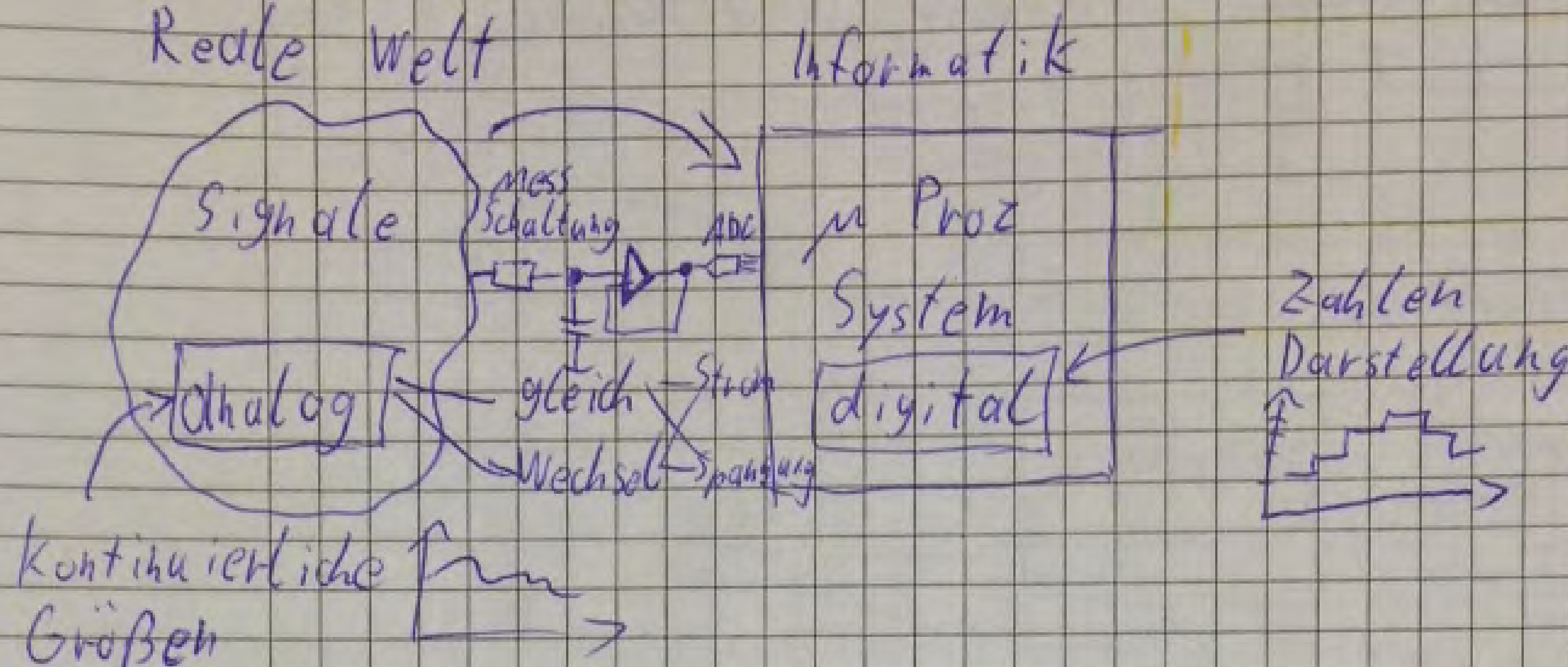
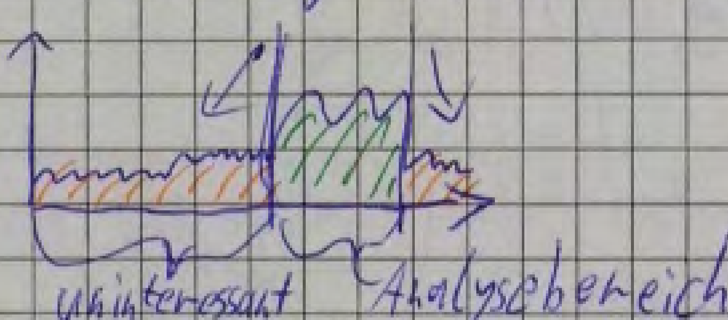
Überblick



Vertiefte Elektrotechnik

=> Untersuchung eines Teilbereichs der realen Signale



Spektrum aus realen Welt gesucht: Teilbereich

Um diesen Teilbereich aus dem Gesamtspektrum herauszuschneiden benötigt man Filterschaltungen (vgl. GET3 Tiefpass Filter)

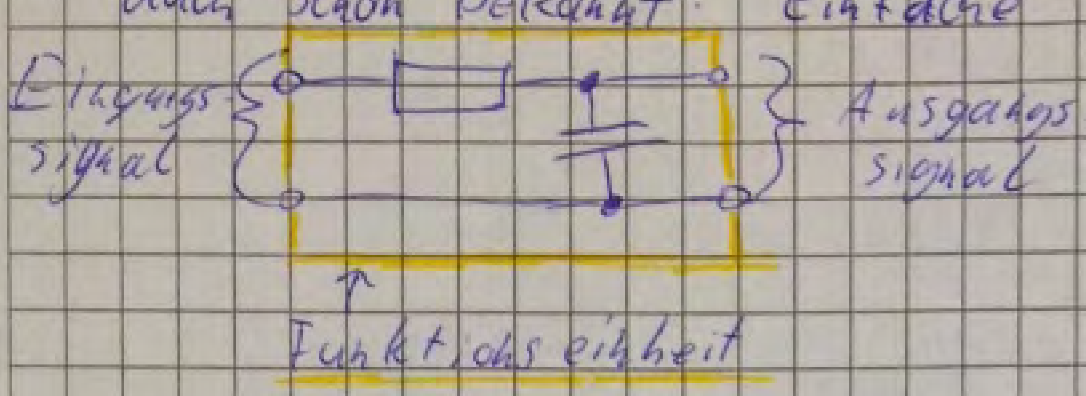
Bauteile:

- R: reeller Widerstand — R
- C: komplexer Wid. — $\frac{1}{j\omega C}$
- L: – " – — – " – — $j\omega L$

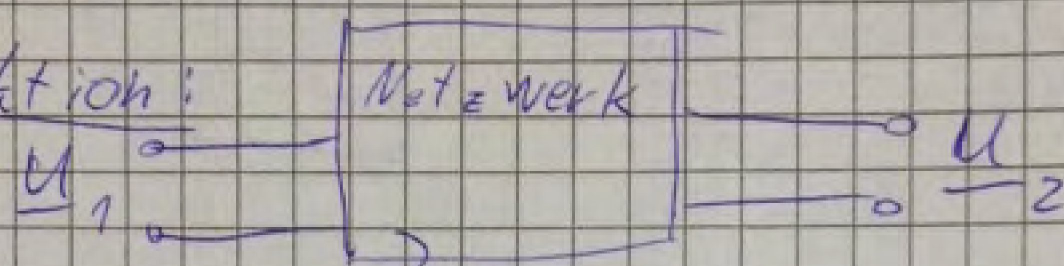
ω ≙ frequenzabhängige Widerstände
j ≙ Phasenverschiebung

bearbeiten das Eingangssignal in
- Amplitude
- Phasenlage

weil 2 Größen gleichzeitig beeinflusst werden funktioniert die standard-mathe. nicht auch schon bekannt: einfache Schaltungen



Abstraktion:



das Netzwerk hat die Eigenschaft:

$$F(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)}$$

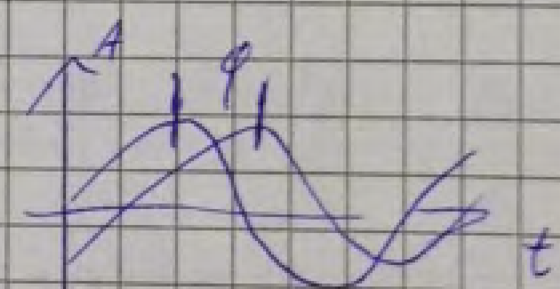
wobei: $F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j\varphi(\omega)}$

Amplitude

Euler'sche Identität

$e^x \approx \sin x + j\cos x$

$e^{-j\varphi(\omega)}$ Phasenlage

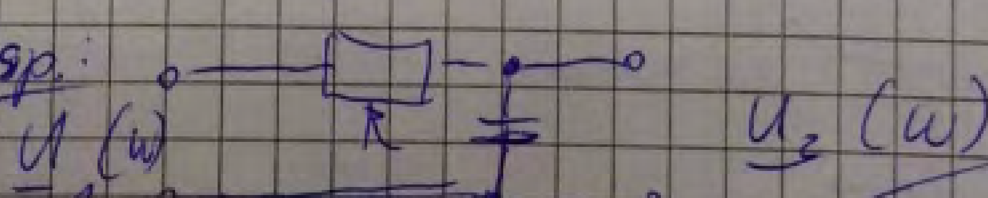


$F(j\omega)$ nennt sich Übertragungsfkt.

Darstellung von $F(j\omega)$

durch Diagramme

Bsp.:



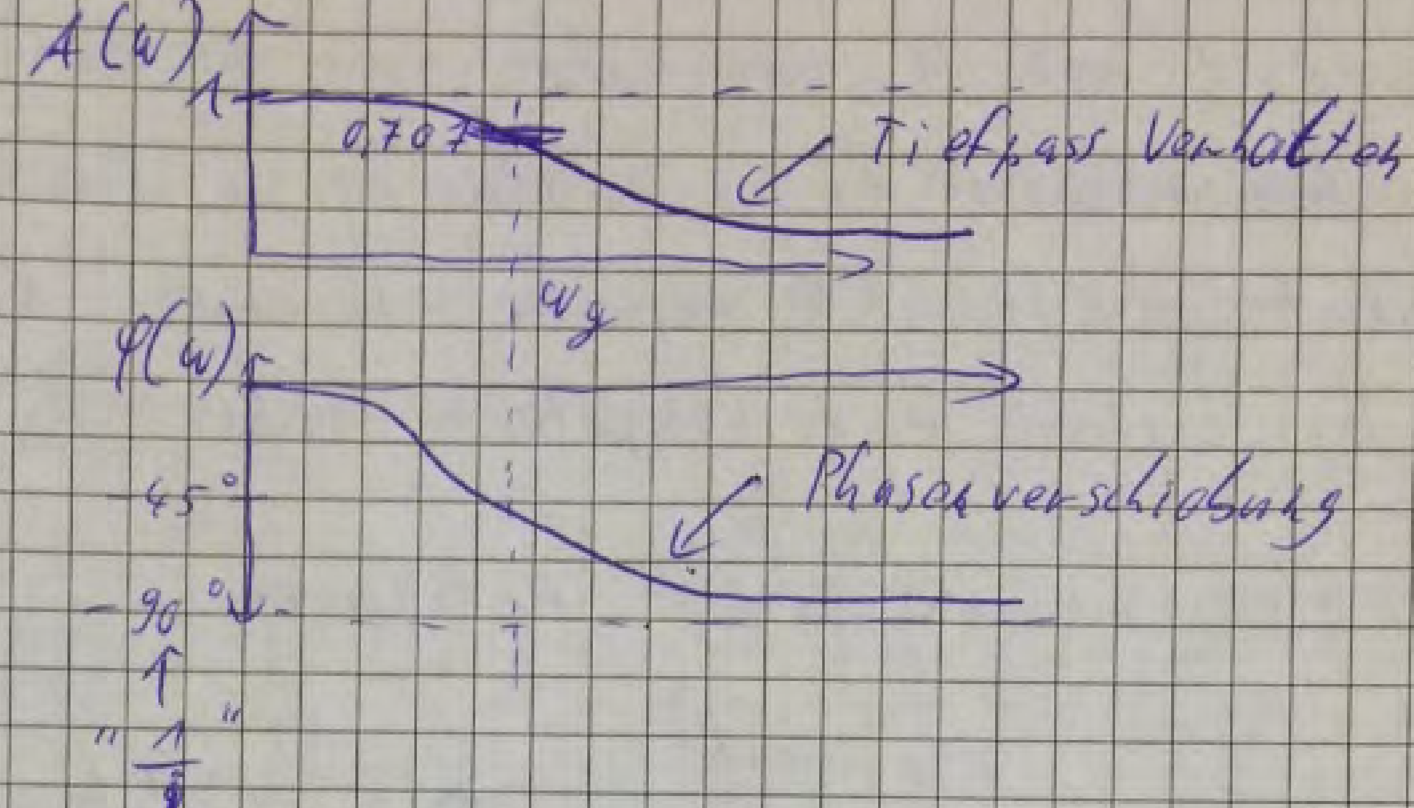
Spannungsteiler

$$F(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Bruch Rechnen

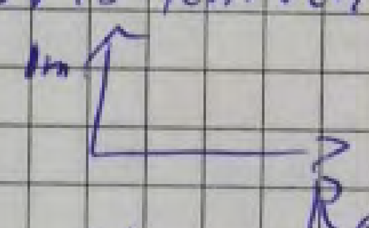
kompl. Rechnen

Als Diagramm gezeichnet:



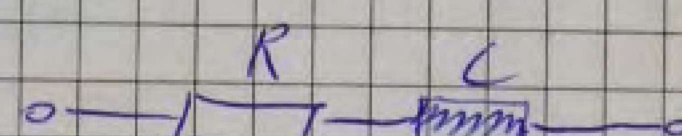
Ortskurven

Wir kennen bereits Zeigerdiagramme und Frequenzdarstellungen. Ortskurven sind eine Darstellungsmöglichkeit im Diagramm



sowohl den Amplituden- wie auch den Phasenverlauf von $F(j\omega)$ in einer Kurve dargestellt

einfaches Beispiel:



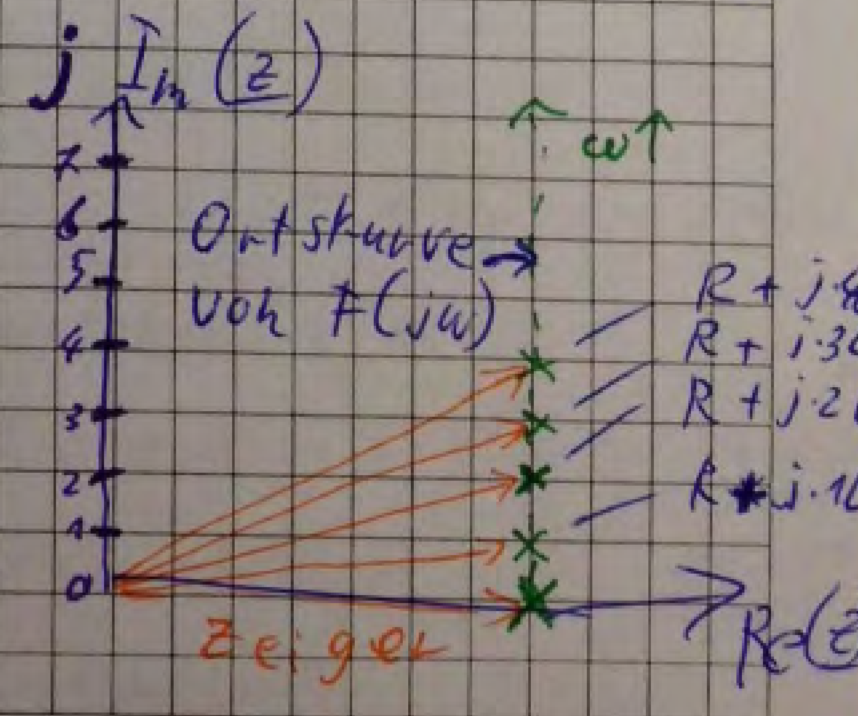
$$Z = R + j\omega L$$

Zur Darstellung des Verlaufs des komplexen Widerstands $\underline{Z}$ berechnen wir ein paar Punkte:

ω wird als Variable benutzt.

ω	Z	
0	R + j 0L	= R
1	R + j 1L	= R + jL
2	R + j 2L	= R + 2jL
3	R + j 3L	= R + j3L
4	R + j 4L	= R + j4L
⋮	⋮	= ⋮

graphische Darstellung

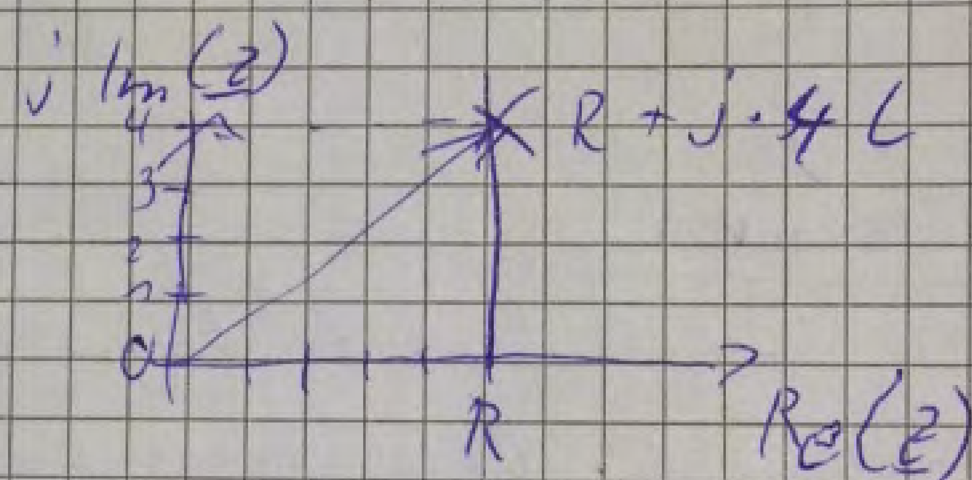


Zeichnen einer Ortskurve

Verwende die Formel für $\underline{Z}(j\omega)$ komplexer Widerstand in Abhängigkeit von ω und setze für ω Zahlen $\in \mathbb{N}$ ein. Dadurch erhalten wir für jedes ω einen Zeiger. Die so berechneten Endpunkte werden zu einer Kurve verbunden. (Bei Einsatz eines Computers wähle $\omega \in \mathbb{R}$.)

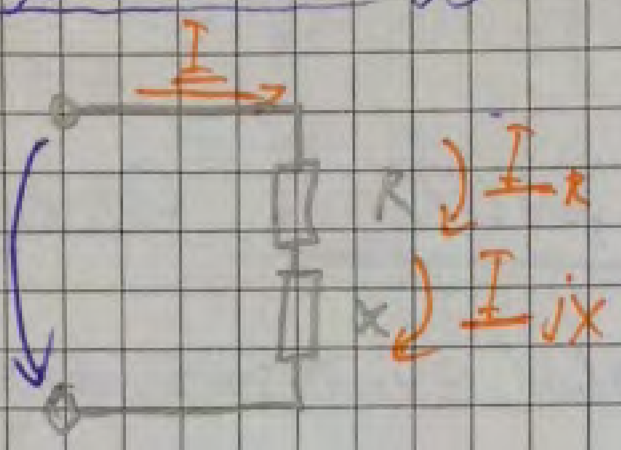
Die so erhaltene Kurve heißt "Ortskurve"

In unseren Bsp.:



Ortskurven: beschreiben das Verhalten von analogen Schaltungen aus R, C, L und sind ein Graphisches Arbeitsmittel für Ingenieure. Jede Software zum Aufbau und Simulation analoger Schaltungen können Ortskurven berechnen.

Vorgehensweise: geg



$X = C$ oder L

Reihenschaltung aus R = Wirkwiderstand

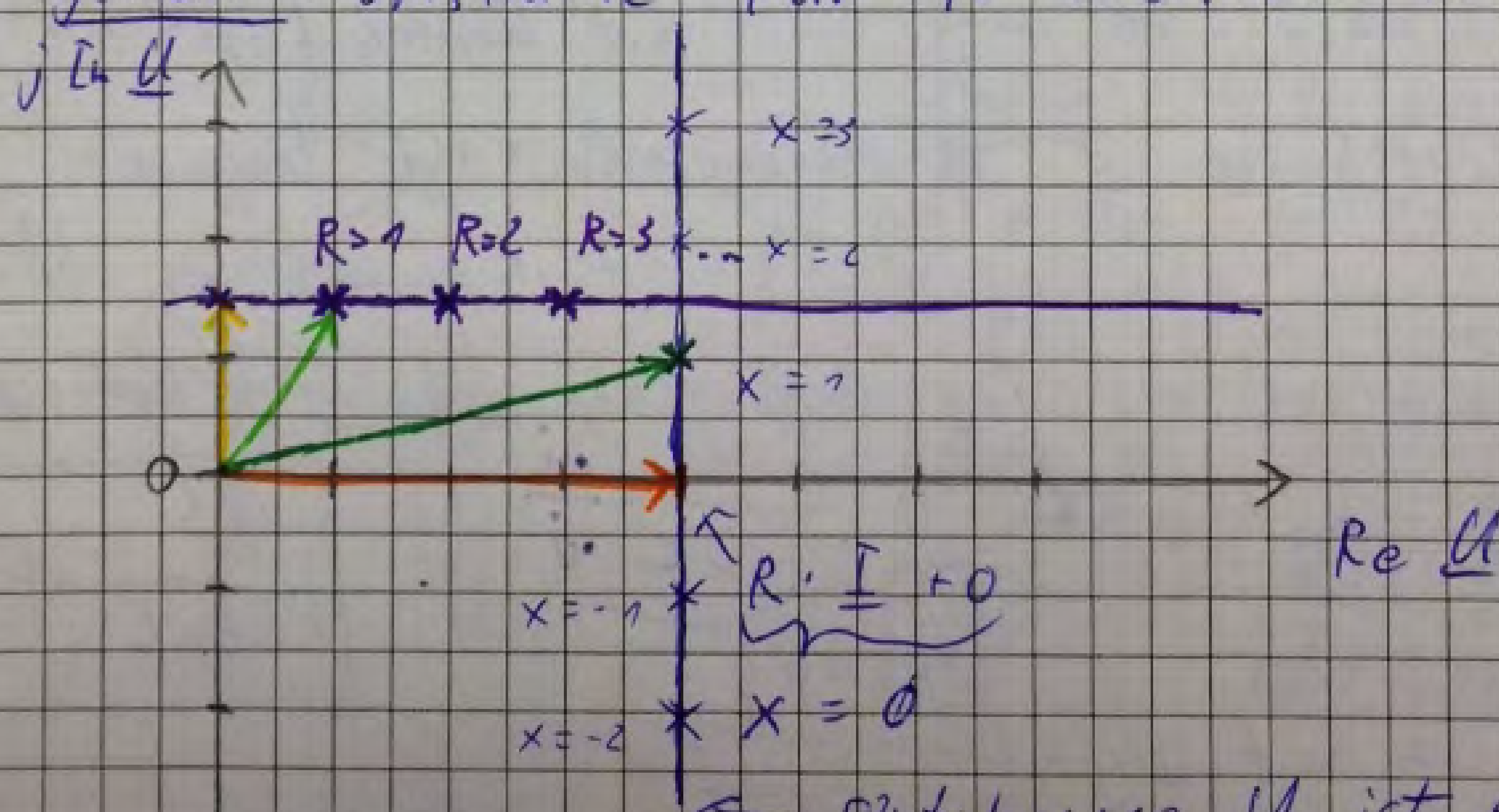
$R \geq 0$ und X = Blindwiderstand

$-\infty < X < \infty$

$\underline{Z} = \underset{\text{reell}}{R} + j\underset{\text{imaginär}}{X}$ komplexer Widerstand

Allen Ortskurven ist gemeinsam, das sich eine der größen in der Gleichung ändert.

gesucht: Ortskurve für R = const. und X ist variabel



⟸ Ortskurve $\underline{U}$ ist eine Gerade!

Um eine OK. zu konstruieren, fängt man so an:

setze Variable = null   Für X = null $= \underline{U} = R \cdot \underline{I} + 0$ $[0 \cdot \underline{I}]$

kein Imaginärer Anteil vorhanden => Y-Achse = 0

Für $X = 1$ => $\underline{U}_1 = R \cdot \underline{I} + \underbrace{j \cdot 1 \cdot X \cdot \underline{I}}_{\text{imag. Anteil} > 0}$

Für $x = n$ => $\underline{U}_n = R \cdot \underline{I} + j \cdot n \cdot X \cdot \underline{I}$

$n \in \mathbb{N}$

Für $x = r$ => mit $r \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Gesamtkurve (hier: Gerade)

Das nennt sich: "qualitative" Ortskurve

gesucht: Ortskurve für R = variabel und x = const

1. Var = Ø setzen => $R = Ø$ ergibt: $U = Ø + jX \cdot \underline{I}$

=> Punkt auf y-Achse

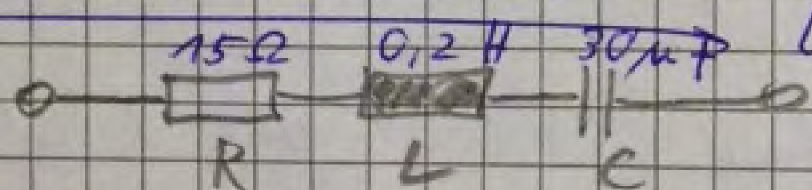
2. Var $\cancel{\neq Ø}$ $= n$: $\underline{U}_n = n \cdot R \cdot \underline{I} + jX \cdot \underline{I}$

Quantitative Ortskurve

$\boxed{\text{Reihenschwingkreis}}$

Schaltung aus R, L und C, die mit Werten für R, L und C verschie

geg.:



gesucht: Ortskurve $\underline{Z}$ in Abhängigkeit f Frequenz

f im Bereich von 40 - 100 Hz

Zunächst benötigen wir die Darstellung von $\underline{Z}$ (Reihenschaltung)

$$\Rightarrow \underline{Z} = \underbrace{R}_{\text{reell}} + \underbrace{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j}}_{\text{imaginär}}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

NK:

$$\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2 \omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Zusammenhang zw. f und ω: $\omega = 2\pi \cdot f$

Formel für Berechnung der Ortskurve:

$$\underline{Z} = \underbrace{15\,\Omega}_{x\text{Achse}} + \underbrace{j\left(2\pi f \cdot 0{,}2\,H - \frac{1}{2\pi f \cdot 30\,\mu F}\right)}_{Y\text{-Achse}}$$

Konstruiere ein Paar Punkte im Bereich

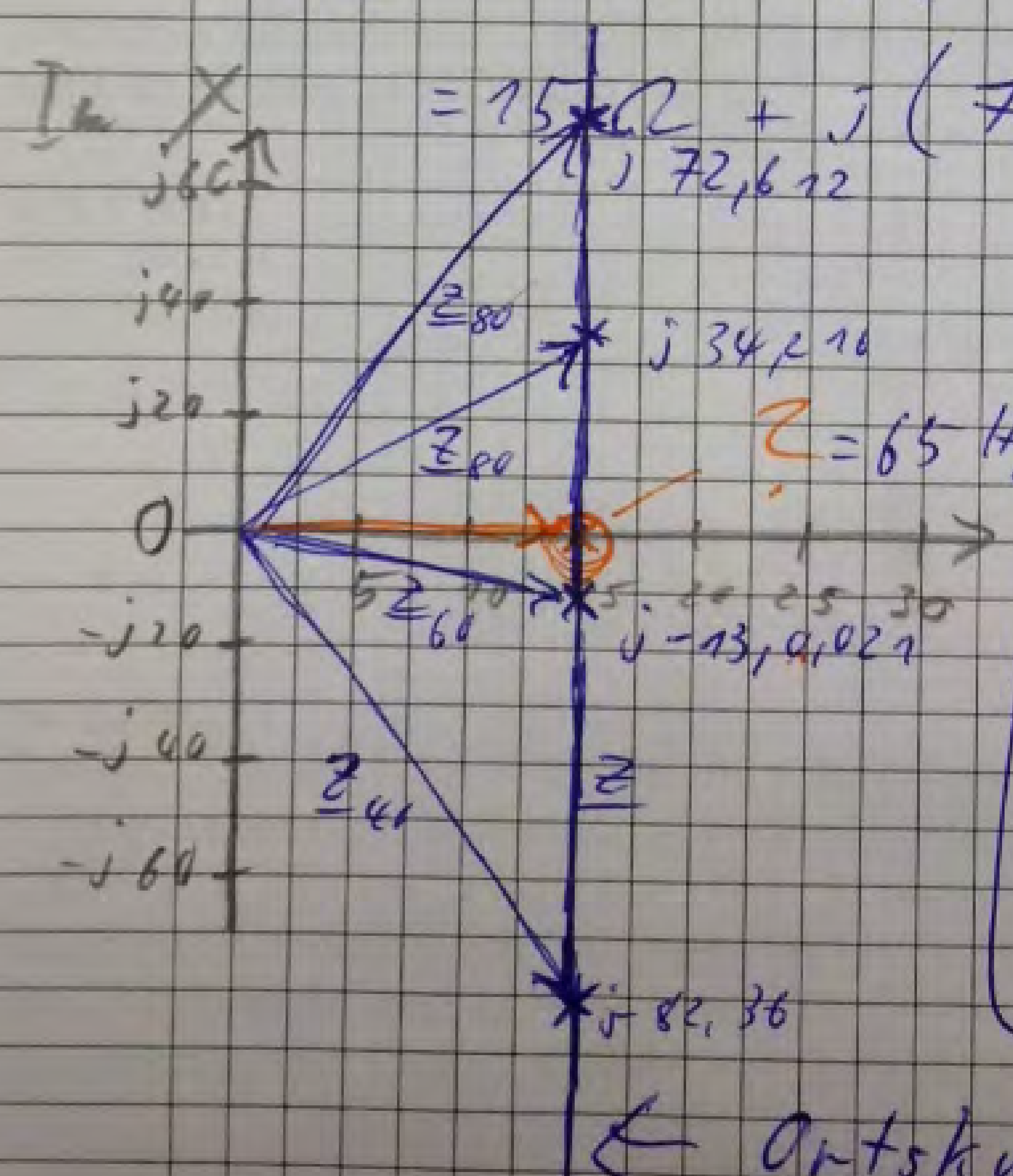
$f = [40\,Hz \;\ldots\; 100\,Hz]$

$$\underline{Z}_{40Hz} = 15\,\Omega \; j\left(2\pi \cdot 40\,Hz \cdot 0{,}2\,H - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 40\,Hz \cdot 30\,\mu F}\right)$$
$$= 15\,\Omega \; j(50{,}265 - 132{,}629)\,\Omega$$
$$= 15\,\Omega + j(-82{,}36)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{60Hz} = 15\,\Omega + j\left(2\pi\, 60\,Hz \cdot 0{,}2\,H - \frac{1}{2\pi \cdot 60\,Hz \cdot 30\,\mu F}\right)$$
$$= 15\,\Omega + j(-13{,}021)\,\Omega$$

$$\underline{Z}\,80\,Hz = 15\,\Omega + j\left(2\pi \cdot 80\,Hz \cdot 0{,}2\,H - \frac{1}{2\pi \cdot 80\,Hz \cdot 30\,\mu F}\right)$$
$$= 15\,\Omega + j(34{,}216)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{100Hz} = 15\,\Omega + j\left(2\pi \cdot 100\,Hz \cdot 0{,}2\,H - \frac{1}{2\pi \cdot 100\,Hz \cdot 30\,\mu F}\right)$$
$$= 15\,\Omega + j(72{,}612)\,\Omega$$



Frage: Was passiert bei diesem ⊗ Punkt?

Hier ist der imag Anteil = ∅!

Bedeutet: $j\omega L = \frac{1}{j\omega C}$ oder $\omega L = \left(= \frac{1}{\omega C}\right)$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$\omega = 408{,}4\,\frac{1}{sec}$

$f \approx 65\,Hz$

⇐ Ortskurve $\underline{Z}$ in abhängigkeit von f

Die Frequenz f bei der der imag Anteil von $\underline{Z}$ = ∅ ist heißt: Resonanzfrequenz

Bei der Resonanzfrequenz ist $|Z|$ minimal

Länge d. Pfeils

Für alle Frequenzen $f > f_{reso}$ ist $\omega L > \frac{1}{\omega C}$

"induktives" Verhalten

$f < f_{reso} \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$

"kapazitives" Verhalten

Thema: Ortskurven

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Die im Bild 1 dargestellte Schaltung besteht aus einem Wirkwiderstand R und einem Kondensator C, dessen Kapazität sich in einem Bereich einstellen läßt. Solche Kondensatoren heißen Drehkondensatoren und sind eher selten weil recht teuer.

Die Werte:
R = 50 Ω
C = 4uF .. 10uF

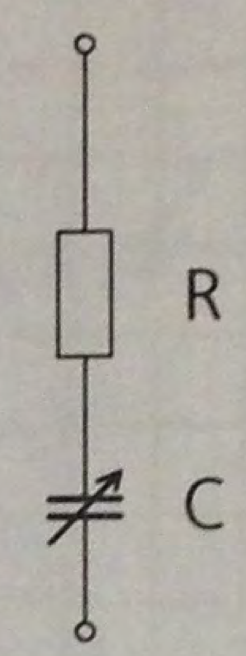


Bild 1

Aufgabe:
Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung für die Frequenz f = 400Hz und beziffern Sie die Ortskurve mit den Werten der Kapazität C.

1a.) In welchem Quadranten liegt die Ortskurve ? IV $-j99{,}471\,\Omega$
1b.) Wo liegt der Punkt C = 4uF auf der Ortskurve ?
1c.) Wo liegt der Punkt C = 10uF auf der Ortskurve ? $-j\,39{,}789\,\Omega$

Aufgabe 2

Die im Bild 2 dargestellte Schaltung besteht aus einem Wirkwiderstand R und einer Induktivität L. Die Frequenz, mit der die Schaltung betrieben wird, liegt im Bereich von [20Hz .. 100Hz]

Die Werte:
R = 25 Ω
L = 50 mH

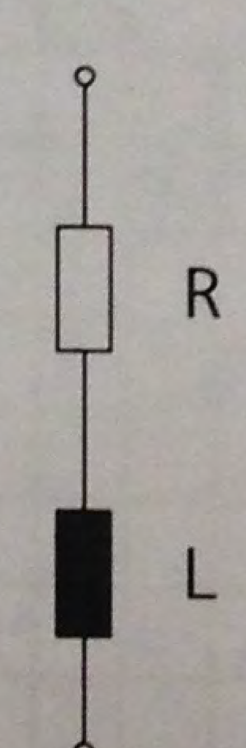


Bild 2

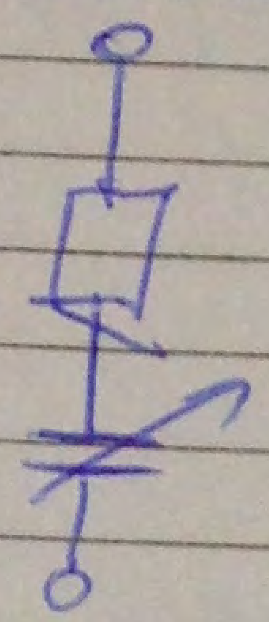
Aufgabe:
Zeichnen Sie die Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung für die Frequenzen im Bereich 20Hz bis 100Hz.

2a.) In welchem Quadranten liegen die Ortskurven ? I
2b.) Wo liegt der Punkt f = 20Hz auf den Ortskurven ?
2c.) Wo liegt der Punkt f = 100Hz auf den Ortskurven ?

Übung: Ortskurven

$\omega = 2\pi \cdot f$

Aufgabe 1:



$R = 50\,\Omega$

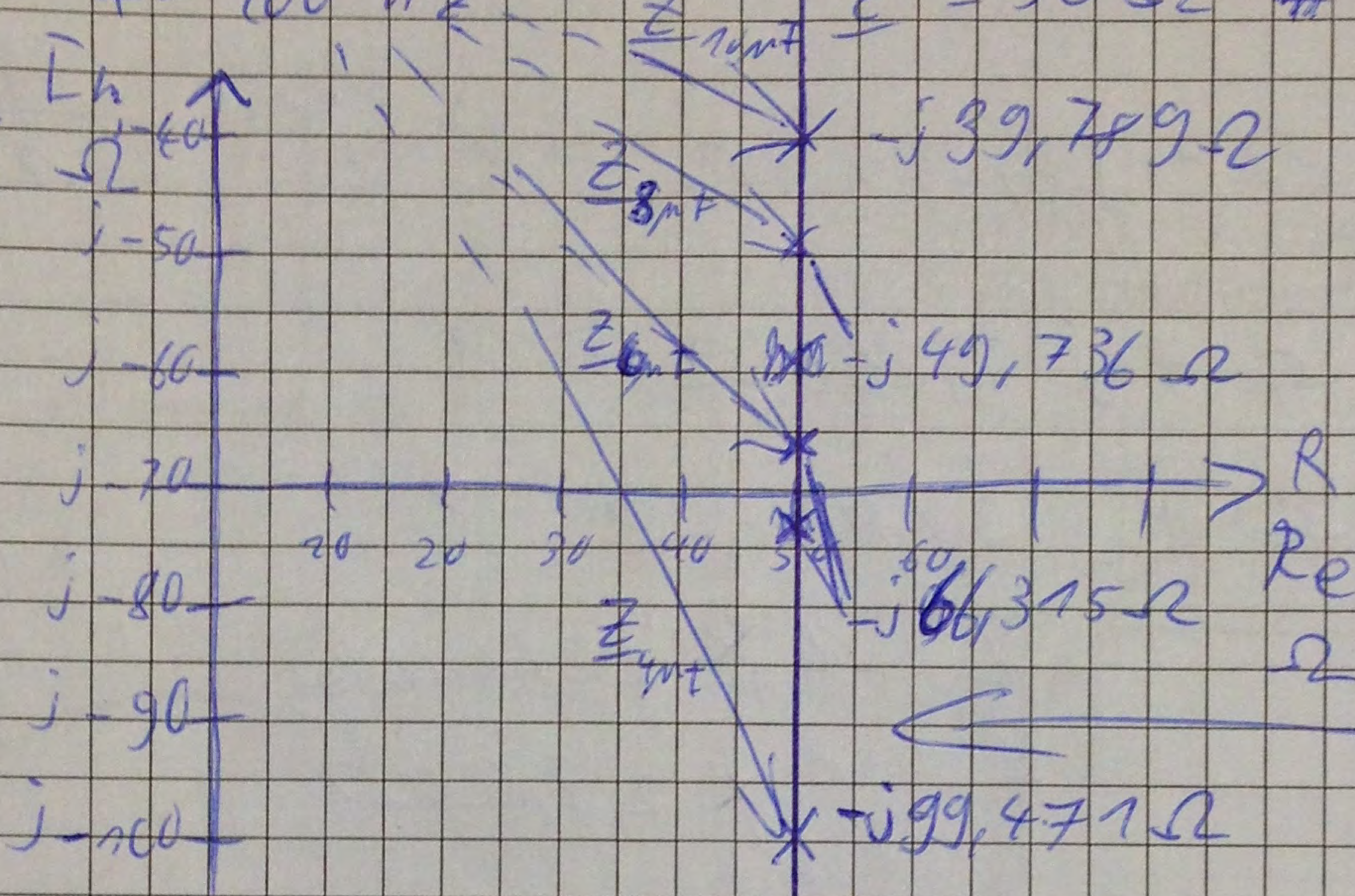
$C = 4\,\mu F \ldots 10\,\mu F$

$f = 400\,Hz$

$\underline{Z} = 50\,\Omega + \frac{1}{j\omega C}$

$\underline{Z} = 50\,\Omega + \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot C} \cdot \frac{j}{j}$

$\underline{Z} = 50\,\Omega - \frac{j}{2\pi \cdot 400\,Hz \cdot C}$



Ortzkurve in abhängigkeit von $\underline{Z}$

$\underline{Z}_{4\mu F} = 50\,\Omega + j \cdot \left(-\frac{1}{2\pi \cdot 400\,Hz \cdot 4\,\mu F}\right)$

$= 50\,\Omega + j \cdot (-99,471\,\Omega)$

$= 50\,\Omega - j\,99,471\,\Omega$

$\underline{Z}_{6\mu F} = 50\,\Omega + j \cdot (-66,315\,\Omega)$

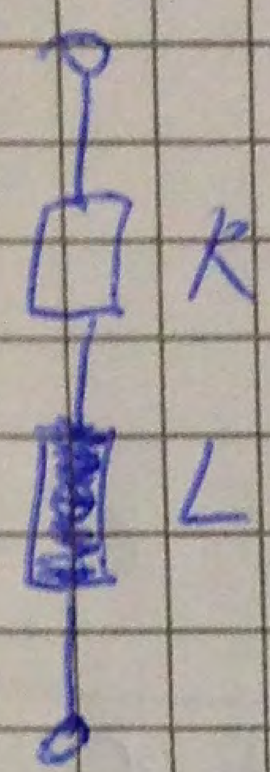
$= 50\,\Omega - j \cdot 66,315\,\Omega$

$\underline{Z}_{8\mu F} = 50\,\Omega - j49,736\,\Omega$

$\underline{Z}_{10\mu F} = 50\,\Omega - j39,789\,\Omega$

$\omega = 2\pi \cdot f$

Aufgabe 2:



$R = 25\,\Omega$

$L = 50\,mH$

$f = 20\,Hz \ldots 100\,Hz$

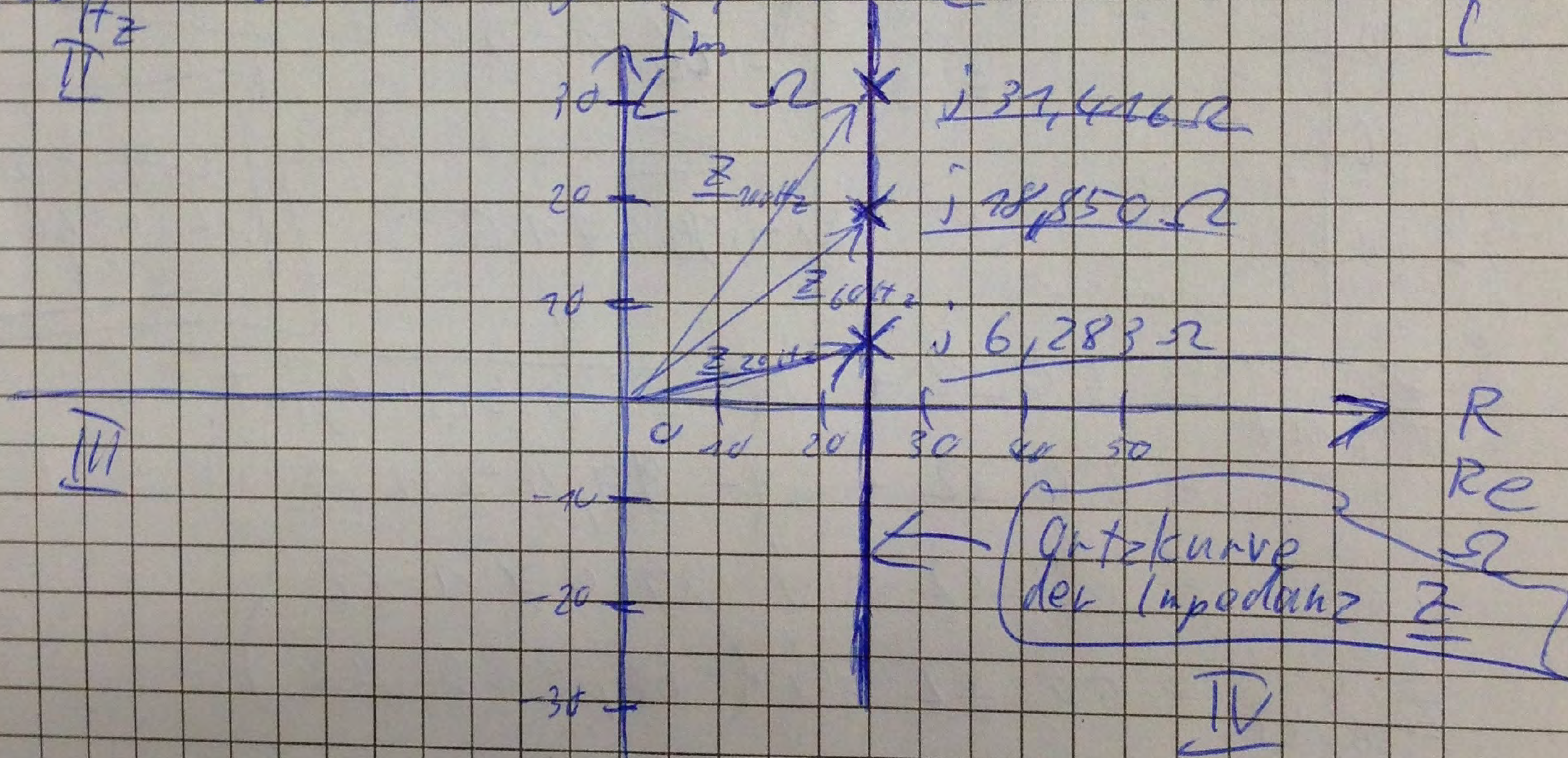
$$\underline{Z} = R + j\omega L = 25\,\Omega + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot 50\,mH$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

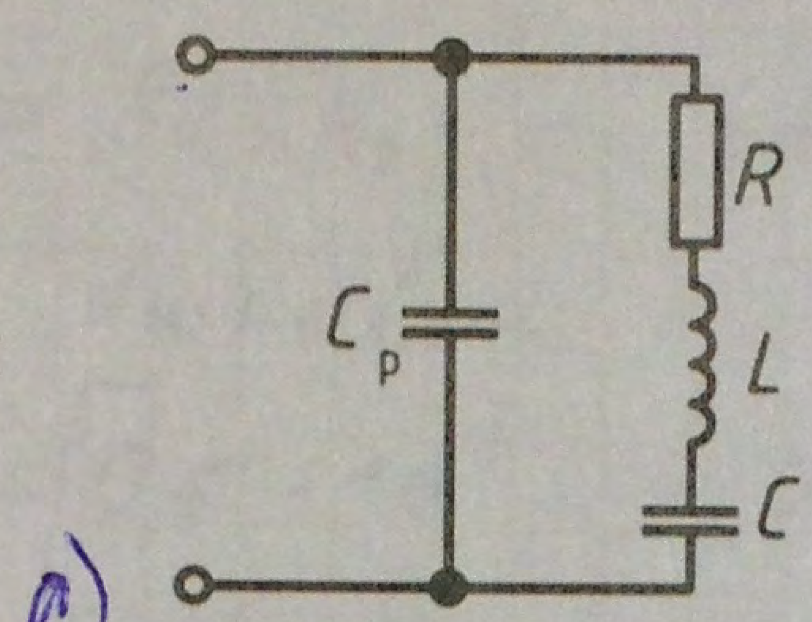
$\underline{Z}_{20Hz} = 25\,\Omega + j\,6{,}283\,\Omega \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{25\,\Omega + j6{,}283}$

$\underline{Z}_{60Hz} = 25\,\Omega + j\,18{,}850\,\Omega \Rightarrow$

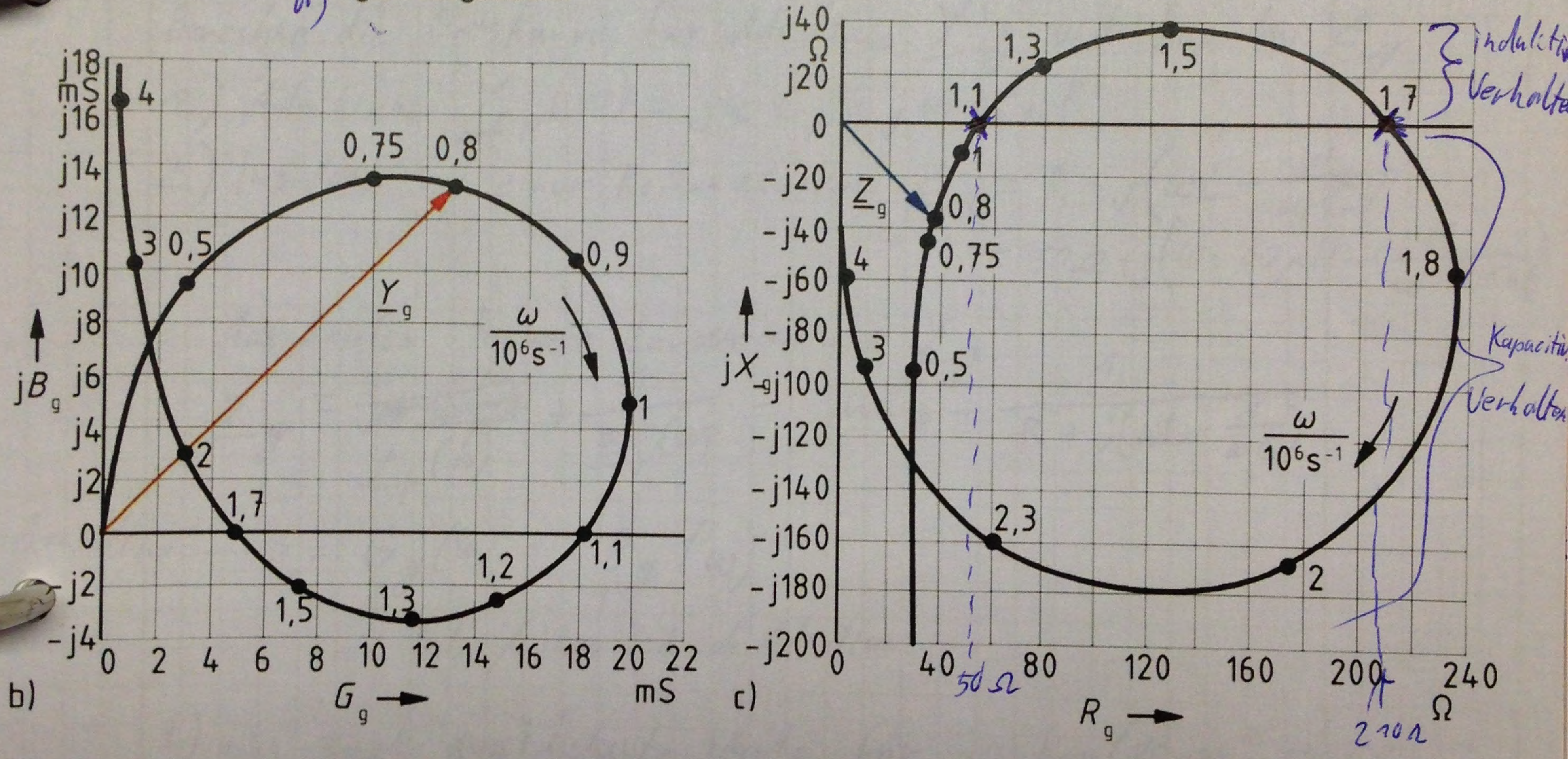
$\underline{Z}_{100Hz} = 25\,\Omega + j\,31{,}416\,\Omega \Rightarrow$



Beispiel aus
der Vorlesung:



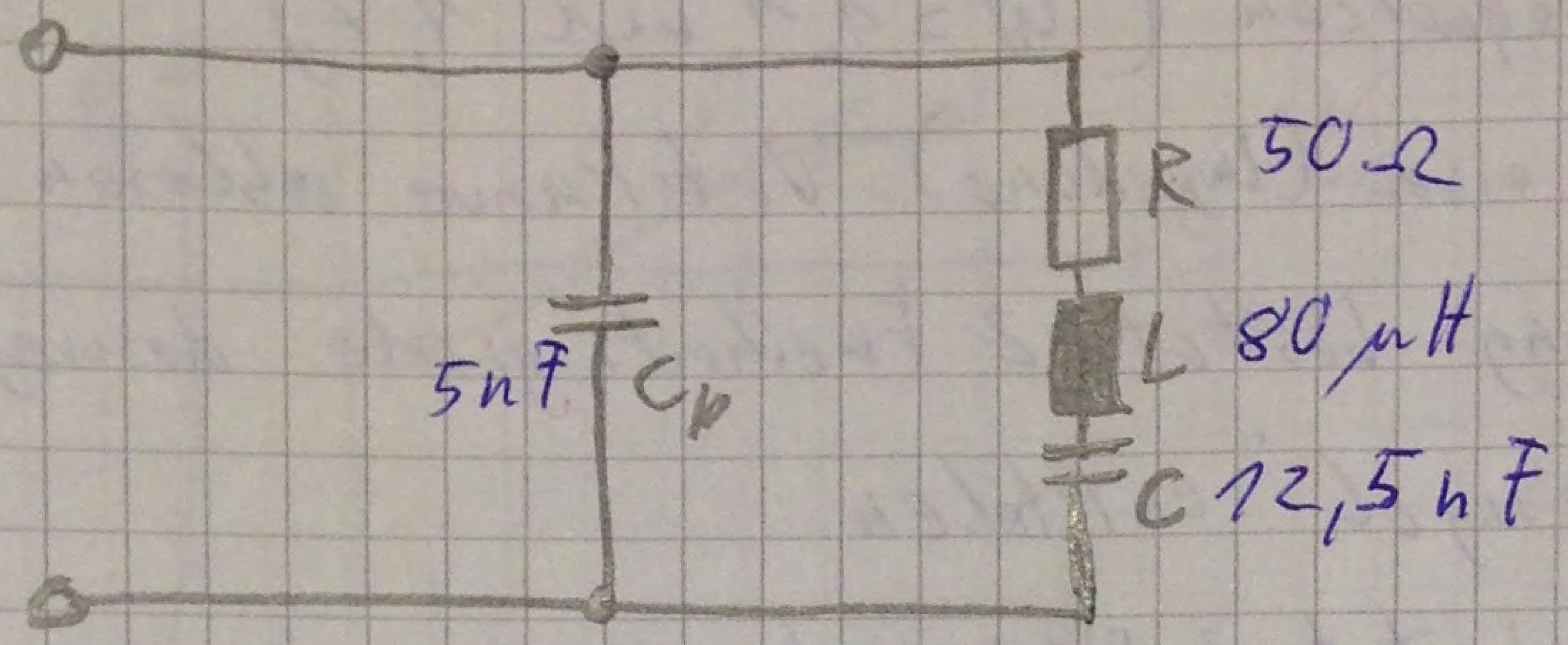
Bestimme die Ortskurven
für Admittanz und Impedanz



Schaltung des Zweipols (a) sowie Ortskurven seiner Admittanz $\underline{Y}_g$ (b) und Impedanz $\underline{Z}_g$ (c)

Komplizierte Ortskurven

Reihen + Parallelschaltung aus R, L, C



Mit welcher Frequenz wird diese Schaltung betrieben?

$f = 80\,kHz \ldots 640\,kHz$

ω ausrechnen

$\omega = [0{,}5 \cdot 10^6 \ldots 4{,}0 \cdot 10^6] \frac{1}{sec}$

Berechne die Ortskurve für Admittanz $\underline{Y}_g$ und Impedanz $\underline{Z}_g$

1.) Admittanz $\underline{Y}_{Cp}(\omega) = j\omega C_p = j\omega \cdot 5\,nF$

2.) Impedanz von einer Reihenschaltung $\underline{Z}_R = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

$= 50\Omega + j\left(\omega \cdot 80\,\mu H - \frac{1}{\omega\, 12{,}5\,nF}\right)$

Aus beiden Formeln berechnen wir $\underline{Y}_g$

$$\underline{Y}_g = \underbrace{\cancel{j\omega C_p(\omega)}}_{\underline{Y}_p(\omega)} + \frac{1}{\underline{Z}_r(\omega)} = j\omega C_p + \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

darstellbar $\longrightarrow = G_g(\omega) + B_g(\omega)$

real Teil / imag Teil d. Admittanz

3.) nimm versch. äquidistante Werte für ω her (80, 100, ... 640 kHz) und berechne die jeweiligen Admittanzen (Y_{80}, Y_{100}, ...)

Diese Punkte werden ins Koordinatensystem eingetragen und zu einer Kurve verbunden => Ausdruck:

<u>wichtig</u>: Laufrichtung von ω angeben

<u>2. Teil der Aufgabe</u>: aus der Admittanz berechnen wir die Impedanz: $\underline{Z}_g(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}_g(\omega)} = \frac{1}{\underline{G}_g(\omega) + j\underline{B}(\omega)} =$

$$= \frac{G_g(\omega)}{\underline{G}_g(\omega)^2 + \underline{B}_g(\omega)^2} + \frac{j \cdot (-\underline{B}_g(\omega))}{\underline{G}_g(\omega)^2 + \underline{B}_g(\omega)^2} = \underline{R}_g(\omega) + j X_g(\omega)$$

Rechne Schrittweise die Punkte von $\underline{Z}_g(\omega)$ um.

Trage sie in ein Koordinatensystem ein => siehe Ausdruck

2 Resonanzfrequenzen ($\omega = 1,1$ und $1,7$)

Was kann man aus einer (Impedanz) Ortskurve ablesen?

1.) diese Schaltung besitzt 2 Freiheitsgrade deswegen kann ein "Kringel" entstehen

2.) die Schaltung besitzt 2 Resonanzfrequenzen

$$\left.\begin{matrix}\omega_{R1} \\ \omega_{Res1}\end{matrix}\right\} \cong 1,1 \cdot 10^6 \frac{1}{sec}, \text{ dabei is } R_{R_1} \approx 50\,\Omega$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_{R2} \\ \omega_{Res2}\end{matrix}\right\} \approx 1,7 \cdot 10^6 \frac{1}{sec}, \text{ dabei ist } R_{R_2} \approx 210\,\Omega$$

R_{R1} und R_{R2} sind Wirkwiderstände, rein reell!

=> man kann mit Schwingkreisen Widerstände transformieren, was in der Nachrichtentechnik verwendet wird.
(Leistungsanpassung für bestimmte Frequenzen)

(P) Nutzen der Ortskurven:

in einer einzigen Kurve wird die Abhängigkeit von

1) Betrag Z und
2) Phase φ

von einem reellen Parameter (Typ.: f oder ω) für eine Schaltung dargestellt!

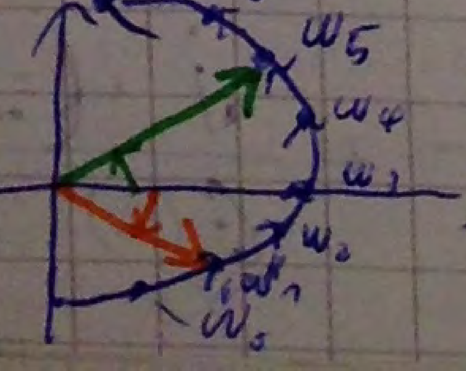
Amplitudengang

eine andere Darstellung, nämlich Betrags- und Phasendiagramme sind bekannter (aber aufwendiger)

Phasengang 15

Beide (Ortskurve) ⟷ (Betrag- und Phasendiagramm) hängen so zusammen:

(P) geg: Ortskurve



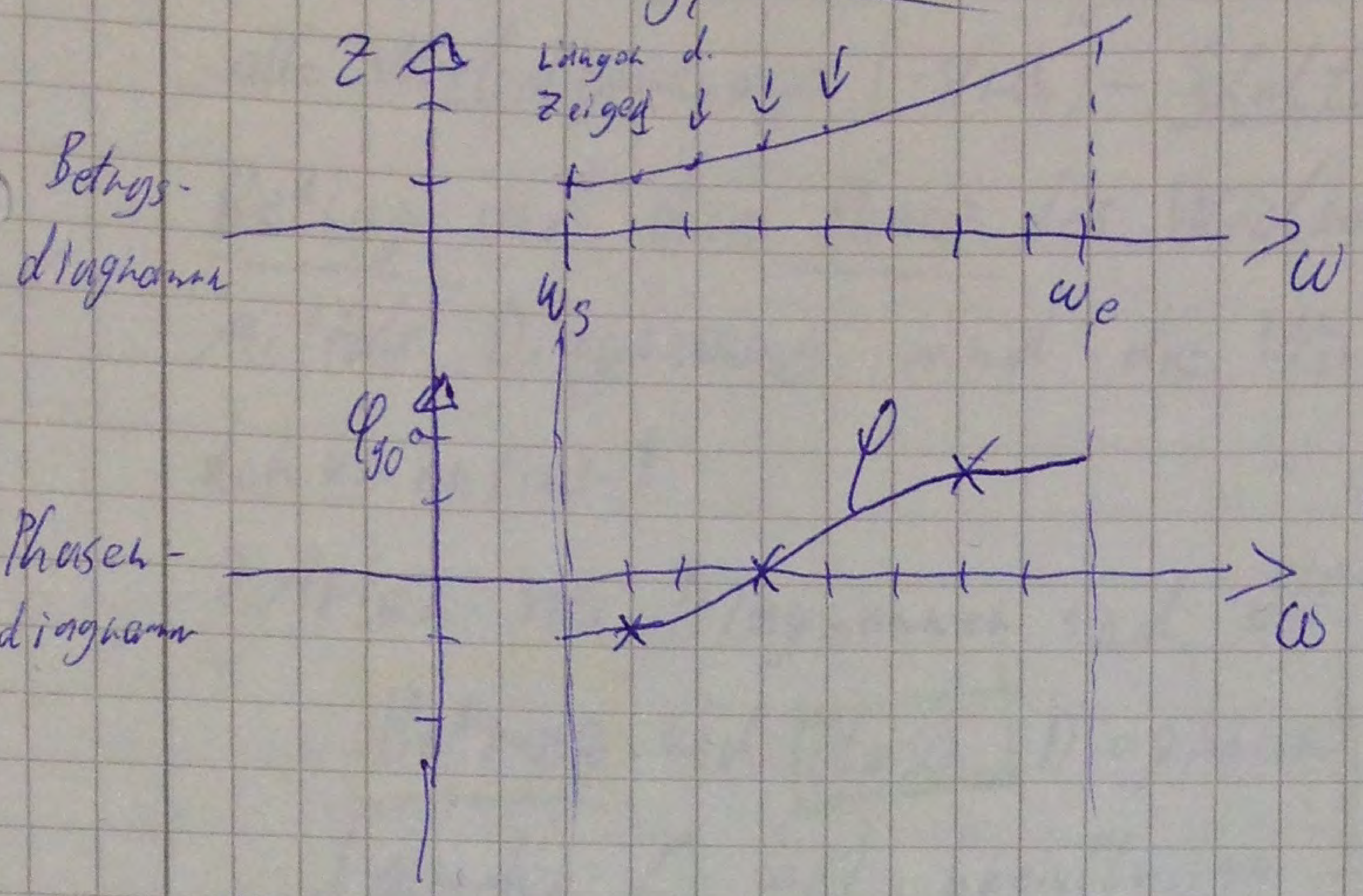
→ Zeigerdarstellung ges: Betrag, Phase

ges: Betrag / Phase

Jeder Zeiger auf ωi besteht aus

1) Betrag (Länge)

2) Winkel φ (Phase)



Um von der Ortskurve zum Betrags- und Phasen zu gelangen

- Bestimme ein paar Punkte für ω auf der Ortskurve
- Zeichne für jedes ω den Zeiger (ω) ein
- Miß die Länge Z und Winkel φ jedes Zeigers
- und übertrage die Längen Z ins Betrags~~system~~diagramm
  und " " Winkel φ " Pasen- "

P Woran erkennt man am Phasendiagramm eine Resonanzfrequenz?

Schnittpunkt Kurve mit X-Achse!

Zusammenfassung und Überblick – Ortskurven

alle Wechselspannungs (-strom) – Schaltungen beeinflussen den Betrag und die Phase des Wechselsignals

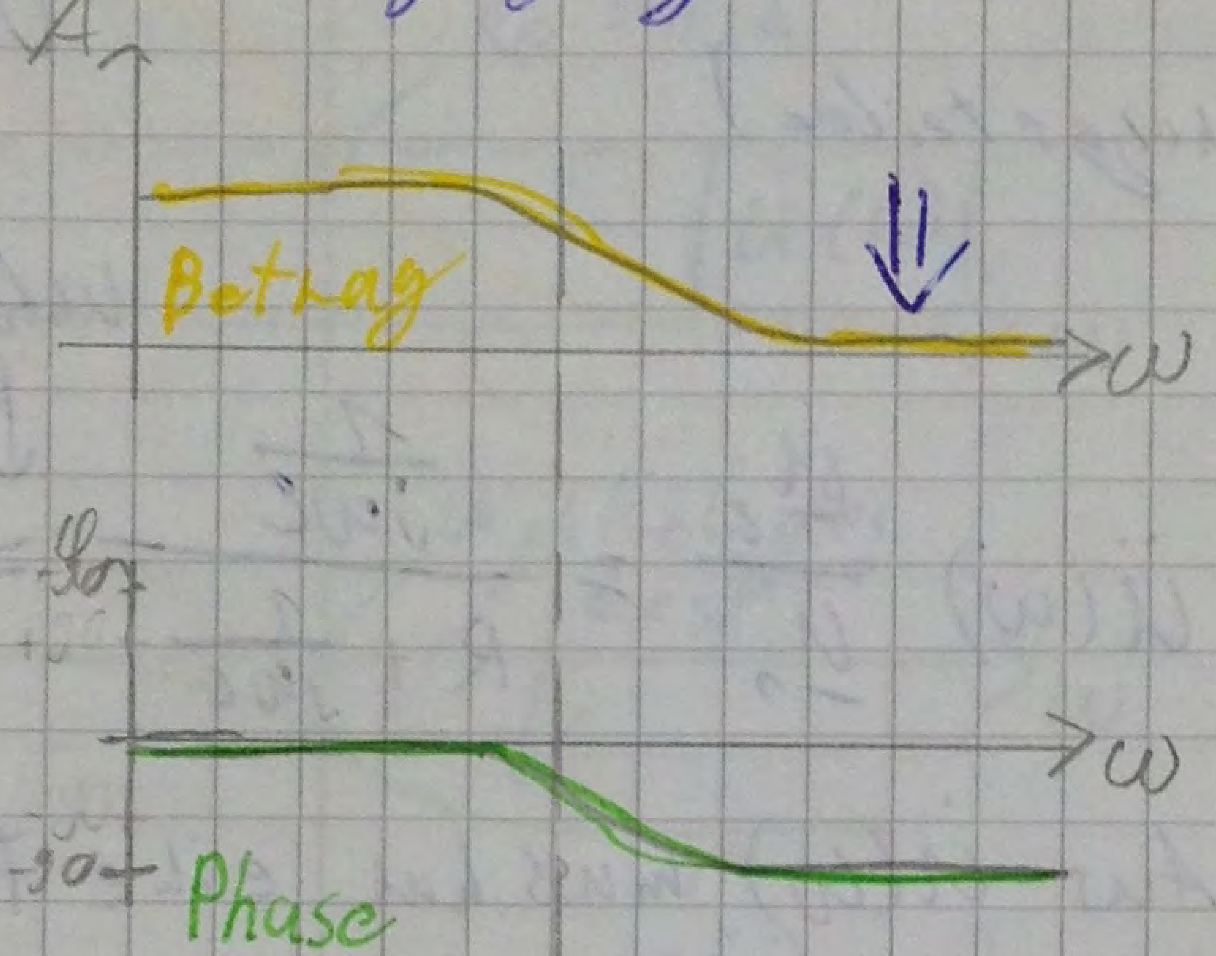
mittels Diagramme wird die Wirkung der Schaltung dokumentiert.

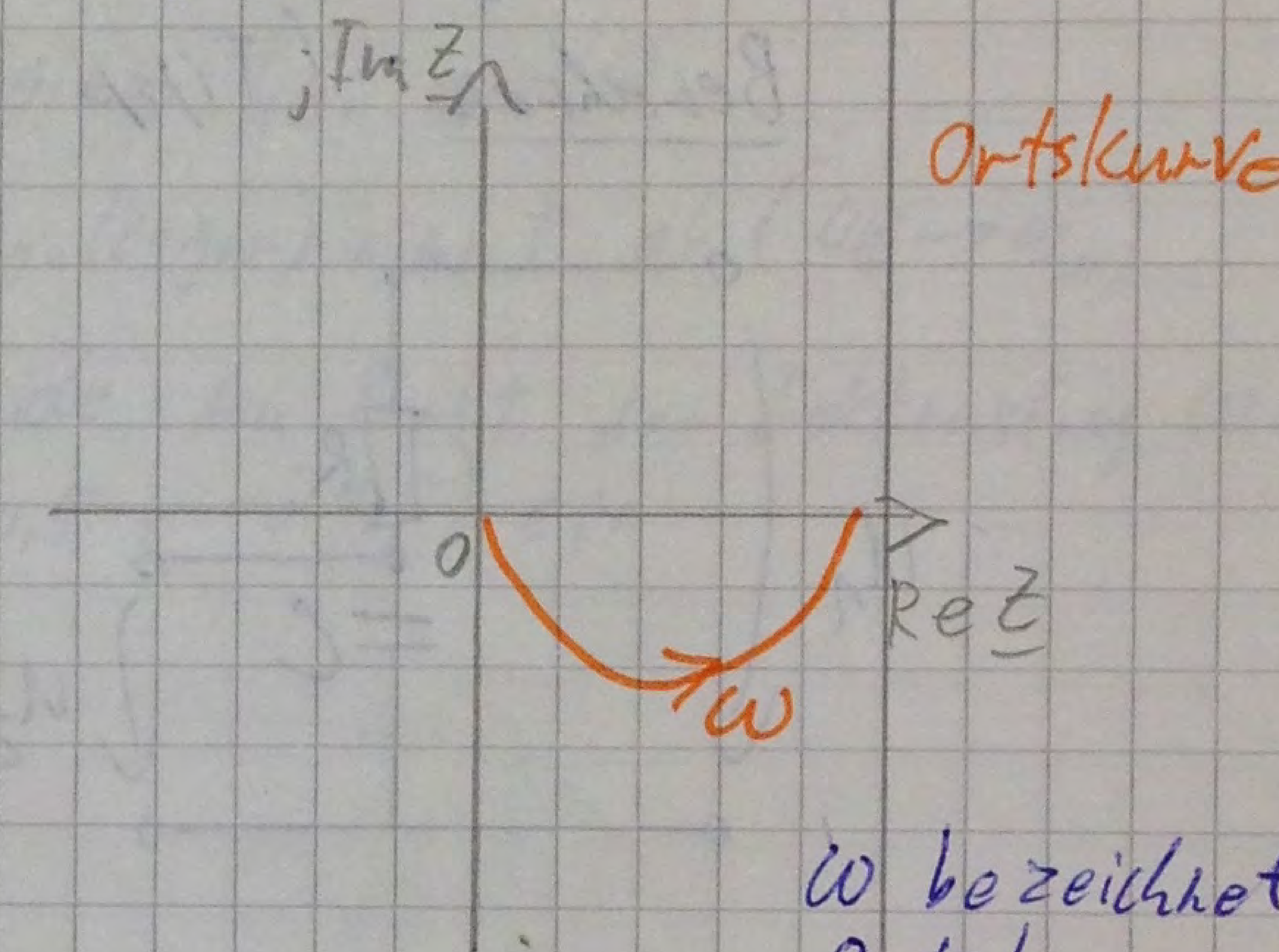
2 Arten von Diagrammen sind üblich:

Betrag und Phase Diagramm | Ortskurven Diagramm

(Merke: Cs und Ls beeinflussen – nicht nur Amplitude (Betrag) sondern auch die Verschiebung (Phasenlage) des Ausgangssignals relativ zum Eingangssignal)

ω Kreisfreq. bezeichnet X-Achse

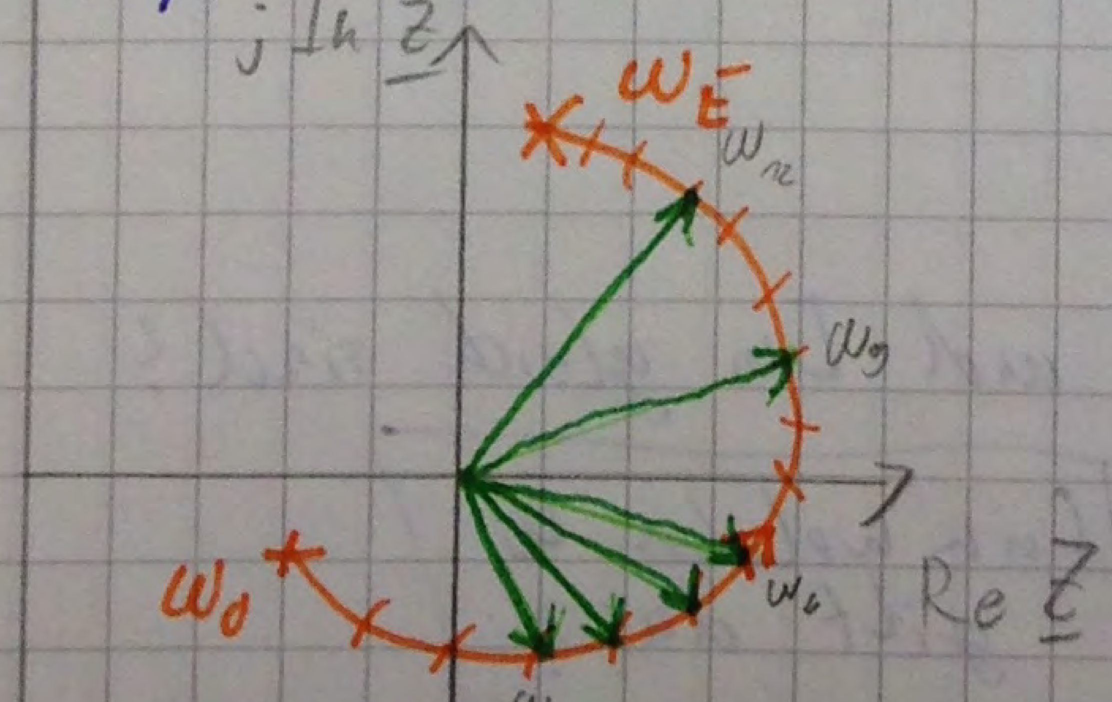




ω bezeichnet Ortskurve

Wie ist der Zusammenhang zwischen dem Betrags und Phasendiagramm und dem Ortskurven Diagramm?

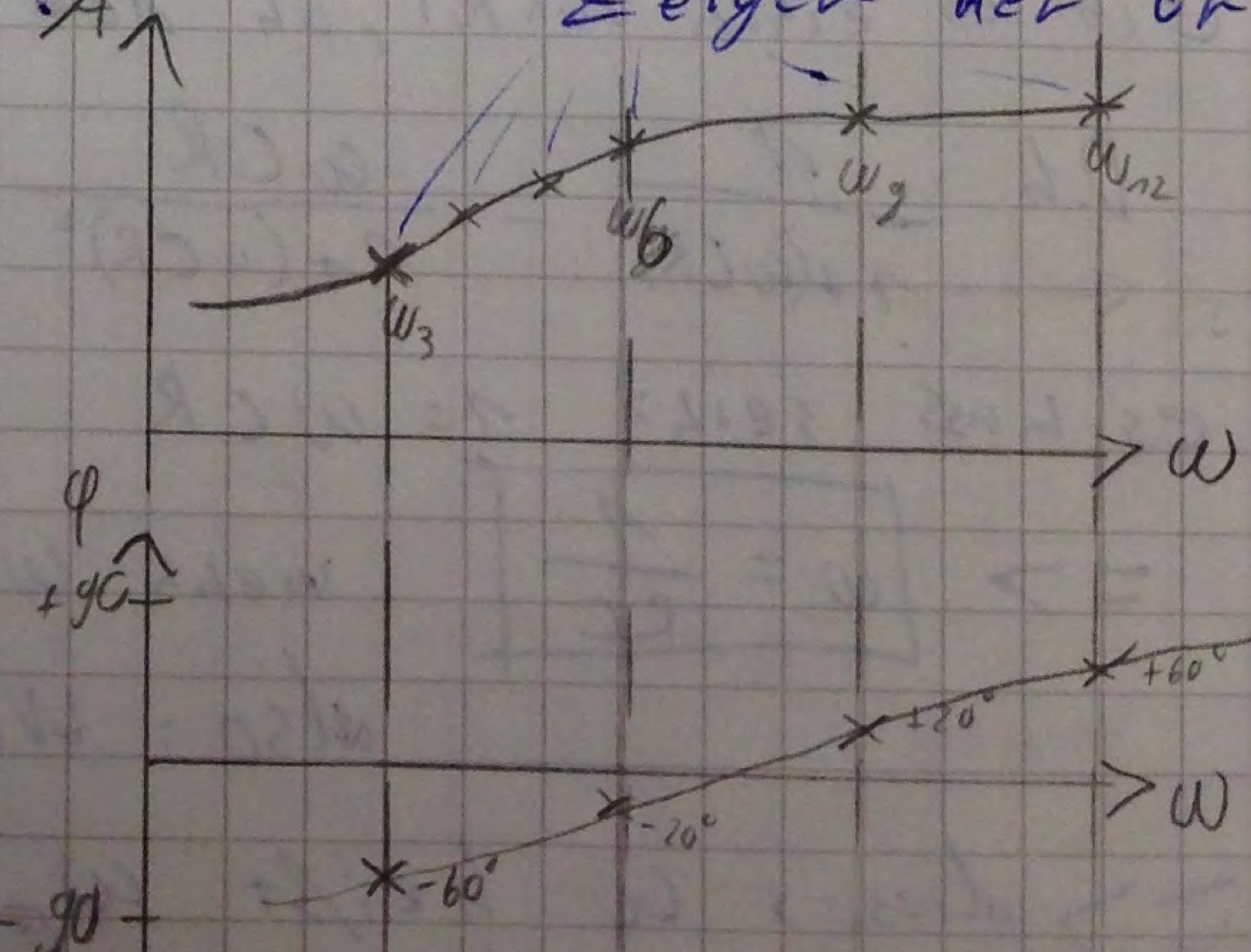
Bsp.: geg: Ortskurve



ω_0 = Startkreisfreq.

ω_E = Endkreisfreq.

Zeiger der Ortskurve



① Verwende Zeiger zum ablesen

1.) Länge d. Zeigers : Betrag

2.) Winkel φ : Phase

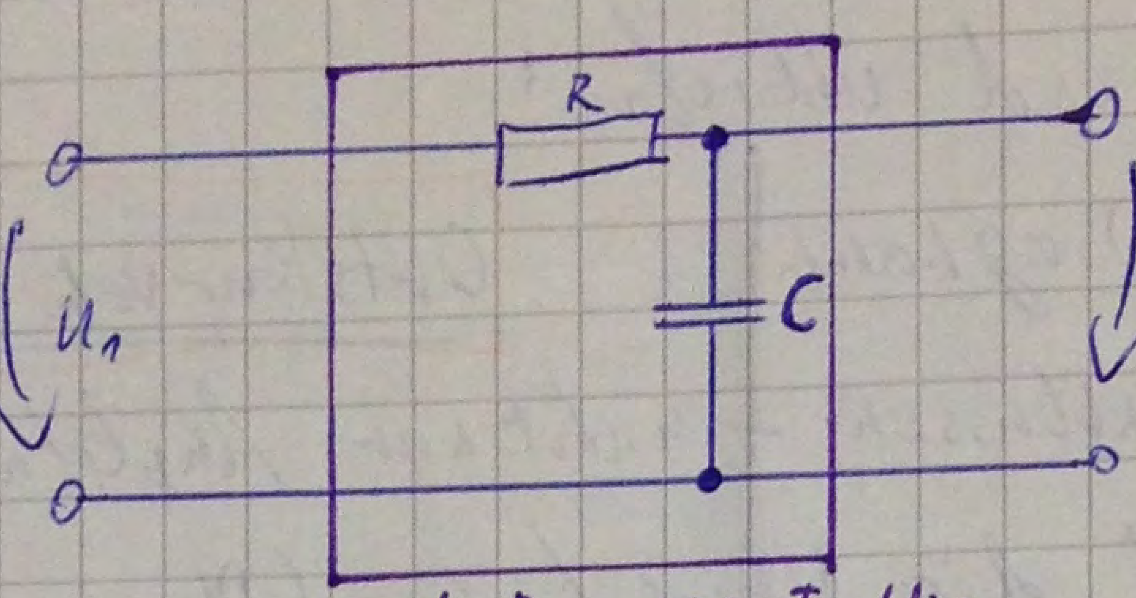
② Wiederhole ①, bis Diagramm entsteht

D.h. aus einer beliebigen Ortskurve kann das Betrags- und Phasen Diagramm durch Ablesen konstruiert werden.

-> Anwendung: Simulationssoftware!

Praktisches Beispiel:

Input



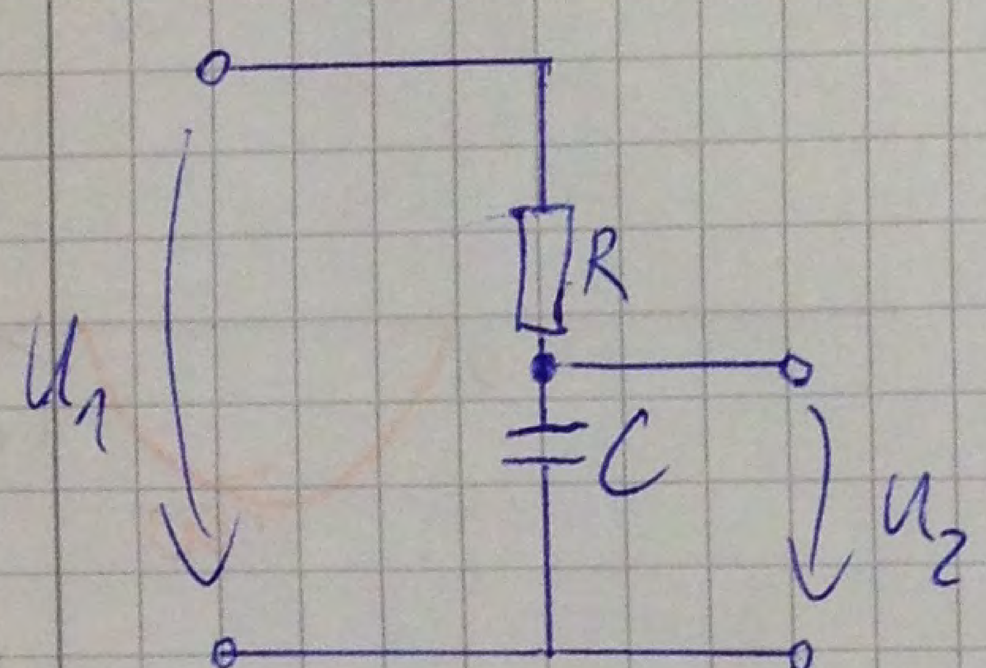
output

Black Box mit Funktion

Die "Übertragungsfunktion" der Schaltung beschreibt das Verhalten.

Übertragungsfunktion ist definiert als: $\frac{U_{output}}{U_{input}} = \frac{U_1}{U_2}$

Berechnen: (Tipp: Spannungsteiler)



Umformung

$$\ddot{u}(\omega)\ \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{\cancel{1R} + j\,\omega RC}$$

Aus $\ddot{u}(\omega)$ muss man eine Form abgeleitet werden, aus der man Re und j Im ausrechnen kann.

$$\ddot{u}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{(1 - j\omega RC)}{(1 - j\omega RC)} = \frac{(1 - j\omega RC)}{1^2 - \underbrace{j^2}_{-1}\omega^2 C^2 R^2} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1 + (\omega CR)^2}}_{Re} - j\,\underbrace{\frac{\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}}_{Im}$$

Gibt es einen Punkt, an dem Re und Im gleich sind?

D.h. $\frac{1}{1+(\omega CR)^2} = \frac{\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$ } $\boxed{\text{für welches } \omega \text{ gilt das?}}$

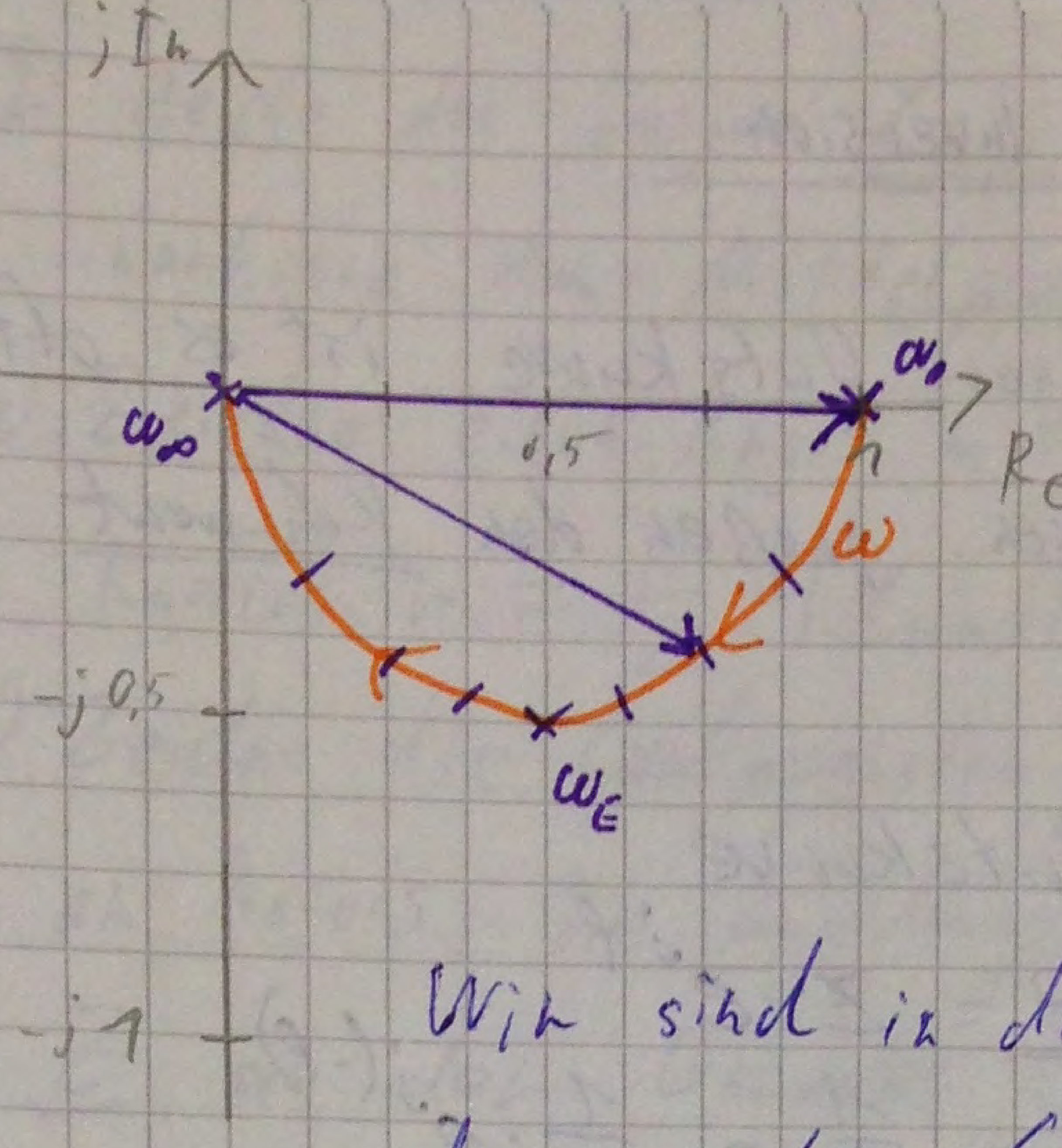
es muss sein: $1 = \omega CR$ (Nenner sind gleich)

=> $\boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$ wenn $\omega = \frac{1}{RC}$ ist, dann Re = Im

also: Wirkwiderstand = Scheinwiderstand

=> dieses ω heißt ω_E $\boxed{\text{Eckkreisfrequenz}}$

Die Eckkreisfrequenz ist ein typischer Parameter zur Charakterisierung von "Filterschaltungen"



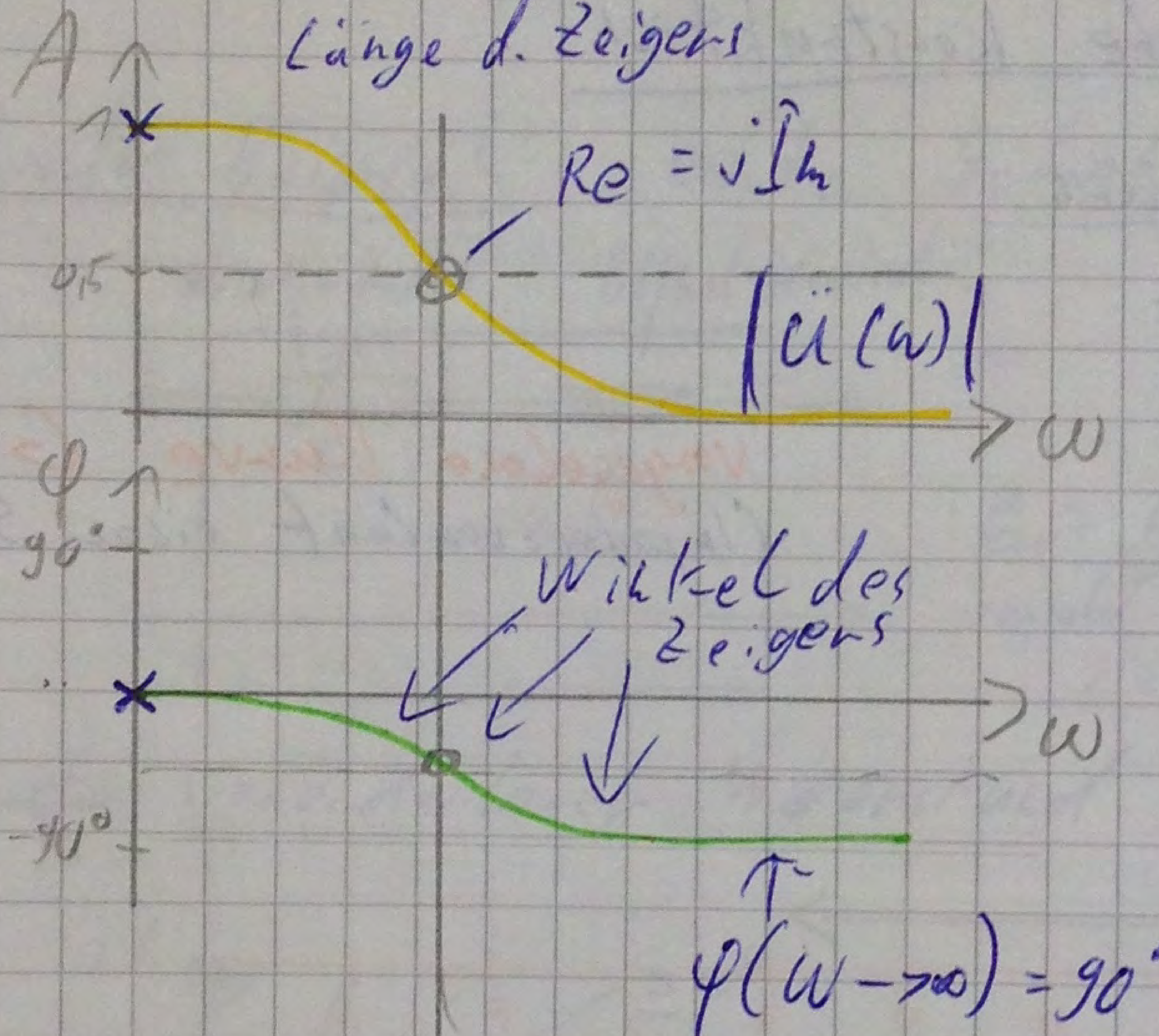
$\omega_0 = 1 + j0$

$\omega_\infty = \to 0 + j \to 0$

ω_E = Eckkreisfrequenz

} Überlegung um Ortskurve berechnen zu können

Wir sind in diesem Beispiel den Weg von der gegebenen Schaltung bishin zur Ortskurve gegangen. Jetzt noch: Betrags und Phasen-Diagramm konstruieren!



1. Beginne bei $\omega = \emptyset$
2. Länge (Zeiger) nimmt ab ($\omega_0 \to \omega_\infty$)
3. Zeiche den Punkt der Eckkreisfreq. ω_E $(0,5\ ,\ -j\,0,5)$ ein

Ortskurven und ihre Inversion

Aufgabe: bei der Ermittlung einer Ortskurve ist es oft notwendig von Komplexen größen den Kehrwert zu bilden

Fachbegriff: Inversion einer Ortzkurve

Gegeben: Bsp.: Impedanz $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$

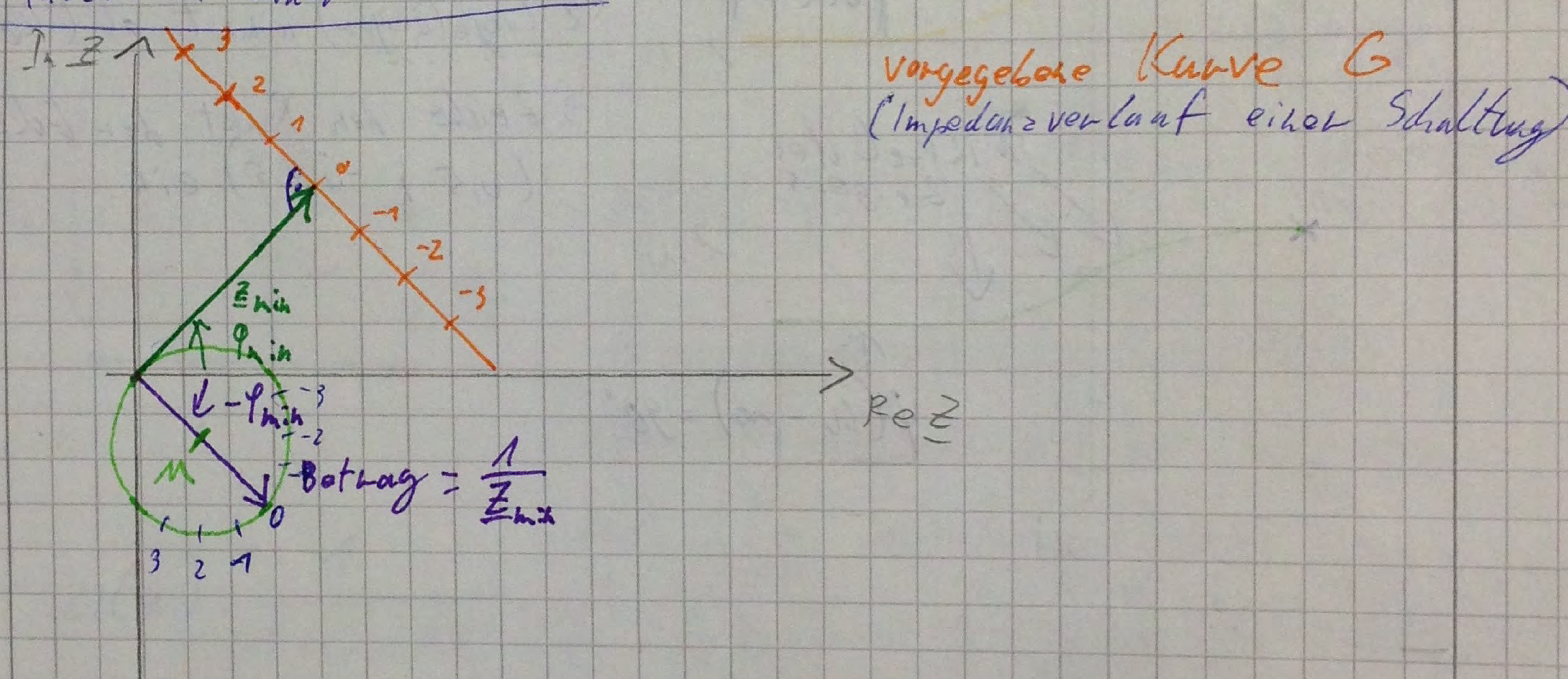
Gesucht: Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{j(-\varphi)}$

Schwierigkeit: Inversion einer komplexen Zahl zu berechnen.

=> Geometrische konstruktion

Erklärung an einer Geraden:

Inversion einer Geraden:



G Lässt sich schreiben als $\boxed{\underline{A} + p\underline{B}}$ mit $\underline{A}$ und $\underline{B}$ = gegebene komplexe Größen und $p \in \mathbb{R}$ variabel.

Gesucht: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{A} + p\underline{B}}$

Rechenvorschrift (Algorithmus)

① Ermittle den minimalen Zeiger $\underline{Z}_{min}$ vom Nullpunkt zur Geraden. Interessant ist die Länge des Zeigers $\underline{Z}_{min}$

② Berechne nun $|\underline{Y}_{max}| = \left|\frac{1}{\underline{Z}_{min}}\right|$ den Betrag (Länge) von $\underline{Y}_{max}$ aus $\frac{1}{\underline{Z}_{min}}$ die Richtung (Winkel) von $\underline{Y}_{max}$ erhält man durch Spiegelung des Winkels von $\underline{Z}_{min}$ an der X-Achse.

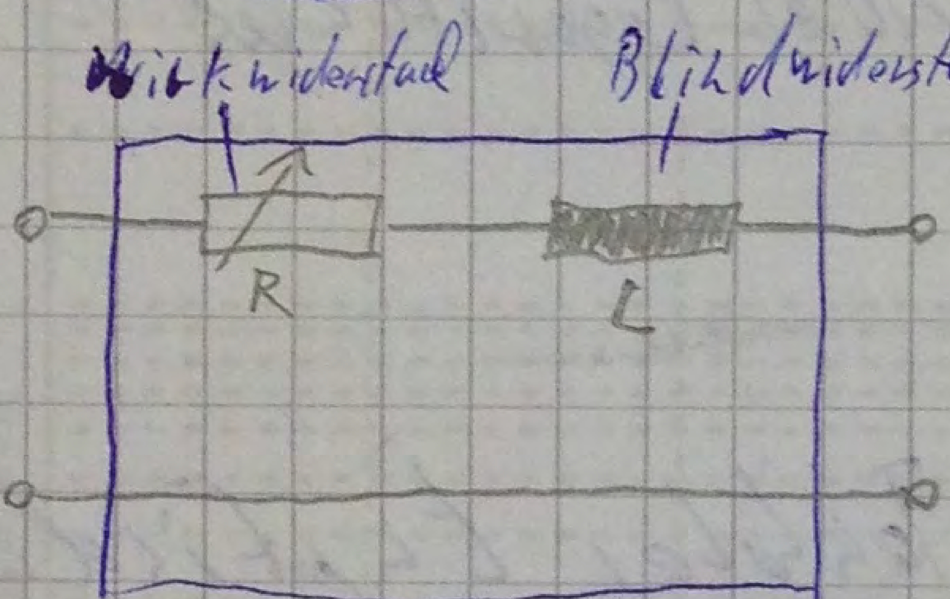
③ Zeiche den Zeiger $\underline{Y}_{max}$ in das Diagramm ein und markiere den Mittelpunkt von $\underline{Y}_{max}$

④ Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r \approx \frac{1}{2} \cdot |\underline{Y}_{max}|$

⑤ Zeichne die Laufparameter ein $\{\ldots 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$ am Kreis. Die Zuordnung erhält man, indem man mit $\underline{Z}$ an der Geraden G entlang fährt.

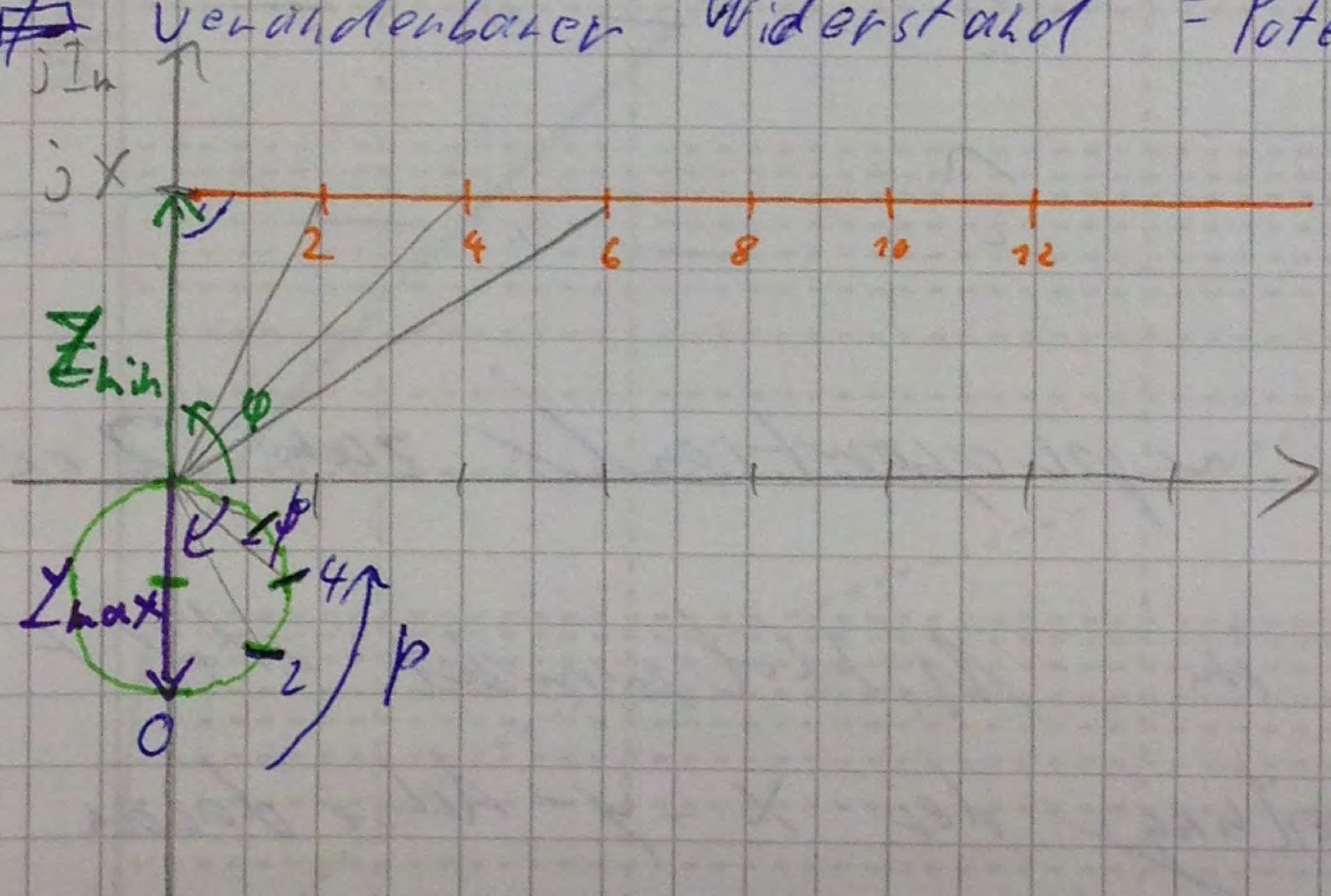
Ergebnis: durch eine Geometrische Konstruktion wurde aus $\underline{Z}$ die Admittanz "$\underline{Y}$" "berechnet".

Reales Beispiel: echte Schaltung



$$\underline{Z} = \underbrace{R}_{\text{variabel}} + j\underbrace{X}_{\text{fest weil L nicht variabel ist}}$$

~~Z~~ veränderbarer Widerstand = Potentiometer, Poti



① $\underline{Z}$ min finden

② Berechne $\underline{Y}_{max} = \frac{1}{\underline{Z}_{min}}$

③ Mittelpunkt M

④ Kreis G mit Radius $r = \frac{\underline{Y}_{max}}{2}$

⑤ Laufparameter am Kreis abschreiben

Gesucht: $\underline{Y}$, dazu konstruieren wir nach Rechenregel ① → ⑤

Logarithmische Darstellung

In der Mathematik (Geometrie ...) verwendet man eine Lineare Einteilung bei den X - Y Achsen eines Koordinatensystems. In der Nachrichten-, Kommunikations- und Medizintechnik verwendet man keine lineare Einteilung.

Beispiel: menschliches Ohr

Lautstärke-Empfindlichkeit:

1 Klangquelle ≙ Lautstärke-Empfindung = 1

10 " ≙ " " = 2

doppelt so laut

Das Ohr ist ~proportional zum 10er Logarithmus

Tonhöhen Empfindung:

×2 440 Hz Sinus Ton ≙ Tonhöhen Empfindung = 1 Oktave

×2 880 Hz ≙ —"— = 2

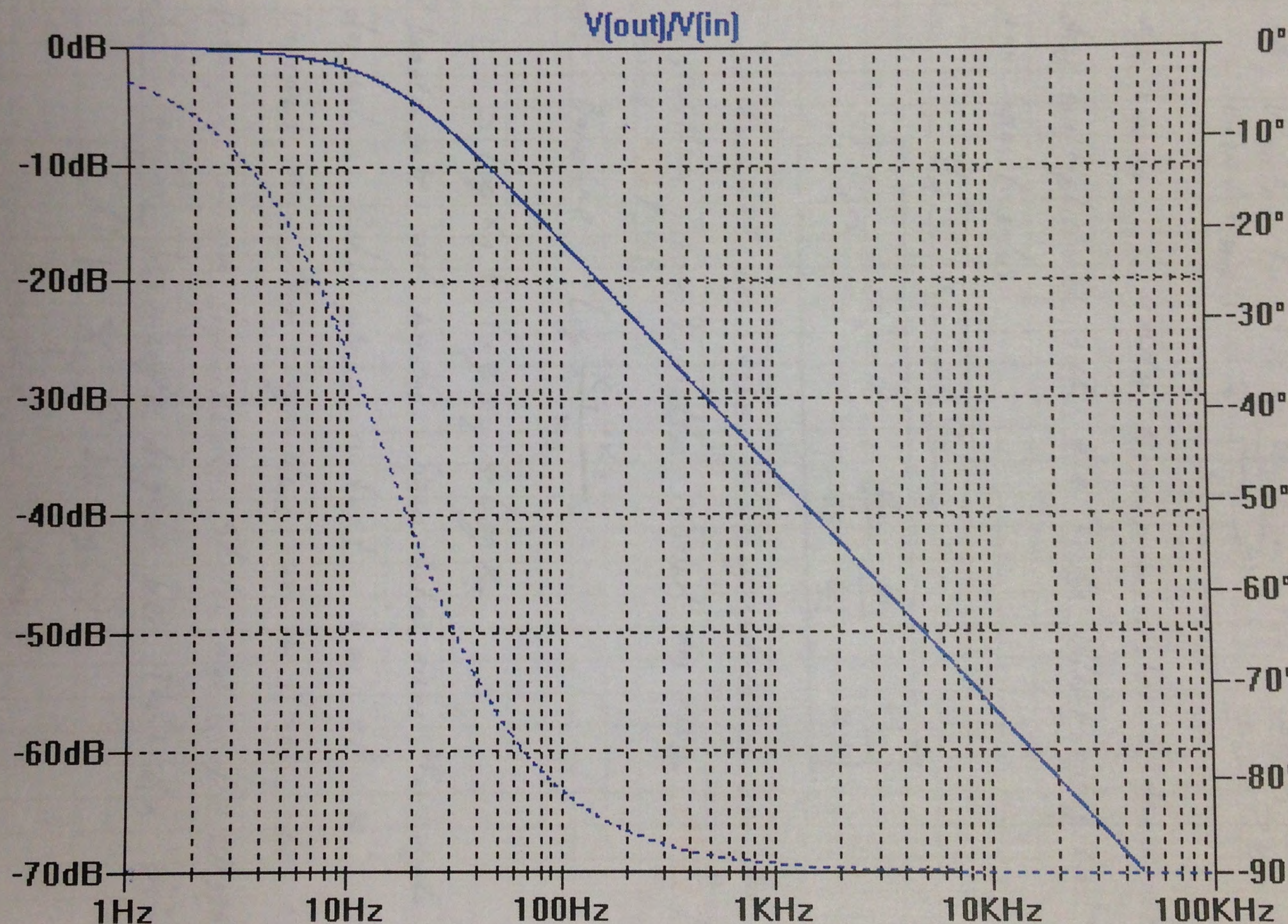
1760 Hz ≙ —"— = 3

Tonhöhen-Empfinden ~proportional zum 2er Log

Da der Mensch im Mittelpunkt steht wurde die Einteilung der X-Y-Achse daran Angepasst

Ausnahme: Phasenlage => lineare Einteilung

ZIP-Dateien PW: HdaIngInf


V[out]/V[in]
0dB
-10dB
-20dB
-30dB
-40dB
-50dB
-60dB
-70dB
0°
-10°
-20°
-30°
-40°
-50°
-60°
-70°
-80°
-90°
1Hz
10Hz
100Hz
1KHz
10KHz
100KHz

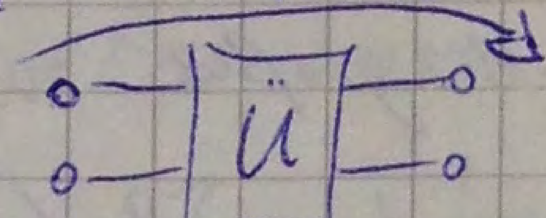
Bode - Diagramm

Diagramme mit doppelt logarithmischen Skalen

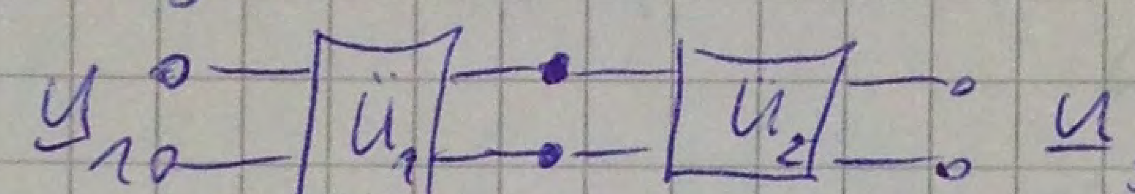
d.h. sowohl X- als auch Y-Achse tragen logar. Skalen

=> Erleichterung beim berechnen:

zB: Übertragsfunktion eines Netzwerks = Quotient von 2 Größen $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$



Wenn man nun 2 solcher Netzwerke hintereinander schaltet, dann multiplizieren sich die beiden Übertragungsfunktionen zum Gesamtergebnis



$$\boxed{\ddot{U}_{ges} = \ddot{U}_1 \cdot \ddot{U}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1}}$$

=> Transformiert man eine Übertragungsfunktion zu den Logarithmen ihrer Variablen, so wird aus einer MULT/DIV eine ADD/SUB

Beispiel: Berechne: $\text{Log}\,\frac{x_1 \cdot x_2}{x_3}$

$$= \text{Log}\,x_1 + \text{Log}\,x_2 - \text{Log}\,x_3$$

=> Bauelemente und menschl. Sinne haben einen Wirkungsbereich der mehrere Zehnerpotenzen umfaßt: bei zB: $10^{-6} \ldots 10^{4}$ [Einheit] variiert der 10er-Logarithmus nur im Bereich $-6 \ldots +4$

Deswegen werden logarithmische Skalen und Größen eingesetzt.

Verhältnisgrößen: bevorzugte Angabe bei technischen Größen (V, A, ...)

$$[dB] \quad X_L \;\hat{=}\; 20 \cdot \text{log}(x)$$

Logarithmisch ↑ ↑ Linear

dezi Bel ist keine physikalische Einheit

dB kann nur auf Verhältnisgrößen angewendet werden.

Im tägl. Leben gibt es immer eine Referenzgröße

Gemessen wird ein Spg. pegel U

Aufgabe ist: U in dB darstellen

$$U[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{U}{U_0}\right) \leftarrow \text{Referenz}$$

$$U_0 = 775\,mV$$

Um verschiedene Referenzgrößen zu kennzeichnen schreibt man hinter dem dB noch weitere Buchstaben

die $\underbrace{dBV, dBU, dBu}_{\text{Kennzeichnen Referenz}}, \ldots$ (siehe später)

Schallpegel: $P_S[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{P_{mess}}{P_\emptyset}\right)$ wobei $P_\emptyset = 2 \cdot 10^{-5}$ Pascal [Pa]

(DIN IE 651)
EU-Norm

Leistungsangabe: $P[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_m}{P_\emptyset}\right)$

die Leistung P ist proportional zu U^2 (z.B. Audioverstärker)

Angabe: $\underbrace{10}_{\text{dezi}} \cdot \underbrace{\log\left(\frac{P_m}{P_\emptyset}\right)}_{\text{Bel}} = 10 \cdot \log\left(\frac{U_m^2}{U_{p\emptyset}^2}\right) = 2 \cdot 10 \cdot \log\left(\frac{U_m}{U_\emptyset}\right)$

$P[dB_m] \mathrel{\hat{=}} 10 \cdot \log\left(\frac{P_{mess}}{1mW}\right)$

milli Watt

Fachbegriff: Unter „Dynamik" versteht man das Verhältnis (Quotienten) vom größten zu kleinsten Signalpegel eines Systems. Weil es sich 1) um eine Verhältnisgröße handelt und 2) deren Zahlenwert sehr groß sein kann, verwendet man zur Angabe der Dynamik [dB]

Bsp.: bei einem Popkonzert verursacht die leiseste Stelle der Musik im Aufnahme Mikrophon eine Spannung von U_{min} 0,50 µV und die lauteste Stelle $U_{max} = 2mV$

$$\text{Dynamik} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{2mV}{0{,}5\mu V} = 4000 = 4 \cdot 10^3 = 72\,dB$$

Referenz

Taschenrechner: [Log(4000)] × 20

Bsp.: Audioverstärker (Dynamik = $\frac{\text{lautestes Signal}}{\text{leisestes Signal}}$)

Leisestes Signal = Ruhe + Eigenrauschen (ohne Eingangssignal) = 1µW

Lautestes Signal = maximale Leistung = 200 W

$$\text{Dynamik} = \frac{200\,W}{1\,\mu W} = 2 \cdot 10^8 = 83\,dB$$

Taschenrechner: $[\log(2 \cdot 10^8)] \times 10$

dB macht die Beschreibung von $\frac{max}{min}$ Verhältnissen einfacher!

Stoff: Einige Zahlenwerte für $20 \cdot \log\left(\frac{U_A}{U_E}\right)$

$20 \cdot \log\left(\frac{U_A}{U_E}\right)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
dB	−40	−20	−6	−3	∅	3	6	20	40

Medientechnik Messtechnik

Eingang U_E gleich Ausgang U_A $\Rightarrow \log(1) = 0$

Bezugsgrößen Beispiel: dB X

Name	Bezug (relativ zu Bezugsgröße)
dBV	V_{rms} (root mean square)
dBu	$0{,}775\ V_{rms}$ "u" = unloaded — unbelasteter Ausgang

↓

dBu kann ohne Angabe der Impedanz verwendet werden, kommt von der 600 Ω-Impedanz bei einer Signalstärke von 1 mW ausgerechnet $V_{ref} = \sqrt{600\,\Omega \cdot 1\,mW} = 0{,}775\,V$

Im Audiobereich werden beide Angaben verwendet:

	Bezugswert
Professionell	+4 dBu
Consumer	−10 dBV

Eine weitere Bezugsgröße ist

dB SPL ← Sound Pressure Level

Einsatz: akustische Messungen (Disco, Open Air)

Bezug ist die menschliche Hörschwelle 20 μPa (Pascal)

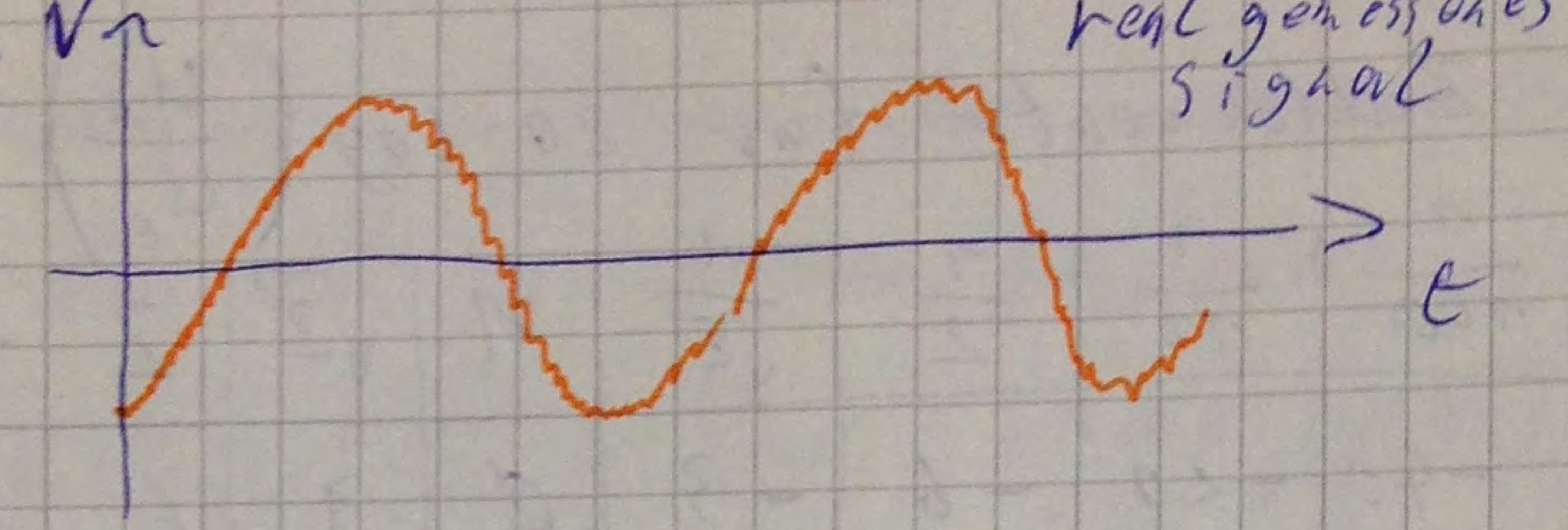
somit ist $1\,Pa \mathrel{\hat{=}} +94\,dB\,SPL$

Filterschaltungen

↳ sind das Standard-Werkzeug um reale Signale so zu bearbeiten, dass das Nutzsignal zu Tage tritt.

Filter werden eingesetzt um Spektren zu bearbeiten

Bsp.:



In diesen realen Signal stecken 2 Informationen:

Nutzsignal + Fehlersignal

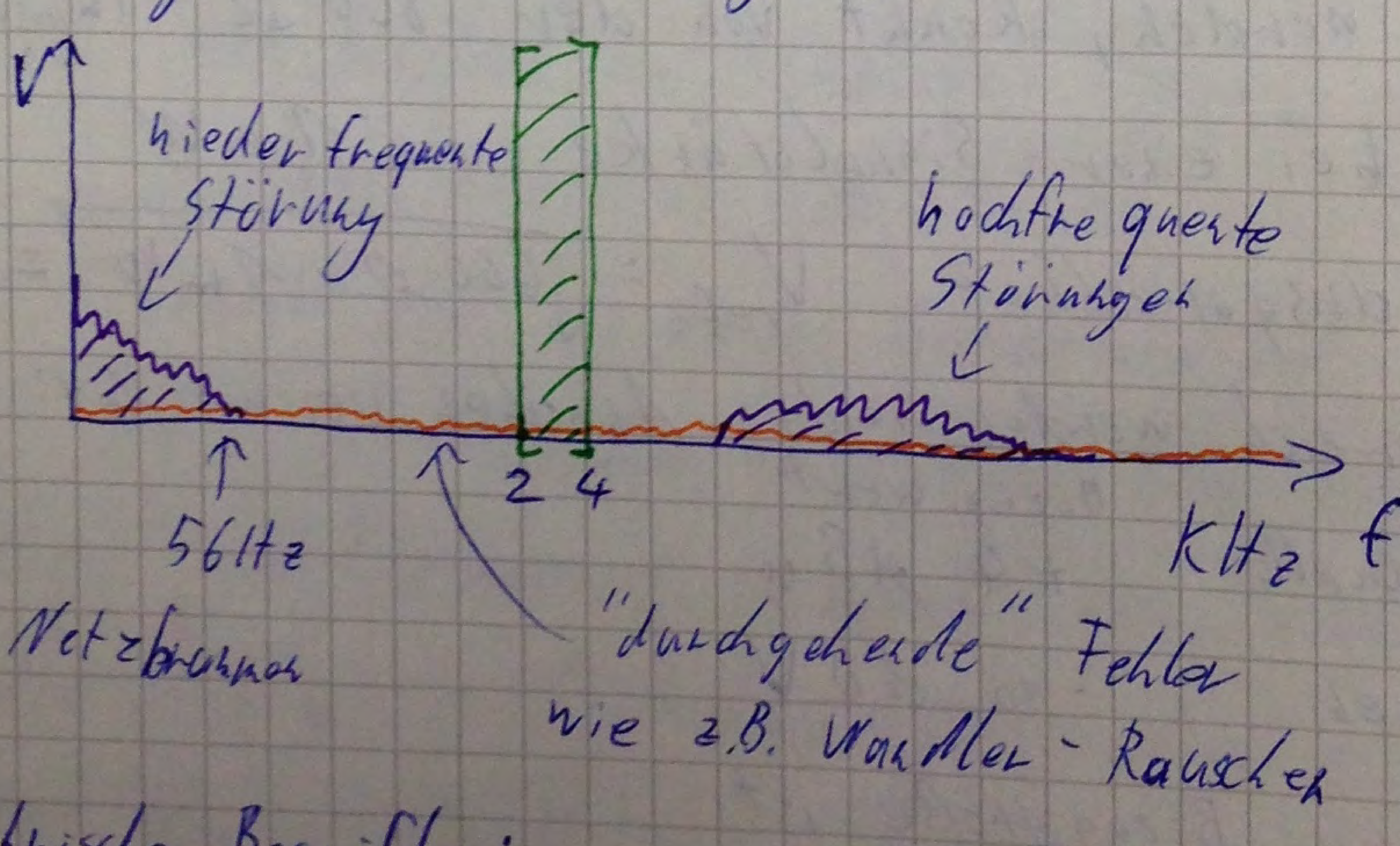
Fehler besteht z.B. aus:

+ Rauschen (statische Schwankungen z.B Sensor, Meßleitung, analoge Eingangsverstärker, Analog-Digital Wandler ...)

+ Störsignale (induktivem Einkoppelung, gleichsignal z.B. InfraRot durch Sonnenlicht)

+ ...

Einordnung der Fehlersignale:



Technische Begriffe:

Das gesamte Spektrum wird eingeteilt in Nutzbänder [] und Störbänder []

Praktisches Beispiel:

Mikrophon (Gesang) bei Open Air Konzert

Spektrogramm:

Um das Nutzsignal zu gewinnen braucht man Filter (analog, digital)
VGET DSV

Filterdesign - Analog

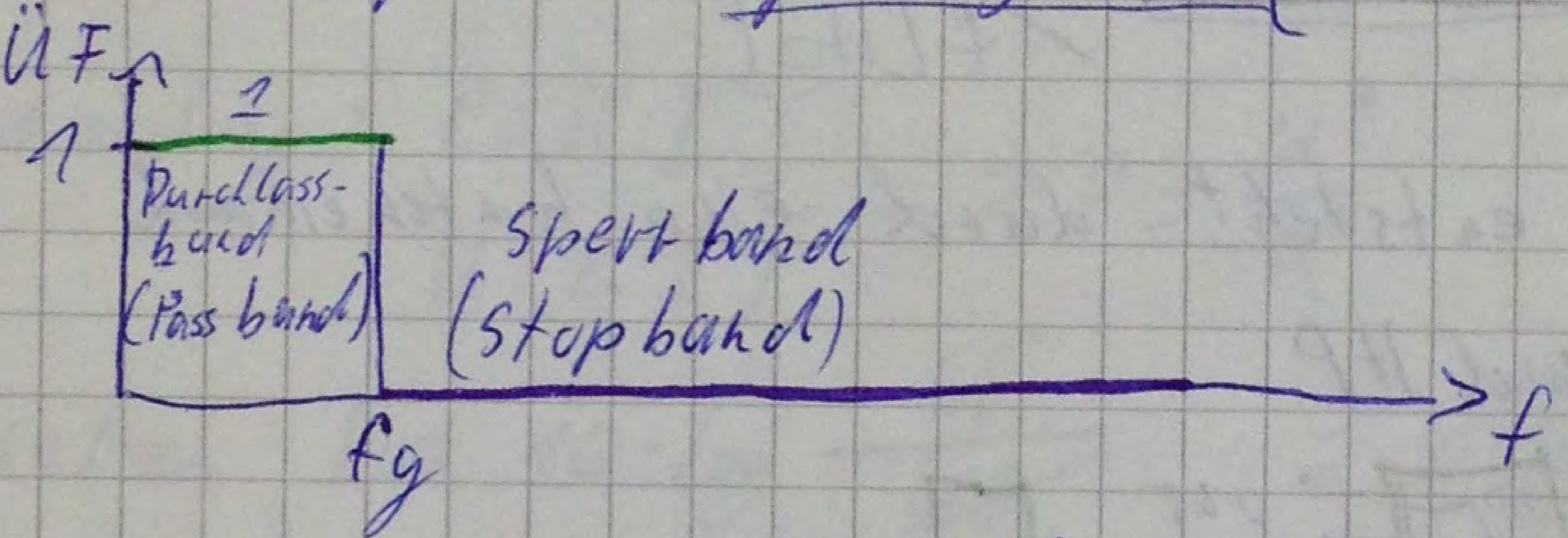
Top → down

Im Namen des Filters ist seine Funktionalität spezifiziert!

1) Tiefpassfilter (engl. low pass filter / high cut filter)

Läßt tiefe Frequenzen passieren und bedämpft hohe Frequenzen

spektogramm (ÜF = Übertragungs Fkt.)

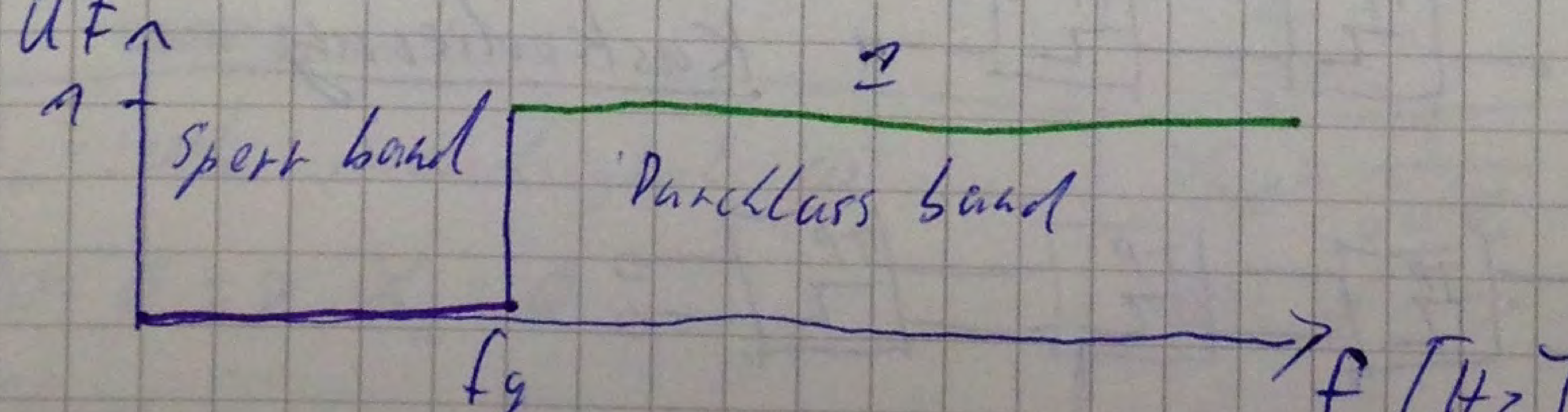


Grenzfrequenz (cutoff frequency)

2) Hochpass Filter (engl. low cut filter / high pass filter)

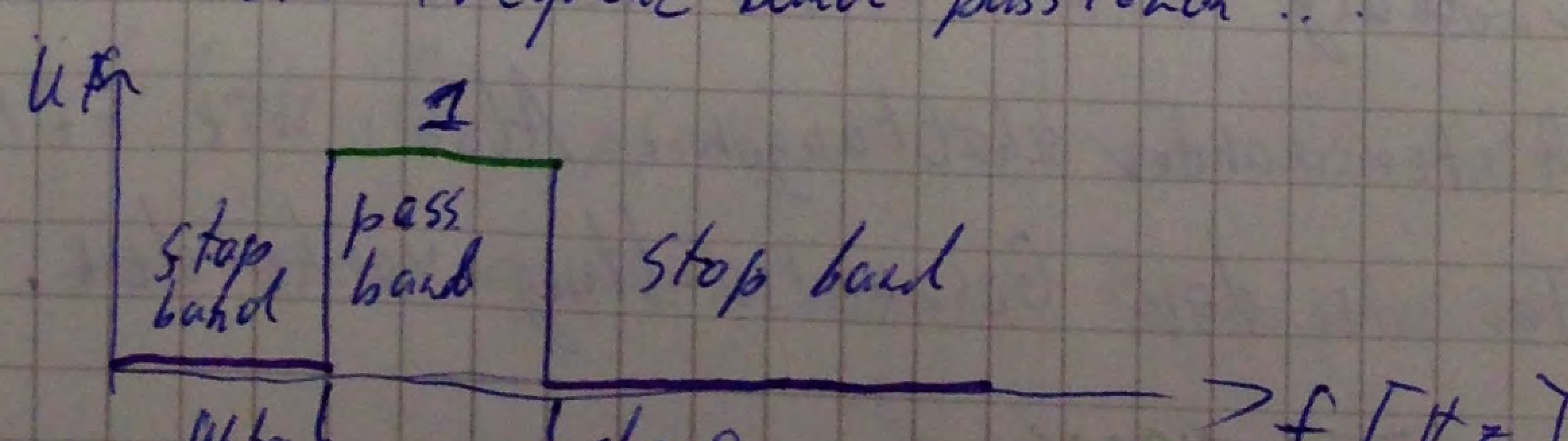
Lässt hohe Frequenzen passieren und bedämpft tiefe Frequenzen

spektogramm



3) Bandpass-Filter (bandpass filter)

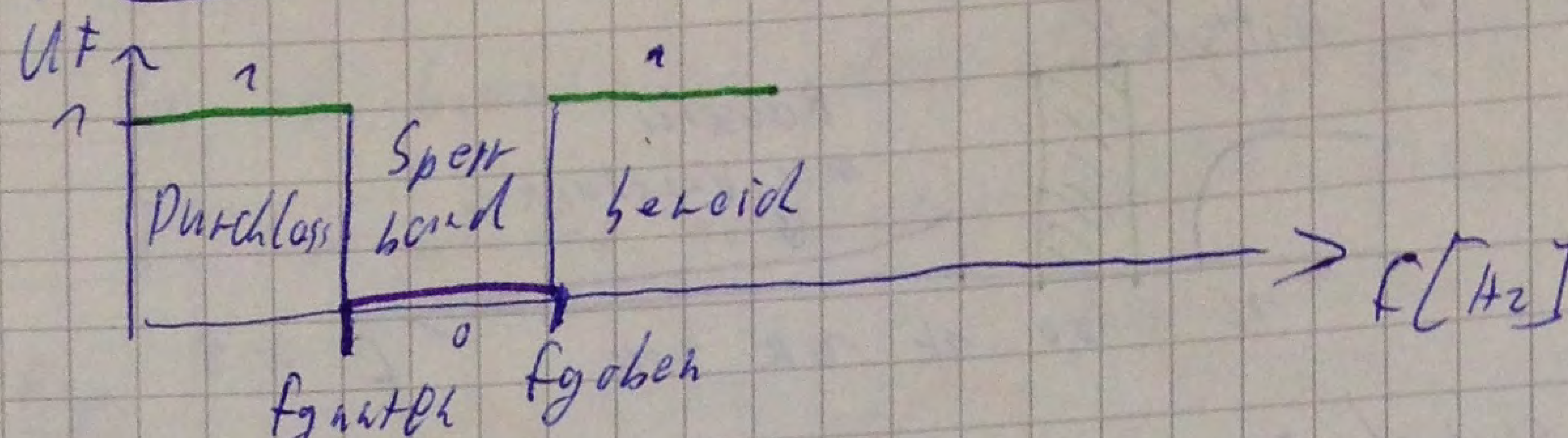
Lässt ein Frequenzband passieren ...



Grenzfreqn.
(Corner frequency)

4) Bandsperre-Filter (band stop filter)

Sperrt ein Frequenzband aus

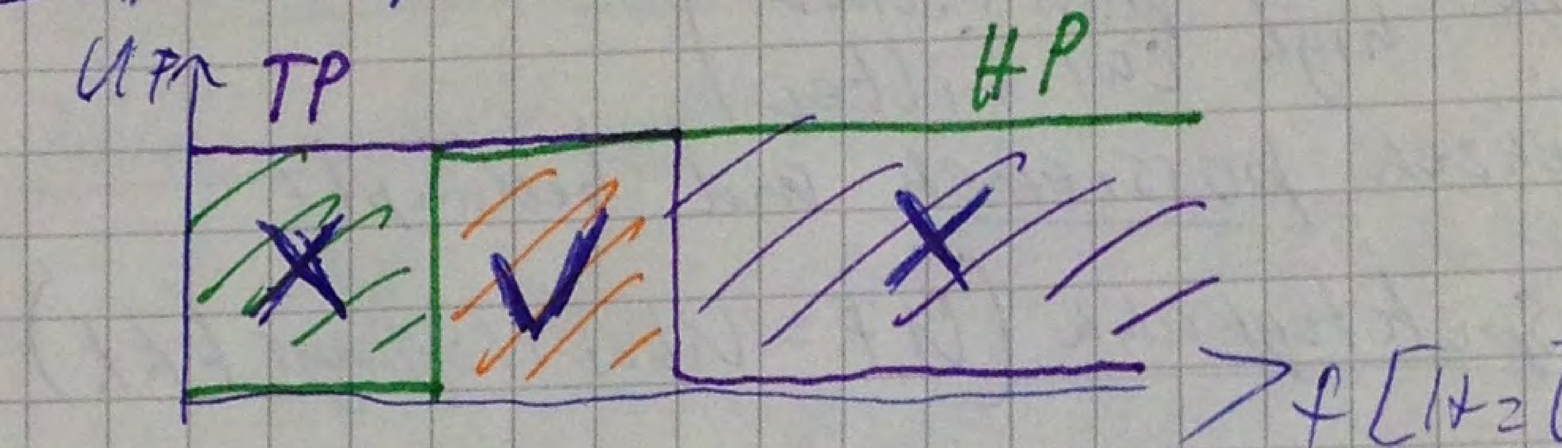


Bei genaueren Hinsehen erkennt man:

3.) und 4.) sind Filter, die aus TP und HP

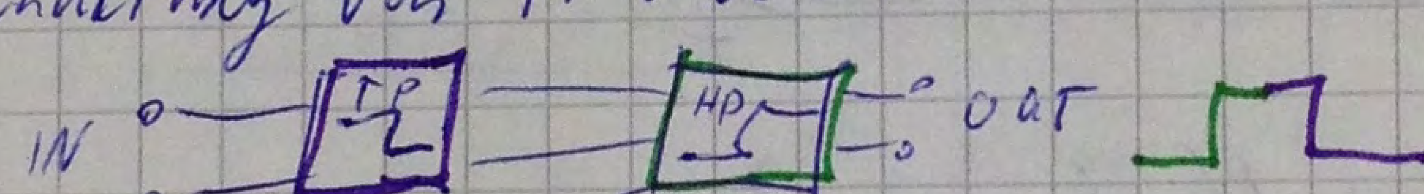
zusammen gesetzt sind:

z.B.: Bandpass Filter:



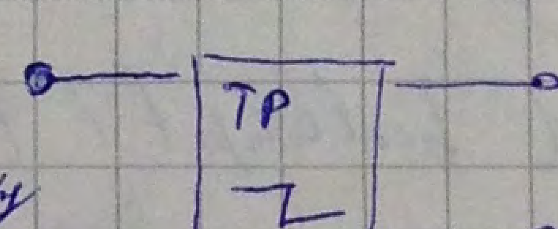
Die Gesamt-ÜF entsteht durch eine hintereinander

Schaltung von TP und HP



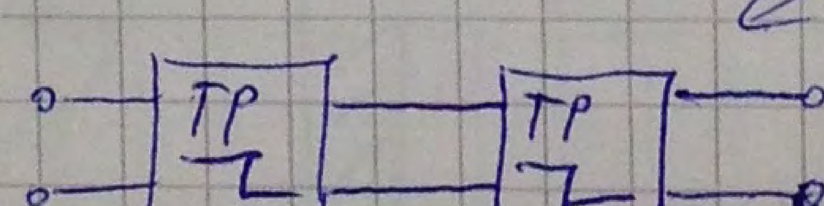
Ordnung eines Filters

Filter 1. Ordnung (first order filter)



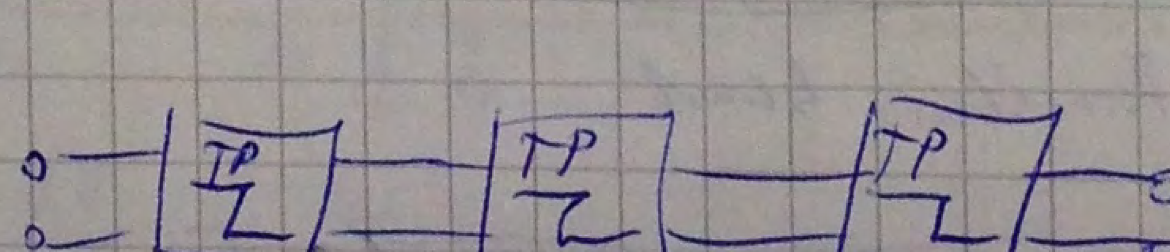
TP enthält nur ein L oder ein C

Filter 2. Ordnung (second order filter)



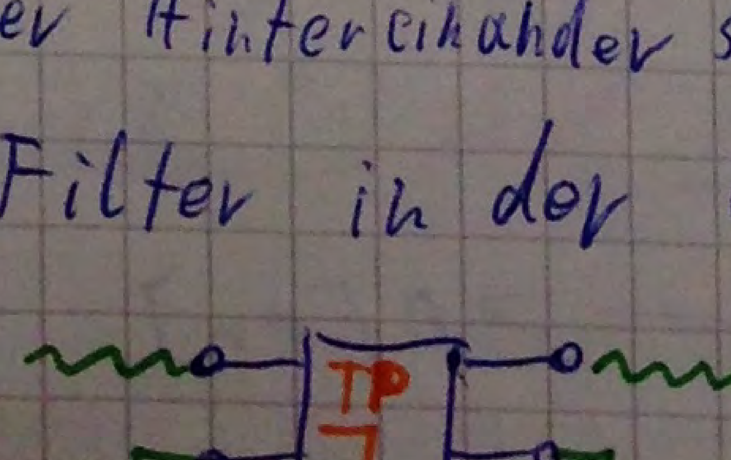
Nacheinander Schaltung nennt sich Kaskadierung

Filter 3. Ordnung (third order filter)

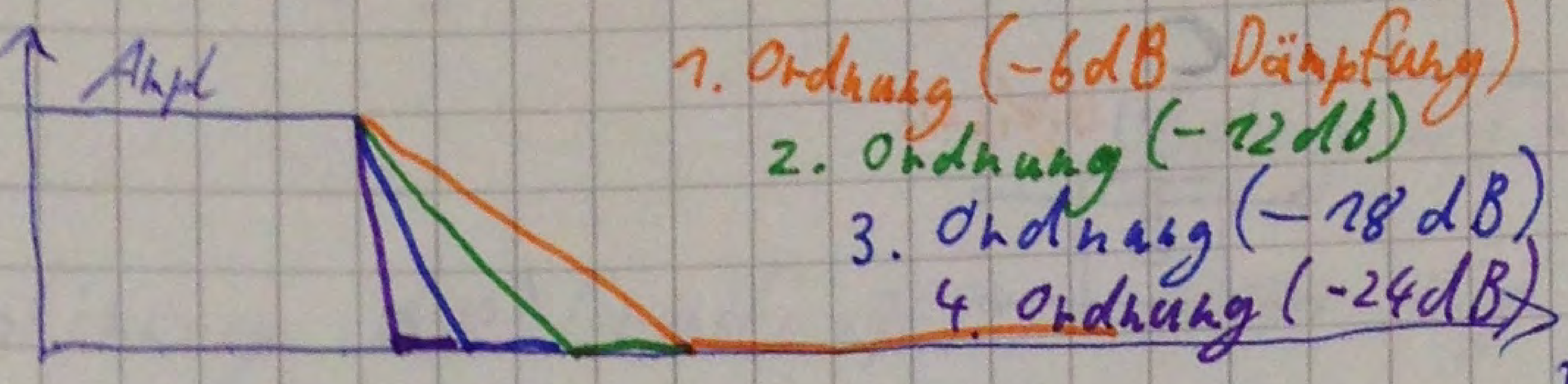


...

Unter der Ordnung eines Filters versteht man die Anzahl der Hintereinander schaltungen. Also: wie oft ist der Filter in der Gesammtschaltung vorhanden.



Nutzen der Hintereinanderschaltungen



Je höher die Ordnung, desto steiler geht die Überfunktion gegen Null, desto besser werden hohe Freq. übertragen

Die Dämpfung gibt die Steilheit in dB an (Bezugsgröße ist der Pegel des Durchlassbands)

Unterscheidung zw.

P und U, I

P	U, I
Dämpfung L	Dämpfung L
$L = 10 \log \frac{P}{P_{ref}}$	$L = 20 \cdot \log \frac{U}{U_{ref}}$
dezi	
wo kommt 20 her	

Begründung: $\left.\begin{array}{l} P = U \cdot I \\ U = R \cdot I \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{U^2}{R}$

einsetzen: $L = 10 \cdot \log \frac{\frac{U^2}{\cancel{R}}}{\frac{U_{ref}^2}{\cancel{R}}} = 10 \cdot \log \frac{U^2}{U_{ref}^2} = 10 \cdot \log \left(\frac{U}{U_{ref}}\right)^2 = 20 \cdot \log \frac{U}{U_{ref}}$

die Hintereinanderschaltung heißt: Kaskadierung (Filter Kaskade)

wie baut man einen Filter? welche Bauelemente gibt es?

=> 2 Möglichkeiten: Kondensator / Spule, Induktivität

L	C
$X_L = j\omega L$, wechselsignal ω	$X_C = \frac{1}{j\omega C}$, ω
$\omega = \emptyset \Rightarrow X_L = \emptyset$	$\omega = \emptyset \Rightarrow X_C \to \infty$
Gleichsignal -> kein Widerstand	Gleichsignal -> ∞ großen Widerstand
$\omega \to \infty \Rightarrow X_L \to \infty$	$\omega \to \infty \Rightarrow X_L \to \emptyset$
bei sehr hohen Freq. produziert eine Spule einen ∞ großen Widerstand	bei sehr hohen Freq. macht ein Kondensator keinen Widerstand

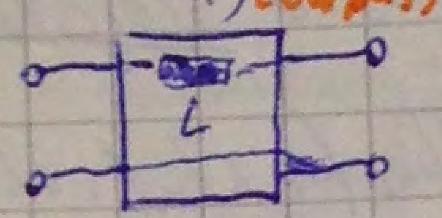
entgegen gesetztes Verhalten!

C und L sind Frequenzabhängige Widerstände

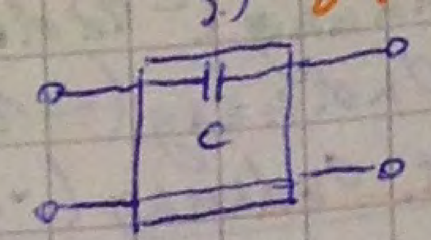
Einsatz von L und C

L **C**

1.) Lowpass

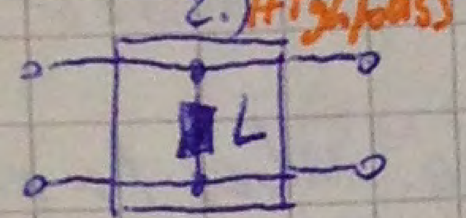


3) Highpass

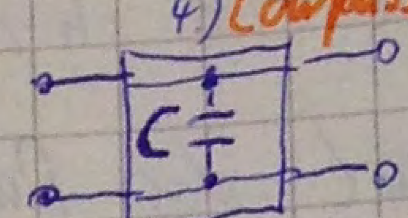


Reihe

2.) Highpass



4.) Lowpass



Parallel

4 Möglichkeiten L und C (alleine) anzuschließen.

1.) $\omega = \emptyset \Rightarrow X_L = \emptyset$
$\omega \to \infty \Rightarrow X_L \to \infty$
} Tiefpass „Hoch dämpf" — Lowpass, HighCut } Verhalten

2.) $\omega = \emptyset \Rightarrow X_L = \emptyset$ (Kurzschluß)
$\omega \to \infty \Rightarrow X_L \to \infty$ Hochpass
Lowcut, High pass } Verhalten

3.) $\omega = \emptyset \Rightarrow X_C \to \infty$ Low Cut
$\omega \to \infty \Rightarrow X_C \to \emptyset$ Highpass
} Verhalten

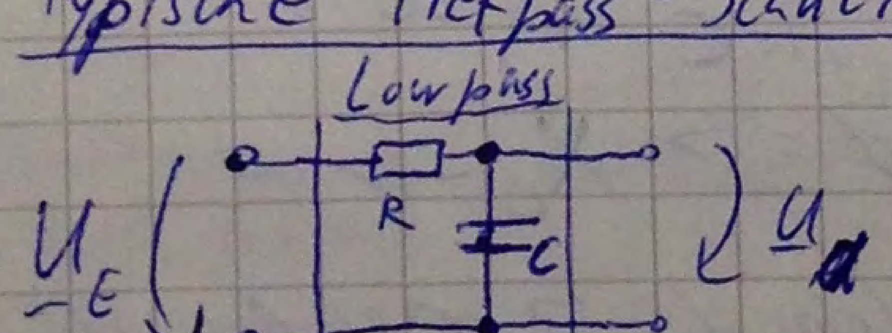
4.) $\omega = \emptyset \Rightarrow X_C \to \infty$ Lowpass
$\omega \to \infty \Rightarrow X_C = 0$ HighCut
} Verhalten

sowohl aus L, als auch C kann man Lowpass oder Higpass filter bauen

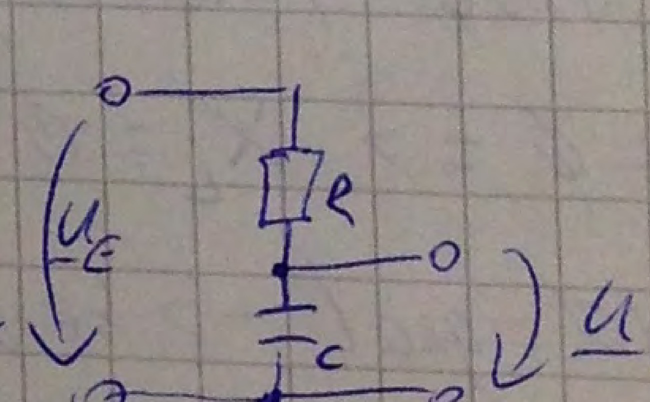
Auswahl erfolgt anhand Parameter: – Baugröße, Bauform
– Leistungsumsetzung, Stromstärke
– Preis

Typische Tiefpass-Schaltung RC-Glied

Lowpass



eigentlich ist das ein Spannungsteiler



die Übertragungsfunktion des frequenzabh. Spgs-teilers lautet:

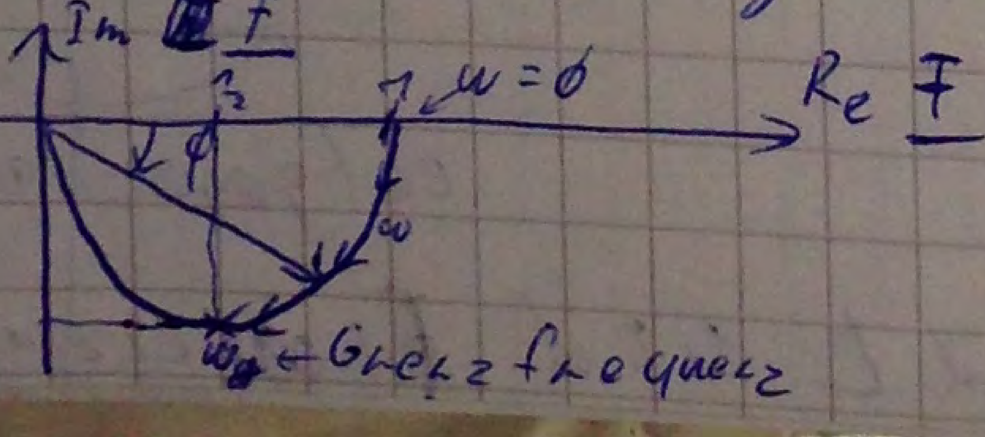
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$\leftarrow \underline{U}_A$ fällt nur am C ab

$\leftarrow \underline{U}_E$ fällt an der Reihenschaltung von R und C ab

$$\dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C}}$$ } Filter 1. Ordnung

Ortskurve:



Amplitudengang: $|\underline{F}(j\omega)| = \left|\frac{1}{j\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}$;

Betrag $= \sqrt{Re^2 + Im^2}$

Bestimmung der Grenzfrequenz ~~wge~~ ω_g:

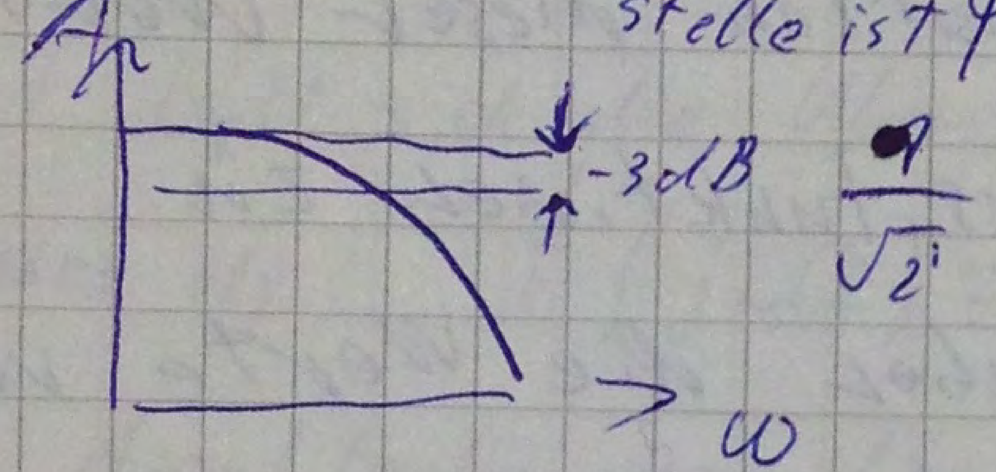
$$F(\omega_g) = \underbrace{\frac{F_{max}}{\sqrt{2}}}_{def.} = \frac{1}{\sqrt{2}} =: \frac{1}{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}$$

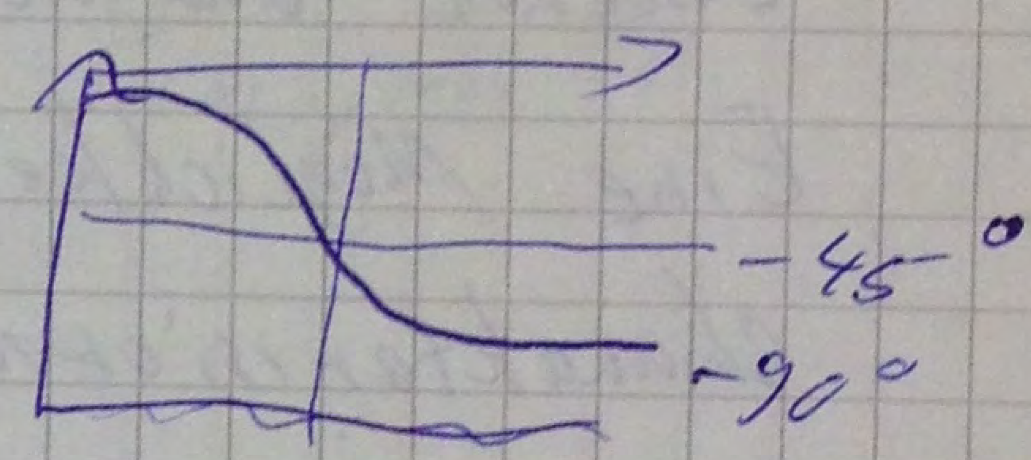
$$2 = 1^2 + (\omega RC)^2$$

die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$(\omega RC)^2 = 1 \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC}$$

an dieser stelle ist $\varphi = -45°$





Tiefpass - Schaltung

Zur verarbeitung analoger Signale.

Interessant an (Tiefpass-) Filtern ist ihre Charakteristik. In Abhängigkeit von R und C entstehen viele Möglichkeiten, wie die Übertragungsfunktion aussehen kann.

⚠ Es gibt für R und C (auch L) nur definierte Werte zu kaufen. => "E-Reihe" E12, E24, E96...

z.B. 10; 11; 22; 33; 47; 63; 82; 100 ... Ω kΩ nF pF nH µH

=> die Menge an RC-Tiefpass-Schaltung setzt sich zusammen aus der Kombination dieser Werte.

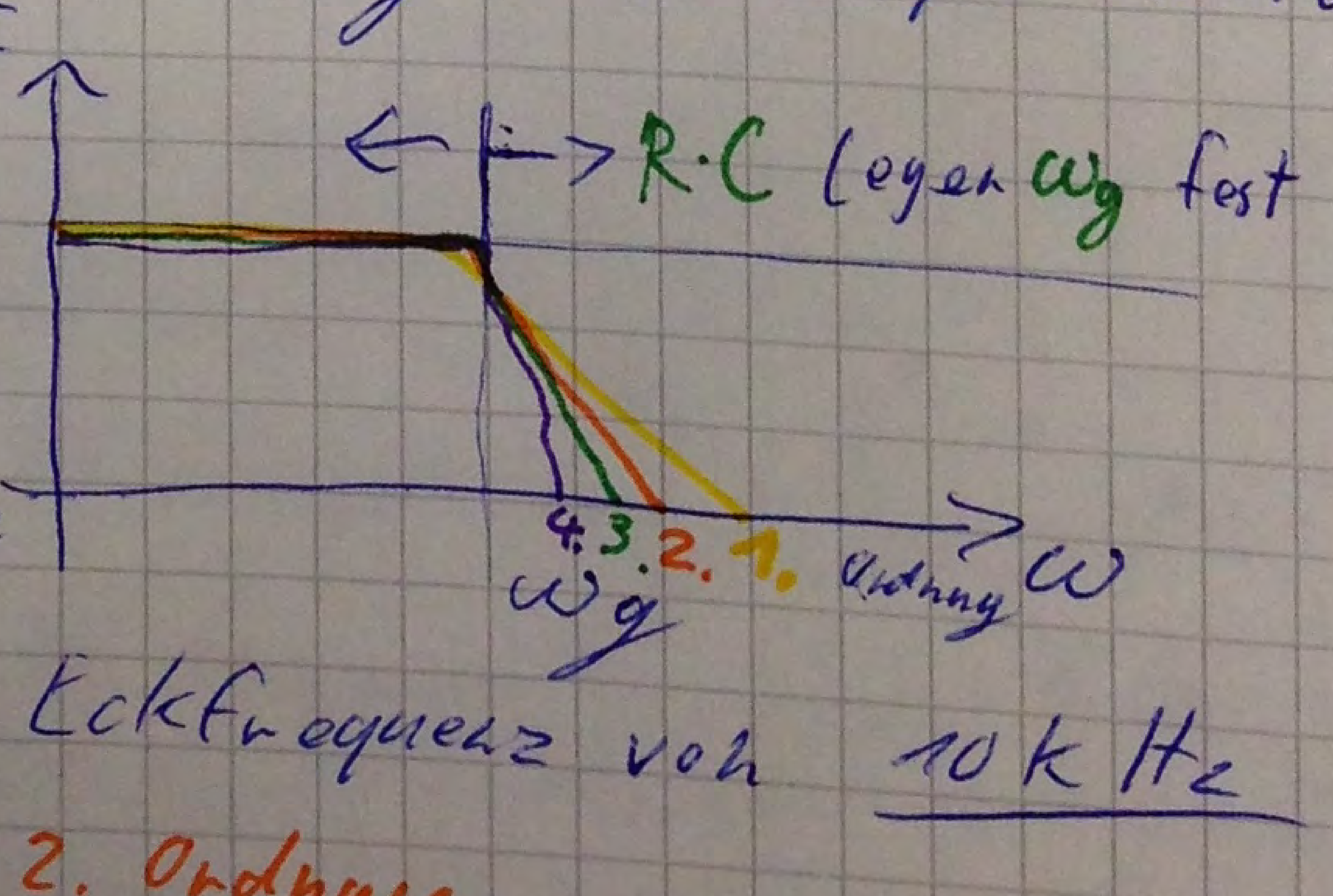
Eine Möglichkeit Tiefpassfunktionen zu charakterisieren eine über die Werte von R und C: Tiefpass 10 kΩ u. 100 nF

weil man sich darunter nichts vorstellen kann, verwendet man eine andere Darstellung: Interessant bei Filtern ist der Punkt, an dem man „hört", das er arbeitet (wegfiltert)

Man nimmt den Punkt an dem der Wert der Ü-funktion auf $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$ abgesunken ist.

$F_{\omega_g} = F_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ mit ω_g = Eckfrequ. d. Filters

Ordnung des Filters macht eine Aussage über die Steilheit der Flanke



=> der Filter hat eine Eckfrequenz von 10 kHz und ist ein Filter 2. Ordnung.

Alle Filter werden auf diese Weise beschrieben!

Wie wird $\underline{\omega_g}$ ausgerechnet?

Schaltung

$$F_{\omega g} = F_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \Rightarrow 2 = 1 + (\omega RC)^2$$

Definition

$$1^2 = \underbrace{(\omega RC)^2}_{1} \Rightarrow \omega RC = 1 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_g = \frac{1}{RC}}$$

daraus berechnet $\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}}$

<u>Nun:</u> allgemein gültige Darstellung von TP-Filtern (unabhängig von R und C)

<u>Normierung:</u> Ω "Omega" $= \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$ ohne [Einheit] $[\emptyset; \infty[$

Damit läßt sich die Übertragungsfkt. eines jeden TP schreiben als: $F(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}$

Der Amplitudengang lautet

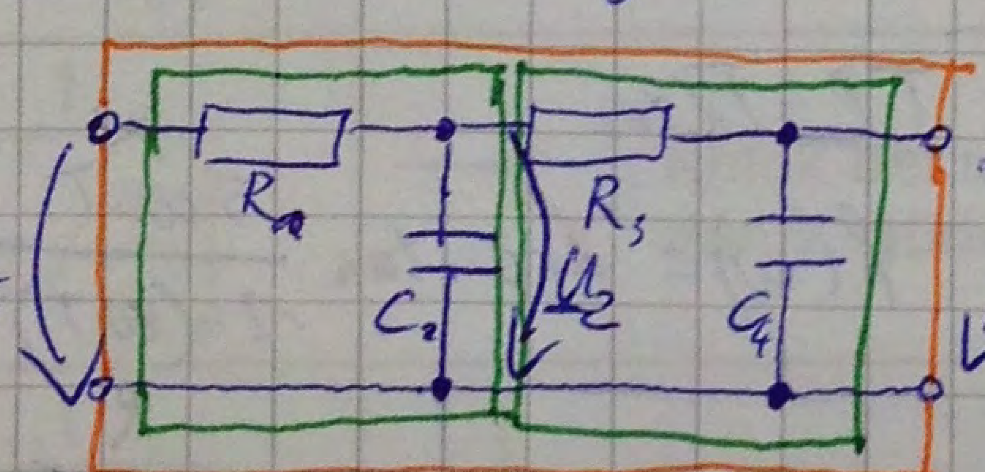
$$F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$$

und der Phasengang lautet

$$\varphi(\Omega) = -\arctan(\Omega)$$

Es folgen Beispiele zum Üben der Normierung

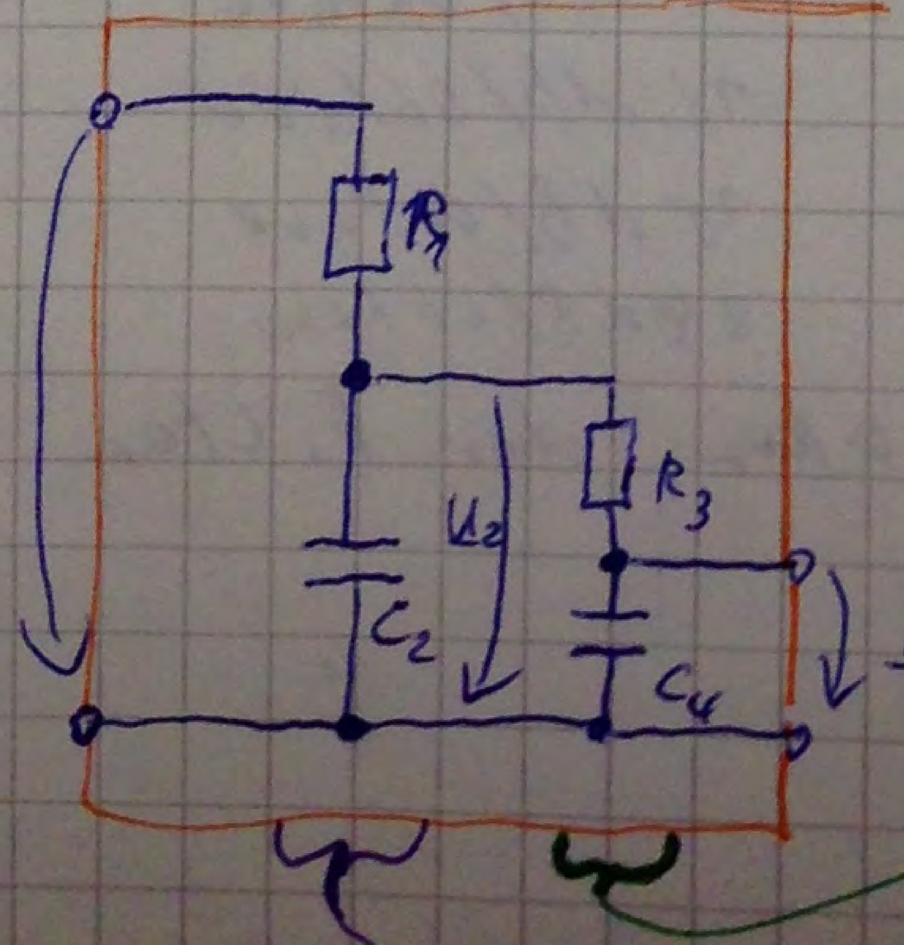
<u>Beispiel:</u> 2. Ordnung Tiefpass Filter



Zur Vereinfachung: $R_1 = R_3$ und $C_2 = C_4$

die Schaltung entspricht einem 2-stufigen Spannungsteiler (GET)

Anders gezeichnet:



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = \underbrace{\frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_2}}\cdot\underbrace{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_E(j\omega)}}$$

Dargestellt mit Hilfe komplexer Widerstände:

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{\underline{Z}_{C_4}}{R_3+\underline{Z}_{C_4}} \cdot \frac{\underline{Z}_{C_2} \,||\, (R_3+\underline{Z}_{C_4})}{R_1 + \underline{Z}_{C_2} \,||\, (R_3+\underline{Z}_{C_4})}$$ = Rs und Cs einsetzen = $R_1 = R_3$, $C_2 = C_4$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{R}{\underline{Z}_C}\right)^2 + 3\left(\frac{R}{\underline{Z}_C}\right)} \overset{\underline{Z}_C \text{ eingesetzt}}{=} \frac{1}{1+(j\omega RC)^2+3j\omega RC}$$ = ersetze RC durch T

$$= \frac{1}{1+(\omega T)^2+3\omega T};$$

Mit dieser Formel läßt sich $\underline{Z}_{ges}$ für alle R's und C's berechnen!

Idee: mit einer Rechenformel eine ganze Familie von TP-Filtern charakterisieren.

An so einer Formel erkennt man: $$\frac{1}{-(\omega T)^2+3j\omega T+1}$$ } HP-Anteil } TP-Anteil

höchste Potenz legt die Ordnung fest

hier: Filter 2. Ordnung

Amplitudengang für unser Bsp.:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(-(\omega T)^2+1)^2}_{Re^2 \text{ ohne } j} + \underbrace{(3\omega T)^2}_{Im^2 \text{ mit } j}}}$$

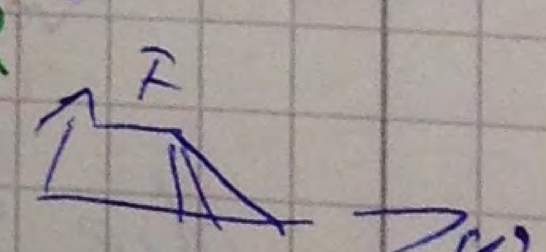
Test: $F(\omega \to \infty) \Rightarrow \frac{1}{\to\infty} = \emptyset$ ← hohe Freq. werden gelöscht.

$F(\omega = \emptyset) = \frac{1}{1} = \underline{1}$ ← tiefe Freq. können passieren!

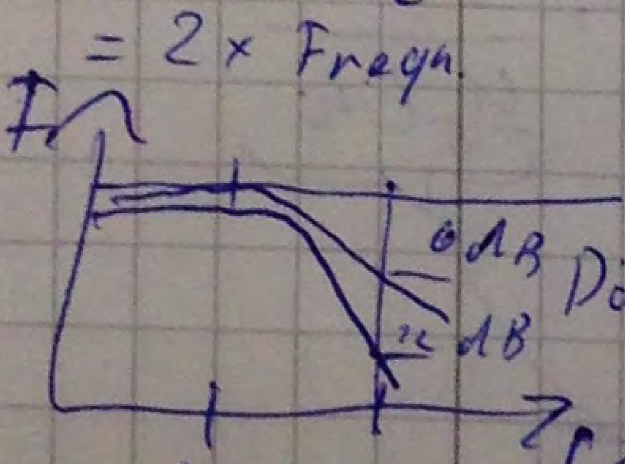
auch rechnerisch ist es ein TP-Filter

Nun den Phasengang berechnen: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\overset{X}{3\omega T}}{\underset{R}{1-(\omega T)^2}}$

Merke: Die Steilheit der Flanke des TP-Filters ist abhängig von seiner Ordnung.



1 Oktave = 2 × Frequ.



Filter				
1.	Ordnung	besitzt	6 dB/Oktave	Flankensteilheit
2.	"	"	12 dB/Oktave	"
3.	"	"	18 dB/Oktave	"
4.	"	"	24 dB/Oktave	"

→ Je höher die Ordnung, desto stärker der Filter abfällt

Grundelemente der Bode Diagramme

Übertragungs-funktion $H(j\omega)$	**Amplituden-Frequenzgang** $\lvert H(j\omega)\rvert$ in dB	**Phasen-Frequenzgang** $\angle(H(j\omega))$
A (konstante)	$20 \cdot \log\lvert A\rvert$	$\begin{cases} \pi & \text{falls } A<0 \\ 0 & \text{falls } A>0 \end{cases}$
$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	+20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$\dfrac{\pi}{2}$
$-j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	+20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$-\dfrac{\pi}{2}$
$j\dfrac{\omega_0}{\omega}$	-20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$\dfrac{\pi}{2}$
$-j\dfrac{\omega_0}{\omega}$	-20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	$+\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\left(1-j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	$-\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$	Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	$-\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\dfrac{1}{\left(1-j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$	Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	$+\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden

Aufgabe 1

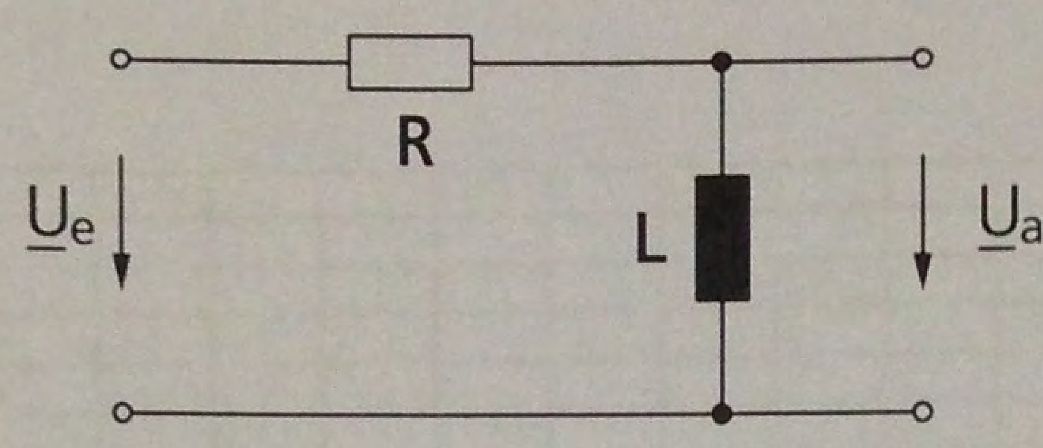


Bild 1

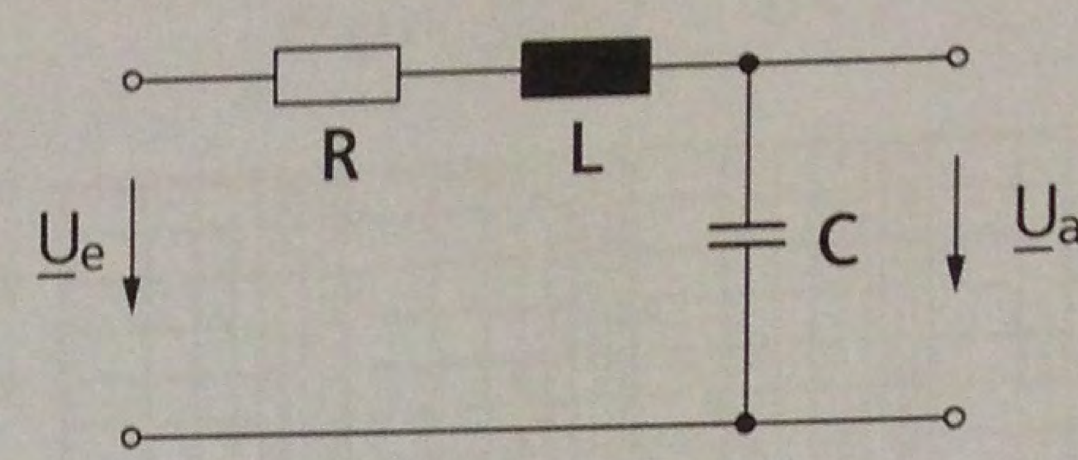


Bild 2

Es gelten folgende Zahlenwerte: $\frac{R}{L} = 1\frac{1}{s}$ und $\frac{4}{LC} = 0{,}75\frac{1}{s^2}$

Bestimmen Sie:

a.) zu beiden Netzwerken die Frequenzgangsfunktion $F(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$

b.) zu beiden Netzwerken den Verlauf des Bode-Diagramms der Amplituden und Phasen
Normieren Sie bei Bild 1 die Frequenz ω mit $\omega_n = \frac{R}{L}$

Normieren Sie bei Bild 2 die kleinste vorkommende Eckfrequenz ω_e.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Frequenzgangfunktion $F(j\omega) = \dfrac{j\omega + 5}{-\omega^2 + 11j\omega + 10}$

a.) bringen Sie die Frequenzgangfunktion auf eine geeignete Form, welche die Konstruktion eines Bode-Diagramms erlaubt.

b.) normieren Sie die Frequenzgangfunktion auf den Wert der kleinsten, vorkommenden Eckfrequenz.

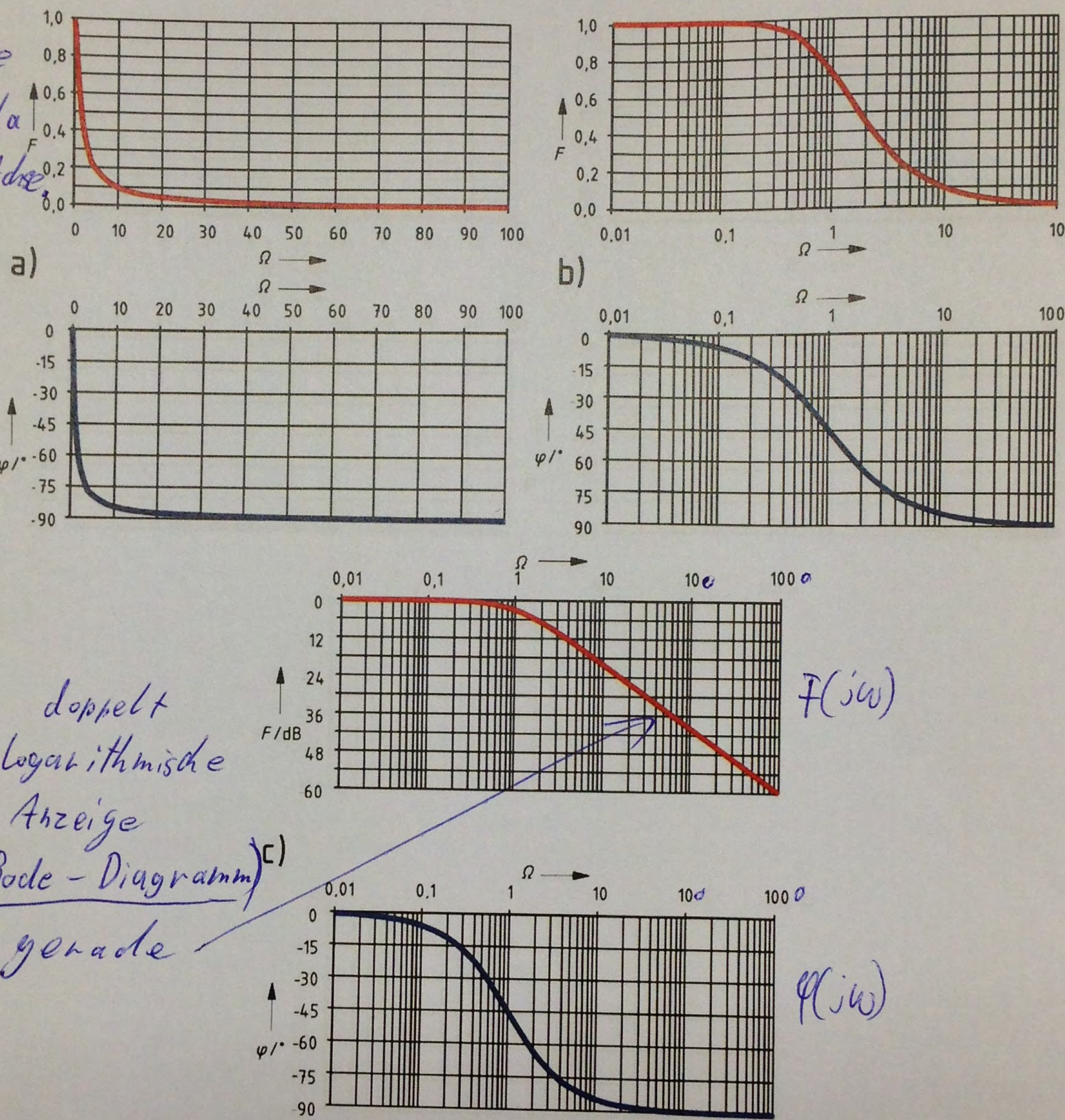
c.) Skizzieren Sie den Verlauf des Bode-Diagramms der Amplitude und der Phase.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in der Praxis das <u>Bode-Diagramm</u> verwendet

Elementarer Tiefpass

gemischt logarithmisch

zeigt eine lineare Skala auf X- und Y-Achse



F(jω)

φ(jω)

F(jω)

doppelt logarithmische Anzeige (Bode-Diagramm)

gerade

φ(jω)

Bild : Amplituden- und Phasengang der Schaltung als Funktion der auf die Grenzfrequenz normierten Frequenz Ω bei linear geteilten Achsen (a), logarithmisch geteilter normierter Frequenzachse (b) sowie als Bode-Diagramm mit Pegelangaben (c)

a), b) und c) zeigen jeweils das Übertragungsverhalten eines TP-Filters 1. Ordnung, allerdings mit unterschiedlichen Skalen (= Einteilung bei X- und Y-Achse)

(Lineare Skalen = schwer abzulesen)

Zweistufiger Tiefpass

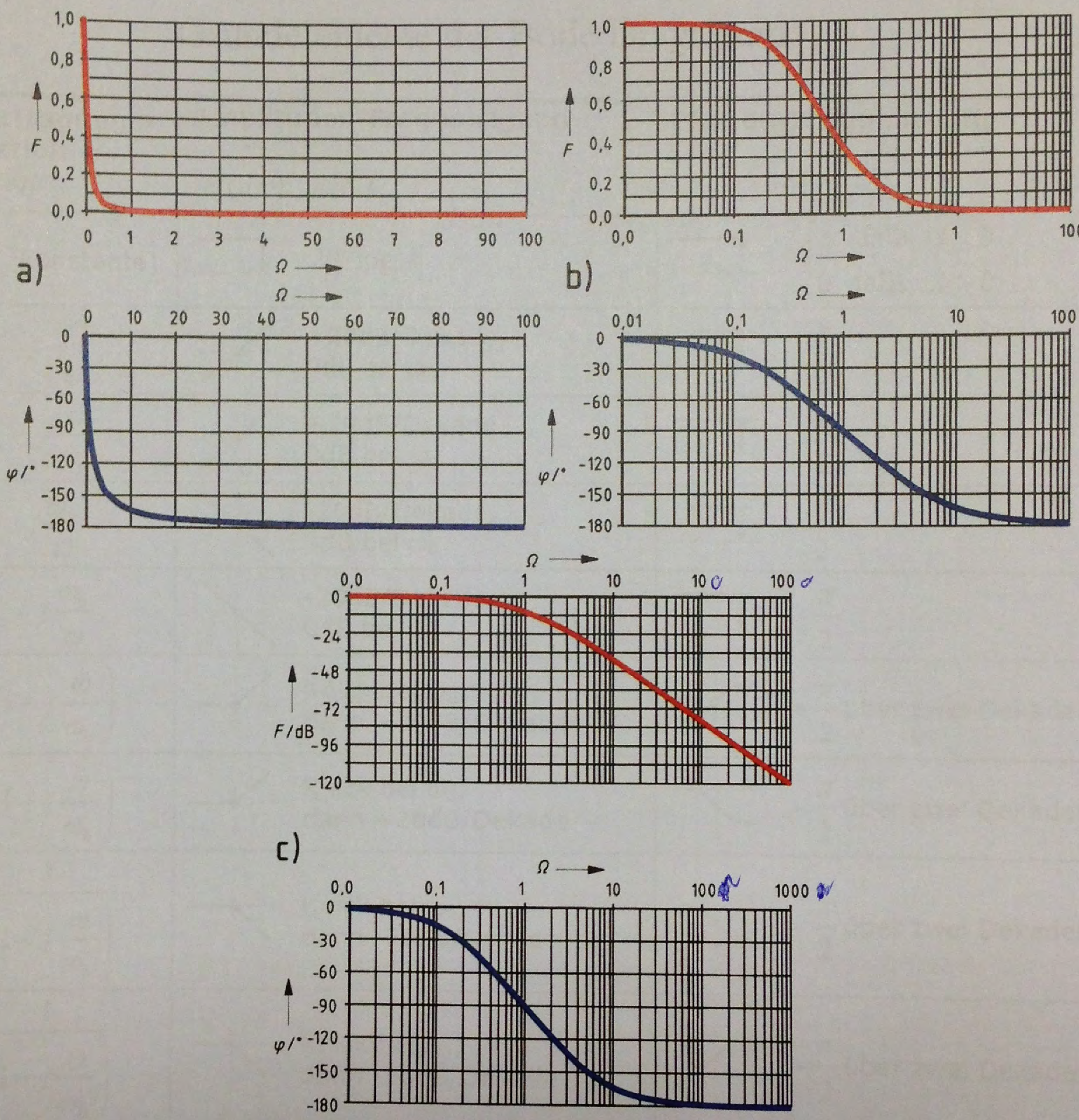
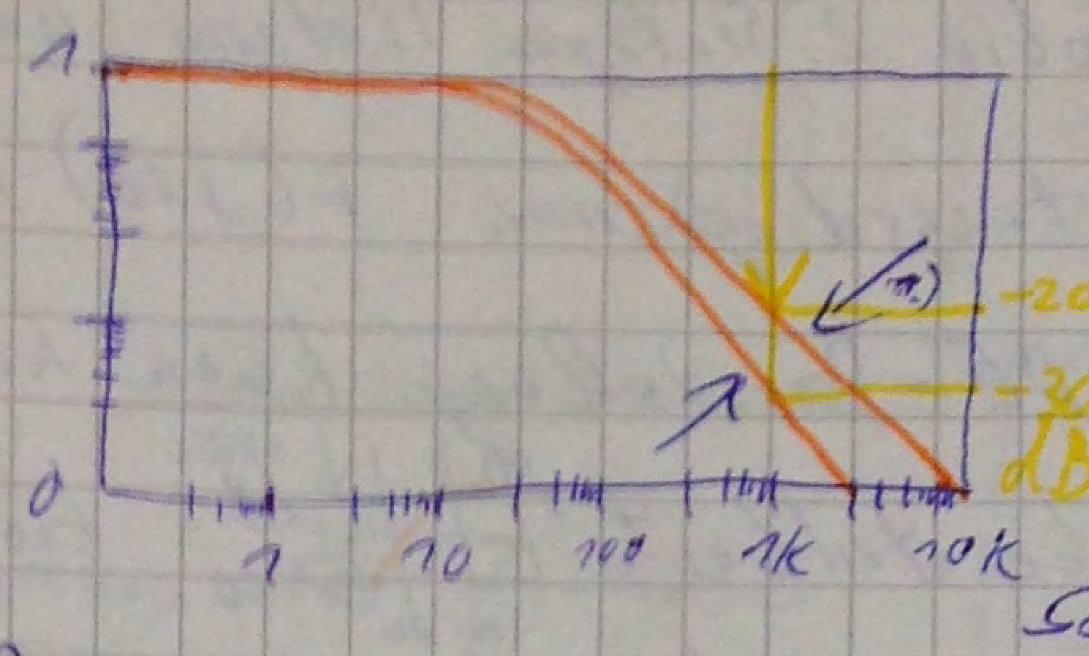


Bild: Amplituden- und Phasengang der Schaltung als Funktion der normierten Frequenz Ω bei linear geteilten Achsen (a), logarithmisch geteilter normierter Frequenzachse (b) sowie als Bode-Diagramm mit Pegelangaben (c)

Grundelemente der Bode Diagramme

Übertragungs-funktion $H(j\omega)$	**Amplituden-Frequenzgang** $\lvert H(j\omega)\rvert$ in dB	**Phasen-Frequenzgang** $\angle(H(j\omega))$
A (konstante)	$20 \cdot \log\lvert A\rvert$	$\begin{cases} \pi & \text{falls } A<0 \\ 0 & \text{falls } A>0 \end{cases}$
$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	+20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$\dfrac{\pi}{2}$
$-j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	+20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$-\dfrac{\pi}{2}$
$j\dfrac{\omega_0}{\omega}$	-20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$\dfrac{\pi}{2}$
$-j\dfrac{\omega_0}{\omega}$	-20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	$+\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\left(1-j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	$-\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$	Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	$-\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\dfrac{1}{\left(1-j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$	Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	$+\dfrac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden

Bode - Diagramm:



1.) Flankensteilheit eines Filters, zu jedem Punkt auf der x-Achse (d.h. zu jeder Frequenz Ω) zeigt die Kurve die Dämpfung an. Diese wird in dB angegeben. Weil die Amplitude der Freq. verkleinert (bedämpft) wird, ergeben sich negative dB Werte

Eckfreq. Ω_g wird an dem Punkt abgelesen, an dem $F(j\omega) = -3\,dB$ beträgt.

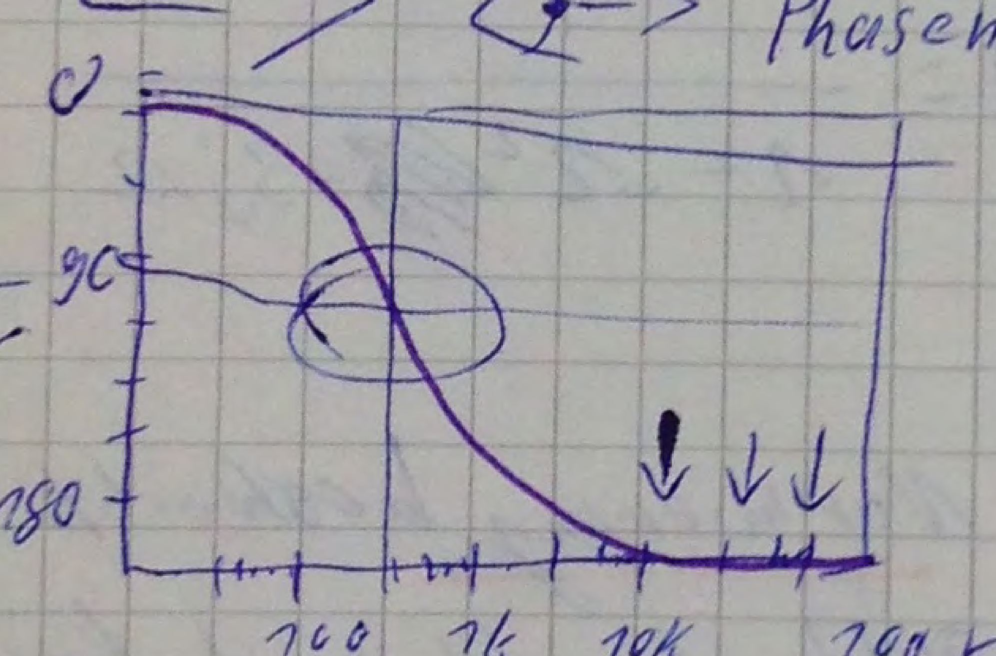
Tiefpass 2. Ordnung: $\leftrightarrow \omega^2$

Amplitudengang: $\dfrac{1}{\sqrt{(1-(\omega T)^2)^2 + (3\omega T)^2}}$

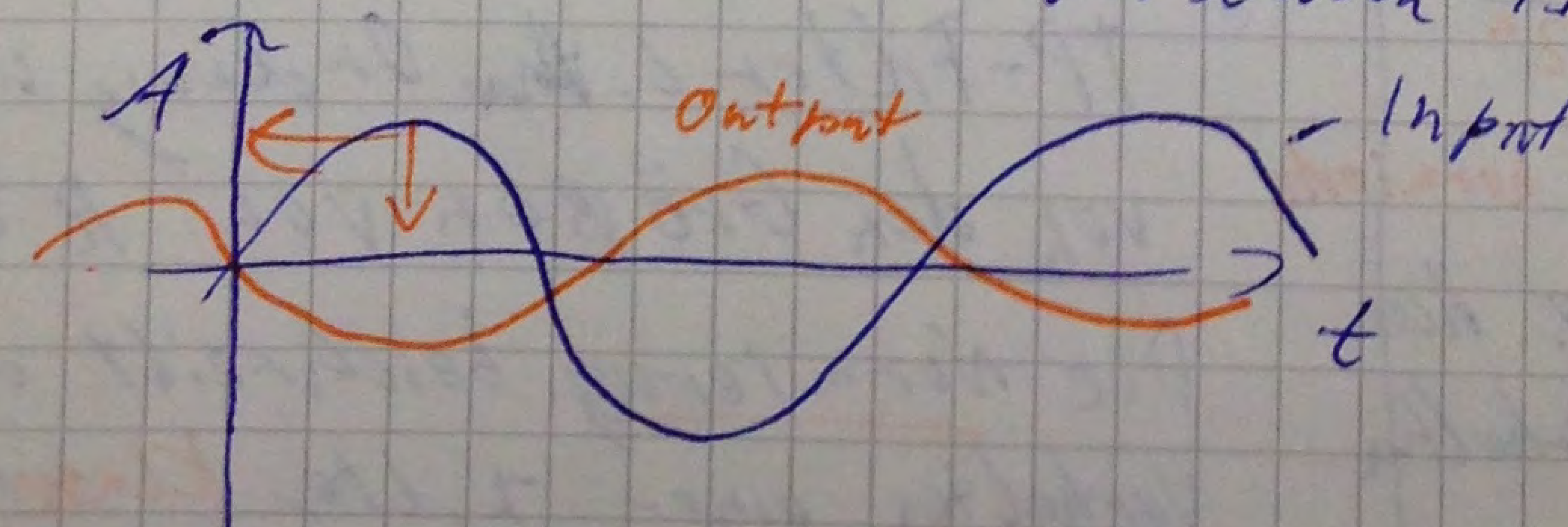
Die höchste Potenz von ω definiert die Ordnung des Filters,

Phasengang: $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{3\,\omega T}{1-(\omega T)^2}\right)$

$\rightarrow$ Phasendiagramm



Das Phasendiagramm zeigt an, um wieviel Grad das Ausgangssignal zum Eingangssignal verschoben ist.



Dort, wo die Dämpfung des Filters am größten ist, ist die Phasenverschiebung maximal 180°.

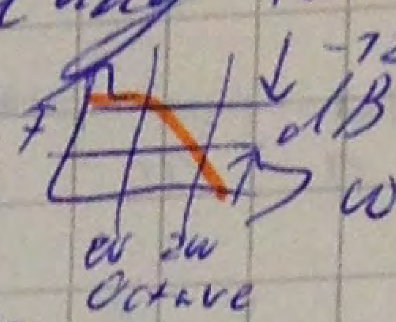
Um die Eckfrequenz ω_g eines Filters 1. Ordnung zu finden, suche den Punkt, wo die Phasenverschiebung 90° ist.

Wo ist $\varphi(\omega) = -90°$?

$$\omega_{-90°} = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$$

hier gilt: $Z_R = Z_C$

⚠ -> Folie 2. Stufiger Tiefpass aus dem Betragsdiagramm $F(j\omega)$ in der BODE-Darstellung kann man ablesen: die Flankensteilheit



beträgt $-12\,dB$ pro Oktave

Zur Vorstellung: $-12\,dB \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{4}$ des Originals

Merke

		Dämpfung in dB/Oktave
Tiefpassfilter	1. Ordnung	$-6\,dB$
	2. Ordnung	$-12\,dB$
	3. Ordnung	$-18\,dB$
	4. Ordnung	$-24\,dB$

2. Stufiger TP in normierter Form

nicht normiert:

Amplitudengang $$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega T)^2)^2 + (3\omega T)^2}}$$

normiert:

$$F(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (3\Omega)^2}}$$

setze $\Omega = \omega T$ ← (angegeben)

Übertragungsfunktion $$F(j\omega) = \frac{1}{1-(\omega T)^2 + (3j\omega T)^2}$$

ω enthält Freq. | T enthält R und C

$$F(j\Omega) = \frac{1}{1-\Omega^2 + 3j\Omega}$$

Normierter Phasengang

$$\varphi(\Omega) = -\arctan\frac{3\Omega}{1-\Omega^2}$$

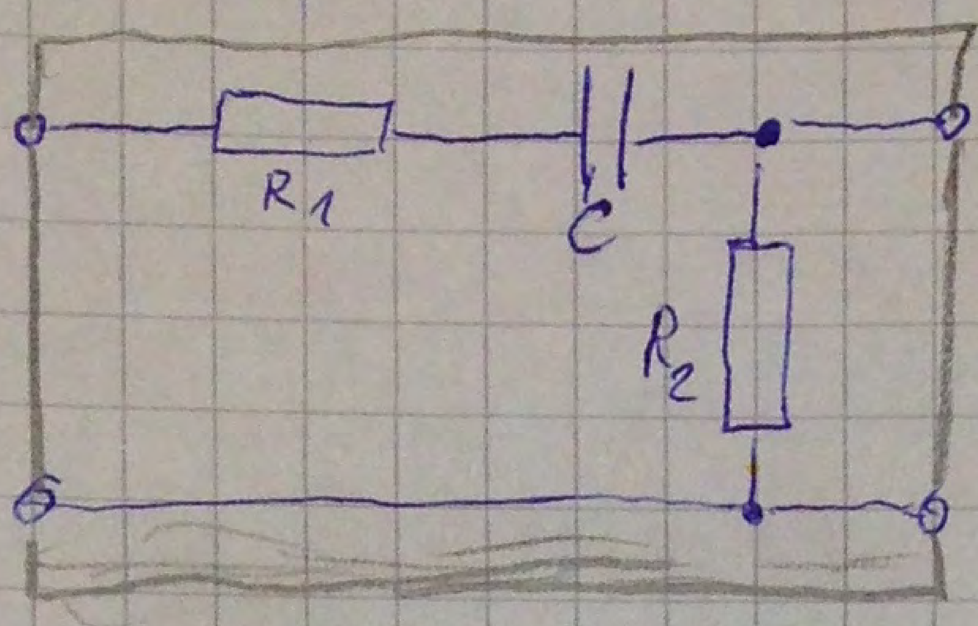
auch hier sagt die normierte Darstellung aus, wie das prinzipielle Phasenverhalten dieses Filtertyps aussieht.

=> Die Normierung beschreibt die Filtercharakteristik für TP-Filter 2. Ordnung unabhängig von den Größen von R und C

Die Normierung beschreibt das Verhalten einer Filter Klasse!

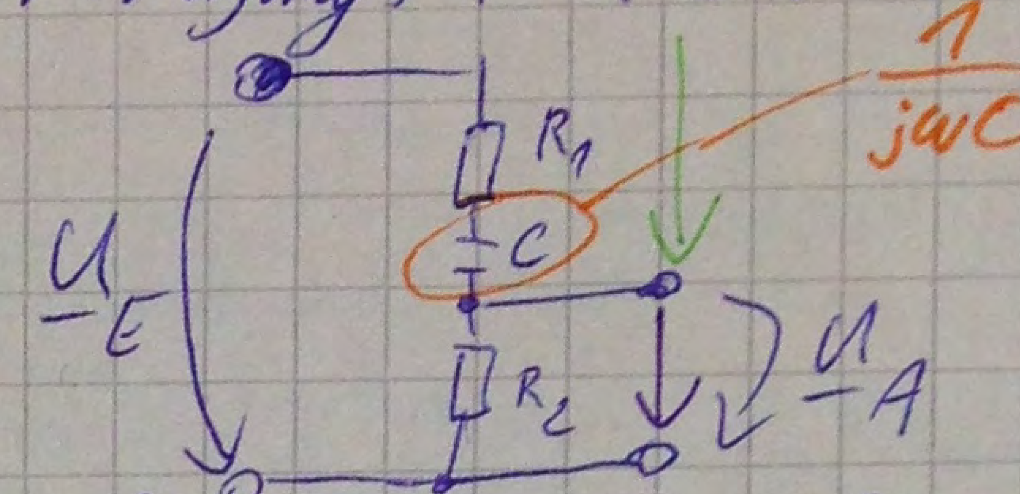
Die exakte Kurve erhält man, wenn man R (in Ohm) und C (in Farad) einsetzt.

neuer Filter:



$R_1 = R_2 =: R$

Übertragungsfkt. berechnen:



$$F(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \Omega$$

$$= \frac{R}{\underbrace{R+R}_{2R} + \frac{1}{j\omega C}} \overset{\cdot j\omega C / \cdot j\omega C}{=} \frac{j\omega C R}{2\,\underbrace{j\omega C R}_{\Omega} + 1}$$

Ordnung des Filters?

$\Omega \to \omega^1 \Rightarrow$ Filter 1. Ordnung

Normierung: setze $\Omega = 2\omega RC$

$$\boxed{F(j\Omega) = \frac{0{,}5\, j\Omega}{j\Omega + 1} = \frac{1}{2}\,\frac{j\Omega}{1 + j\Omega}}$$