Procesos Estocásticos - 86.09

TP de simulación 1

Repetidor Analógico vs Repetidor Digital

Integrantes	*Padrón*
PERCZYK Francisco fperczyk@gmail.com	99631
QUATTRONE Martín martin.quattrone@gmail.com	98644
SEGURA Lola lola.s@live.com.ar	99254

2º Cuatrimestre de 2019

Índice

Resumen

En este trabajo se busca analizar dos esquemas de comunicación, los cuales pretenden transmitir *símbolos* que representan 1 bit. Ambos tienen n etapas en cascada por lo que poseen $n-1$ repetidores. Lo que caracteriza a ambos esquemas son sus repetidores: en uno se utilizan repetidores digitales y en el otro, repetidores analógicos.

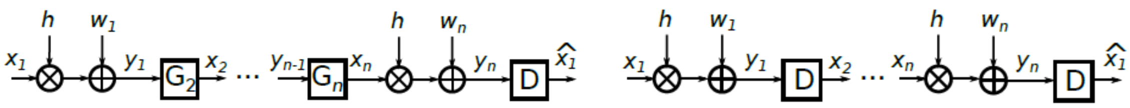
1. Introducción

Ambos esquemas de comunicación se pueden modelizar mediante un diagrama en bloques como se observa en la Figura 1.1. Como se mencionó, los símbolos a transmitir representan 1 bit, por lo tanto, si el bit a enviar es 1, el símbolo asociado es $X_1 = A$, y si se quiere transmitir un 0, el símbolo es $X_1 = -A$. A partir de esta definición, la información transmitida se puede modelar como una variable aleatoria discreta de soporte $\{A, -A\}$. Se asume que ambos símbolos tienen probabilidad $p = \frac{1}{2}$.

En cada etapa, los símbolos se envían por medio de un canal de comunicaciones. Este se modela de la misma manera para ambos sistemas: un factor de atenuación h y la adición de ruido $W_i \, \forall \, i = 1, \dots, n$ y entonces los símbolos recibidos por cada repetidor cumplen:

$$Y_i = hX_i + W_i \tag{1.1}$$

Se asume que la distribución de este ruido posees distribución gaussiana de media nula y varianza σ^2, es decir, $W_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y además los ruidos de distintas etapas son independientes.



(a) Sistema con repetidor analógico. (b) Sistema con repetidor digital.

Figura 1.1: Modelización de sistemas de comunicaciones con distintos tipos de repetidores.

1.1. Repetidor digital

En el repetidor digital, el bloque D de la Figura 1.1 (b) toma una decisión acerca del símbolo recibido y lo retransmite a la siguiente etapa. La operación se puede describir como

$$X_i = \begin{cases} A & \text{si} \quad Y_{i-1} \geq 0 \\ -A & \text{si} \quad Y_{i-1} \leq 0 \end{cases} \qquad i = 2, \dots, n+1 \tag{1.2}$$

1.2. Repetidor analógico

En cuanto al repetidor analógico, se toma una única decisión y ocurre en la ultima etapa. En las etapas intermedias, los símbolos recibidos por cada repetidor son multiplicados por una ganancia G_i y luego retransmitidos a la siguiente etapa. La operación se puede representar mediante la ecuación

$$X_i = G_i \, Y_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, n \tag{1.3}$$

Reemplazando en la Ecuación 1.1 se llega a la expresión

$$Y_i = h \, G_i \, Y_{i-1} + W_i, \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.4}$$

1.3. Eventos de error

El evento de error en la transmisión ocurre cuando el símbolo que recibe el receptor $\hat{X}_1$ difiere del símbolo que se transmitió en un principio, es decir, $\hat{X}_1 \neq X_1$. Esta probabilidad al cabo de las n etapas se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_{e,n} &= \mathbb{P}(\hat{X}_1 \neq X_1) \\ &= P_{e|X_1=A}\mathbb{P}(X_1 = A) + P_{e|X_1=-A}\mathbb{P}(X_1 = -A) \\ &= \frac{1}{2}(P_{e|X_1=A} + P_{e|X_1=-A}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Hay que considerar que en el caso con repetidores digitales puede ocurrir un error en cada uno de los repetidores ya que se toma una decisión en cada uno de ellos. En cambio, para los repetidores analógicos, donde en cada etapa solo se amplifica la señal y la decisión se toma al final, el error solo puede ocurrir en esta ultima etapa.

1.4. Relación señal a ruido

La relación señal a ruido (SNR) es una medida de ingeniería que define la relación entre la potencia de una señal con la potencia del ruido que la corrompe. Cuanto más alto la relación, menos molesto es el ruido de fondo y la señal de interés más clara. Para este trabajo, se define la SNR como el cociente entre la energía de la señal de interés y la varianza del ruido.

La energía promedio de un símbolo, o del ruido se define como la varianza de la variable aleatoria asociada. En este caso, considerando que el símbolo transmitido posee media nula, queda definido

$$\varepsilon_{X_1} = \sigma^2_{X_1} = \mathbb{E}[X_1^2], \tag{1.6}$$

y por ejemplo, a la entrada del primer repetidor la SNR (en dB) es

$$\mathrm{SNR}_1 = 10\log_{10}\left(\frac{\mathbb{E}[(hX_1)^2]}{\sigma^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{h^2\sigma^2_{X_1}}{\sigma^2}\right) \text{ [dB]}. \tag{1.7}$$

2. Cálculo de ganancia de los repetidores analógicos

Asumiendo que cada repetidor analógico puede transmitir como máximo con una energía promedio ε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i^2] &= \sigma^2_{X_i} + \mathbb{E}^2[X] \\ &= \sigma^2_{X_i} \\ &= A^2\frac{1}{2} + (-A)^2\frac{1}{2} \\ &= A^2 \leqslant \varepsilon \end{aligned} \tag{2.1}$$

y de donde se puede definir $A = \sqrt{\varepsilon}$ y así la señal a ruido a la salida de cada repetidor

$$\mathrm{SNR} = \frac{h^2\varepsilon}{\sigma^2} \tag{2.2}$$

Utilizando las ecuaciones 1.1 y 1.3 se pueden determinar los valores de las ganancias $G_2, ..., G_n$ en función de la relación señal a ruido

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \mathbb{E}[X_i^2] \\
&= \mathbb{E}[\,(G_i Y_{i-1})^2\,] \\
&= \mathbb{E}[\,G_i^2\,(h\,X_{i-1} + W_{i-1})^2\,] \\
&= G_i^2\,\mathbb{E}[(h\,X_{i-1} + W_{i-1})^2\,] \\
&= G_i^2\,\mathbb{E}[(h\,X_{i-1})^2 + 2hX_{i-1}W_i + W_{i-1}^2] \\
&= G_i^2\,(h^2\mathbb{E}[X_{i-1}^2] + 2h\mathbb{E}[X_{i-1}W_i] + \mathbb{E}[W_{i-1}^2]) \\
&= G_i^2\,(h^2\varepsilon + 2h\mathbb{E}[X_{i-1}W_i] + \sigma)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora considerando que

$$\begin{aligned}
X_{i-1} &= G_{i-1}Y_{i-2} = G_{i-1}(hX_{i-2} + W_{i-2}) \\
\Rightarrow X_{i-1}W_i &= G_{i-1}(hX_{i-2}W_i + W_{i-2}W_i) \\
\Rightarrow \mathbb{E}[X_{i-1}W_i] &= \mathbb{E}[G_{i-1}(hX_{i-2}W_i + W_{i-2}W_i)] \\
\Rightarrow \mathbb{E}[X_{i-1}W_i] &= G_{i-1}(\mathbb{E}[(hX_{i-2}W_i] + \mathbb{E}[W_{i-2}W_i)])
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Y dado que los ruidos de distintas etapas son independientes y tienen media nula, el segundo termino se anula. En cuanto al primer termino, si se cumple que X_{i-2} y W_i son independientes también se anulará. Repitiendo el proceso i veces, queda una expresión con $\mathbb{E}[X_1 W_i]$. Asumiendo que X_1 y W_i están descorrelacionadas, la expresión anterior es nula, por lo tanto todas las previas a ella también lo son. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= G_i^2\,(h^2\varepsilon + \sigma) \\
\Rightarrow G_i &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{h^2\varepsilon + \sigma^2}} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\frac{h^2\varepsilon}{\sigma^2}}{\underbrace{\frac{h^2\varepsilon}{\sigma^2}}_{\text{SNR}} + 1}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\boxed{G_i = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\text{SNR}}{\text{SNR} + 1}} \qquad \forall\, i = 2, \ldots, n.} \tag{2.6}$$

3. Probabilidad de error del sistema analógico

Se desea conocer Y_n en funcion de X_1, las ganancias y los ruidos en cada canal. Se comienza desde la Ecuacion 1.1.

$$\begin{aligned}
Y_n &= h\,X_n + W_n \\
&= h\,[G_n\,Y_{n-1}] + W_n \\
&= h\,G_n\,(h\,X_{n-1} + W_{n-1}) + W_n \\
&= h^2\,G_n\,G_{n-1}\,Y_{n-2} + h\,G_n\,W_{n-1} + W_n \\
&= h^2\,G_n\,G_{n-1}\,(h\,X_{n-2} + W_{n-2}) + h\,G_n\,W_{n-1} + W_n \\
&= h^3\,G_n\,G_{n-1}\,G_{n-2}\,Y_{n-3} + h^2\,G_n\,G_{n-1}\,W_{n-2} + h\,G_n\,W_{n-1} + W_n \\
&= \underbrace{h^4\,G_n\,G_{n-1}\,G_{n-2}\,X_{n-3}}_{1} + \underbrace{h^3\,G_n\,G_{n-1}\,G_{n-2}\,W_{n-3} + h^2\,G_n\,G_{n-1}\,W_{n-2} + h\,G_n\,W_{n-1} + W_n}_{2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Siguiendo el proceso hasta n se pueden identificar los dos términos.

$$1 = h^n(\prod_{i=2}^{n} G_i)X_1 \tag{3.2}$$

$$2 = \sum_{k=0}^{n-2} \left(h^{k+1} W_{n-(k+1)} \prod_{i=0}^{k} G_{n-k} \right) + W_n \tag{3.3}$$

El segundo termino esta asociado solo al ruido y se distribuye como una normal ya que es suma de normales multiplicadas por constantes. Tiene esperanza nula ya que no hay ningún termino independiente (constante) sumando. En cuanto a la varianza:

$$\mathrm{Var}\left(2\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-2} h^{k+1} W_{n-(k+1)} \prod_{i=0}^{k} G_{n-k} \right) + \mathrm{Var}(W_n) \tag{3.4}$$

Sustituyendo las ganancias por sus valores encontrados en la Ecuación 2.6, sabiendo la varianza de cada W_i y usando las propiedades de que la varianza de suma de variables independientes es la suma de las varianzas se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(2\right) &= \sigma^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{n-2} \cancel{h^{k+1}} \cancel{\left(\frac{1}{h}\right)^{k+1}} \left(\sqrt{\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1}} \right)^{k+1} \right]^2 \\ &= \sigma^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{k+1} \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por lo tanto

$$\boxed{2 \sim \mathcal{N}\left(0,\, \sigma^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{k+1} \right] \right)} \tag{3.6}$$

Conociendo la varianza del ruido en la ultima etapa, la relación señal a ruido de la misma es

$$\mathrm{SNR}_n = \frac{\mathbb{E}\left[1^2\right]}{\sigma^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{k+1} \right]} \tag{3.7}$$

Desarrollando el numerador a partir de la Ecuación 2.6 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[1^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(h^n \left(\prod_{i=2}^{n} G_i\right) X_1 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(h^n G^{n-1} X_1 \right)^2 \right] \\ &= \left(h^n G^{n-1} \right)^2 \mathbb{E}\left[X_1^2 \right] \\ &= \left(h^n \left(\frac{1}{h} \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1}} \right)^{n-1} \right)^2 \varepsilon \\ &= h^2 \varepsilon \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{n-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Entonces la Ecuación 3.7 resulta

$$\mathrm{SNR}_n = \frac{h^2 \varepsilon \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{n-1}}{\sigma^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1} \right)^{k+1} \right]} \tag{3.9}$$

$$\boxed{\mathrm{SNR}_n = \frac{\mathrm{SNR}\left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1}\right)^{n-1}}{1 + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}+1}\right)^{k+1}}} \tag{3.10}$$

La probabilidad de error se obtiene desarrollando la ecuación 1.5:

$$\begin{aligned} P_{e,n}^a &= \frac{1}{2}(P_{e|X_1=A} + P_{e|X_1=-A}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[\hat{X}_1 = A|X_1 = -A] + \mathbb{P}[\hat{X}_1 = -A|X_1 = A]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[Y_n \geq 0|X_1 = -A] + \mathbb{P}[Y_n < 0|X_1 = A]\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ya sabiendo como se distribuye Y_n, para obtener como se distribuye la variable Y_n condicionada al símbolo transmitido, se sustituye X_1 por su valor y se obtuvieron normales con media diferente de cero

$$\begin{aligned} Y_n|X_1 = -A \sim \mathcal{N}\left(h(-A)\left(\sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}}\right)^{n-1}, \sigma^2\left[1 + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{SNR}{SNR+1}\right)^{k+1}\right]\right) \\ Y_n|X_1 = A \sim \mathcal{N}\left(h(A)\left(\sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}}\right)^{n-1}, \sigma^2\left[1 + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{SNR}{SNR+1}\right)^{k+1}\right]\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Al ser normales con medias iguales en modulo, por la paridad de la campana las probabilidades de la Ecuación 3.11 van a ser iguales. Para calcular entonces las probabilidades lo mejor es normalizar las variables y para ello se define $Z = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$ con μ_y y σ_y^2 la media y la varianza de $Y = (Y_n|X_1 = A)$. Por lo tanto Z es una normal estándar:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y < 0] &= \mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}}_{Z} < -\frac{\mu_y}{\sigma_y}\right] \\ &= 1 - F_Z\left[\frac{hA\left(\sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}}\right)^{n-1}}{\sqrt{\sigma^2\left[1 + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{SNR}{SNR+1}\right)^{k+1}\right]}}\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Siendo F_Z la distribución de una normal estándar y usando la ecuación de SNR_n 3.10 se despeja

$$\boxed{P_{e,n}^a = 1 - F_Z(\sqrt{\mathrm{SNR}_n})} \tag{3.14}$$

4. Probabilidad de error del sistema digital

En cuanto a la probabilidad de error para el sistema de comunicaciones digitales para n etapas se puede definir como

$$\boxed{P_{e,n}^d = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - 2\,Q\left(\sqrt{\mathrm{SNR}}\right)\right)^n\right)} \tag{4.1}$$

siendo $Q(x)$ la función que devuelve uno menos la probabilidad acumulada hasta $X = x$, siendo X una variable aleatoria con distribución normal de media nula y varianza unitaria, es decir,

$$Q(x) = \mathbb{P}[X \geq x] = 1 - \mathrm{F}_X(x) \qquad \text{con } X \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{4.2}$$

A partir de esta definición se puede reescribir la Ecuación 3.14

$$\boxed{P_{e,n}^{a} = Q\left(\sqrt{\mathrm{SNR}_n}\right)} \tag{4.3}$$

y teniendo las probabilidades de error para ambos sistemas, se graficaron[1] en función de la SNR, con SNR $\in$ [-5, 30] dB, para $n \in$ [1, 25] (con pasos de 4).

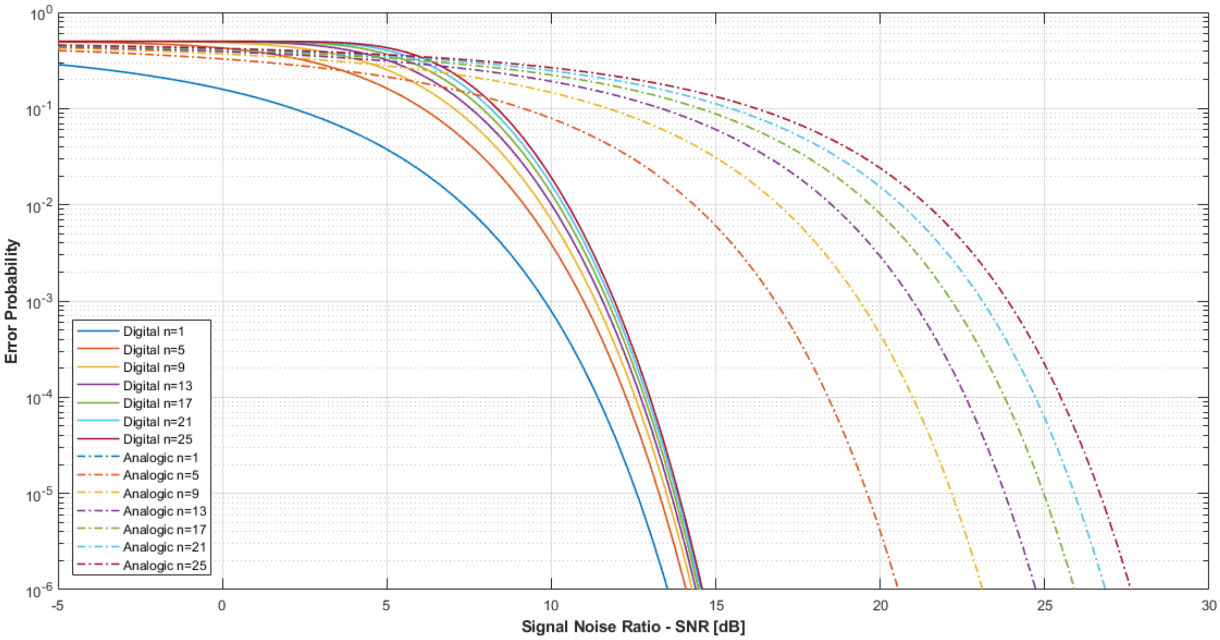


Figura 4.1: Probabilidades de error del sistema digital y del sistema analógico en función de la SNR para distintos valores de n.

A partir del gráfico hecho en MATLAB se extrajeron los valores de SNR para los cuales ambas probabilidades de error coinciden. Los resultados se plasmaron en la siguiente tabla

n	SNR [dB]
1	$\forall$ SNR
5	3,5
9	4,5
13	5,1
17	5,5
21	5,8
25	6

Tabla 4.1: Valores de SNR para los cuales las probabilidades de error de los sistemas coinciden.

A primera instancia, se puede apreciar como las probabilidades de error de ambos sistemas son funciones decrecientes en función de SNR. Esto tiene sentido debido a que SNR es la relación de la señal útil con el ruido, entonces a mayor SNR, el ruido se torna despreciable con respecto a la señal útil y por lo tanto, la señal sufre menores deformaciones y entonces aumenta la probabilidad de recibir el mismo símbolo que se transmitió.

[1] Código en MATLAB adjuntado en la entrega

También se debe notar que a mayor valor de n, las curvas decrecen mas lentamente para ambos sistemas lo cual es coherente debido a que eso implica mayor cantidad de repetidores, aumentando la probabilidad de error. Para el sistema analógico, las curvas se encuentran mas separadas entre ellas que las curvas del sistema digital. Se obtuvieron los errores porcentuales entre las curvas de $n = 5$ y $n = 25$ para ambos sistemas en los valores de SNR donde mayor es la diferencia. Se tomo como referencia la curva de $n = 5$ y se hallaron los siguientes valores

	SNR [dB]	$\epsilon\,\%$
Sistema Digital	5,6	208
Sistema Analogico	20	660000

Tabla 4.2: Error porcentual entre las probabilidades de error de 5 y 25 etapas.

Por lo tanto, se puede afirmar que considerando cada sistema por separado y sin tener en cuenta el valor de SNR, en función de la cantidad de etapas que se posee, el sistema digital es preferible por encima del analógico.

Luego, a partir del gráfico y de la tabla se puede apreciar que fijando un n, la probabilidad de error del sistema digital es mayor que la del sistema analógico hasta el valor de SNR donde las probabilidades de error coinciden. Para valores de SNR mayores, la curva correspondiente al sistema analógico se mantiene por arriba de la curva del sistema digital. Esto ocurre para todos los valores de n a excepción de $n = 1$ donde las curvas de probabilidad de error de ambos sistemas coinciden para todo valor de SNR. Por lo tanto, fijando SNR, el sistema analógico es una mejor elección para SNR menor a 5 dB aproximadamente. Sin embargo, cabe mencionar que para estos valores de SNR la diferencia entre las probabilidades de error de ambos sistemas no presentan una diferencia considerable.

5. Simulación Monte Carlo de las probabilidades de error

Para validar el análisis teórico previo se realizó un experimento de metodo **Monte Carlo** para un sistema con nueve canales y variando la SNR $\in [5, 25]\,$dB. El experimento consiste en generar realizaciones de una variable *Bernoulli*, y hacer una transformación para que el soporte sea $[-A, A]$, pasarlas por el sistema, sea el analógico o el digital y a partir de eso se puede calcular la función de error.

$$Z \sim Ber(p) \to X = (2\,A) \times Z + (A)$$

$$X \to \boxed{SISTEMA} \to \hat{X} \to E$$

Donde E es una variable aleatoria que define si el símbolo recibido es igual o distinto del símbolo transmitido

$$E = \begin{cases} 0 & si\ X = \hat{X} \\ 1 & si\ X \neq \hat{X} \end{cases} \tag{5.1}$$

Haciendo el experimento n veces se encuentra una sucesión de variables aleatorias IID con media finita, por lo que se cumplen las condiciones de la **Ley fuerte de los grandes números** por lo que:

$$\bar{E}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}[E_i] = \mathbb{P}[\hat{X} \neq X_i] = P_e \tag{5.2}$$

La aproximación es mejor a medida que se agranda la cantidad de n. Se realizó la simulación para ambos sistemas para 10^5 realizaciones, ya que para esa cantidad la probabilidad de error hallada por este método, se asemejaba considerablemente a la hallada teóricamente. Los resultados se plasmaron en el siguiente gráfico.

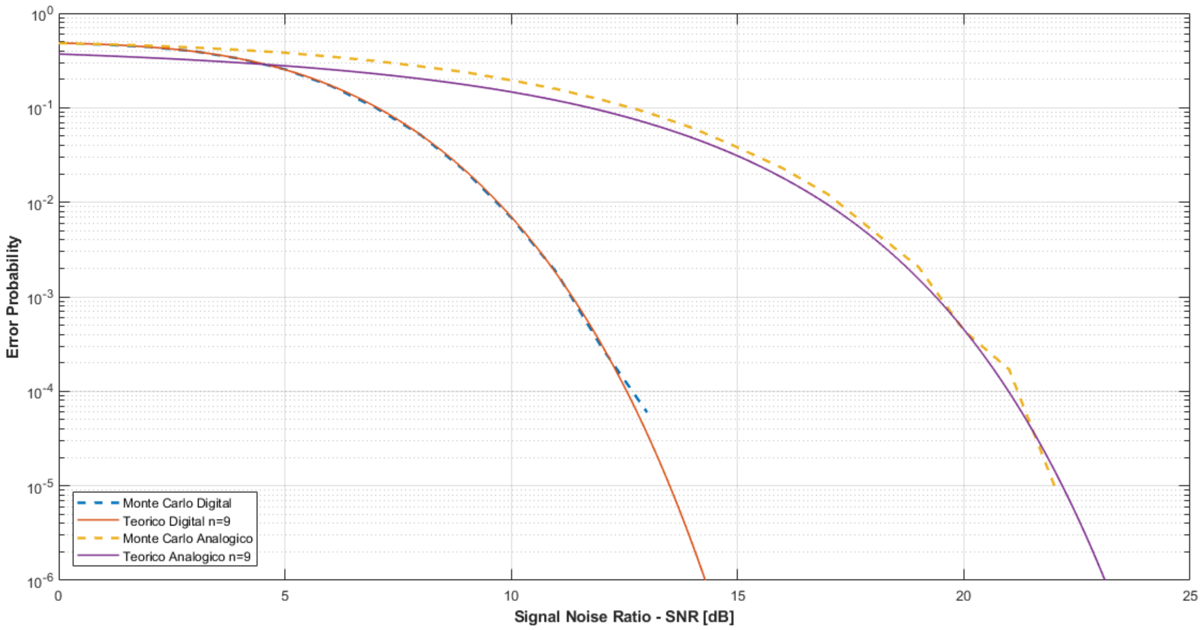


Figura 5.1: Probabilidad de error de los sistemas para $n = 9$ en función de la SNR.

Para finalizar, se graficaron las *pdfs* de la señal recibida en la ultima etapa Y_n condicionada al símbolo transmitido $f_{Y_n|X=A}$ y $f_{Y_n|X=-A}$. De la Ecuación 5.3 se conoce que son variables aleatorias Normales. Fijando las constantes

Constante	Valor
h	$\frac{1}{4}$
A	10
Var(W_i)	$\frac{1}{4}$
SNR	$\frac{a^2h^2}{Var(W_i)}$

Tabla 5.1: Valores elegidos para las constantes.

Y con estos valores resulta

$$\begin{aligned} Y_n|X_1 = A &\sim \mathcal{N}\ (2,13\,,\ 1,66) \\ Y_n|X_1 = -A &\sim \mathcal{N}\ (-2,13\,,\ 1,66) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para realizar el histograma se generaron realizaciones de las variables. En el siguiente gráfico se muestran las dos curvas teóricas y los histogramas correspondientes. El área bajo la intersección de las curvas, representa la probabilidad de error del sistema. Para valores de y_n negativos representa la probabilidad de haber recibido -A cuando se tranmisitió A, y para valores de y_n positivos representa la probabilidad de haber recibido A cuando se transmitió -A.

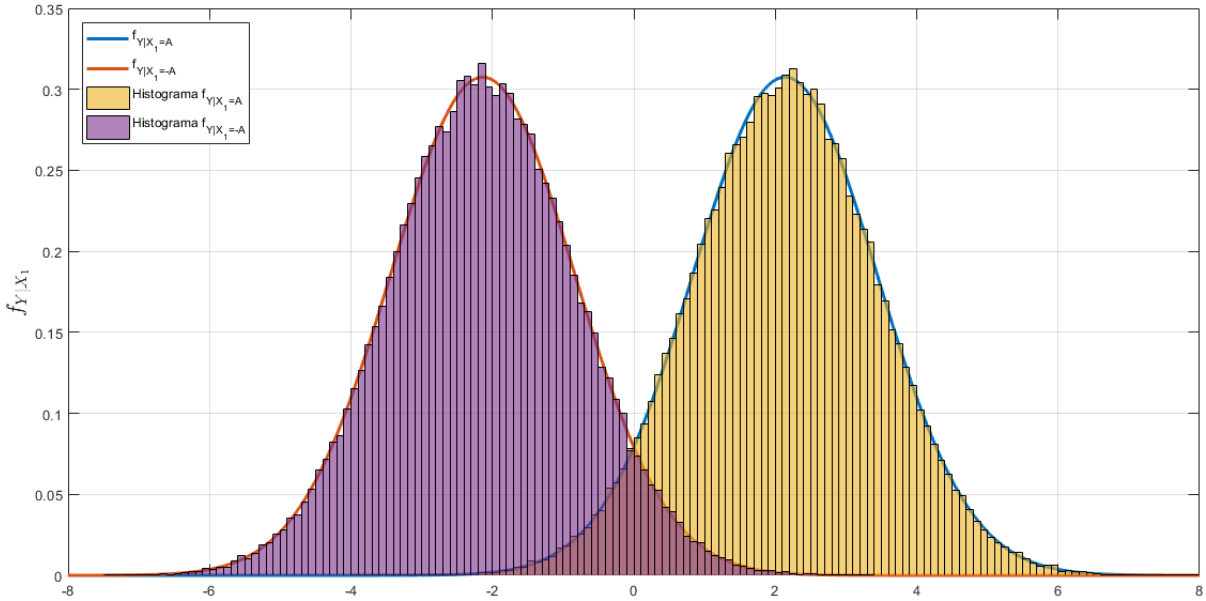


Figura 5.2: Pdfs de la señal recibida en la ultima etapa Y_n condicionada al simbol transmitido para el sistema analógico.

6. Conclusiones

Durante el desarrollo del trabajo práctico se analizaron las diferencias de los sistemas de comunicación analógico y digital mediante las probabilidades de errores respecto a la relación señal a ruido en cada etapa. Además se hizo un análisis teórico verificado mediante un experimento de **Simulación Monte Carlo**. Se utilizaron herramientas de programación mediante el software **Matlab**, que resultaron en gráficos y tablas para confrontar los dos tipos de repetidores.

Se concluyó que generalmente es preferible trabajar con repetidores digitales, ya que a medida que la SNR mejora la probabilidad de error decae de forma mas rápida que para el sistema analógico. Además, para mayor cantidad de etapas, el sistema digital resulta conveniente por encima del analógico a partir de la probabilidad de error hallada.