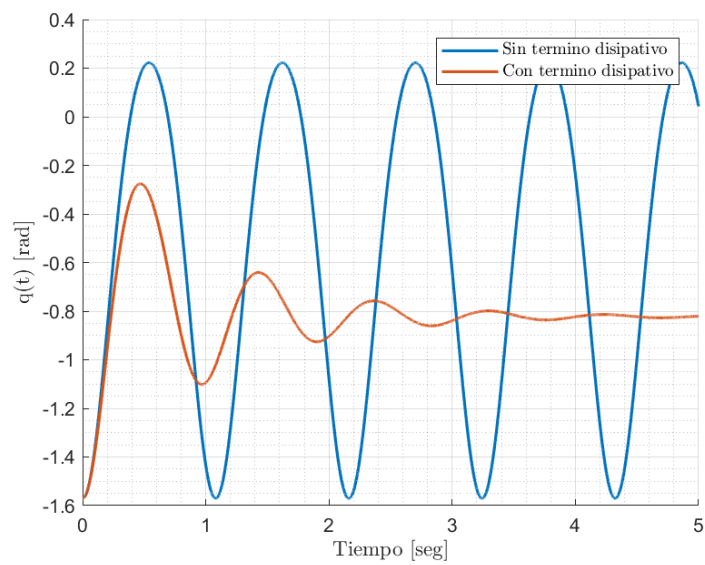


Figura 3.2: Respuesta a un escalón de torque de 2 Nm.

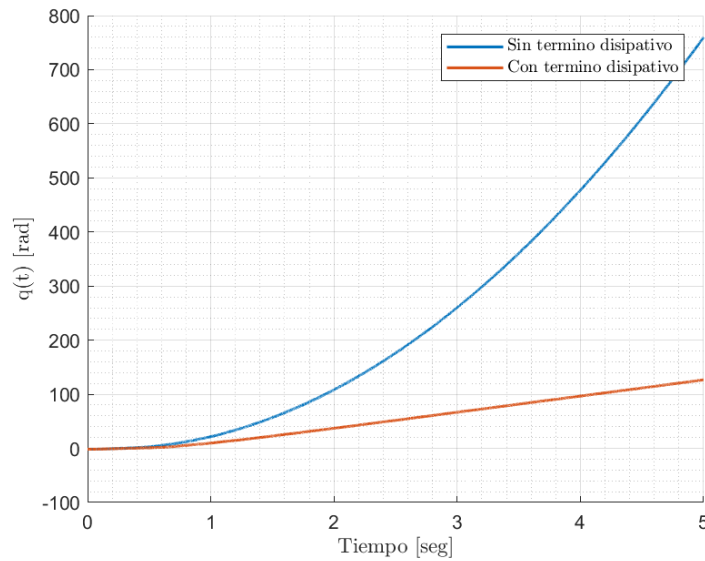


Figura 3.3: Respuesta a un escalón de torque de 3 Nm.

Se puede observar que para $\tau = 0,1$ Nm, partiendo del punto de equilibrio, se produce un aumento de q hasta un determinado valor y luego disminuye nuevamente hasta el valor de equilibrio, comportamiento que se repite de manera periódica. Por lo que el movimiento se compone de oscilaciones pequeñas cuando no se encuentra presente el termino disipativo, y una oscilación amortiguada cuando hay disipación.

Para el caso de $\tau = 2$ Nm, se produce el mismo movimiento, pero la oscilación es de mayor amplitud ya que el torque producido es mayor. Se considera que este tipo de movimiento se debe a que el torque es suficiente para mover el eslabón hasta cierto valor de q donde el torque de peso propio, $G(q)$, pasa a ser mayor y hace que el valor de q disminuya nuevamente. Así es como se produce la oscilación en ambos movimientos, y para el caso de que exista termino disipativo, el valor de q converge a un valor distinto al del equilibrio, q^* que equivale a $\tau = G(q^*)$ produciendo que el eslabón permanezca inmóvil en ese ángulo.

Para el caso de $\tau = 3$ Nm, se ve que la fuerza es suficiente para producir que el eslabón gire en un movimiento continuo, ya que la trayectoria es siempre creciente, tanto para el modelo sin termino disipativo como para el que lo posee. Esto se debe a que el torque aplicado es mayor a $G(q)$ para todo valor de q , lo que sucede debido a que G tiene valor máximo.