

---

**Збирка задачи од македонските селекциони  
натпревари за учество на Европската и  
Интернационалната Олимпијада по Физика  
(2013-2019)**

---

Анастасија Тортевска  
Мартин Ристовски



# Содржина

<b>Селекциони натпревари за EuPhO</b>	<b>1</b>
2017 . . . . .	1
Прв натпревар - 03 февруари 2017 . . . . .	1
Втор натпревар - 24 март 2017 . . . . .	4
2018 - 16 февруари 2018 . . . . .	6
2019 - 15 февруари 2019 . . . . .	9
<b>Селекциони натпревари за IPhO</b>	<b>13</b>
2013 . . . . .	13
2014 . . . . .	15
2015 . . . . .	19
2016 . . . . .	22
2017 . . . . .	33
2018 . . . . .	37
2019 . . . . .	43

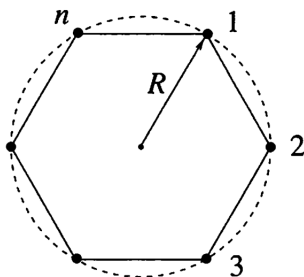


# Селекциони натпревари за EuPhO

2017

Прв натпревар - 03 февруари 2017

1. Цилиндрично стебло од дрво со дијаметар  $d = 20$  cm е поставено хоризонтално на земјата. Инсект кој се наоѓа од едната страна на стеблото сака да го прескокне. Пресметајте колкава треба да биде почетната брзина на инсектот за скокот да биде успешен.
- § 2. Материјални точки со маса  $m$  мируваат, поставени во аглите на еден правилен  $n$ -аголник како што е прикажано на сликата за  $n = 6$ . Како ќе се движи системот, ако помеѓу телата дејствува само гравитациската сила? Колку време поминува пред телата да се судрат ако  $n = 2, 3$  и  $10$ ? Испитај го граничниот случај кога  $n \gg 1$  и  $m = M_0/n$ , Каде што  $M_0$  е вкупната маса на системот.



Слика за задача 2.

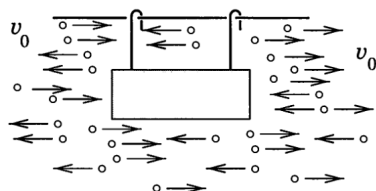
3. Тело со маса  $m$  кое се наоѓа на мазна хоризонтална подлога почнува да се движи под дејство на сила која е константна по модул и изнесува:  $F = \frac{mg}{3}$ . Аголот меѓу насоката на дејство на силата и насоката на движење на телото се менува и тоа според законот:  $\alpha = a \cdot s$ , каде  $a$  е константа а пак  $s$  го претставува изминатиот

пат на телото. Да се најде брзината на движење на телото како функција од аголот  $\alpha$ .

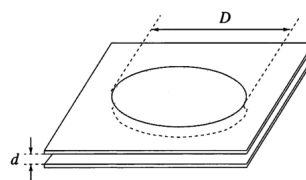
4. Планетата А се движи по елиптична орбита околу Сонцето. Во момент кога растојанието до Сонцето изнесувало  $r_0$ , брзината на планетата била еднаква на  $v_0$  а пак аголот кој го зафаќале векторите  $\vec{r}_0$  и  $\vec{v}_0$  изнесувал  $\alpha$ . Да се најде максималното и минималното растојание на кое може да се наоѓа планетата во текот на орбитирањето околу Сонцето.

- § 5. Замисли едно цилиндрично тело што може да се движи долж права жица, паралелна на неговата оска на симетрија, како што е прикажано на Сликата 2. Мали честички коишто се движат хоризонтално со брзина  $v_0$  рамномерно го бомбардираат телото од лево и од десно. Судирите со десниот крај на цилиндерот се идеално еластични, додека оние со левиот идеално нееластични, иако честичките не се прилепуваат за цилиндерот после судирот. Колкава е брзината на цилиндерот после:

- (а) долго време;  
(б) многу долго време.



Слика за задача 5.



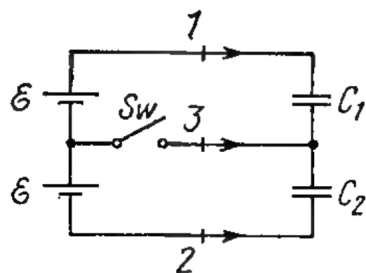
Слика за задача 6.

- § 6. Помеѓу две паралелни стаклени плочи има вода која го натопува стаклото. Растојанието помеѓу плочите е  $d$ , а дијаметарот на водната површина што се наоѓа помеѓу двете стаклени површини е  $D$  (Слика). Колкава е силата што се јавува помеѓу двете стаклени плочки?
7. Колкава промена на ентропијата настанува, кога два мола хелиум и три мола кислород, што зафаќаат два соседни волумена ќе се измешаат по отстранување на препреката помеѓу нив? Двата гаса се при стандардни услови ( $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ).

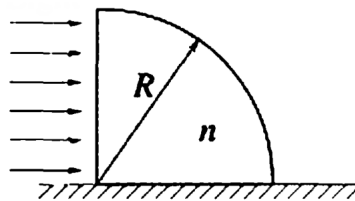
8. Сфера со радиус  $R$  е наелектризирана со позитивен полнеж чија што волуменска граница зависи од растојанието од центарот на топката според следнава формула:  $\rho = \rho_0(1 - \frac{r}{R})$ , каде што  $\rho_0$  е константа. Определете:

- (а) големината на електричното поле како функција од растојанието  $r$ , внатре и надвор од сферата;
- (б) максималната големина на електричното поле  $E_{max}$  и растојанието од центарот на сферата  $r_m$  каде се јавува најголемо поле.

§ 9. Во електричниот круг прикажан на сликата, електромоторната сила на секоја од батериите е  $\mathcal{E} = 60 \text{ V}$ , а капацитетот на кондензаторите е  $C_1 = 2,0 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 3,0 \mu\text{F}$ . Да се најде количеството електричество кое поминува низ деловите 1 и 2 од кругот (во насока како на стрелките на сликата) по затворање на прекинувачот.



Слика за задача 9.



Слика за задача 10.

§ 10. Стаклена призма во форма на четвртина цилиндар е поставена на хоризонтална површина (слика). Сноп од паралелни светлински зраци паѓа на вертикалната рамнина на површината на призмата. Ако радиусот на цилиндарот е  $R = 5 \text{ cm}$ , а индексот на прекршување е  $n = 1,5$ , определете каде на хоризонталната рамнина ќе се појави ликот на зраците на површината.

11. Монохроматска светлина со бранова должина  $\lambda = 0,60 \mu\text{m}$  паѓа на тенка планпаралелна плочка со индекс на прекршување  $n = 1,5$ . Определете ја дебелината на плочката во рефлектирана светлина ако разликата помеѓу аглиите за кои набљудуваме два соседни максимума за упаден агол од  $\theta = 45^\circ$  кон нормалата е  $\delta\theta = 3,0^\circ$ .

12. Паралелен сноп од водородни атоми со брзина  $600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  паѓа нормално на дијафрагма со тенка пукнатина, зад којашто на растојание од 1 m е поставен екран. Користејќи го Хајзенберговиот принцип на неопределеност ја ширината на пукнатината, при којашто ширината на добиениот лик на екранот има минимум.
13. Честичка со маса  $m$  се наоѓа во еднодимензионална потенцијална јама чиј облик зависи од координатата  $x$  на следниов начин:

$$U(x) = U_0(1 - \cos ax).$$

Да се одреди периодот на малите осцилации на честичката околу рамнотежната положба.

14. Да се покаже дека фреквенцијата  $\omega$  на фотон кој се добива при премин на електрој кај водородосличен јон помеѓу две соседни нивоа го задоволува следново неравенство:

$$\omega_n > \omega > \omega_{n+1},$$

каде  $\omega_n$  и  $\omega_{n+1}$  се кружните фреквенции на орбитирање на електронот околу јадрото на јонот. Покажете и дека во случај кога  $n \rightarrow \infty$  фреквенцијата на фотонот  $\omega \rightarrow \omega_n$ .

15. Според постулатот на Бор-Зомерфилд за периодично движење на честичка во потенцијално поле, генерализираниот импулс и координата мора да го задоволуваат следното квантизационо правило:

$$\oint p dq = 2\pi n \hbar,$$

каде  $p$  е генерализираниот импулс, а пак  $q$  е генерализираната координата. Употребувајќи го ова правило да се пресметаат можните вредности за енергијата на честичка со маса  $m$  која се движи во:

- (а) еднодимензионална правоаголна потенцијална јама со ширина  $l$  и бесконечно високи ѕидови;
- (б) долж круг со радиус  $r$ .

## Втор натпревар - 24 март 2017

- § 1. Најпознатиот гејзер во националниот парк Јелоустоун престставува голема подземна празнина, од која се простира тесна празнина низ којашто тече вода. Околната земја е топла како резултат на вулканска активност, така што водата врне во внатрешноста на земјата. Откако водата ќе зоврие се испушта нагоре низ протокот, при што околу 44 тони пареа излегуваат од гејзерот за 4 минути



(Сл.1). По ерупцијата, подземните извори повторно ја полнат празнината, така што за околу 20-30 минути, процесот повторно се повторува, а ерупција се случува на секои 90 минути. Геолошките експерименти покажуваат дека подземната температура се зголемува за  $1^{\circ}\text{C}$  на секој метар длабочина. Определете го минималното растојание под земјата на кое треба да се смести празнината која се полни со вода. Ако празнината се наоѓа на минимално растојание, тогаш колкав ќе биде нејзиниот волумен?



Слика за задача 1.



Слика за задача 2.

- § 2. Хоризонтален клип со занемарливи маса и топлински капацитет, може да се движи без триење во цилиндер (Слика 2). На почетокот, клипот се наоѓа во мирување и притоа го дели цилиндерот на два дела, при што секој од нив содржи  $1 \text{ mol}$  воздух на стандардна температура и притисок  $p_0$ . Потоа, за клипот е врзан товар со тежина  $W$ , како што е покажано на сликата. Поради тоа клипот се придвижува надолу и после неколку осцилации повторно доаѓа во состојба на мирување. Колкав волумен ќе зафаќа компресираниот воздух во долниот дел, ако товарот  $W$  е многу голем?
3. Две ленти од пајажина, секоја со должина  $l$  и сила на затегнување  $F$  се наоѓаат во стаклена кутија на температура  $T$ . Поради судирите со воздушните молекули, тие извршуваат случајни осцилации. Колкав е односот на амплитудите на овие осцилации ако пајажината  $A$  има двојно поголема маса од пајажината  $B$ ?
4. Оптичките јачини на објективот и окуларот на еден микроскоп се еднакви на 100 и 20 dpt, соодветно. Зголемувањето на микроскопот е еднакво на 50. Колкаво ќе биде зголемувањето на микроскопот, ако растојанието помеѓу објективот и окуларот се зголеми за 2,0 cm?
5. Две тенки симетрични стаклени леќи, едната биконвексна а другата биконкавна се донесени во контакт при што се формира систем со оптичка јачина  $\Phi = 0,5 \text{ dpt}$ . Њутновите прстени се набљудуваат во рефлектирана светлина со бранова должина  $\lambda = 0,61 \text{ nm}$ . Да се одреди:
- (а) Радиусот на 10тиот темен прстен;

(б) Како ќе се промени радиусот на тој прстен ако просторот измеѓу леќите се исполни со вода?

6. Според класичните закони на електродинамиката, електронот кој се движи со забрзување  $w$  губи дел од својата енергија горади зрачење, според следниов закон

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^2}w^2, \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}w^2,$$

каде  $e$  претставува полнежот на електронот а пак  $c$  е брзината на светлината. Да се пресмета времето за кое енергијата на електронска се намали за  $\eta = 10$  пати, ако сметаме дека тој изведува скоро хармонски осцилации со фреквенција  $\omega = 5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ .

7. Алфа честичка со кинетичка енергија  $T = 0,50 \text{ MeV}$  се отклонува од својот првобитен правец на движење, за агол од  $90^\circ$  под дејство на Кулоновото поле, создадено од едно стационарно јадро на жива. Да се најде:

- (а) најмалиот радиус на кривина на траекторијата на алфа честичката;
- (б) минималното растојание на коешто можат да се приближат честичката и јадрото.

8. Во ураниумова руда, односот на бројот на ураниумовите јадра  $U^{238}$  кон бројот на оловните јадра  $Pb^{206}$  е 2,8. Да се одреди староста на рудата, под претпоставка дека сите присутни јадра на олово се финален продукт од распаѓот на ураниумовата серија. Периодот на полураспад на  $U^{238}$  е  $4,5 \cdot 10^9$  години.

9. Фотон е расејан под агол  $\theta = 120^\circ$  од електрон, којшто мирува. По процесот на расејување електронот добива кинетичка енергија  $T = 0,45 \text{ MeV}$ . Определете ја енергијата што ја имал фотонот пред расејувањето.

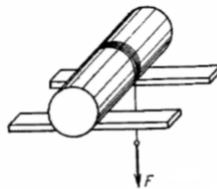
10. Разликата помеѓу кружните фреквенции на крајните линии во спектарот на  $He^+$  јонот е  $\Delta\omega = 5,18 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Определете ја брановата должина на првата линија во спектарот на  $He^+$  јонот.

## 2018 - 16 февруари 2018

1. Во темињата на еден рамностран триаголник со страна  $a$  се наоѓаат три материјални точки. Сите материјални точки во ист момент почнуваат да се движат со еднаква брзина по модул  $v$ . Векторот на брзината на првата точка постојано е насочен кон втората точка,

векторот на брзината на втората точка постојано е насочен кон третата точка, а пак оној на третата точка е насочен кон првата точка. За колку време точките ќе се судрат?

- § 2. Хомоген цилиндер со маса  $m$  се наоѓа на две хоризонтални штици, во состојба на мирување. Околу цилиндерот е намотано јаже (види слика). На слободниот крај на јажето се дејствува со константна сила  $F$  која е насочена вертикално надолу. Да се најде максималната големина на силата  $F$ , при која цилиндерот сèуште нема да се лизга. Коефициентот на триење помеѓу штиците и цилиндерот е еднаков на  $k$ . Колкаво е забрзувањето  $w_{max}$  на оската на цилиндерот при тркалањето?

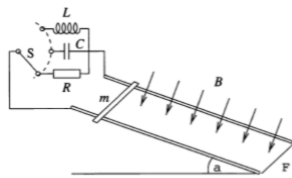


Слика за задача 2.

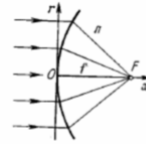
3. Доколку се потребни два дена за да се одмрзне замрзнато пиле со маса од 5 kg, да се пресмета колку време е потребно за да се одмрзне сибирски мамут со маса од 8 t. Да се претпостави дека почетните температури на пилето и мамутот се еднакви, а одмрзнувањето се одвива во приближно исти надворешни услови.
4. Еден мол од аргон се шири политропски со политропска константа  $n = 1,50$ . За време на процесот, температурата на гасот се менува за  $\Delta T = -26$  K. Да се најде:
  - (а) Количеството топлина кое го прима гасот;
  - (б) Работата извршена од гасот.
5. Метална топка со радиус  $a$  се наоѓа на растојание  $l$  од бесконечна спроводна рамнина. Просторот околу топката е исполнет со хомоген спроводен материјал со специфичен отпор  $\rho$ . Ако  $a \ll l$ , да се најде:
  - (а) Густината на струја на спроводната рамнина како функција од растојанието  $r$  од топката, ако потенцијалната енергија помеѓу топката и рамнината е еднаква на  $V$ ;
  - (б) Електричниот отпор на материјалот кој се наоѓа помеѓу топката и рамнината.

§ 6. Хомогено магнетно поле со индукција  $B$  е насочено нормално на површината на наведена рамнина, којашто е наклонета под агол  $\alpha$ . Спроводна прачка со маса  $m$  и должина  $l$  се лизга без триење по шините, кои се поставени на рамнината, како што е прикажано на сликата. Запишете како ќе се движи прачката, ако струјниот круг, кој е формиран помеѓу прачката и шините се затвора со:

- (а) Отпорник со отпор  $R$  (сметајте дека низ прачката тече струја  $I$ );
- (б) Кондензатор со капацитет  $C$ ;
- (в) Калем со индуктивност  $L$ .



Слика за задача 6.



Слика за задача 7.

§ 7. Паралелен сноп светлина од вакуум паѓа на површина од средина со индекс на прекршување  $n$  (види слика). Да се најде формата на површината  $x(r)$ , ако се знае дека снопот светлина се фокусира во точката  $F$  на растојание  $f$  од темето на површината  $O$ . Која е максималната вредност на радиусот на снопот  $r$  за која снопот сеуште може да се фокусира?

8. Светлина со бранова должина од  $535 \text{ nm}$  паѓа нормално на дифракциона решетка. Да се најде периодот на дифракционата решетка, ако на дифракционен агол од  $35^\circ$  му соодветствува еден од Франхоферовите максимуми, а највисокиот ред на спектарот којшто може да се набљудува е 5.

§ 9. Електрон којшто се движи со брзина еднаква на 60% од брзината на светлината, влегува во хомогено електрично поле, насочено нормално на неговата брзина. Кога електронот го напушта полето, неговата брзина образува агол од  $45^\circ$  со почетната брзина на електронот (види слика).

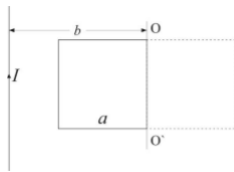
- (а) Да се најде брзината  $v_1$  на електронот по излегувањето од електричното поле;
- (б) Да се најде растојанието  $d$  на сликата, ако јачината на електричното поле е  $510 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ .

Електронот има енергија на мирување од 510 keV.

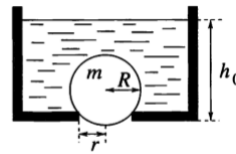
10. Позитрон со кинетичка енергија од 750 keV се судира со електрон, којшто мирува. Како резултат на анихилацијата, се создаваат два гама кванта со еднакви енергии. Да се најде аголот што го зафаќаат гама квантите.

## 2019 - 15 февруари 2019

1. Честичка со маса  $M$  се судира идеално еластично со честичка која мирува со маса  $m < M$ . Одредете го максималниот можен агол за кој упадната честичка може да се отклони од првобитниот правец.
- § 2. Квадратна спроводна рамка со страна  $a$  и долг праволиниски спроводник низ кој тече постојана струја со јачина  $I$  лежат во иста рамнина (Слика). Отпорот на рамката изнесува  $R$ . Ако рамката се заротира околу оската за  $180^\circ$  која се наоѓа на растојание  $b$  од праволинискиот спроводник одредете го количеството електричество кое ќе протече низ рамката. (Упатство: При решавање може да се искористи следниов податок:  $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$ .)



Слика за задача 2.

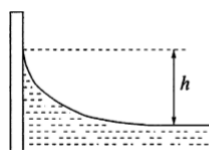


Слика за задача 3.

- § 3. На дното на метална цистерна полна со вода е направена дупка во форма на кружен отвор со радиус  $r$  којашто е затворена од внатрешната страна на цистерната со помош на топче со маса  $m$  и радиус  $R > r$  (види слика). Со помош на водена пумпа од цистерната се испумпува вода, при што висината на нивото на водата над дното се намалува. Кога висината на водата ќе достигне некоја вредност  $h_0$ , топчето ќе се крене над дупката. Да се најде вредноста на висината  $h_0$ .
4. Гас на температура  $T$  е затворен во сад, чиито сидови во почетниот момент се наоѓаат на температура  $T_1$ . Во кој случај притисокот што го предизвикува гасот врз сидовите на садот е повисок, кога  $T_1 < T$  или кога  $T_1 > T$ ?
5. Метално тело во форма на цилиндер ротира со аголна брзина  $\omega$  околу својата оска на симетрија. Цилиндерот се наоѓа во хомогено

магнетно поле  $B$  насочено паралелно на неговата оска. Да се пресмета волуменската густина на распределба на полнеж во внатрешноста на цилиндерот. Дали постои вредност за аголната брзина при којашто густината на полнежот во цилиндерот би била секаде нула?

6. Аквариумски сад е наполнет со чиста вода. Површината на водата на сидовите од аквариумот формира менискус, како што е прикажано на сликата. Да се најде висинската разлика  $h$  помеѓу долната површина и работ на менискусот. Коефициентот на површински напон на водата изнесува  $\gamma = 0,073 \text{ Nm}^{-1}$ .



Слика за задача 6.

7. Мало топче обесено на нерастеглив конец со должина 20 cm осцилира во течност, чијашто густина е три пати помала од густината на топчето. Да се определи периодот на малите осцилации на ова нишало. Вискозноста на течноста да се занемари.
8. Индексот на прекршување на светлински зрак во атмосферата опаѓа со висината од Земјината површина според зависноста:

$$n = n_0 - ah$$

каде  $n_0$  и  $a$  се константи и важи  $h \ll \frac{n_0}{a}$ . На која висина од површината на Земјата, емитиран зрак во хоризонтален правец, може да се движи околу Земјата без да се врати на Земјата.

9. При бомбардирање на некое јадро со протон се добива алфа честичка и се емитира позитрон. Да се определи бројот на неутрони во појдовното јадро.
10. Црна кутија има три терминали: син, црн и бел, и ги содржи следните елементи, поврзани во конфигурација звезда: батерија, кондензатор и сериски поврзан калем со диода. Внатрешните отпори на батеријата и кондензаторот може да се занемарат.
- (a) Да се нацртаат можните шеми на колото, коешто се наоѓа внатре во црната кутија. Како би можело со помош на мултиметар да се одреди во која насока точно е поврзана диодата со калемот?

- (б) Ако имате на располагање мултиметар, како треба да го поврзете за да ја измерите електромоторната сила на изворот (батеријата). Да се нацрта шемата;
- (в) Кои величини треба да се измерат и како треба да се поврзе мултиметарот при ова, за да се определи внатрешниот отпор на калемот. Да се нацрта шемата и да се објасни постапката за определување на внатрешниот отпор на калемот.





# Селекциони натпревари за IPhO

2013

§ 1. Цилиндар со радиус  $r$  ротира околу својата хоризонтално поставена надолжна оска со постојана аголна брзина  $\omega$ . На неговата внатрешна површина се распоредени идентични мали топчиња кои ротираат заедно со него (сл. 1).

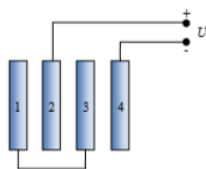
- (а) нацртајте го векторскиот дијаграм на силите за едно од топчињата на горната половина од цилиндарот;
- (б) нацртајте го векторскиот дијаграм на силите за едно од топчињата на долната половина од цилиндарот;
- (в) со колкава минимална аголна брзина треба да ротира цилиндарот за да се движат топчињата заедно со него (да не почнат да се лизгаат), ако коефициентот на триење при мирување помеѓу топчињата и внатрешната површина на цилиндарот е 1.



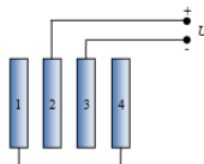
Слика за задача 1.

§ 2. Четири, еднакви метални плочи, секоја со површина  $S = 200 \text{ cm}^2$  се поставени паралелно една до друга во воздух на меѓусебно растојание  $d = 2 \text{ cm}$ . Во првиот случај, првата и третата плоча се поврзани со спроводник (жица), а на втората и четвртата плоча е приложен напон  $U = 1 \text{ kV}$ , слика 2а??. Во вториот случај, ги преспојуваме плочите така да првата плоча ја поврзуваме со четвртата а третата со негативниот пол на извор на напон  $U = 1 \text{ kV}$ , слика 2б.

- (а) Да се нацртаат шеми за двата кондензаторски системи;
- (б) Колкава топлина ќе се ослободи во жиците кога преминуваме од првиот во вториот случај на поврзување на кондензаторските системи? ( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}$ )



Сл. 1а. Шема на кондензаторскиот систем.



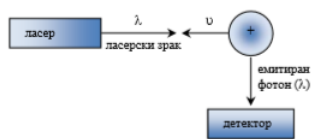
Сл. 1б. Шема на кондензаторскиот систем.

3. Да претпоставиме дека индексот на прекршување на водата е  $n = \frac{4}{3}$  и дека дождовните капки имаа сферна форма. Покажи, за која вредност на аголот  $\phi$  што го формира правецот на нашиот поглед кон капката дожд со правецот на светлината што ја осветлува капката, се појавува ефектот на виножито?

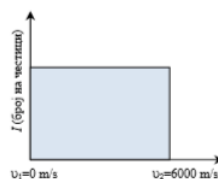
- § 4. Емисијата и апсорпцијата на фотони од атоми е реверзибилен процес. Пример за тоа е ексцитацијата на атомите и нивното враќање во основна состојба. На овој начин, може да се детектира апсорпција на фотон од атом преку набљудување на спонтанa реемисија на фотони или флуоресценција. Оваа појава се применува во некои методи за детекција и идентификација на атоми, како и одредување на спектарот на брзини на атомските снопови.

Во еден идеализиран експеримент прикажан на слика 1, еднократно наелектризирани јони се движат со брзина  $v$  во спротивен смер од смерот на ласерскиот зрак. Брановата должина на ласерот  $\lambda$  може да се менува. Честици во состојба на мирување може да се ексцитираат со фотони со бранова должина  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ . За ексцитирање на честици што се движат потребни се фотони со друга енергија или бранова должина заради Доплеровиот ефект. Спектарот на брзините на јоните има униформна распределба во интервалот помеѓу  $v_1 = 0$  и  $v_2 = 6000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , како што е прикажано на слика 2. Брзината на светлината е  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

- (а) Во кои граници треба да се менува брановата должина на ласерот за да се ексцитираат сите јони? Да се скицира распределбата на бројот на реемитирани фотони во зависност од брановата должина на ласерот? (Да се примени класичен Доплеров ефект.)



Сл. 1. Шема на експериментот.



Сл. 2. Распределба (спектар) на брзини на јоните.

- (б) Поточениот приод на предходната задача побарува примена на релативистички Доплеров ефект кој се задава со изразот

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Од кој ред на големина е грешката што се јавува во резултатот при примена на класичната формула?

- (в) Да претпоставиме дека пред ексцитацијата јоните поминуваат низ област во која ги забрзува потенцијална разлика  $U$ . Определи ја ширината на спектарот на брзини во зависност од забрзувачкиот напон? Дали напонот ја проширува или стеснува ширината на спектарот?
- (г) Јон со вредност  $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$  има две состојби со соодветни бранови должини:  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$  и  $\lambda_2 = \lambda_1 + 10^{-3} \text{ nm}$ . Покажи дека двата спектри на бранови должини на лазерот за ексцитација на сите јони се преклопуваат во случај кога нема забрзувачки напон. Дали може да се избери таков напон за да спектрите не се преклопуваат. Ако е можно, пресметај ја неговата вредност.

## 2014

1. Задачата се состои од два меѓусебно независни дела.

§ Прв дел: Честичка се движи со постојана по модул брзина  $v$ , по кружница со радиус  $r$  во насоката на движење на стрелките на часовникот. (Слика)

- (а) Прецртајте го цртежот од сликата и на него претставети ги векторите на брзината на честичката во точките  $A$  и  $B$ . Скицирајте го векторот на средното забрзување на честичката помеѓу точките  $A$  и  $B$  и изразете го неговиот модул преку  $v$  и  $r$ ;

- (б) Нацртајте ги векторите на брзината во точките  $A$  и  $C$  и изразете го модулот на векторот на средното забрзување помеѓу овие точки преку  $v$  и  $r$ ;
- (в) Нацртајте ги векторите на брзината во точките  $A$  и  $D$  и изразете го модулот на векторот на промената  $\Delta \vec{v}$  преку  $v$  и  $\theta$ ;
- (г) Изразете го времето потребно честичката да се помести од  $A$  до  $D$  преку  $r, v$  и  $\theta$ ;
- (д) Запишете го изразот за модулот на векторот на средното забрзување на честичката помеѓу точките  $A$  и  $D$  и проанализирајте го граничниот случај  $\theta \rightarrow 0$ .

Помош: Може да ви бидат корисни следниве апроксимативни релации кои важат за  $|\theta| \ll 1$

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Втор дел: Циркуски акробат со маса  $m_A$  отскокнува од трамболина вертикално нагоре со почетна брзина  $v_0$ . На висина  $H_0$  во однос на почетната положба на акробатот стои клоун со маса  $m_B$  ( $H_0$  е растојанието помеѓу нивните центри на маса). Во моментот на разминување акробатот го зграпчува клоунот и заедно продолжуваат да се движат нагоре. Претпоставете дека времето потребно акробатот да го зграпчи клоунот е занемарливо мало.

- (а) До која висина ќе се искачат акробатот и клоунот?
  - (б) Нумерички пресметајте ја висината до која ќе се искачат акробатот и клоунот кога  $v_0 = 9.0 \frac{m}{s}$ ,  $H_0 = 2.5m$  и  $m_A = m_B$ ;
  - (в) Пресметајте ја релативната промена на вкупната механичка енергија на системот  $\frac{\Delta E}{E_0}$ . При пресметките користете ги нумеричките вредности од (б).
2. Низ тело во облик на квадар со димензии  $a = 5.5cm$ ,  $b = 1.0cm$  и  $c = 0.10cm$ , изработено од InSb (индиум антимоид) тече струја со јачина  $I = 100mA$  долж страната  $a$ . Полупроводникот е од тип  $n$ , што значи дека главни преносници на струја се електроните. Врската на брзината на насоченото движење на електроните  $v$  и електричното поле  $E$  се задава со релацијата  $v = \mu E$  каде што константата  $\mu$  се нарекува подвижност на електроните.
- (а) Определете го модулот на векторот на електричното поле ако е познато дека концентрацијата на електрони во материјалот е  $n = 1.95 \cdot 10^{15} cm^{-3}$ , а нивната подвижност кај InSb е  $\mu = 10^5 cm^2 V^{-1} s^{-1}$ .

§ Во еден момент се вклучува магнетно поле. Векторот на магнетната индукција  $\vec{B}$  е нормален на правецот на течењето на струјата (паралелен со страната  $c$  на квадратот) и има модул  $B = 0.078T$  (Слика). Поради дејството на Лоренцовата сила на електроните, нивната концентрација на еден од бочните сидови се зголемува, а на спротивниот се намалува. Тоа создава додатно електрично поле долж страната  $b$ , како последица на што резултантниот вектор на електричното поле не е веќе паралелен со насоката на течење на струјата. Појавата е позната под името Холов ефект.

- (б) Определете ги модулот и правецот на векторот на резултантното електрично поле во парчето од полупроводник;
- (в)§ Пресметајте ја разликата на потенцијалот (Холовиот напон) помеѓу две спротивни точки од бочните страни на квадратот што се наоѓаат на растојание  $b$  една од друга; (Слика)
- (г) Претпоставете дека јачината на струјата, како и магнетното поле не се константни, туку се менуваат според следниве релации:

$$I = I_0 \sin(\omega t), \quad B = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Заради ваквата зависност Холовиот потенцијал ќе има две компоненти, една временски постојана и една осцилаторна. Најдете израз за временски постојаната компонента.

§ 3. Во оваа задача ќе ги анализираме топлинските осцилации на површинските атоми во елементарната ќелија на еден метален кристал со странично-центрирана кубна решетка ( $fcc$ ). Елементарната ќелија на  $fcc$  решетката содржи по еден атом во секое од темињата на коцката и по еден атом во центарот на секоја нејзина страна. (Слика) Ќе избереме координатен систем во кој  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$  и  $(0, 0, a)$  се положбите на трите атоми кои лежат на  $x$ ,  $y$  и  $z$  оските. Константата на решетката е  $a = 3.92\text{\AA}$ .

- (1) Да претпоставиме дека кристалот е пресечен така што рамнината што ги содржи атомите во точките А, В, С и D е гранична површина која ќе се користи за изведување на експерименти со дифракција на електрони со ниска енергија.

Во експериментот, тесен сноп од електрони со кинетичка енергија од  $64.0\text{eV}$  паѓа на граничната површина под агол  $\phi_0 = 15.0^\circ$ . Имајте во предвид дека  $\phi_0$  е агол помеѓу упадниот електрон сноп и нормалата на граничната површина. Рамнината што ги содржи отсечката  $\overline{AC}$  и нормалата на површината се смета за упадна рамнина. Ќе ги анализираме само електроните кои се расејуваат наназад (не продолжуваат да се движат низ внатрешноста). За поедноставување,

претпоставуваме дека електроните се расејуваат само од најгорниот слој на атоми.

- (а) Колкава е брановата должина на упадните електрони?
- (б) Ако детекторот е поставен да детектира само електрони што ќе останат во упадната рамнина, под кои агли, во однос на нормалата, ќе бидат детектирани дифрактираните електрони?

(2) Да претпоставиме дека топлинските осцилации се прости хармонични осцилации. Амплитудата на осцилациите се зголемува како што расте температурата. Дифракцијата на нискоенергетски електрони ни дозволува да ја измериме амплитудата. Интензитетот  $I$  на дифрактирани електрони е пропорционален со бројот на расејани електрони во определен временски интервал. Релацијата помеѓу интензитетот и амплитудата е следнава.

$$I = I_0 \exp \left[ -\frac{|\vec{K}' - \vec{K}|^2 A^2}{2} \right]$$

Во релацијата горе,  $I$  и  $I_0$  се интензитетите при температура  $T$  и апсолутна нула, соодветно.  $\vec{K}$  и  $\vec{K}'$  се брановите вектори на упадните и дифрактираните електрони, соодветно. Треба да се има предвид дека релацијата помеѓу брановиот вектор  $\vec{K}$  и импулсот  $\vec{p}$  на честичките е дадена со  $\vec{p} = \hbar \vec{K}$ , каде што  $\hbar$  е редуцираната Планкова константа.

§ За мерење на амплитудите го користиме методот опишан во претходниот дел. Детекторот ги детектира еластично расејаните електрони. Зависноста на  $\ln(I/I_0)$  од температурата  $T$  е прикажан на сликата.

Енергијата складирана во трансляцискиот степен на слобода во  $x$  насоката е, според екипартициската теорема, еднаква на  $k_B T$ , каде што  $k_B$  е Болцмановата константа.

- (а) Да се пресмета фреквенцијата со која осцилираат атомите од површината на кристалот во правец на нормалата на површината;
- (б) Да се пресмета амплитудата на осцилациите при температура  $T = 300K$ .

Податоци потребни при решавање на задачата:

$$\text{Моларна маса на металот } \mu = 195.1 \frac{g}{mol}$$

$$\text{Болцманова константа } k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

$$\text{Маса на електронот } m = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$$

Електричен полнеж на електронот  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} C$

Редуцирана планкова константа  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} Js$

## 2015

1. Равенките според кои се движи материјална точка се:

$$x(t) = -0.31t^2 + 7.2t + 28$$

$$y(t) = 0.22t^2 - 9.1t + 30$$

каде со  $t$  е означено времето, а  $x$  и  $y$  се мерат во метри.

- (а) Одреди ги координатите на честичката по  $10s$  од почетокот на движењето.
  - (б) Одреди ги модулот и насоката на радиус векторот на честичката по  $15s$  од почетокот на движењето.
  - (в) Најди ги изразите за компонентите и модулот на брзината и нивните нумерички вредности по  $15s$  од почетокот на движењето.
  - (г) Колкав е аголот што го зафаќа векторот на брзината со  $y$  оската.
  - (д) Најди ги компонентите и модулот на векторот на забрзувањето.
- § 2. Бинарен систем ѕвезди претставува систем од две ѕвезди кои се движат една околу друга. Во оваа задача ќе разгледаме случај во кој ѕвездите се движат по кружни патеки. Во тој случај орбитите се концентрични кружници чијшто центар е центарот на маса на системот. Масите на првата и втората ѕвезда ќе ги означиме со  $m_1$  и  $m_2$ , соодветно и на сличен начин радиусите на нивните орбити со  $R_1$  и  $R_2$ . Рапоредот на ѕвездите и нивното движење во даден момент од времето се прикажани на сликата. Покажете дека кружните фреквенции на двете ѕвезди се еднакви  $\omega_1 = \omega_2$  и најдете го периодот на ротација  $T$ .
3. Пресметај ја енергијата на  $1m^3$  воздух при стандардни услови. Густината на воздухот е приближно 1000 пати помала од таа на водата. Средната моларна маса на воздухот е  $28.97 \frac{g}{mol}$ . Болцмановата константа е  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ , додека универзалната гасна константа е  $R = 8.31 \frac{J}{molK}$ . Спореди ја оваа енергија со енергијата на автомобил со маса  $M = 500kg$  кој што се движи со брзина  $V = 80 \frac{km}{h}$ .

4. Поток на електрони со јачина  $I$  кои се движат со брзина  $v$ , паѓа на антикатада од платина со маса  $m$ . Ако е познато дека  $\frac{9}{10}$  од енергијата на електроните се претвора во топлина, да се пресмета температурата за која ќе се загрее антикатодата после бомбардирање со електрони кое што трае  $t = 60s$ . Да се пресмета минималната бранова должина на рентгенското зрачење што се добива во овој случај.

Податоци потребни при решавање на задачата:

Поток на електрони  $I = 0.16mA$

Брзина на електрони  $v = 6 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$

Маса на платина  $m = 5g$

Специфичен топлински капацитет на платина  $C = 1.22 \cdot 10^2 \frac{J}{kgK}$

Маса на електронот  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}kg$

Електричен полнеж на електронот  $e = 1.60 \cdot 10^{-19}C$

Редуцирана планкова константа  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}Js$

5. Сферна наночестичка: во оваа задача се разгледува сребрена наночестичка со радиус  $R = 10nm$  чијшто центар го разгледуваме како сместен во координатниот почеток. Сите движења, сили и полиња се насочени паралелно на  $x$  оската. Наночестичката содржи слободни електрони, коишто можат да се движат насекаде низ волуменот на честичката, при што секој атом на сребро донира еден електрон. Со ова сребрениот атом всушност станува позитивен јон.

(а) Најди ги волуменот  $V$  и масата  $M$  на наночестичката.

(б) Најди го бројот на сребрени јони  $N$  и нивната густина на полнеж  $\rho$ .

(в) Најди ја концентрацијата на слободни електрони  $n$  и нивната вкупна маса  $M'$ .

Познато ти е дека густината на среброт изнесува  $\rho_m = 10490 \frac{kg}{m^3}$ , а пак неговата моларна маса е  $\mu = 107.868 \frac{g}{mol}$ . Исто така е познато дека Авогадровиот број е  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ , елементарниот електричен полнеж е  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$  и масата на електронот е  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}kg$ .

§ Електрично поле во неутрален регион на честичка: претпоставуваме дека во наночестичката со густина на полнеж  $\rho$  е формиран електронеутрален регион со радиус  $R_1$  чијшто центар е поместен од тој на наночестичката за растојание  $x_d$  во  $x$  насоката (Слика).



Покажи дека полето во овој електронеутрален регион се однесува како:

$$\vec{E} = A \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{x}_d$$

и определи ја константата  $A$ , каде што сметаме дека релативната диелектрична константа на среброто е 1.

Помош: Електронеутралниот регион можеме да го разгледуваме како регион со густина на полнеж  $-\rho$  којшто е сместен во хомогено наелектризираната сфера.

Сила врз поместениот електронски облак: во овој дел ќе го разгледаме колективното движење на електронскиот облак под дејството на електричното поле пресметано во ???. Улогата на електронеутрален регион во тој случај ја игра електронскиот облак којшто земаме дека е опишан од истите параметри како во ???.

Системот во којшто ќе работиме е врзан со центарот на сребрената наночестичка и препоставуваме дека тој е инерцијален. Во овој систем на електронскиот облак му дејствува сила  $\vec{F}$  заради интеракцијата на електроните и атомите, при што центарот на облакот се поместува за растојание  $x_p$  ( $x_p \ll R$ ).

- (а) Определи ја силата  $\vec{F}$  преку концентрацијата на слободни електрони определена во ??? и преку векторот на положбата на центарот на облакот  $\vec{x}$ .
- (б) Најди ја работата што ја врши силата  $\vec{F}$  при извршеното поместување.

Помош: Работата којашто ја врши сила при поместување од до е

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

Надворешно хомогено електрично поле: да ја разгледаме честичката во присуство на надворешно хомогено електрично поле зададено со  $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$ . Заради надворешното поле рамнотежната положба на електронскиот облак се променува.

- (а) Определи ја новата рамнотежна положба на електронскиот облак во зависност од магнитудата на електричното поле и концентрацијата на електроните пресметана во .
- (б) Определи го количеството електричество поместено низ рамнината како функција од концентрацијата на електроните  $n$ , радиусот на наночестичката  $R$  и поместувањето на центарот на облакот  $\vec{x}_p$ .

- § 6. Две призми се залепени како што е прикажано на слика ???. Аглите коишто се означени на сликата изнесуваат  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$  и  $\alpha_3 = 90^\circ$ . Индексите на прекршување на призмите пак зависат од брановата должина и се зададени со следниве релации:

$$n_1 = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} \quad n_2 = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$$

каде што  $a_1 = 1.1$ ,  $b_1 = 10^5 nm^2$ ,  $a_2 = 1.3$  и  $b_2 = 5 \cdot 10^4 nm^2$ .

- (а) Одреди ја брановата должина  $\lambda_0$  на зрачењето кое независно од влезниот агол на границата AD ја преминува границата AC без прекршување. Определи ги и соодветните индекси на прекршување за тоа зрачење.
- (б) За дадениот систем нацртај ги патиштата на зраци со бранови должини  $\lambda_1 = 800 nm$ ,  $\lambda_2 = 400 nm$  и  $\lambda_3 = \lambda_0$ , ако за сите зраци влезниот агол на границата AD е ист.
- (в) Одреди го аголот на најмала девијација за зрак со бранова должина  $\lambda_0$ .
- (г) Определи ја брановата должина на зрак што е паралелен на основата DC пред и по поминувањето низ призмите.

## 2016

1. Определување на коефициентот на динамичка вискозност на течност и густината на метални топчиња

Цел на експериментот: Да се одреди коефициентот на динамичка вискозност на шампон со Стоксовиот метод, како и да се определи густината на материјалот од кој се направени топчињата.

Список на апаратура:

Стаклена мензура со изгравирани поделки  
Хартиено метро  
Шублер  
Микрометарски винт  
Стоперка (хронометар)  
Течност чија вискозност се определува  
Дестилирана вода  
Лабораториска чаша  
Пикнометар

Шприц

Термометар

Стаклена цамлија

Метални топчиња со различен дијаметар

Вовед: Вискозноста е својство на флуидите на пружање отпор при релативно движење на нивните слоеви. При движење на течностите, слоевите кои се поблиску до тврди тела (на пример сидовите на сад) се движат со помала брзина од слоевите кои се подалеку. Словите кои пак се во непосреден допир со тврди тела имаат брзина 0. Вискозноста на течноста силно зависи од нејзината температура. Еден начин на определување на динамичката вискозност е со помош на топчиња кои паѓаат под дејство на гравитацијата. Во овој случај вискозноста се однесува како сила на триење. Во овој експеримент разгледуваме големи коефициенти на динамичка вискозност и мали брзини на движење. Ова значи дека топчето многу брзо ја достигнува терминалната брзина и можеме да сметаме дека низ целото движење се движи со таа константна брзина.

### § 1.1 Изведување на формула

При паѓање на топче со константна брзина во стационарна вискозна течност, на него дејствуваат три сили: Стоксовата сила на вискозно триење  $F$ , Архимедовата сил  $F_A$  и силата на Земјината тежа  $G$  (види Слика 1).

1.1.1 Запиши го вториот Њутнов закон за движењето на телото низ течноста.

1.1.2 Запиѓи израз за Архимедовата сила.

1.1.3 Имајќи во предвид дека Стоксовата сила на тело со сферична геометрија е

$$F = 6\pi\eta rv$$

да се изведе изразот за динамичката вискозност на флуидот.

$$\eta = \frac{1}{18}(\rho - \rho_T)\frac{d^2g}{v}$$

каде  $\rho$  е густината на топчето,  $\rho_T$  е густината на флуидот,  $d$  е дијаметарот на топчето,  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  е Земјиното забрзување и  $v$  е брзината на топчето низ течноста.

Изведувањето на равенката да не се прави во лабораторија. Доколку тоа не го извршите претходно равенката може да ја користите како дадена!

### 1.2 Одредување на дијаметарот и густината на џамлијата

За определување на коефициентот на динамичка вискозност потребно е да го одредите дијаметарот на џамлијата и нејзината густина. Со помош на микрометарски винт направете 5 мерења на дијаметарот на џамлијата на различни места на нејзината површина. Резултатите представете ги во табела:

Мерење	$d$ [ ]	$\Delta d$ [ ]
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
Средна вредност		

Запиши ја добиената вредност во форма:

$$d = (d_{sr} \pm \Delta d_{sr})$$

Измерете ја масата на џамлијата со помош на дигиталната терзија во лабораторијата и трите мерења запишете ги во табела слична на претходната. Доколку добиете идентични резултати, за решка искористете ја вредноста  $\Delta m_{sr} = 0.01g$ . Резултатот запишете го во форма:

$$m = (m_{sr} \pm \Delta m_{sr})$$

Определете ја густината на џамлијата и нејзината грешка, која може да ја пресметате според

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m_{sr}}{m_{sr}} + 3 \frac{\Delta d_{sr}}{d_{sr}}$$

и резултатот запишете го во форма:

$$\rho = (\rho_{sr} \pm \Delta \rho_{sr})$$

### 1.3 Одредување на густината на шампонот (препорачливо е да го одберете првиот начин кој носи повеќе поени. Доколку имате проблеми со одредување на густината на првиот начин (со пикнометар) тогаш можете да ја одредите густината на вториот начин (со ареометар). Ареометар побарајте од одговорното лице во лабораторијата. Не е потребно определување на густината на двата начина!)

$t[^\circ C]$	$\rho[\frac{kg}{m^3}]$	$t[^\circ C]$	$\rho[\frac{kg}{m^3}]$	$t[^\circ C]$	$\rho[\frac{kg}{m^3}]$
0	999.87	9	999.81	18	998.32
1	999.93	10	999.73	19	998.43
2	999.97	11	999.63	20	998.23
3	999.99	12	999.52	21	998.03
4	1000.00	13	999.40	22	997.70
5	999.99	14	999.27	23	997.57
6	999.97	15	999.11	24	997.32
7	999.93	16	998.97	25	997.07
8	999.88	17	998.80	26	996.81

Табела 1: Густина на водата при различни температури

(1 Начин - Пикнометар) Мерењето на густината на дадена течност ( $\rho_T$ ) со помош на пикнометар се врши на тој начин што се споредува масата на испитуваната течност што го исполнува волуменот на пикнометарот и масата на вода со истиот волумен. Ако масата на празен и сув пикнометар ја означиме со  $m_0$ , масата на пикнометар наполнет со дестилирна вода ја означиме со  $m_V$ , а масата на пикнометар наполнет со течноста чија густина ја определуваме со  $m_T$ , тогаш густината на течноста ја определуваме според релацијата:

$$\rho_T = \frac{m_T - m_0}{m_V - m_0} \rho_V$$

каде со  $\rho_V$  е означена густината на водата. Густината на водата зависи од нејзината температура. Заради тоа, со контактен термометар, измерете ја температурата на водата и од табелата на густини определи ја густината.

- 1.3.1 Направете три мерења на масата на празен и сув пикнометар и запишете ги во табела.
- 1.3.2 Направете три мерења на масата на пикнометар целосно исполнет со вода и запишете ги во табела.
- 1.3.3 Направете три мерења на масата пикнометар целосно исполнет со шампон и запишете ги во табела.

Резултатите запишете ги и во формата:

$$m_X = (m_{sr,X} \pm \Delta m_{sr,X})$$

Доколку резултатите се идентични, за средната грешка на мерењата земете  $\Delta m_{sr} = 0.01g$ .

- 1.3.4 Одредете ја густината на шампонот и нејзината апсолутна грешка, која ќе ја определите преку формулата:

$$\frac{\Delta \rho_T}{\rho_T} = \left| \frac{\Delta m_{sr,T} + \Delta m_{sr,0}}{m_{sr,T} - m_{sr,0}} + \frac{\Delta m_{sr,V} + \Delta m_{sr,0}}{m_{sr,V} - m_{sr,0}} \right|$$

И резултатот запишете го во форма:

$$\rho_T = (\rho_T \pm \Delta \rho_T)$$

- 1.3.5 Изведете ја релацијата .

Изведувањето да не се врши во лабораторија !

§ (2 Начин - Ареометар) Ареометарот претставува затворена стаклена цевка со форма прикажана на сликата. Во поширокиот дел на цевката се поставени оловни сачми или жива што овозможува ареометарот да плови во течнота вертикално. Горниот, потесен дел на ареометарот е снабден со скала, која е фабрички изградувана во единици за густина, во определен интервал на густини.

Ареометарот се потопува во течнота чијашто густина се мери додека да почне сам да лебди. Пропаѓањето на ареометарот е директно зависно од густината на течнота. Колку поголема густина има течнота толку помалку ареометарот ќе пропадне во неа, и обратно. Поделката што се совпаѓа со нивото на течнота ни ја дава густината.

Направете три мерења на густината на шампонот со ареометар и пресметајте ја средната вредност од добиените мерења.

- 1.4 Одредување на брзината на паѓање на џамлијата

Мензурата има поделци. Со хартиеното метро измерете ја должината од поделката „30“ до поделката „250“. Колку изнесува оваа должина? Со стоперката направете пет мерења на времето за кое џамлијата го поминува ова растојание. Резултатите внесете ги во табела. Определете го времето на паѓање и неговата апсолутна грешка и запишете ги во облик:

$$t = (t_{sr} \pm \Delta t_{sr})$$

Со помош на пресметаната вредност за  $t$  пресметајте ја брзината на џамлијата.

- 1.5 Пресметување на коефициентот на динамичка вискозност

Користејќи ја релацијата да се одреди коефициентот на динамичка вискозност на шампонот.

### 1.6 Ефект заради конечноста на средината

Релацијата е изведена под претпоставката дека средината во која паѓа цамлијата е безгранична. Во реалноста топчето паѓа во средина со конечни димензии (големината на мензурата). Ова значи дека треба да го земеме во предвид и ефектот на сидовите од мензурата врз брзината на топчето. За топче во цилиндричен сад со дијаметар  $D$ , експериментално е добиена релацијата:

$$\eta_{kor} = \frac{1}{18}(\rho - \rho_T) \frac{d^2 g}{v} \left(1 + 2.4 \frac{d}{D}\right)^{-1}$$

Со шублер направете пет мерења на внатрешниот дијаметар на мензурата и резултатите запишете ги во табела заедно со нивните апсолутни грешки.

Користејќи ја равенката пресметајте го коефициентот на динамичка вискозност на шампонот.

### 1.7 Определување на густината на металните топчиња

- 1.7.1 Со микрометарскиот винт направете по 3 мерења за дијаметарот на секое од 5те метални топчиња. Резултатите претставете ги во соодветна табела и исто така запишете ги во форма:

$$d_n = (d_{sr,n} \pm \Delta d_{sr,n})$$

Внимавајте во процесот да мерење да не ги загубите топчињата!

- 1.7.2 На ист начин како и претходно определете ја брзината на паѓање на секое од топчињата и резултатите запиши ги во соодветна табела. Направи по едно мерење за секое топче.

Топче број	Дијаметар $d$ [ ]	Време $t$ [ ]	Брзина $v$ [ ]
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Ако некое од мерењата се сомневате дека е погрешно, извадете го топчето од шампонот и повторно направете го спорното мерење. При вадењето внимателно претурете го шампонот во лабораториска чаша и потоа вратете го назад во мензурата.

- 1.7.3 Нацртајте график на брзината на паѓање на топчињата во зависност од нивниот дијаметар на квадрат, односно  $v = v(d^2)$ .

1.7.4 Определете го коефициентот на правец на графикот.

1.7.5 Со помош на коефициентот на правец определете ја густината на топчињата, имајќи ги во предвид резултатите за кустината на шампонот и коефициентот на динамичка вискозност што ги добивте во деловите ?? и ??.

2. Едно јајце директно од фрижидер ( $T_0 = 4^\circ C$ ) е ставено во сад со вода која врие на температура  $T_1$ .

- (а) Колкаво количество топлина е потребно за целото јајце да коагулира?
- (б) Колкав е протокот на топлина (топлински флукс) на површината на јајцето?
- (в) Колкава моќност се пренесува на јајцето?
- (г) Колку долго треба да се вари јајцето за да биде тврдо варено?

Напомена: Можете да го користите законот на Фурие за топло-спроводливост.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa S \frac{\Delta T}{\Delta r}$$

или

$$J = k \frac{\Delta T}{\Delta r}$$

каде што  $\Delta T$  е разликата на температури на дадено растојание  $\Delta r$  од испитуваниот предмет,  $J$  е големината на топлинскиот флукс и  $S$  е површината низ која се пренесува топлината. Топлинскиот флукс има единица мерка  $\frac{W}{m^2}$ .

Потребни податоци за решавање на задачата:

Густина на јајцето  $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$

Специфичен топлински капацитет на јајцето  $c = 4.2 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}$

Радиус на јајцето  $R = 2.5cm$

Температура на коагулација на јајцето  $T_C = 65^\circ C$

Коефициент на топлоспроводливост  $\kappa = 0.64 \frac{W}{Km}$

§ 3. Микроскопијата со атомска сонда (Atomic probe microscopy, АРМ) е моќна алатка во нанонауката, со чија помош може да се добијат слики со резолуција од редот на атомските растојанија. Сондата е поврзана со носач којшто може да осцилира само во вертикалната насока. Осцилирањето на сондата и носачот може да се следи со помош на фотодетектор, преку регистрирање на одбиен ласерски сноп (Слика).



Поместувањето  $z$  на сондата ја задоволува диференцијалната равенка:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F$$

каде што  $m$  е масата на носачот,  $k = m\omega_0^2$  е константата на еластичност,  $b$  е мал коефициент на триење за кој што важи  $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$  и конечно  $F$  е надворешната сила на присила, којашто се создава со помош на пиезоелектричниот ефект.

- (а) Ако надворешната сила  $F$ , предизвикана од пиезоелектрикот и поместувањето  $z$  се дадени со изразите

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad z(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

соодветно, каде што  $A > 0$  и  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , да се најде изразот за амплитудата  $A$  и фазата  $\varphi$  ( $\tan(\varphi)$ ), во зависност од  $F_0, m, \omega, \omega_0$  и  $b$ . Кои се нивните вредности во услови на резонанс односно при  $\omega = \omega_0$ .

- (б) Информации за површината што се снима се пренесуваат преку одбивање на ласерски сноп од носачот на сондата и детектирање на тој сноп со фотодетектор. Влезниот сигнал на фотодетекторот понатаму се насочува кон засилувач, каде што повеќекратно се засилува со помош на референтен сигнал (напон)  $V_R = V_{R,0} \sin(\omega t)$  и потоа се пренесува само правата компонента (DC) од засилениот сигнал. Ако претпоставиме дека влезниот напон е даден со  $V_I = V_{I,0} \sin(\omega_I t - \varphi_I)$ , каде што  $V_{R,0}, V_{I,0}, \omega_I$  и  $\varphi_I$  се дадени константи, најдете го условот за кружната фреквенција при кој што излезниот сигнал има права компонента. Колку е големината на таа права компонента?

Помош: Принципот на засилување на влезен сигнал е таков што засилениот сигнал е производ на влезниот сигнал и референтниот сигнал.

- (в) Поминувајќи низ фазниот модулатор, референтниот напон станува  $V'_R = V_{R,0} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . Напонот  $V'_R$  дејствува на пиезоелементот и го движи носачот со сила  $F = c_1 V'_R$ . Потоа, поместувањето  $z$  на носачот се претвора во напон  $V_I = c_2 z$ . Во претходните изрази  $c_1$  и  $c_2$  се константи. Одреди ја големината на излезниот прав напон во услови на резонанса.
- (г) Мала промена на масата на носачот ја променува резонантната фреквенција за  $\Delta\omega_0$ . Како резултат на ова, фазата при резонантната фреквенција се поместува за  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{1800}$ , типична резолуција при мерења на фазата во вакви експерименти. Физичката интерпретација на зголемување на масата на осцилаторот е

интеракцијата на сондата со примерокот, овие промени ни даваат информации за примерокот. Физичките параметри на системот се  $m = 1.0 \cdot 10^{-12} kg$ ,  $k = 1.0 \frac{N}{m}$  и  $\frac{b}{m} = 1.0 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$ .

Помош: При решавање на задачата можат да ви бидат корисни апроксимативните изрази  $(1+x)^n \approx 1+nx$  и  $\tan(\frac{\pi}{2} + x) \approx -\frac{1}{x}$  кои важат за  $|x| \ll 1$ , како и следниве тригонометриски трансформации:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

4. Глобалниот позициониращки систем (GPS) е навигациска технологија која употребува сигнали од сателити за да ја определи позицијата на некој објект. Но заради големата брзина на движење на сателитите и нивната голема височина потребни се корекции на класичната теорија според специјалната и општата теорија на релативноста. Корекциите се мали но екстремни важни за прецизно работење на системот. Во оваа задача ќе ги истражаме и двете корекции.

За почеток да го разгледаме движењето на забрзана релативистичка честичка. Работиме во два референтни системи. Првиот е систем на мирување (го означуваме со  $S$ , а исто така го нарекуваме и систем Земја), тоа е системот во кој честичката е во мирување на почетокот. Другиот систем е сопствениот систем на честичката (го бележиме со  $S'$ ) и тоа е системот кој се движи заедно со честичката. Поточно тоа не е неинерцијален систем туку е систем кој се движи со константна брзина и во инфинитезимално краток период од времето мери времиња и должини на еквивалентен начин како самата честичка. Во почетниот момент ги синхронизираме часовниците на честичката и системот на мирување така што да важи  $\tau = t = 0$ , каде што  $\tau$  е сопственото време на честичката, а  $t$  е времето во системот на мирување

За да ги добиеме општо релативистичките резултати не мора да работиме со метрики и комплицирани тензорски равенки, туку само да го примениме системот на еквиваленција на специјално релативистичките резултати. Комбинирајќи ги овие резултати ги добиваме потребните корекции во точност на GPS.

Помош: Следниве математички релации може да ви бидат од корист:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh}{\cosh}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \sinh(x-y) = \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Дел А - Една забрзана честичка

Ќе разгледаме честичка која што во мирување има маса  $m$  и е под дејство на константна сила  $F$  (гледајќи од системот на мирување) насочена долж позитивната  $x$  насока. На почетокот честичката е во мирување во координатниот почеток.

1. Кога брзината на честичката е  $v$ , пресметај го забрзувањето  $a$  на честичката во однос на системот на мирување.
2. Пресметај ја брзината на честичката  $\beta(t) = \frac{v(t)}{c}$  во системот на мирување како функција од времето.
3. Пресметај ја позицијата  $x(t)$  на честичката во системот на мирување како функција од времето.
4. Покажи дека сопственото забрзување на честичката  $a' \equiv g = \frac{F}{m}$  е константно. Сопственото забрзување е забрзувањето на честичката во моменталниот сопствен систем.
5. Пресметај ја брзината  $\beta(\tau)$  кога времето измерено од честичката е  $\tau$ . Изрази го одговорот преку  $\tau$ ,  $g$  и  $c$ .
6. Изрази го времето  $t$  преку истите величини од претходната точка.

Дијаграм на Минковски

Во многу случаи, многу е корисно релативистичките настани да се претстават на преку дијаграм на Минковски. За цртање на дијаграмот ни се потребни само лоренцовите трансформации помеѓу мирувачки систем и систем кој се движи со брзина  $v = \beta c$  во однос на системот на мирување.

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

и обратно

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

каде што

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

За да најдеме како се менуваат оските на дијаграмот при трансформацијата. По дефиниција оската  $x'$  е збирот од сите настани што

се случуваат во исто време  $t'$ , и обратно, оската  $t'$  е збирот од сите настани што се случуваат на иста позиција  $x'$ . Тоа е мотивација да ди разгледаме трансформациите:

$$(x', ct') = (0, 0) \Leftrightarrow (x, ct) = (0, 0)$$

$$(x', ct') = (1, 0) \Leftrightarrow (x, ct) = (\gamma, \gamma\beta)$$

$$(x', ct') = (0, 1) \Leftrightarrow (x, ct) = (\gamma\beta, \gamma)$$

Можеме да видиме дека трансформациите ги закосуваат двете оски навнатре за агол  $\theta = \arctan(\beta)$  и ја менуваат нивната скала така што елемент со единична должина се претвора во елемент со должина  $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ .

Дел Б - Две забрзани честички

Во овој дел ќе разгледаме две забрзани честички со исто сопствено забрзување, но со тоа што едната почнува од  $x = 0$ , а другата од  $x = L$ . Во овој дел го занемаруваме времето потребно за инфомациите од едната честичка да пристигнат до другата.

1. По некое време набљудувач во системот на мирување ги набљудува честичките. Ако часовникот на првата честичка покажува  $\tau_A$ , што покажува часовникот на втората честичка според набљудувачот?
2. Сега разгледај набљудување од системот на првата честичка. Набљудувачот кој се движи со првата честичка во определен момент забележува дека неговиот часовник покажува  $\tau_1$ . Во исто време гледа дека часовникот на втората честичка покажува  $\tau_2$ . Покажи дека помеѓу  $\tau_1$  и  $\tau_2$  важи релацијата:

$$\sinh\left(\frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1)\right) = C_1 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau_1\right)$$

Одреди ја константата  $C_1$

3. Првата честичка ќе забележи дека втората честичка се оддалечува од неа. Покажи дека брзината на промена на растојанието според првата честичка ќе биде:

$$\frac{dL'}{dt} = C_2 \frac{\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_2\right)}{\cosh\left(\frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1)\right)}$$

Одреди ја константата  $C_2$ .

Дел В - Рамномерно забрзан систем

Во овој дел ќе ги наместиме сопствените забрзувања на честичките да бидат такви што растојанието помеѓу нив, набљудувано од двете честички, да не се променува.

1. Првата честичка има сопствено забрзување  $g_1$  во позитивната  $x$  насока. Во системот на мирување постои фиксна точка  $x = x_P$  што има константно растојание од првата честичка според првата честичка. Најди го  $x_P$ .
2. Земајќи го како дадено забрзувањето на првата честичка  $g_1$ , одреди го забрзувањето на втората честичка  $g_2$  така што растојанието помеѓу честичките да е константно според првата честичка.
3. Најди го односот на временски интервали на втората и првата честичка

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$

според првата честичка.

### Дел Г - Корекција на GPS

Принципот на еквиваленција вели дека набљудувачите не можат да разликуваат помеѓу системи кои забрзуваат и системи кои се под дејство на гравитација.

Користејќи ги резултатите од претходниот дел заедно со принципот на еквиваленција добиваме дека временските интервали на различни височини, дури и да нема релативно движење помеѓу часовниците, се различни.

Сега набљудуваме сателит кој орбитира околу Земјата со период од  $T = 12h$ .

1. Ако гравитациското забрзување на површината на земјата е  $g = 9.82 \frac{m}{s^2}$  и радиусот на Земјата е  $R = 6380km$ , колкав е радиусот на орбитата на сателитот? Колкава е неговата брзина? Најди ги и нумеричките вредности.
2. После еден ден, часовниците на Земјата и на сателитот ќе се расликуваат заради специјално и општо релативистичките ефекти. Пресметај ја разликата поединечно за двата ефекта. Пресметај ја вкупната разлика. Кој часовник е побрз?
3. После еден ден пресметај ја грешката во позицијата заради овие два ефекта.

## 2017

1. Сателит во облик на сфера се движи во горните разредени слоеви од атмосферата.

- (а) После неколку обиколувања на Земјата како резултат на триење со воздухот вкупната механичка енергија на сателитот се намалува за 1%. Пресметајте за колку проценти се променил радиусот на орбитата на сателитот и неговата брзина, притоа сметајќи дека орбитата е секогаш кружна. Одговорете каква е промената (зголемување или намалување) на радиусот и брзината.

Од помош може да биде следниов израз при решавање на задачата:  $(1+x)^n = 1+nx$  за  $x \ll 1$ .

- (б) Колкава е силата со која молекулите на воздухот дејствуваат на сателитот и колку изнесува забрзувањето кое го добива сателитот како резултат на судирите со молекулите од атмосферата. Густината на воздухот и брзината на сателитот на дадената висина се  $\rho = 3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  и  $v = 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  соодветно. Масата на сателитот изнесува  $m = 1 \cdot 10^3 \text{ kg}$ , а неговиот радиус е  $r = 70 \text{ cm}$ . Брзината на термалното движење на молекулите е многу помала од брзината на светлината, воздухот може да се смета за идеален гас. Должината на средниот слободен пат на молекулите на воздухот е поголема од димензиите на сателитот.

- § 2. Гилбертов дипол претставува пар од магнетни монополи секој со големина  $q_m$ , но со спротивен магнетен полнеж, разделени на мало растојание  $d$ . Во овој случај претпоставете дека магнетниот полнеж  $-q_m$  се наоѓа во точката  $z = 0$ , додека полнежот  $+q_m$  се наоѓа во точката  $z = d$ . (Слика)

Ќе претпоставиме дека магнетните монополи се однесуваат слично како и електричните односно дека помеѓу нив дејствува сила аналогна на Кулоновата:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2},$$

а врската помеѓу јачината на магнетната индукција и силата е дадена со:

$$B = \frac{F}{q_m}.$$

- (а) Определете ја единицата мерка во којашто се мери величината  $q_m$ .
- (б) Запиши израз за зависноста на  $B$  како функција од  $z$  координатата за  $z > d$ .

- (в) Користејќи го добиениот израз за (б) најди формула за граничниот случај  $d \rightarrow 0$  ако притоа  $p_m = q_m d$  се држи константно.

§ Амперов дипол претставува магнетен дипол кој е создаден од струја  $I$  која тече низ кружен спроводник со мал радиус  $r$  (Слика ??). Ќе земеме дека  $z$  оската е нормална на кружниот спроводник и минува низ центарот на кружницата.

- (г) Запишете израз за зависноста на магнетното поле  $B(z)$  од координатата  $z$ , за  $z > 0$ .
- (д) Нека изразот  $kIr^\gamma$  има иста димензија со онаа на  $p_m$ , каде  $k$  и  $\gamma$  се бездимензионални константи. Определи ја вредноста на  $\gamma$ .
- (ѓ) Користејќи го изразот за  $B(z)$  да се добие формула за граничниот случај  $r \rightarrow 0$ , притоа претпоставувајќи дека производот  $p'_m = kIr^\gamma$  е константен.
- (е) Претпоставете дека двата претходни пристапа се еквивалентни, односно дека  $p_m = p'_m$ . Која е вредноста на  $k$ .

Ќе ги искористиме претходните два модели за да претставиме физички магнет како целина од голем број густо спакувани микроскопски диполи.

Еден ваков цилиндар (Слика) направен од хомоген материјал има радиус  $R$  и должина  $L$ . Тој е составен од голем број ( $N$ ) магнетни диполи кои можат да бидат и од Амперов и од Гилбертов тип. Оската на ротација на цилиндарот и сите диполи се подредени во правец на  $z$  оската и сите се истоначочени како што претходно ги презентиравме. На слика ?? се прикажани двата модели на диполи кои ги споменаваме, тие се коцки со страна  $d \ll R$  и  $d \ll L$ .

- (ж) Претпоставете дека  $R \gg L$  и дека магнетот се состои само од Гилбертови диполи. Одредете ја големината и насоката на магнетното поле во центарот на цилиндарот.
- (з) Претпоставете дека  $R \ll L$  и дека магнетот се состои само од Амперови диполи. Одредете ја големината и насоката на магнетното поле во центарот на цилиндарот.

3. Иако атомското јадро е квантен објект, дел од неговите основни карактеристики, како што се радиусот и енергијата на сврзување можат да се пресметаат од некои едноставни согледувања:

1. Јадрото е составено од нуклеони (протони и неутрони).

2. Силното заемно дејство кое ги држи нуклеоните во една целина се смета дека дејствува само помеѓу соседните нуклеони (силата има краток домет).
3. Бројот на протони ( $Z$ ) во јадрото е еднаков на бројот на неутрони ( $N$ ), и последично вкупниот број на нуклеони е  $A = Z + N = 2Z = 2N$  ( $A \gg 1$ ).

Важно: Искористете ги овие информации додека ја решавате задачата!

### § Дел 1: Јадрото како густо спакуван систем од нуклеони

Во овој модел, атомското јадро може да се претстави како сфера која е составена од густо спакувани нуклеони (Слика), каде што нуклеоните се тврди топчиња со радиус  $r_N = 0.85 \text{ fm}$ . Волуменот на јадрото  $V$  е поголем од волуменот на сите нуклеони  $AV_N$ , каде што  $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$ . Односот  $f = \frac{AV_N}{V}$  се вика фактор на пакување и го дава делот од просторот од јадрото кој е исполнет со нуклеарна материја.

- (а) Пресметајте колкав е факторот на пакување  $f$  ако нуклеоните се распоредени во јазлите на кубна решетка (јазли се темињата на коцката, точките на средините на рабовите и точките на средините на страните) (Слика).

Важно: Натамошните пресметки земаат во предвид дека вредноста на факторот на пакување  $f$  е позната и е еднаква на таа добиена претходно. Ако не сте успеале да ја добиете таа вредност сметајте дека  $f = \frac{1}{2}$ .

- (б) Определете ја просечната густина  $\rho_m$ , густината на полнеж  $\rho_e$  и радиусот  $R$  за јадро кое има  $A$  нуклеони. Масата на еден нуклеон земете дека е еднаква на  $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

### Дел 2: Енергија на сврзување на атомското јадро

Енергијата на сврзување на јадрото е енергија која е потребна за да се раздели јадрото на нуклеони и се појавува како резултат на постоењето на силата на привлекување помеѓу нуклеоните. Ако одреден нуклеон не е на површината на јадрото (се наоѓа во внатрешноста), тогаш тој придонесува кон вкупната енергија со  $a_V = 15.8 \text{ MeV}$  (овој член се вика волуменски член). Придонесот на еден нуклеон на површината кон вкупната енергија на сврзување е  $a_V/2$ . Изразете ја енергијата на сврзување  $E_B$  на јадро со  $A$  нуклеони како функција од  $A$ ,  $a_V$  и  $f$  вклучувајќи ја и корекцијата за површинските нуклеони.



Дел 3: Електростатски ефекти кон енергијата на сврзување

Електростатската енергија на хомогено наелектризирана топка со радиус  $R$  и вкупен полнеж  $Q$  е дадена со изразот

$$U = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R},$$

каде што  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ .

- (а) Искористете ја оваа формула за да ја определете електростатската енергија на јадрото. Во јадрото секој протон не си дејствува самиот на себе туку дејствува со Кулонова сила на останатите протони во јадрото. Заради тоа треба да се земе во предвид замената  $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$  во формулата за Кулоновото заемнодејство.
- (б) Запишете ја целосната формула за енергијата на сврзување, вклучувајќи го и волуменскиот член и површинскиот член и електростатската корекција.

§ Дел 4: Фисија на тешко јадро

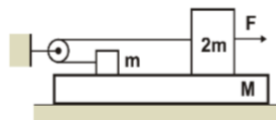
Фисија е нуклеарен процес во кој јадрото се дели на помали делови (полесни јадра). Претпоставете дека јадрото со  $A$  нуклеони се дели на два еднакви делови (Слика ??)

- (а) Пресметајте ја вкупната кинетичка енергија на продуктите на фисија  $E_{\text{kin}}$  кога центрите на двете полесни јадра се на растојание  $d \geq 2R(A/2)$ , каде што  $R(A/2)$  е нивниот радиус. Големото јадро на кое настанува фисија на почетокот било во мирување.
- (б) Претпоставете дека  $d = 2R(A/2)$  и пресметајте ја вредноста на  $E_{\text{kin}}$  од изразот што претходно го добивте за следниве вредности  $A = 100$ ,  $A = 150$ ,  $A = 200$  и  $A = 250$  (резултатите изразете ги во MeV). Определете за кои вредности на  $A$  е возможна фисија на јадрото, според овој модел.

## 2018

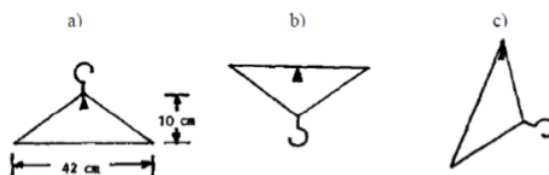
1. § (а) Штица со маса  $M$  се наоѓа на мазна хоризонтална рамнина, а на неа се наоѓаат две кутии со маса  $m$  и  $2m$ , соодветно (види слика). Кутиите се поврзани со нерастегливо јаже, коешто е префрлено преку идеална макара, прицврстена за сидот. На десната кутија и дејствува хоризонтална сила  $F$ . Коефициентот на триење помеѓу кутиите и штицата е ист и изнесува  $\mu$ . Да

се одредат забрзувањата на штицата и кутиите во однос на подлогата.



Слика за задача 1 под (а).

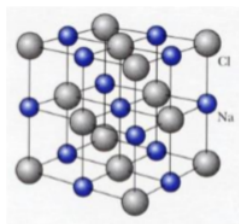
§ (б) Закачалка изработена од жица може да извршува мали осцилации во рамнината на листот, околу рамнотежните положби прикажани на сликата. Во положбите (а) и (б) најдолгата страна е хоризонтална. Останатите две страни имаат еднакви должини. Периодот на осцилациите е ист во сите случаи. Каде се наоѓа центарот на маса и колку изнесува периодот осцилациите? Сликите даваат информација само за дадените димензии. Други информации, како на пример каква е распределбата на масата во закачалката не може да се извлечат од сликата.



Слика за задача 1 под (б).

(в) Сателит, којшто се движи од Запад кон Исток долж кружна орбита со радиус  $2 \cdot 10^4$  km во екваторијалната рамнина околу Земјата се појавува во една иста точка над екваторот на секои 11,6 h. Користејќи ги овие податоци, да се одреди масата на Земјата. Гравитационата константа да се смета за позната.

§ 2. Атомите на голем дел од хемиските елементи имаат многу ниска јонизациона енергија и лесно губат валентни електрони. Други атоми, пак, многу лесно примаат електрони. Поради ова, атомите на ваквите типови елементи можат да формираат стабилна јонска структура составена од позитивни јони – катјони и негативни јони – анјони. Голем број на тврди тела имаат кристална структура во која атомите се подредени во правилни, периодични решетки. Во идеалните кристали, основната (базична) единица се повторува низ просторот.



Слика за задача 2.

На сликата е претставена кубна решетка на натриум хлорид (обична сол – NaCl). Растојанието помеѓу два соседни атоми на натриум и хлор е константно и еднакво на  $r_0$ . Главен придонес кон енергијата на врска на јонските кристали дава електростатската потенцијална енергија на јоните, што се должи на привлечните Кулонови сили помеѓу разноимените јони. За два полнежа  $q_1$  и  $q_2$  кои се наоѓаат на растојание  $R$ , таа е дадена со:

$$V_C = k \frac{q_1 q_2}{R^2} ,$$

каде  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$  се нарекува електростатска константа. За случајот со обичната сол - NaCl, двата типа јони во кристалната решетка имаат единечен полнеж  $\pm$ . За да се одреди точната вредност на оваа енергија треба да се земат предвид електростатските заемни дејства со голем број соседни јони. Така, земајќи ги сите јони кои дејствуваат на некојслучајно избран јон, за енергијата на врска се добива бесконечна низа која резултира со привлечен потенцијал:

$$V_{att}(r) = \alpha V_C(r) ,$$

каде  $r$  е растојание до најблискиот сосед до јонот кој се разгледува, а пак  $\alpha = 1,74756$  се нарекува константа на Маделунг и се употребува за одредување на енергијата на единечен јон. Покрај привлечниот потенцијал, постои и одбивен потенцијал поради принципот на исклучување на Паули и препокривањето на електронските обвивки во кристалната решетка. Овој потенцијал дејствува на многу кратки растојанија. Постојат два модела за опис на овој потенцијал.

МОДЕЛ 1. Како апроксимација за одбивниот потенцијал може да се земе експоненцијална функција:

$$V_{rep1}(r) = \lambda e^{-\frac{r}{\rho}}, (\lambda, \rho > 0) .$$

Овој потенцијал го опишува одбивното дејство на единечен јон со целата кристална решетка. Тука  $\lambda$  означува коефициент на заемодејство, а пак  $\rho$  е параметар поврзан со дометот на потенцијалот.

МОДЕЛ 2. Исто така добра апроксимација за одбивниот потенцијал е негативна степенска функција:

$$V_{rep2}(r) = \frac{b}{r^n}, (b > 0),$$

Каде што  $b$  го означува коефициентот на заемодејство, а пак  $n$  е природен број поголем од 2 (Борнов експонент). Овие параметри го вклучуваат одбивното заемодејство од целиот кристал. Јасно е дека овие физички параметри и модели зависат од типот на кристалната решетка, која се разгледува.

Во наредната табела се дадени експериментални податоци за константата на решетката  $r_0$  и енергијата на дисоцијација  $E_{diss}$  (енергија потребна решетката да се разбие на одделни јони) на некои кристали.

	$r_0$ [nm]	$E_{diss}$ [kJ/mol]
NaCl	0,282	+764,4
LiF	0,214	+1014,0
RbBr	0,345	+638.8

- Запиши го Кулоновиот потенцијал  $V_{C0}(r)$  за јонот лоциран во центарот на кристалната решетка на сликата 1. Да претпоставиме дека тој заемодејствува само со своите најблиски соседи (до растојание  $r = \sqrt{3}r_0$ ). Најди ја константата на Маделунг  $\alpha_0$  во овој случај;
- Користејќи го Моделот 1, запиши го вкупниот потенцијал кој му дејствува на даден јон -  $V_1(r)$ . Одреди ја равенката на рамнотежната положба за  $r = r_0$  и запиши го вкупниот потенцијал  $V_1(r_0)$ , изразувајќи го преку  $(\alpha, \rho, r_0)$ . Употреби ја точната вредност на константата на Маделунг;
- Употребувајќи ги експерименталните податоци, пресметај го параметарот  $\rho$ . Вредноста на Авогадровиот број е еднаква на  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ ;
- Употребувајќи го Моделот 2, запиши го вкупниот потенцијал кој му дејствува на даден јон -  $V_2(r)$ . Одреди ја равенката на рамнотежната положба за  $r = r_0$  и запиши го вкупниот потенцијал  $V_2(r_0)$  - изразувајќи го преку  $(\alpha, \rho, n, r_0)$ . Употреби ја точната вредност на константата на Маделунг;

- (д) Употребувајќи ги експерименталните податоци, пресметај го Борновиот експонент за NaCl. Пресметај го односот кон вкупниот потенцијал, при рамнотежна состојба, на привлечното Кулоново заемодејство и на одбивното заемодејство, што е последица на Паулиевият принцип на исклучување;
- (ѓ) Јонизационата енергија (енергија што треба да ја добие електронот за да го напушти атомот) на натриумот изнесува  $+5,14 \text{ eV}$ , а додека пак електронегативноста (енергија потребна за атомот да прими електрон) на хлорот изнесува  $-3,16 \text{ eV}$ . Пресметај ја енергијата на врска (енергија што ги држи атомите во решетката) на единечен атом на NaCl. Експерименталната вредност изнесува  $E_{exp} \approx -3,28 \text{ eV}$ .

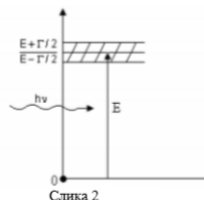
§ 3. За да извршиме прецизно проучување на својствата на атомите треба да успееме да ги задржиме определено време во состојба на мирување. Методот кој го овозможува тоа е ласерското ладење на атоми. Принципот на овој метод ќе биде разгледан во оваа задача. Во вакуумска комора, колимиран сноп од  $\text{Na}^{23}$  атоми (кои доаѓаат од испарување од примерок од материјал на  $10^3 \text{ K}$ ) е осветлен со ласер во голем интензитет (Сл.1).



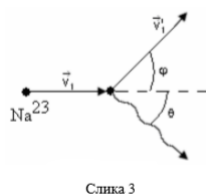
Слика 1

Слика за задача 3.

Фреквенцијата на ласерот е одбрана така што да има резонантна апсорпција на фотони од страна на атомите, кои имаат брзина  $v_0$ . Кога светлината се апсорбира, овие атоми се возбуждаат до првото енергетско ниво, кое има средна енергија  $E$  (мерено над основното ниво) и неопределеност  $\Gamma$  (Сл.2).



Слика за задача 3.



Слика за задача 3.

Во овој процес брзината на атомите се намалува за вредност  $\Delta v_1 = v_1 - v_0$ . Кога атомот од возбудената состојба се враќа во основната, се емитува светлина. Тогаш неговата брзина се менува како  $\Delta v' = v'_1 - v_1$  и атомот го менува правецот на движење за агол  $\varphi$  (Сл.3). Апсорпцијата и емисијата се повторуваат неколку пати, сè додека брзината на атомите не се намали за вредност  $\Delta v$  и не престане резонантната апсорпција на светлина на фреквенција  $f$ . Атомите кои се движат со нова брзина се успоруваат сè додека брзината на некои од нив стане блиска до нула.

Во прва апроксимација може да ги занемариме сите заемни дејства помеѓу атомите, освен процесите на апсорпција и емисија. Исто така, може да сметаме дека ласерската светлина има голем интензитет, така што атомите скоро и да не се задржуваат во основната состојба.

- (а) Најдете ја фреквенцијата на ласерот, потребна за да настане резонантна апсорпција кај оние атоми коишто излегуваат од колиматорот со кинетичка енергија еднаква на средната кинетичка енергија на атомите во регионот зад колиматорот. Пресметајте за колку се намалува нивната брзина ( $\Delta v_1$ ) при ваквиот процес;
- (б) Светлината со фреквенција пресметана под (а) е апсорбирана од атомите, чиешто брзини се наоѓаат во интервал  $\Delta v_0$ . Пресметајте го  $\Delta v_0$ ;
- (в) Кога атомот емитува светлина, неговиот правец на движење се менува за агол  $\varphi$  во однос на почетната насока. Пресметајте го аголот  $\varphi$ ;
- (г) Најдете ја максималната промена на брзината  $\Delta v$  за дадената фреквенција;
- (д) Колкав е приближниот број  $N$  на настани на апсорпција – емисија, потребни да се намали брзината на атомот од почетната брзина  $v_0$  до брзина блиска до нула. Сметајте дека атомот се движи по права линија;
- (ѓ) Колку изнесува времето  $t$ , потребно да се случи процесот опишан под (д). Пресметајте го растојанието  $\Delta S$  кое го поминува атомот за ова време.

Потребни податоци:  $E = 3,36 \cdot 10^{-19}$  J,  $\Gamma = 7,0 \cdot 10^{-27}$  J,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J · s,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K.

2019

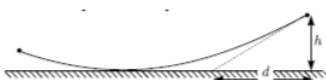
1. Два точкести полнежа со вредност  $Q$  и  $-2Q$  се поставени на фиксно растојание  $2a$  еден од друг. Да се определи кривата линија формирана од сите точки во коишто потенцијалот е нула, во рамнината во којашто лежат полнежите.
- § 2. Разгледајте две точки А и В кои се наоѓаат во поле на Земјината тежа (големината на Земјиното забрзување е  $g$ ). Висинската разлика помеѓу точките е  $H$ , додека пак хоризонталното растојание помеѓу точките е  $L$ , како што е прикажано на сликата подолу. Материјална точка може да се движи (без триење) по било која траекторија од точката А до точката В (вклучувајќи ја и траекторијата по која треба да скршне под агол од  $90^\circ$ ). Брахистохрона се нарекува траекторијата по која телото од А до В би се движело за најкратко време.



Слика за задача 2.

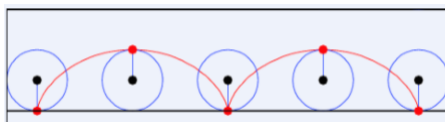
- (а) Пресметајте го времето на движење од А до В ако телото се движи по траекторијата „максимална брзина“ и по траекторијата „најкратко растојание“. Одредете колкав треба да биде односот  $\frac{L}{H}$  за кој овие две времиња ќе бидат еднакви;
- (б) Според принципот на Ферма, светлински зрак помеѓу две точки се движи по таква траекторија по која времето на движење би било минимално. Претпоставете дека во одредена средина, светлински зрак се движи од точката А до точката В по брахистохроната прикажана на сликата погоре. Одредете го индексот на прекршување на средината како функција од координатите  $x$  и  $y$  односно  $n = n(x, y)$ . Сметајте дека  $(L, H) = 1$ ;
- (в) Покажете дека траекторијата по која се движи светлинскиот зрак во средина со променлив индекс на прекршување  $n(x, y) \equiv n(y)$  ја задоволува следнава равенка  $\frac{dx}{dy} = C$  каде  $C$  е константа која се одредува од почетните услови;
- (г) § Со добиената равенка може да се објасни појавата фатаморгана, која настанува кога индексот на прекршување на средината

се зголемува со зголемувањето на висината. Разгледајте светлински зрак кој доаѓа од Вселената и допирајќи ја Земјата ( $y = 0$ ) паѓа на Човечко око кое е на висина  $h$  од површината на Земјата како на сликата подолу, (во овој проблем сметајте дека  $y$  оската е насочена вертикално нагоре). Ако индексот на прекршување се менува според релацијата  $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$  каде  $n_0$  и  $\alpha$  се константи, изведете израз за привидното растојание  $d$  од на кое се наоѓа точката од која се чини дека зракот потекнува;



Слика за задача 2 под (г).

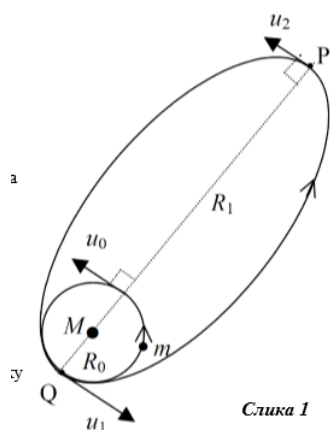
- (д) § Решавајќи ја равенката изведена во прашањето (б) и (в) може да се покаже дека брахистохроната е всушност сегмент од крива која се нарекува циклоида. Циклоида е крива која се исцртува кога ќе се набљудува движењето на стационарна точка од тркало кое се тркала долж права линија без лизгање (како на сликата подолу). За специјален случај кога  $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$  одреди го минималното време потребно телото да го помине растојанието помеѓу А и В.



Слика за задача 2 под (д).

3. (а) Сателит со маса  $m$  се движи околу Земјата (чија што маса е  $M$ ) по кружна орбита со радиус  $R_0$ . Да се изрази брзината  $u_0$  на сателитот преку величините  $R_0$  и гравитационата константа  $G$ ;
- (б) § Со моментално зголемување на брзината на сателитот од вредност  $u_0$  до вредност  $u_1$  во точката  $Q$  од неговата првична кружна орбита, го принудуваме сателитот да си ја измени траекторијата на движење, така што со новата траекторија тој ја достигнува точката  $P$  која што е оддалечена од центарот на Земјата на растојание  $R_1$  (види слика 1). Да се изрази брзината  $u_1$  преку величините  $u_0$ ,  $R_0$  и  $R_1$ ;





Слика за задача 3 под (б).

- (в) Да се изрази минималната вредност на брзината  $u_1$  преку величината  $u_0$ , при која што сателитот ќе го напушти гравитационото поле на Земјата;
- (г) (се однесува на делот б) Да се изрази брзината  $u_2$  на сателитот во точката P преку величините  $u_0$ ,  $R_0$  и  $R_1$ ;
- (д) Сакаме да ја промениме орбитата на сателитот во точката P во кружна орбита со радиус  $R_1$ , преку моментално зголемување на вредноста на брзината  $u_2$  во  $u_3$  во таа точка. Колкава е вредноста на брзината  $u_3$  изразена преку величините  $u_2$ ,  $R_0$  и  $R_1$ ?
- (ѓ) § Ако сателитот моментално малку се измести во радијална насока, така што тој отстапи од неговата претходна совршено кружна орбита со радиус  $R_1$ , да се изведе периодот  $T$  на осцилациите на вредноста  $r$  околу средното растојание  $R_1$  (види слика 2).

Помош: Доколку е потребно, ученикот може да ја искористи равенката на движење на сателитот по орбитата:

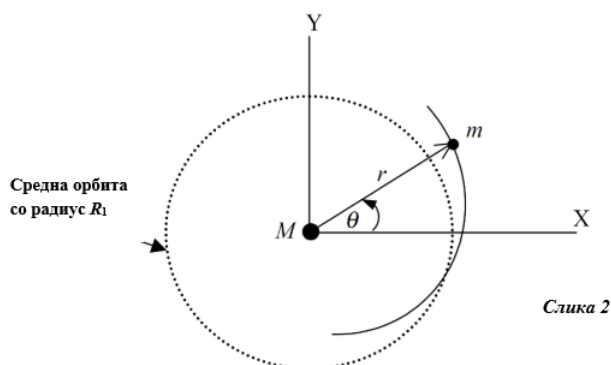
$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -G\frac{mM}{R^2}$$

како и законот за запазување на моментот на импулс

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

- (е) Да се скицираат првичната и поместената орбита на сателитот.

4. Оваа задача се состои од два независни дела А и Б.



Слика за задача 3 под (г).

(А) Да се процени температурата на Сончевата површина на следниот начин:

- (А1) Најпрво да се најде најверојатната енергија на фотоните емитирани од апсолутно црно тело на температура  $T$ , под претпоставката дека важи следната зависност на интензитетот на зрачењето од енергијата на фотоните  $I(E) = E^5 e^{-\frac{E}{kT}}$ , каде што  $k$  е Болцмановата константа.
- (А2) Да се определи интервалот на енергии на спектралните линии во Балмеровата серија на водородниот атом. Балмеровата серија ги содржи линиите, коишто одговараат на премини од било кое повисоко ниво на второто.
- (А3) Сметајќи дека човечкото око е најосетливо на Сончева светлина, направете проценка на температурата на Сончевата површина. Искористете дека линиите на Балмеровата серија се во видливото подрачје на спектарот.

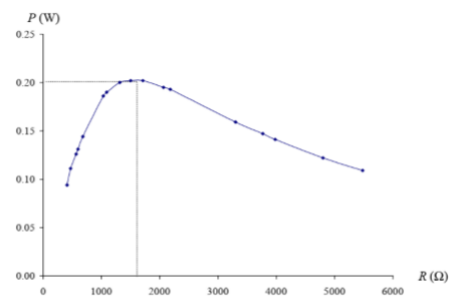
(Б) Определување на концентрација на носители на полнеж во полупроводници. Да се претпостави дека зависноста на енергијата  $E$  од брановиот број  $k$  за електроните во спроводната зона на хипотетичен четиривалентен полупроводник од  $n$  тип, приближно е дадена со релацијата  $E = ak^2 + const$ . Кај полупроводник од  $n$  тип доминантни носители на полнеж се електроните. Познато е дека резонантната циклотрона фреквенција на спроводните електрони при магнетно поле со јачина од  $0,1T$  изнесува  $1,8 \cdot 10^{11} rad/s$ .

- (Б1) Да се најде вредноста на . Ефективната маса на електроните во спроводната зона на полупроводникот е дадена со  $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 E}{dk^2}$ .

(Б2) Да се претпостави дека полупроводникот содржи петвалентни јони како допанди. Петвалентните допанди во кристалната решетка на четиривалентниот полупроводник имаат улога на донори на електрони, при што „даваат“ онолку електрони во спроводната зона на полупроводникот, колку што имаат вишок во однос на атомите на домаќинот (во овој случај четиривалентниот полупроводник). Направете проценка на бројот на донори во кубен метар, ако е дадено дека Холовиот коефициент при собна температура изнесува  $6,25 \cdot 10^{-6} m^3 C^{-1}$ , а релативната диелектрична константа е 15. Да се смета дека на собна температура сите атоми на донорот се јонизирани. Холовиот коефициент за полупроводник од  $n$  тип е даден со  $R_H = -\frac{1}{ne}$ , каде што  $n$  е концентрацијата на носители на полнеж (електрони во случајот на  $n$  тип полупроводник), а  $e$  е елементарниот електричен полнеж.

5. Определување на електричен капацитет. Познато е дека кондензаторите имаат голема примена во најразлични електрични и електронски уреди од секојдневниот живот. Постојат повеќе начини за определување на електричниот капацитет на даден кондензатор. Еден од начините е да се искористи едноставно струјно коло, во коешто сервиски се поврзани кондензатор, променлив отпорник (или повеќе отпорници со различни отпори) и извор на наизменична струја (може да се користи градската мрежа). Електричната моќност којашто се издвојува на отпорникот во овој случај ќе зависи од амплитудната вредност на наизменичната електромотрона сила  $\epsilon_0$ , капацитетот  $C$  на кондензаторот, отпорот  $R$  на отпорникот и кружната фреквенција  $\omega$  на наизменичната струја. Графичката анализа на оваа релација овозможува определување на капацитетот.

- (а) Да се нацрта шемата на опишаното струјно коло.
- (б) Да се изведе изразот за средната вредност  $P$  на потрошената моќност во отпорникот како функција од  $\epsilon_0$ ,  $C$ ,  $R$  и  $\omega$ .
- (в) Да се изведе условот за максимум на потрошената моќност во отпорникот.
- (г) Да се најдат две величини  $\alpha$  и  $\beta$ , такви што ќе ја сведат зависноста најдена под (б) на линеарна зависност на величина  $\alpha$  од величината  $\beta$ . Да се објасни како може графички да се определи капацитетот на кондензаторот со користење на најдената линеарна зависност.
- (д) § На сликата е дадена графичка зависност на средната моќност  $P$  од отпорот  $R$ . Со користење на овој график да се определи вредноста на кондензаторот  $C$ . Да се смета дека колото е прилучено на градска мрежа.



Слика за задача 5 под (д).