Optimalizace (B0B33OPT)

4. domácí úloha - NLLS Kružnice

Martin Turyna

1 První úkol

Funkce f je diferencovatelná, pokud platí podmínka

$$\forall a | a \neq x.$$

Pokud bychom vybrali jako střed kružnice některých z bodů $a_1, ..., a_m$, tak bychom při parciální derivaci narazili na problém dělení nulou, což není definovaná operace. Viz. Jakobiho matice:

$$\begin{bmatrix} \frac{x - a_1}{\|x - a_1\|} & -1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{x - a_m}{\|x - a_m\|} & -1 \end{bmatrix}$$

2 Druhý úkol

Nevadí to, protože pokud bychom podmínku $r \geq 0$ vypustili a vzali v úvahu záporné r, tak by algoritmus na nelineární nejmenší čtverce nedošel k optimálnímu řešení. Optimální řešení je totiž takové řešení, pro které je suma kvadrátů co nejmenší. Pokud bychom však r, měli záporné, tak by hodnota $(\|x - a_i\| - r)^2$ byla větší, protože by se obě složky sečetli.

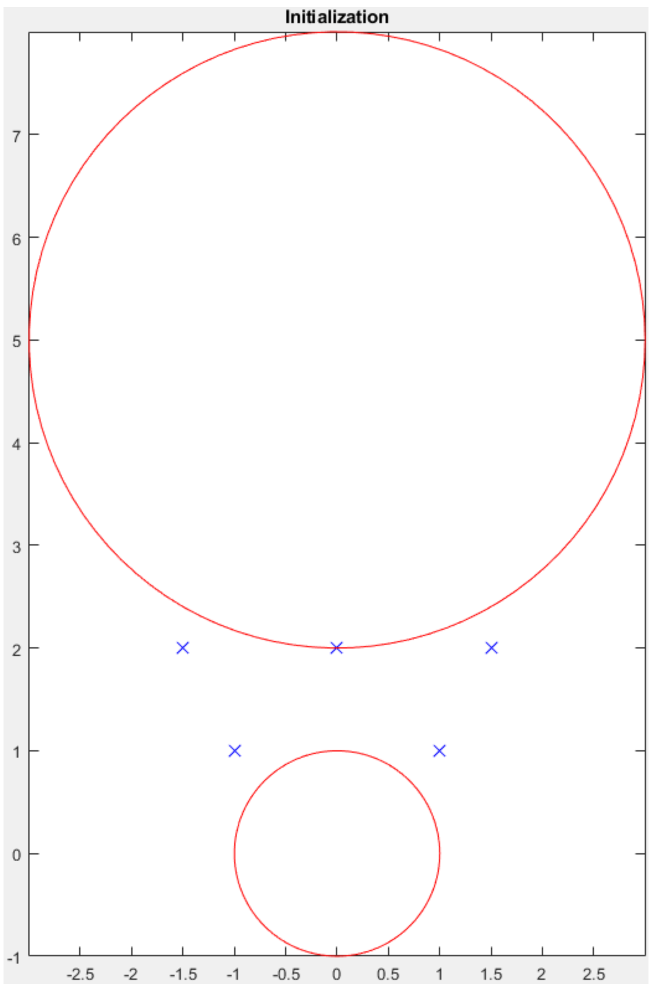
3 Třetí úkol

Ano, funkce f může mít více lokálních minim s různými funkčními hodnotami. Pro tento příklad jsem zvolil následující body:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1.5 & 2 \\ 1.5 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A počátení stavy kružnic:

$$x_1 = (0, 0, 1)$$
$$x_2 = (0, 5, 3)$$



Obrázek 1 - Inicialní stav

Dále počítáme s předpokladem pro iterační algoritmy, že platí $x_{k+1} < x_k$, a tedy pokud nám algortimus (v našem případě Gauss-Newtonova metoda) zkonverguje do stacionárního bodu, lze téměř s jistotou říci, že se jedná o lokální minimum a netřeba tedy ověřovat definitnost Hessiánu.

Dosáhnutá minima jsou tedy

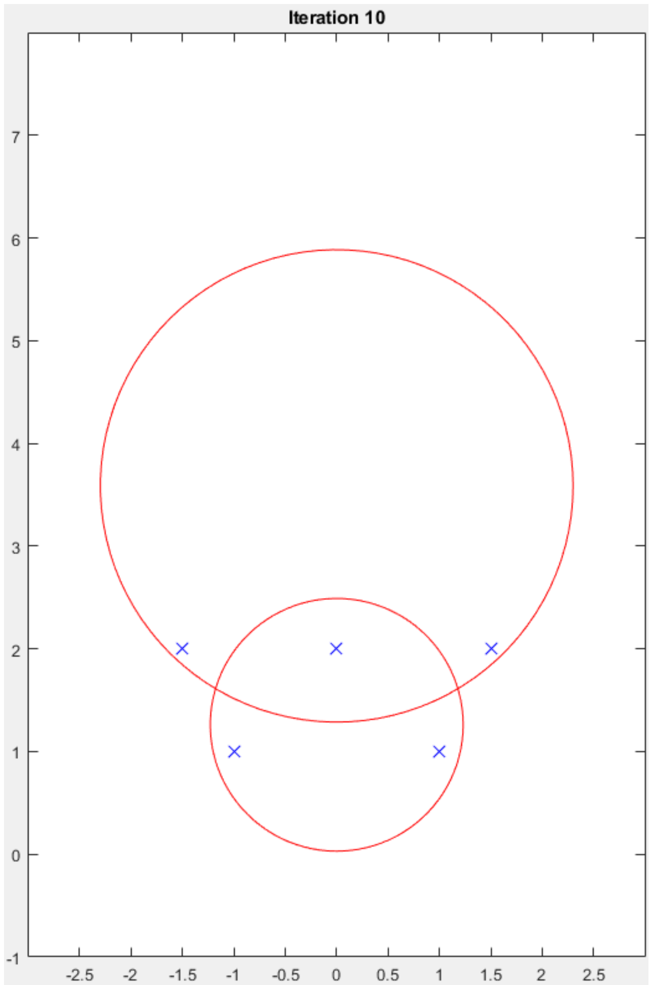
$$x_1 = (0, 1.2602, 1.2303)$$
$$x_2 = (0, 3.5860, 2.2994).$$

Funkční hodnoty bodů v minimech jsou

$$f(x_1) = (-0.1970, -0.1970, 0.4422, 0.4422, -0.4905)$$
$$f(x_2) = (0.4732, 0.4732, -0.1165, -0.1165, -0.7134).$$

Gradienty v bodech jsou

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 0.9678 & -0.9678 & 0.8968 & -0.8968 & 0.0000 \\ 0.2518 & 0.2518 & -0.4424 & -0.4424 & -1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$
$$\nabla f(x_2) = \begin{bmatrix} 0.3607 & -0.3607 & 0.6871 & -0.6871 & 0.0000 \\ 0.9327 & 0.9327 & 0.7265 & 0.7265 & 1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$



Obrázek 2 - 10. iterace