MATEMÁTICA
DISEÑO GRÁFICO Y DISEÑO INDUSTRIAL

Facultad de Arquitectura Urbanismo y Diseño

Ciclo 2024 | San Juan, Argentina

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES AÑO 2024

Contenidos		Modalidad	MARZO			ABRIL				MAYO					JUNIO				JULIO	AGOSTO				SEPTIEMBRE				OCTUBRE					NOV.
			14	21	28	4	11	18	25	2	9	16	23	30	6	13	20	27	-	8	15	22	29	5	12	19	26	3	10	17	24	31	7
Presentación. Conjuntos. Desigualdades. Programación lineal		Presencial / Virtual																															
Conjuntos. Desigualdades. Programación lineal		Presencial																															
Semana Santa		-																															
Programación lineal		Presencial																															
Funciones. Rectas en el plano		Virtual																															
Funciones		Presencial																															
Rectas en el plano	Repaso	Presencial																															
Parcial 1		Presencial																															
Escala. Número de Oro. Transformaciones en el plano	Recuperación Parcial 1	Virtual / Presencial																															
Escala. Número de Oro. Transformaciones en el plano		Presencial																															
Transformaciones en el plano	Repaso	Presencial																															
Parcial 2		Presencial																															
Recuperación Parcial 2		Presencial																															
Día de la Fundación de San Juan		-																															
Día de la Bandera en homenaje a Manuel Belgrano		-																															
Puesta al día: Recuperación estraordinaria del Parcial 1 o Parcial 2	Entrega de carpetas	Presencial																															
Receso de invierno		-																															
Parábola. Elipse. Circunferencia. Hipérbola		Virtual																															
Parábola. Elipse. Circunferencia		Presencial																															
Hipérbola	Repaso	Presencial																															
Parcial 3		Presencial																															
Introducción a las cuádricas. Todas las superficies	Recuperación Parcial 3	Virtual / Presencial																															
Paraboloide. Elipsoide. Esfera		Presencial																															
Cono recto. Hiperboloide de una hoja. Hiperboloide de dos hojas		Presencial																															
Cilindros. Superficies trasladadas.	Repaso	Presencial																															
Parcial 4	Presentación del TP	Presencial / Virtual																															
Día de la Universidad Nacional de San Juan		-																															
Recuperación Parcial 4	Consulta obligatoria del TP	Presencial																															
Puesta al día: Recuperación estraordinaria del Parcial 3 o Parcial 4	Entrega de carpetas	Presencial																															
Presentación y exposición del TP Integrador Final - Cierre de la asignatura		Presencial																															
Promociones / CTP		Presencial																															

+ HORARIO DE CURSADO:
- Primer Semestre: JUEVES de 8:30hs. a 11:30hs.
- Segundo Semestre: JUEVES de 12:30hs. a 14:30hs.

+ HORARIOS DE CONSULTA:
- MARTES: 16:30hs. a 17:30hs.
- JUEVES: 11:30hs. a 12:30hs.

+ RÉGIMEN DE LA MATERIA:
Mixto. Promoción o Certificación de Trabajos Prácticos

+ EQUIPO DE CÁTEDRA:
- Prof Titular: Arq. María Pía YANZON
- JTP: Dra. Arq. Alción ALONSO FRANK
- JTP: Esp. Arq. Luciana DACUÑA
- JTP: Arq. Celina MICHAUX
- Ayte: Agustín MUT
- Adscripta: DI. Maria Eugenia CASTILLO

+ Aula Virtual: https://campusvirtual.unsj.edu.ar/login/

+ Código de materia en Campus Virtual: 359

+ Blog de cátedra: https://www.matematica-dis.faud.unsj.edu.ar/

+ MODALIDAD DE CURSADO
La evaluación es de tipo continua. Se evaluará en forma Cuantitativa y Cualitativa en cada una de las instancias establecidas en el Cronograma:
- Asistencia a clases prácticas: 75% de asistencia.
- Elaboración y Aprobación de Trabajo Práctico Integrador.
- Evaluación de los contenidos de la materia en 4 Parciales, con sus respectivas Recuperaciones.
- Elaboración y Aprobación de Carpeta de Ejercitación.

+ CLASES
VIRTUALES: establecidas en el Cronograma; se deberá ingresar al Campus Virtual de la FAUD a través del siguiente link: : https://campusvirtual.unsj.edu.ar/login/ ; en donde encontrará los videos habilitados según Cronograma.
Esta actividad está programada para ejecutarla en el horario de clase, de manera asincrónica.

PRESENCIALES: Las clases presenciales se dictarán en los horarios detallados anteriormente. Se debe cerficar un 75% de asistencia obligatoria.
Se dividiran en dos grupos según la letra de los Apellidos del alumno
- **Taller 9**: apellidos que van de la letra **A hasta la letra M**
- **Taller 10**: apellidos que van de la letra **N hasta la letra Z**

+ FECHAS DE EVALUACIONES

FECHA	ACTIVIDAD
2-may	PARCIAL 1
9-may	RECUPERATORIO PARCIAL 1
30-may	PARCIAL 2
6-jun	RECUPERATORIO PARCIAL 2
27-jun	PUESTA AL DÍA P1 Y P2
28-ago	PARCIAL 3
5-sep	RECUPERATORIO P3
3-oct	PARCIAL 4
17-oct	RECUPERATORIO P4
24-oct	PUESTA AL DÍA P3 Y P4
31-oct	ENTREGA TRABAJO PRÁCTICO

+ REQUISITOS PARA PROMOCIÓN Y CERTIFICACIÓN DE TRABAJOS PRÁCTICOS

REQUISITOS PARA PROMOCIÓN:

Para obtener la Promoción de la asignatura los requisitos son los que se detallan a continuación:

- **Tener el Legajo Completo en sección Alumnos de la FAUD.**
- **Carpeta de Ejercitación: Completa y Aprobada**
- **Aprobación de las Cuatro Evaluaciones**: con calificación igual o mayor a 7 (3,5 pts. de teoría + 3,5 pts. de práctica), en cualquiera de sus instancias.
- **Aprobación del Trabajo Práctico Integrador Final**: con calificación igual o mayor a 7.

REQUISITO PARA CTP (Certificación de Trabajos Prácticos):

- **Tener el Legajo Completo en sección Alumnos de la FAUD.**
- **Carpeta de Ejercitación: completa y Aprobada.**
- **Aprobación de las Cuatro Evaluaciones**: se aprueban con calificación superior o igual a 5 (2,5 pts. de teoría + 2,5 pts. de práctica), en cualquiera de sus instancias.
- **Aprobación del Trabajo Práctico Integrador Final**: con calificación igual o mayor a 7.

REQUISITOS PARA CARPETA DE EJERCITACIÓN

El alumno deberá entregar la Carpeta de Ejercitación completa en las fechas establecidas en el Cronograma:

- 27 de Junio
- 24 de octubre

La carpeta deberá tener el siguiente formato:

- TAMAÑO HOJA A4, CUADRICULADA Y ANILLADO LATERAL
- **PORTADA OBLIGATORIA**: QUE DEBE DESCARGAR DEL CAMPUS, IMPRIMIR Y COMPLETAR CON SUS DATOS PERSONALES, dejando libres el resto de los casilleros que serán completados con su desempeño personal.

+ REQUISITOS PARA EXAMEN REGULAR FINAL PRESENCIAL:

Obtenida la Certificación de Trabajos Prácticos:

- Se debe inscribir en el sistema SIU GUARANI para rendir el Examen Final en los turnos habilitados en el Calendario Académico 2024-2025, los días MARTES a las 8:00 hs.
- El día del Examen se deberá presentar DNI o Pasaporte (en el caso de ser extranjero/a) que acredite la identificación.
- El examen consta de dos instancias escritas: **Aprobada** la parte de Práctica (60% de la ejercitación propuesta); se pasa a la instancia de la parte Teórica.

+ REQUISITOS PARA EXAMEN LIBRE PRESENCIAL:

- Se debe inscribir en el sistema SIU GUARANI para rendir el Examen Final en los turnos habilitados en el Calendario Académico 2024-2025, los días MARTES a las 8:00 hs
- Una vez inscripto se le asigna un tema del Programa analítico de la asignatura para una Monografía de extensión libre en formato A4 que **deberá presentar por Sección Alumnos con 72hs hábiles**, anticipadas al día de la Mesa de Examen **(entregar el miércoles de la semana previa al examen)**. Con la entrega de la Monografía se ratifica que va a rendir en el turno solicitado.
- El día del Examen se deberá presentar DNI o Pasaporte (en el caso de ser extranjero/a) que acredite la identificación.
- El trabajo deberá ser aprobado y defendido con calificación 7 (siete) como nota mínima.
- Deberá ser presentado junto con la **"Ejercitación Obligatoria".**
- **Aprobar la Monografía con el 60% de los contenidos Teóricos-Prácticos**
- Aprobar el Examen Oral (Teórico) ante Tribunal Examinador de toda la materia.

PROGRAMA ANALÍTICO 2024
MATEMÁTICA DISEÑO GRÁFICO Y DISEÑO INDUSTRIAL
UNIDADES TEMÁTICAS Y SUS CONTENIDOS

UNIDAD N° 1. CONJUNTO. PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1 Conjuntos. Operaciones con conjuntos: Unión e Intersección.
1.2 Desigualdades. Inecuaciones.
1.3 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Programación lineal. Concepto. Ejercicios de aplicación.

UNIDAD N° 2. FUNCIONES. RECTAS EN EL PLANO

2.1 Funciones. Formas diversas de expresar una función: tabular, gráfica y analítica. Dominio e imagen. Análisis de las funciones elementales principales: lineal, constante, cuadrática, polinomial de grado n, potencial, exponencial, logarítmica, valor absoluto y trigonométricas.
2.2 Funciones crecientes y decrecientes; ejemplos de aplicación. Función monótona. Definición y características geométricas.
2.3 Distancia entre dos puntos. Inclinación y pendiente de una recta. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad. Ecuación de la recta por dos puntos. Ecuación de la recta dada su dirección y un punto de paso. Pendiente y Ordenada al origen. Formas de expresar una recta: explícita, implícita, general y segmentaria. Ejercicios de aplicación.

UNIDAD N° 3. NÚMERO DE ORO. TRANFORMACIONES EN EL PLANO

3.1 Razón. Proporción. Escala.
3.2 Partición de un segmento. Simetría y Asimetría. Sección áurea. Número de oro, de donde proviene su ecuación. Segmento y rectángulo áureo. Construcciones gráficas.
3.3 Movimiento de Traslación y rotación: elementos y ejemplos. Construcción de figuras. Simétricas con respecto a un punto y con respecto a un eje. Simetrías sucesivas. Composición de simetrías con traslaciones y rotaciones.
3.4 Homotecia. Centro y razón. Aplicaciones a figuras planas. Homotecias sucesivas. Composición de homotecia con movimientos y simetrías

UNIDAD N° 4. CÓNICAS

4.1 Cónicas: generación. Ecuación general. Parábolas: ecuaciones, centro, foco y directriz. Traslaciones y rotaciones. Gráficas de parábolas en distintas posiciones.
4.2 Elipses y Circunferencias: ecuaciones, semiejes, centro, excentricidad, focos y directrices. Traslaciones y rotaciones. Representación gráfica en el plano. Ejercicios de aplicación.
4.3 Hipérbola: ecuaciones, semiejes, centro, excentricidad, focos y directrices. Traslaciones y Rotaciones. Representación gráfica en el plano. Ejercicios de aplicación.

UNIDAD N° 5. GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: RECTAS, PLANOS. CUÁDRICAS Y CILINDROS

5.1 Nociones de geometría en el espacio: representación de puntos, rectas y planos en el espacio. Ecuación de una recta por dos puntos. Ecuación general del plano. Ecuación de un plano por un punto. Paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos y entre una recta y un plano. Planos proyectantes.

5.2 Cuádricas: Generación y Ecuación general. Definición de Traza y clasificaciones. Elipsoides y Esfera: Análisis de trazas y cortes con planos paralelos a los coordenados. Ejemplos, aplicaciones y construcciones.
5.3 Hiperboloides de 1 y 2 hojas. Análisis de trazas y cortes con planos paralelos a los coordenados. Ejemplos, aplicaciones y construcciones.
5.4 Paraboloide elíptico y circular. Paraboloide Hiperbólico. Análisis de trazas y cortes con planos paralelos a los coordenados. Ejemplos, aplicaciones y construcciones.
5.5 Cono y cilindros. Análisis de trazas y cortes con planos paralelos a los coordenados. Ejemplos, aplicaciones y construcciones.

BOLILLAS DE EXAMEN
BOLILLA 1: 1.2 ; 2.3 ; 3.4 ; 4.3; 5.1
BOLILLA 2: 1.3 ; 2.2 ; 3.3 ; 4.2; 5.2
BOLILLA 3: 1.2 ; 2.1 ; 3.2 ; 4.1; 5.3
BOLILLA 4: 1.3 ; 2.3 ; 3.4 ; 4.3: 5.4
BOLILLA 5: 1.2 ; 2.2 ; 3.3 ; 4.2: 5.5
BOLILLA 6: 1.3 ; 2.1 ; 3.2 ; 4.1; 5.3

BIBLIOGRAFÍA

Alsina C., Trillas, E. (1984). *Lecciones de álgebra y geometría. Curso para estudiantes de arquitectura*. Editorial Gustavo Gili.

Aragón, A., Pinasco, J.P., Schifini, C. y Varela, A. (2004). *Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario*. Universidad Nacional General Sarmiento, 1° ed.

Diprieto, D. (1960). *Geometría Analítica del plano, del espacio y nomografía*. Editorial Alsina.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2019). *Geometría Analítica*. Editorial Universidad Nacional del Litoral, 2°ed. Disponible en https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/2309/geometriaanalitica.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Equipo de cátedra Matemática FAUD-UNSJ. (2022). *Guías Teórico- Práctica para Diseño Gráfico e Industrial*. Facultad de Arquitectura, Urbanismo y Diseño, Universidad Nacional de San Juan

György, D (1999). *El poder de los límites: proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*. Editorial Buenos Aires Troquel, 2°ed. Disponible en https://pdfcoffee.com/el-poder-delos-limites-pdf-free.html

Howard, A. (1980). *Introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Limusa, 3° ed. Disponible en http://blog.espol.edu.ec/srpinarg/files/2014/05/completo-pdf.pdf

Kindle, J. (1991). *Geometría Analítica*. McGraw-Hill. Disponible en https://www.academia.edu/27479944/Geometr%C3%ADa_Anal%C3%ADtica_Serie_Schaum_Joseph_H_Kindle_pdf

Lehmann, C. (2012). *Geometría analítica*. Editorial Limusa. Disponible en https://www.academia.edu/34497010/Geometria_Analitica_Lehmann

Nicolini, A., Santa María, G. y Vasino, S. (1999). *Matemática para Arquitectura y Diseño*. Editorial Nueva Librería.

Oteyza, E., Osnaya, E. L., Hernandez, C., Carrillo, Á. M. y Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica*. Editorial Pearson Educación, 3°ed. Disponible en https://www.academia.edu/39057620/Geometr%C3%ADa_Anal%C3%ADtica_De_Oteyza_Elena_et_al_3ED

Smith, P. y Gale, A. (1987). *Elementos de Geometría Analítica*. Editorial Nigar, 4° ed.

Spinadel, V. y Nottoli, H. (1995). *Notas de matemática para arquitectura y diseño*. Editorial Universidad de Buenos Aires.

Spinadel, V. y Nottoli, H. (2008). *Herramientas matemáticas para la arquitectura y el diseño para Arquitectura y Diseño*. Editorial Nobuko, 1° ed. Disponible en https://www.academia.edu/7945752/Herramientas_para_la_Arquitectura_Nottoli_y_De_Spinadel

Superprof. (2023). *Ejercicios y problemas resueltos de programación lineal – optimización*. Disponible en https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/pl/ejercicios-y-problemas-resueltos-de-programacion-lineal.html#tema_optimizan-en-la-fabricacion-de-lamparas

ALFABETO GRIEGO Y SÍMBOLOS

ALFABETO GRIEGO			SÍMBOLO	SIGNIFICADO O USO
			∈	PERTENECE A:
LETRAS			∉	NO PERTENECE A:
			/	TAL QUE
MAYUSCULA	MINUSCULA	NOMBRE	∧	Y
Α	α	Alfa	=	IGUAL
Β	β	Beta	≠	NO IGUAL
Γ	γ	Gamma	<	MENOR QUE
Δ	δ	Delta	≤	MENOR O IGUAL QUE
Ε	ε	Epsilon	<	NO ES MENOR QUE
Ζ	ζ	Dseta	≤	NO ES MENOR O IGUAL QUE
Η	η	Eta	>	MAYOR QUE
Θ	θ	Theta	≥	MAYOR O IGUAL QUE
Ι	ι	Iota	>	NO ES MAYOR QUE
Κ	κ	Cappa	≥	NO ES MAYOR O IGUAL QUE
Λ	λ	Lambda	⇒	IMPLICA, O SI…, ENTONCES
Μ	μ	Mu	⇒	NO IMPLICA
Ν	ν	Un	⇔	SI Y SOLO SI
Ξ	ξ	Xi	⊂	ESTA INCLUIDO
Ο	ο	Ómicron	⊃	INCLUYE O CONTIENE
Π	π	Pi	∨	Ó (INCLUYE)
Ρ	ρ	Rho	∨	Ó (EXCLUYENTE)
Σ	σ	Sigma	∪	UNION
Τ	τ	Tau	∩	INTERSECCIÓN
Υ	υ	Ípsilon	∀x	PARA TODO X
Φ	ϕ	Fi	∃	EXISTE
Χ	χ	Ji	∃	NO EXISTE
Ψ	ψ	Psi	-	DIFERENCIA
Ω	ω	Omega	Δ	DIFERENCIA SIMÉTRICA
			ℜ	COMPLEMENTO DEL CONJUNTO A
			N	CONJUNTO DE NUMEROS NATURALES
			Z	CONJUNTO DE NUMEROS ENTEROS
			Q	CONJUNTO DE NUMEROS
			R	CONJUNTO DE NUMEROS REALES
			H	CONJUNTO DE NUMEROS
			I	CONJUNTO DE NUMEROS
			ϕ	CONJUNTO VACIO

UNIDAD 1:
CONJUNTO. PROGRAMACIÓN LINEAL

CONJUNTOS

Los objetos matemáticos con los que se trabaja pueden reunirse en una cierta colectividad llamada **Conjunto**.

La palabra conjunto será un término básico no definido, vale decir la tomaremos de la intuición como una idea primitiva. Cualquier definición que se intente de conjunto adolecerá del inconveniente de estar dada mediante un sinónimo. Así al decir: Conjunto de objetos, o reunión de objetos, etc.; sólo se enuncia mediante términos equivalentes.

A los **objetos agrupados** para formar un conjunto, o que pertenecen a un conjunto se los llama **elementos**. También la idea de elementos y pertenencia la tomaremos como conceptos primitivos.

NOTACIÓN Y EJEMPLOS DE CONJUNTOS

Un conjunto se denotará con una letra mayúscula y sus elementos con minúscula.
Así en: **A = {a; b; c; d}**, **"A"** es el conjunto y **a; b; c; d** sus elementos.
Con la llave se encierran los elementos que componen al conjunto **A**. Sí el número de elementos del conjunto se puede expresar mediante un entero positivo, diremos que es finito. En caso contrario, que es infinito.

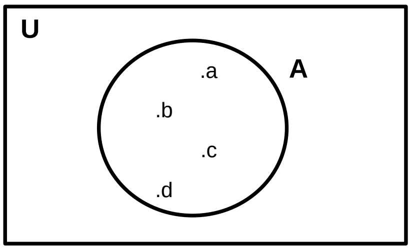


DIAGRAMA UNIVERSAL DE EULER – VENN

DEFINICIÓN

Definir un conjunto significa **precisar los elementos que lo componen** y esto se puede hacer de 2 formas: **Por extensión** y **por comprensión**.

a) **Por Extensión:** es cuando se especifica en el conjunto **enlistando o tabulando sus elementos**. Así, por ejemplo, el conjunto de los números naturales menores que 6 se especifica por extensión de la siguiente forma:

A = {1; 2; 3; 4; 5}

b) **Por Comprensión:** es cuando se definen los elementos individualizándolos dentro de un conjunto llamado Universal**, mediante una propiedad "P"** que les es común
Es decir que en general

B = { x/x ∈ U ∧ x **cumple la propiedad "P"**}
(**B** es el conjunto de todos los **x**, tal que **x** pertenece al universo **U** y **x** cumple la propiedad **"P"**)

Por ejemplo, si se quiere definir el conjunto B = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8} por comprensión, tendremos que especificar una propiedad de estos números que los identifique del resto de los enteros positivos. "P" en este caso será la propiedad de ser entero positivo menor que 9. Si tomamos como conjunto universal al conjunto "N" de los naturales (enteros positivos) la propiedad "P" se reduce a ser menor que 9. Entonces:

B = { x/x ∈ N ∧ x < 9}

Lo cual se lee: **B** es el conjunto de todos los **x**, tal que **x** pertenece al conjunto de los naturales ó enteros positivos y **x** es menor que 9.
Con la notación **x ∈ U**, indicamos que el elemento **x** pertenece al conjunto **U**, o sea que es un elemento de dicho conjunto.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

De la teoría de conjuntos damos aquí sólo las nociones elementales necesarias para poder iniciarnos cuanto antes en temas del análisis, quedando a cuidado del alumno repasar el resto.

a) UNIÓN

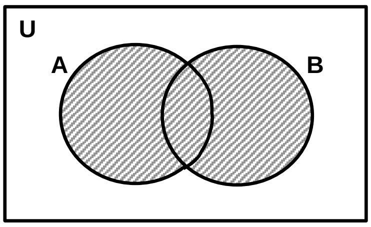
La unión de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto de todos los elementos que ∈ a **A** ó que ∈ a **B** ó a ambos. La unión de **A** y **B** se denota por **A U B**, que se lee "**A unión B**".

- **Simbólicamente:**

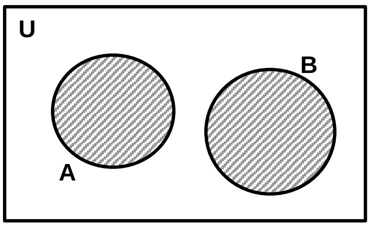
A U B = { x/x ∈ A ∨ x ∈B} que se lee "**A unión B** es el conjunto de todos los **x**, tal que **x** pertenece a **A**, ó **x** pertenece a **B**, ó a ambos" (el símbolo **∨** es "**O**", en sentido incluyente, o sea si por ejemplo, se tiene **a ∨ b** quiere decir **"a ó b, ó ambos"**).

- **Gráficamente:**

Usando Diagrama de Venn, veamos los siguientes ejemplos:



A U B lo rayado en gris



A U B lo rayado en gris

Ejemplo:

Sean: **R = { a; b; c; d }** y **S = { f; b; d; g }**
Entonces: **R U S = { a; b; c; d; f; g }**

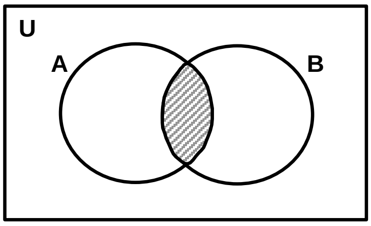
En correspondencia, de la definición se desprende que **A U B = B U A**.

b) INTERSECCIÓN

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que sean comunes a A y a B. Esto es, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por $A \cap B$.

- Simbólicamente:

$$A \cap B = \{ x/x \in A \wedge x \in B \}$$



- Gráficamente:

$A \cap B$ lo rayado en gris

Ejemplo:

Sean: $R = \{ a; b; c; d \}$ y $S = \{ f; b; d; g \}$
Entonces: $R \cap S = \{ b; d \}$

En correspondencia, de la definición se desprende que $A \cap B = B \cap A$.

CONJUNTO VACÍO
Es un conjunto que carece de elementos y se lo denota con el símbolo ϕ o bien $\{ \}$.

DESIGUALDADES. INECUACIONES.

Repasaremos brevemente las nociones y propiedades básicas de las desigualdades. Para ello, recordaremos el significado de los símbolos:

Mayor que	$>$
Menor que	$<$
Mayor o igual que	$\geq$
Menor o igual que	$\leq$

Una proposición de la forma $a < b$; $a > b$; $a \leq b$; $a \geq b$; es una desigualdad. Los símbolos $a \leq b$ se usan para indicar que $a < b$ ó $a = b$, de igual forma con $a \geq b$ indicamos que $a > b$ ó $a = b$.
Resolver una desigualdad con una variable, significa encontrar el conjunto de los valores de la variable que satisface a la desigualdad.

Por ejemplo: Dada la desigualdad $3x > 12$, tomando como conjunto universal el de los números reales, tiene por solución la totalidad de los números reales mayores que 4, ya que para que el producto $3x$ resulte mayor que 12 debe ser $x > 4$.

Se pueden demostrar las <u>Propiedades</u> siguientes de las desigualdades:

- Sean **a; b; c** números reales cualesquiera, entonces se cumple:

I) O bien $a < b$, ó $a = b$, ó $b < a$.
II) $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$.
III) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$, ya sea **(+)** ó **(-)** el **c**.
IV) Si **c** es positivo (+), $a > b \Leftrightarrow ac > bc$
V) Si **c** es negativo (-), $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

Esta última expresa que al multiplicar por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad. Todas estas propiedades son válidas sí se intercambian los símbolos $>$ y $<$, y también sí los símbolos $>$ y $<$ se sustituyen por $\geq$ y $\leq$, respectivamente.

Escribimos $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y que $b < c$ (y consecuentemente según II) que $a < c$.
Si se cumple $a < b < c$, decimos que **b** está entre **a** y **c**.
<u>Por ejemplo</u>: **1,8** está entre **1** y **2** ya que $1 < 1{,}8 < 2$.

<u>**Importante:**</u> El número real **P** es mayor que el número real **r** si **P - r** es un número positivo. A partir de esto se puede demostrar que siendo $P < r$ se cumple que:

$$P < \tfrac{1}{2}(P + r) < r$$

La cual expresa que entre dos reales hay otro real y consecuentemente hay infinitos; por esta causa se dice de los reales que es un conjunto denso.

- <u>RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD</u>

Las 3º, 4º y 5º propiedades vistas, constituyen una base para resolver cualquier desigualdad de primer grado con una variable. Tal solución se obtiene de un modo muy semejante al seguido para la solución de una ecuación de primer grado.

<u>Ejemplo</u>: Resuelva la desigualdad $-3x + 7 > -x + 12$

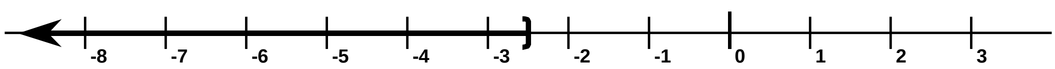
Si se suma $x - 7$ a cada miembro de la desigualdad dada y según la propiedad III), se obtiene:

$$-2x > 5$$

Si multiplicamos por $-\tfrac{1}{2}$ e invertimos el sentido de la desigualdad (puesto que $-\tfrac{1}{2}$ es negativo) queda:

$$x < -5/2$$

De donde la solución de la desigualdad dada es el conjunto de los reales menores que $-5/2$; que se representa en la siguiente figura:

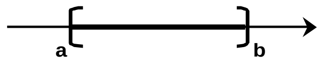
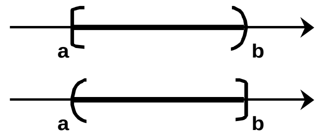
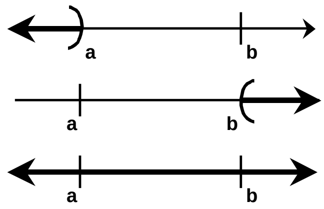
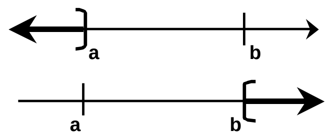


- INTERVALOS

- Definición: Es un conjunto de puntos. Pueden ser Acotados ó No Acotados.

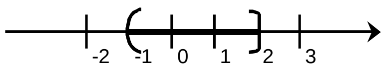
- Intervalos Acotados: Se entiende por tal al conjunto de puntos con cota superior e inferior en la recta numérica. De acuerdo a que esa cota esté incluida o no, se llaman Abiertos o Cerrados.

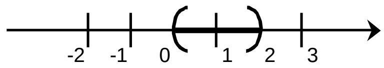
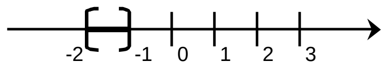
- Clasificación de los Intervalos en la Recta Real

Clasificación		Notación de Intervalos	Notación de Conjuntos	Gráfica
Acotados	Intervalo Abierto	(a, b)	{x/ a < x < b}	
	Intervalo Cerrado	[a, b]	{x/ a ≤ x ≤ b}	
	Intervalos Semiabiertos o Semicerrados	[a, b) (a, b]	{x/ a ≤ x < b} {x/ a < x ≤ b}	
No Acotados	Abiertos	(- ∞, a) (b , ∞) (- ∞, ∞)	{x/ x < a} {x/ b < x} {x/ x es un número real}	
	Cerrados	(- ∞, a] [b, ∞)	{x/ x ≤ a} {x/ b ≤ x}	

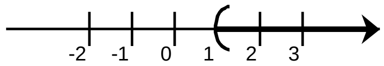
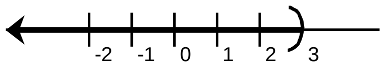
Veamos algunos ejemplos:

1) Representar los intervalos R = (-1; 2]; S = (0; 2); T = [-2; -1] sobre la recta real. Expresarlos como conjuntos de números:

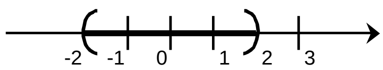
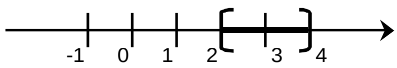
Notación de Intervalos	Notación de Conjuntos	Gráfica
R = (-1; 2]	{x/ -1 < x ≤ 2}	

Notación de Intervalos	Notación de Conjuntos	Gráfica
S = (0; 2)	{x/ 0 < x < 2}	
T = [-2; -1]	{x/ -2 ≤ x ≤ -1}	

2) Representar los intervalos U = (1; + ∞); V = (- ∞; 3) sobre la recta real y expresarlos como conjuntos de números.

Notación de Intervalos	Notación de Conjuntos	Gráfica
U = (1; + ∞)	{x/ 1 < x }	
V = (- ∞; 3)	{x/ x < 3 }	

3) Representar el conjunto solución de las siguientes desigualdades: a) $|x| < 2$; b) $|x - 3| \leq 1$ y expresarlas como intervalos:

Notación de Conjuntos	Gráfica	Notación de Intervalos
$\|x\| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ ∴ es		Es decir el intervalo es: A = (-2; 2)
$\|x - 3\| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow$ $3 - 1 \leq x \leq 1 + 3$; o sea: $2 \leq x \leq 4$		Es decir el intervalo es: B = [2; 4]

PROGRAMACIÓN LINEAL

Se denomina **programación lineal** al conjunto de técnicas matemáticas que pretenden optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal de diversas variables llamada **función objetivo**. Estas variables están sujetas a una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales.

La programación lineal se basa en un sistema de inecuaciones y se utiliza en microeconomía, en administración de empresas para minimizar gastos y maximizar los beneficios en asignación de recursos, en planificación de campañas de publicidad, para solucionar problemas de transporte, etc. Un problema de programación lineal en dos variables tiene la siguiente formulación:

$G(x,y)=ax+by+c$ es la Función Objetivo por optimizar

En esta expresión x e y son las variables de decisión, mientras que **a**, **b** y **c** son constantes, es decir números reales. Las restricciones deben ser ecuaciones lineales y su número depende del problema en cuestión. El carácter de la desigualdad viene dado por las limitaciones disponibilidades.

Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se la denomina conjunto o **Región Factible**. Todo punto de este conjunto puede ser solución del problema (aunque no sea máximo o mínimo) y todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución. La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las **desigualdades sean en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$) o en sentido estricto (< o >)**. Si esta región es acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.
La solución óptima del problema será un par de valores (x_0,y_0) del conjunto factible que haga que $G(x, y)$ tome el valor máximo o mínimo.

El teorema fundamental de la programación lineal nos permite conocer que:

- En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única, que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.
- Si la función objetivo toma el mismo valor optimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.
- En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor optimo concreto, pero si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.
- No todo problema de programación lineal tiene una región factible.
- En un problema de programación lineal se puede tener más de una solución óptima

SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

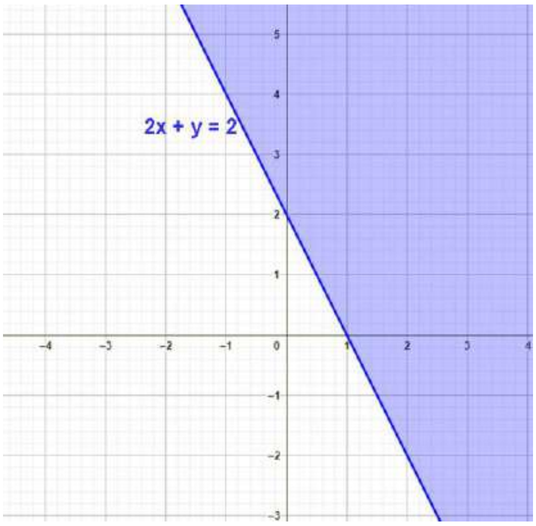
Es toda inecuación del tipo: $ax + by > c$, con cualquier signo <, >, $\geq$ o $\leq$ para resolverlas. El conjunto solución (llamado región factible) está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones. El proceso para resolver este tipo de inecuaciones es el siguiente:

1. Representamos gráficamente la función lineal asociada $ax+ by= c$.

2. La recta divide al plano en dos semiplanos. Utilizando un punto obtenemos cual es el semiplano solución, generalmente se utiliza el punto P(0,0).
3. La inclusión o no en la solución de la frontera depende si la desigualdad es estricta o no.

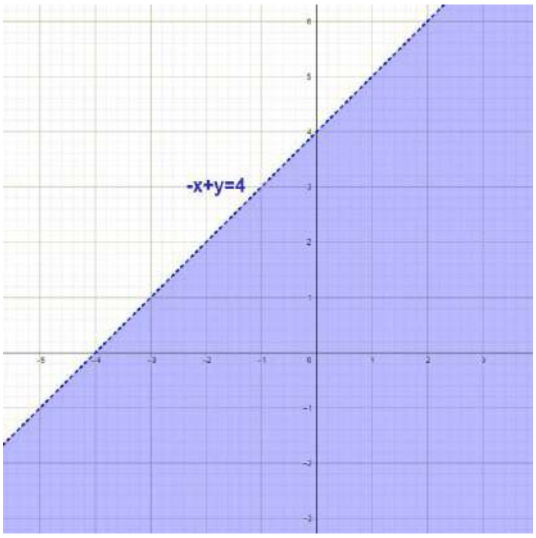
Ejemplo N°1: Graficar la región del plano determinado por la siguiente inecuación: $2x + y \geq 2$

- Se grafica la recta $2x + y = 2$
- Se remplazan las coordenadas del punto $P(0, 0)$ en la función $2x + y \geq 2$. Como **NO** verifica la desigualdad, el semiplano solución es el que no contiene dicho punto.
- El semiplano marcado en azul es la solución del sistema, incluyendo la recta que se marca de forma continua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación.



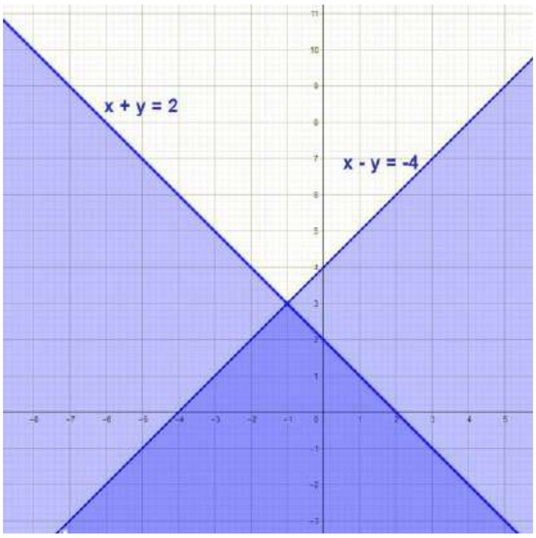
Ejemplo N°2: Graficar la región del plano determinado por la siguiente inecuación $-x + y < 4$

- Se grafica la recta $-x + y = 4$
- Se remplazan las coordenadas del punto $P(0, 0)$ en la función $-x + y < 4$. Como **SI** verifica la desigualdad, el semiplano solución es el que contiene dicho punto.
- El semiplano marcado en azul es la solución del sistema, excluyendo la recta que se marca de forma discontinua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación y los de la recta no lo hacen.



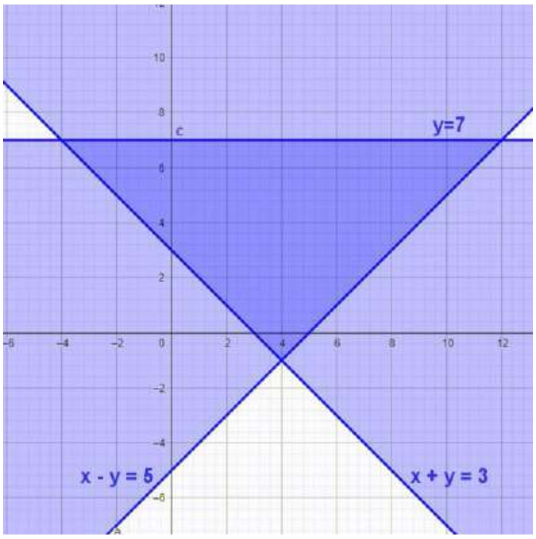
Ejemplo N°3 : Graficar la región del plano determinado por el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \geq -4 \end{cases}$

- Se grafica la recta $x+y=2$ y la recta $x-y=-4$
- Para encontrar el conjunto solución se despeja la variable "y", y se encuentra las ecuación de la recta. El punto de intersección entre las rectas se resuelve con los métodos de igualación y sustitución.
- Si se analiza cada inecuación por separado, cada una determina un semiplano. La región común a ambos semiplanos es el conjunto solución del sistema.
- El semiplano marcado en azul oscuro es la solución del sistema, incluyendo las semirrectas, ya que ambas desigualdades son estrictas.



Ejemplo N°4: Graficar la región del plano determinado por el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x - y \le 5 \\ x + y \ge 3 \\ y \le 7 \end{cases}$

- Se grafica la recta *x - y = 5*, la recta *x + y = 3* y la recta *y=7*
- Luego se remplaza el punto P(0,0) en cada recta y se sombrea el semiplano que cumple con cada desigualdad. En x-y=5, como el punto P(0,0) satisface $x - y \le 5$, sombreamos el semiplano que contiene al origen. En x + y = 3 el punto P(0,0) no satisface a $x + y \ge 3$, se sombrea el semiplano que no contiene al origen. Finalmente, en la recta horizontal y=7 se sombrea el semiplano que esta debajo de la recta.
- El conjunto solución del sistema de inecuaciones es el triángulo común a los tres semiplanos. La solución grafica es la que aparece en azul oscuro. En este caso queda representado por una figura convexa, es decir, un recinto cerrado.



PROBLEMAS DE MÍNIMO

Ejemplo N°1: En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 euros y del tipo Y es de $30. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un **coste mínimo**?

1-Elegir las incógnitas
x=X
y=Y

2-Elaborar la función objetivo

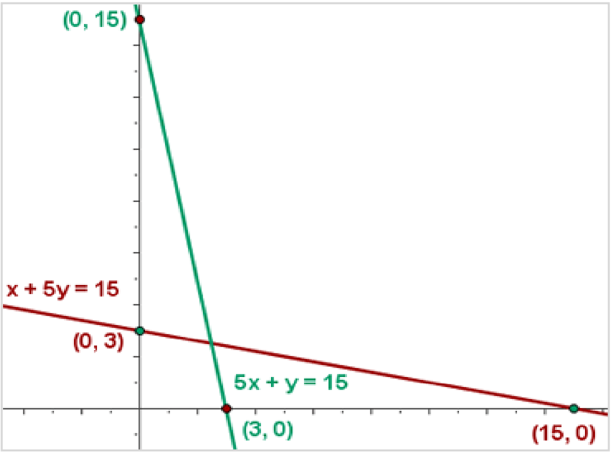
f(x,y)=10x+30y

3-Encontrar las restricciones

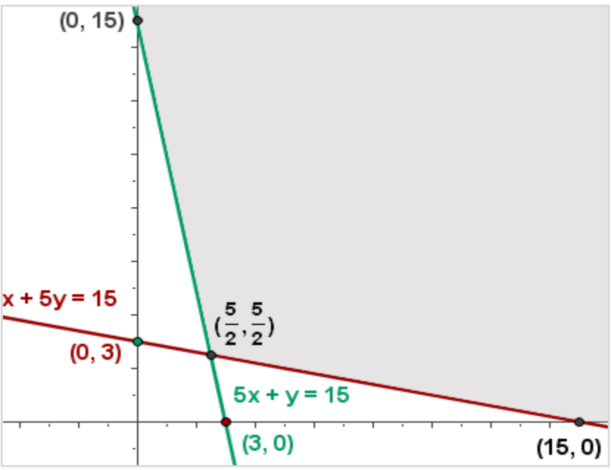
	X	Y	Mínimo
A	1	5	15
B	5	1	15

x+5y ≥15
5x+y≥15
x≥0
y≥0

4-Graficar las dos rectas; *x+5y =15* y *5x+y=15*



5-Encontrar el conjunto de soluciones posibles



6- Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones

7- Calcular el valor de la función objetivo
f(0,15)=10*0+30*15=**$450**

f(15,0)=10*15+30*0=**$150**
f(5/2,5/2)=10*5/2+30*5/2=**$100**
El coste mínimo es $100 para x=5/2 e y=5/2.

PROBLEMAS DE MÁXIMO

Ejemplo N°1: Un agricultor tiene 600 hectáreas en las que puede sembrar maíz o cebada y dispone de 800 horas de trabajo durante la temporada. Los márgenes de utilidad por hectárea para el maíz son de $60 y para la cebada es de $70. Los requerimientos laborales para trabajar en la siembra de maíz son de 1 hora por hectárea y en la siembra de cebada es de 2 horas por hectárea. ¿Cuántas hectáreas de cada cultivo debe sembrar para maximizar su utilidad?, ¿Cuál es la **utilidad máxima?**

1-Elegir las incógnitas
x= Nº de hectáreas de maíz
y= Nº de hectáreas de cebada

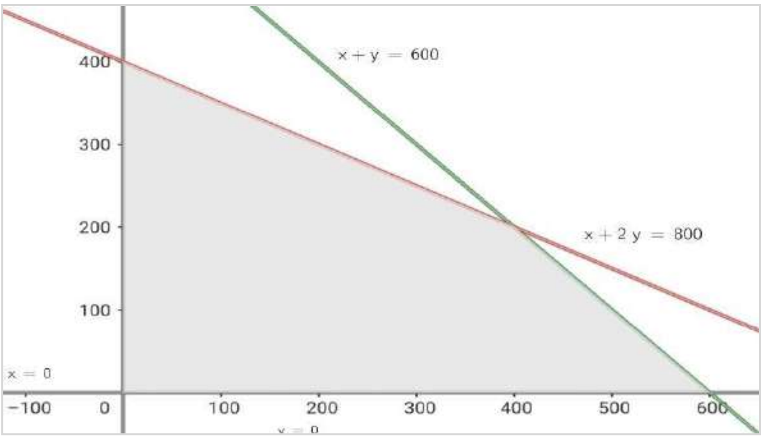
2-Elaborar la Función Objetivo
f(x,y)=60x+70y

3- Encontrar las restricciones

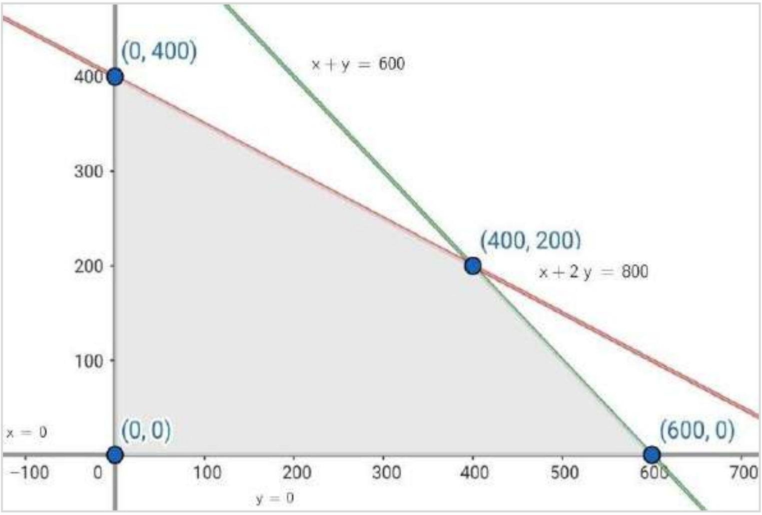
	Maíz	Cebada	Disponible
Hectáreas	1	1	600
Horas	1	2	800

x+y≤600
x+2y≤800
x≥0

4- Graficar las dos rectas y Encontrar el conjunto de soluciones factible



5-Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones factibles



Los vértices son (0,0),(0,400),(600,0),(400,200)

6- Calcular el valor de la función objetivo

f(0,0)=60*0+70*0=**0 €**
f(0,400)=60*0+70*400=**28000€**
f(600,0)=60*600+70*0=**36000€**
f(400,200)=60*400+70*200=**38000€**

El agricultor debe sembrar 400 hectáreas de maíz y 200 de cebada para obtener la utilidad máxima de 38000€

EJERCITACIÓN UNIDAD Nº 1
CONJUNTOS. PROGRAMACIÓN LINEAL

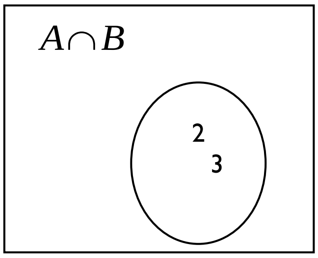
CONJUNTOS

1. Dados los conjuntos A=$\{-3; 0; 2; 3; 7\}$, B=$\{x/x \in N \wedge x \leq 4\}$, C=$\{x/x \in N \wedge 3 < x < 10\}$, D=$\{x/x \in R \wedge -1 < x \leq 2\}$, E =$\{x/x \in R \wedge 0 \leq x < 5\}$, realice las siguientes operaciones analítica y gráficamente:

   a- $A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$
   b- $B \cup C$ $\quad$ $B \cap C$
   c- $D \cup E$ $\quad$ $D \cap E$

Solución Ej. 1 Forma analítica: A∩B= { 2, 3 }

Forma gráfica:



2. Exprese la solución de las siguientes desigualdades como conjunto, intervalo y gráficamente:
   a) $2x - 3 > 8 - 3x$
   b) $-x + 4 \geq 5 + 2$
   c) $5x - 4 \leq 8 + 3x$
   d) $-\frac{x}{2} + 4 \geq \frac{3}{2} + 2x$
   e) $7 - 4x \leq 3 + 6x$
   f) $\frac{2x+14}{3} < 2$
   g) $-4 \leq 4 + 3x < 5$
   h) $-3-3 \leq \frac{x}{3} - 1 \leq 2$

PROGRAMACIÓN LINEAL

3. Represente gráficamente en el plano el conjunto solución de las siguientes Inecuaciones lineales. Y clasifíquela según sea, en sentido Estricto o en sentido Amplio
   a) $y \geq 0$
   b) $x \geq 0$
   c) $y \leq x$
   d) $y \geq x$

e) $y \geq x + 2$
f) $y \leq x + 2$
g) $x \leq 10$
h) $y \leq 4$
i) $3x - 4y + < 0$

4. Encuentre la región de factibilidad del siguiente modelo matemático: encuentre sus vértices y el valor máximo de la Función Objetivo: $G(x) = 3x + 4y$

$$\begin{cases} y \leq x + 3 \\ x \leq 4 \\ x \geq \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5. Encuentre la región de factibilidad del siguiente sistema de restricciones, determine los vértices y calcule en qué punto la función objetivo $G\ (x, y) = 3x + 2y$ es máxima.

A) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ y \leq 16 \\ y \geq x \end{cases}$ B) $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq -x + 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3y - x \geq 3 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

6. Ejercicios de Aplicación

a) Problema de Máximo

Un comercio dispone de 1500 bolígrafos y 1200 portaminas. Decidieron armar paquetes de dos tipos. Los paquetes A tienen 2 bolígrafos y 2 portaminas que se venden a \$5. Los paquetes B tienen 3 bolígrafos y 1 portaminas y se venden a \$4.

¿Cuántos paquetes de cada tipo se deben armar para obtener la máxima ganancia?

b) Problema de Mínimo

En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B.

En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 euros y del tipo Y es de 30 €.

¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

UNIDAD 2:
FUNCIONES. RECTAS EN EL PLANO.

FUNCIONES

CONCEPTO Y NOTACIÓN:

Se dice que **y** es función de **x** cuando a cada valor de **x** corresponde un valor de **y**.
Se utiliza habitualmente la notación $y = f_{(x)}$, que se lee **"y función de x"**, ó **"y igual a efe de x"**.
La variable **x** se llama variable independiente, y la variable **y** se llama variable dependiente.

FORMAS DIVERSAS DE EXPRESAR UNA FUNCION

1) Representación analítica de las funciones

Primero precisaremos lo que se entiende por expresión analítica.
Se llama **expresión analítica** a la notación simbólica del conjunto de las operaciones matemáticas aplicadas a "x" para obtener el valor de "y

Ejemplos de expresiones analíticas son:

$$y = x^2 - 2 \qquad\qquad y = 3x + 4$$

2) Funciones dadas en forma tabular

En este procedimiento se hace una tabla, en la que se disponen los valores de la variable **x** en cierto orden x_1; x_2; x_3; ... x_n, y de la misma manera se escriben los valores correspondientes de **y**.
O sea que se enlistan los valores:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
x_n	y_n

Estas tablas expresan la dependencia funcional de ambas variables.

Vale decir que una función se puede expresar mediante, el conjunto de pares ordenados, cuyas primeras componentes son los valores de **x**, y cuyas segundas componentes son los valores correspondientes de **y**.

3) Gráfica de una función

Sea una función tal como $y = f_{(x)} = x^2$. Para un cierto valor real de **x** obtenemos el correspondiente valor de **y**. Formamos un par ordenado en el que la **x** es el primer componente e **y** la segunda.

Ejemplo: (3; 9).

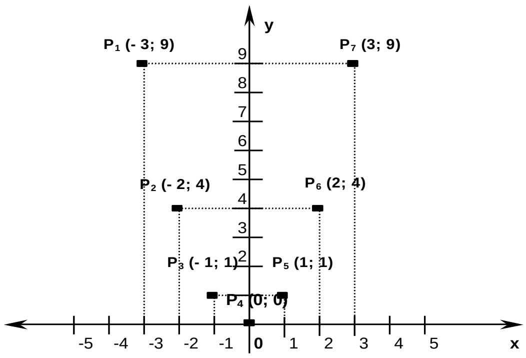
Ahora bien, se ha visto que las coordenadas de un punto en el sistema cartesiano constituyen un par ordenado, y que todo par ordenado de números reales constituye las coordenadas de un punto en el plano. Luego, resulta que para cada **x** e **y**, tal que **y** sea el correspondiente de **x** a través de $y = f_{(x)}$, se tiene **P(x; y)** del plano, una vez que se ha fijado el sistema cartesiano de coordenadas.

Por ejemplo, para $y = x^2$ podemos obtener algunos puntos:

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

P_1 (-3; 9); P_2 (-2; 4); P_3 (-1; 1); P_4 (0; 0);
P_5 (1; 1); P_6 (2; 4); P_7 (3; 9)

Que se pueden representar:



DEFINICIÓN:

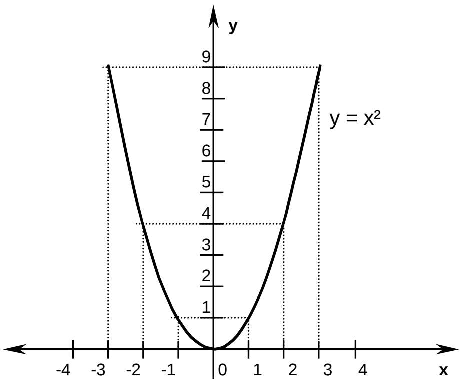
La gráfica de la función **f**, es el conjunto **G** de todos los puntos **P(x; y)** del plano coordenado, cuyas coordenadas son los pares ordenados **(x; y)** cuya segunda componente **y** es la imagen de la primer componente **x** a través de **f** (con **x** que pertenezca al dominio de la función).

(Nota: Al correspondiente valor de **x** a través de **f**, se lo suele llamar imagen de **x** a través de **f**).

La determinación de puntos de la gráfica da idea de la variación de la función, pero en un caso como $y = x^2$ son infinitos los puntos que constituyen la gráfica. Luego, por muchos puntos que se hayan determinado es arriesgado enlazarlos con un trazo continuo sin un previo estudio aritmético de la

función. En cambio, hecho este estudio, bastarán unos pocos puntos para efectuar un trazado muy aproximado.
Tal estudio de las funciones nos dará las propiedades fundamentales de continuidad y existencia de tangentes, zonas de crecimiento, de decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos, etc.; que facilitan notablemente el trazado de la gráfica.

En el caso **$y = x^2$** que estamos analizando, la gráfica es una parábola.



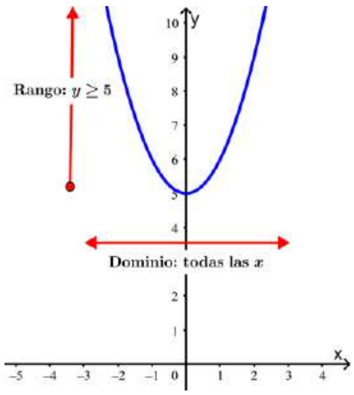
DOMINIO E IMAGEN DE LAS FUNCIONES

DOMINIO (Df) o Campo de Existencia:

Es el conjunto de **valores que adopta la variable independiente "x", para los cuales la función está definida.** Se debe recordar que **"no" está definida la raíz de número negativo, la división por 0 (cero) y el logaritmo de un número negativo ó 0 (cero)**.

IMAGEN (If), Rango o Recorrido:

Es el conjunto de **valores que adopta la variable dependiente "y"**, cuando **x** toma los valores pertenecientes al dominio.



Ejemplo: Sea la función: $|x|$

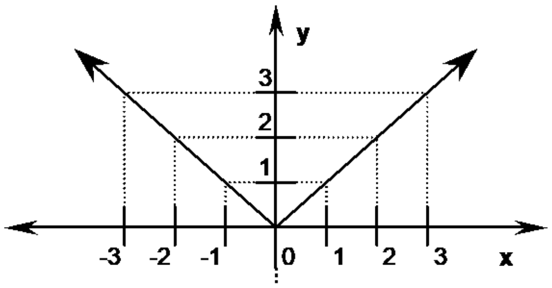
Expresión Analítica

$f_{(x)} = |x|$

Expresión Tabular

x	$y = |x|$
- 2	2
- 1	1
0	0
1	1
2	2

Expresión Gráfica



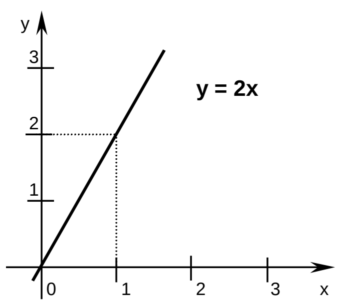
$Df = (-\infty; +\infty)$
$If = [0; +\infty)$

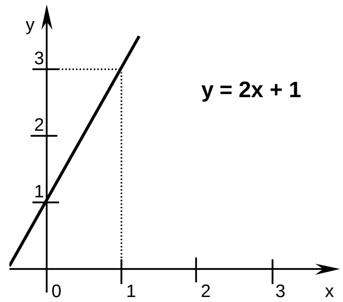
FUNCIONES ELEMETALES PRINCIPALES

Función General de Primer Grado: (o función Lineal)

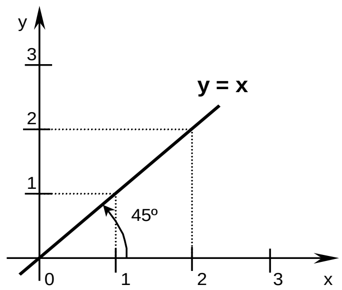
$y = ax + b$ donde **a** y **b** son constantes, y $a \neq 0$.

Este tipo de funciones son las más sencillas, y forman una de las más importantes clases. El gráfico de una función lineal es una recta (en todos los casos).

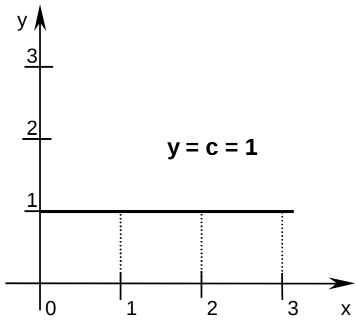




Un caso especial de la función general de primer grado es la función identidad **y = x** que es la bisectriz del 1º cuadrante.



Función Constante



y = c, donde **c** es un número real.

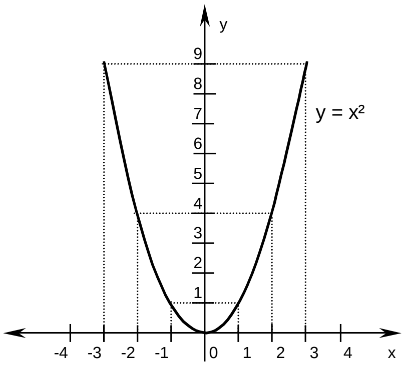
Función Potencial (o función simple de grado n)

La función potencial es $y = x^n$ pudiendo ser:

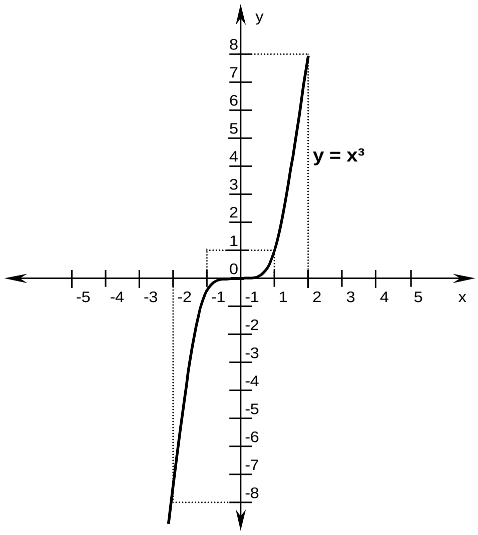
a) **n un número entero positivo**

En ese caso, la función está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$

Veamos las gráficas con distintos valores de **n**:



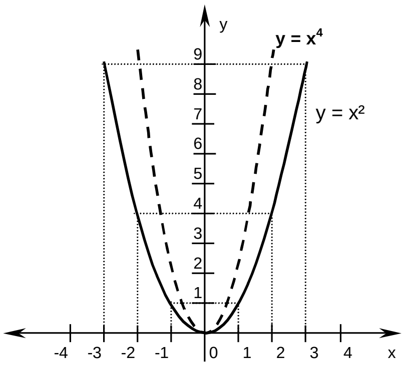
$y = x^2$ llamada función simple de 2º Grado (**Parábola**).

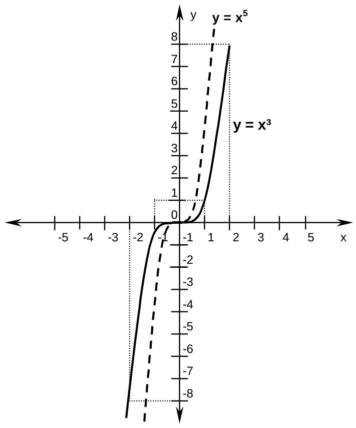


$y = x^3$ llamada función simple de 3º Grado (**Parábola cúbica**).

Si **n** es par, la gráfica es similar a la de $y = x^2$, mientras que si **n** es impar, la gráfica es semejante a la de $y = x^3$.

Ejemplos aclaratorios:



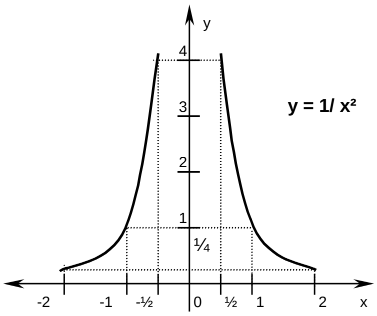


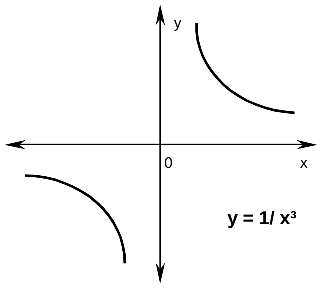
Vemos aquí la importancia de la gráfica de una función. Es como una tabla completa de valores. Toda la información acerca de la función está contenida en la gráfica. Dibujando un gráfico, o una parte de él, podremos "ver" la función.

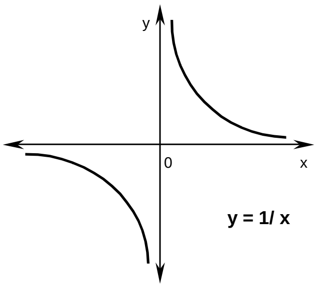
b) n un número entero negativo

En este caso la función está definida para todos los valores de **x**, excepto para **x = 0**.

Veamos las gráficas correspondientes para distintos valores de **n**:



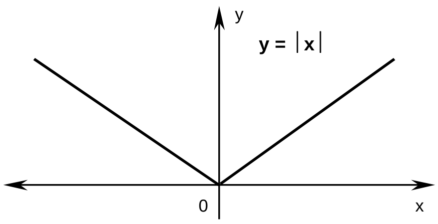




$y = 1/x$ llamada hipérbola equilátera

Función Valor Absoluto

Está definida para todo **x**, o sea en el intervalo **$(-\infty ; +\infty)$**.
De acuerdo a lo visto de valor absoluto, resulta que la gráfica es:

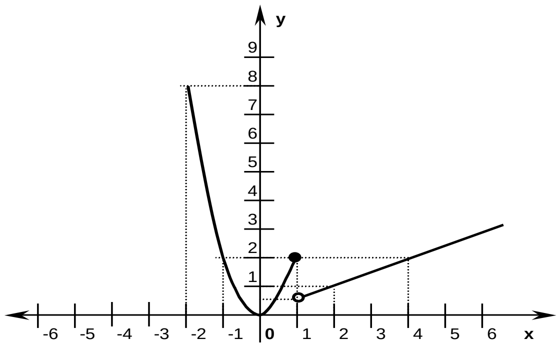


Función definida por tramos

En matemáticas, una función definida por tramos (también conocida como función con dominio restringido) es una función cuya definición cambia dependiendo del valor de la variable independiente.
Las funciones definidas por tramo se expresan por una notación funcional común, donde el cuerpo de la función es una lista de expresiones matemáticas asociadas a un subdominio (intervalo). Ejemplo

$$y = \begin{cases} 2x^2 & \text{sí } x \leq 1 \\ (½)\,x & \text{sí } x > 1 \end{cases}$$

Df = $(-\infty; +\infty)$
If = $[0; +\infty)$



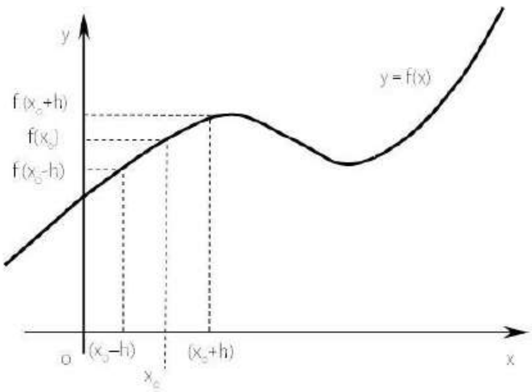
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES (En un punto)

Para funciones reales de variable real, se puede formular la siguiente definición:

DEFINICIÓN:
Diremos que una función **y = f(x)** es **creciente en un punto** x_0, cuando existe un número h (llamado rango) que lo tomaremos siempre como **h<1**, y cumpla con la siguiente condición: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. Y es **decreciente en** x_0 cuando: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

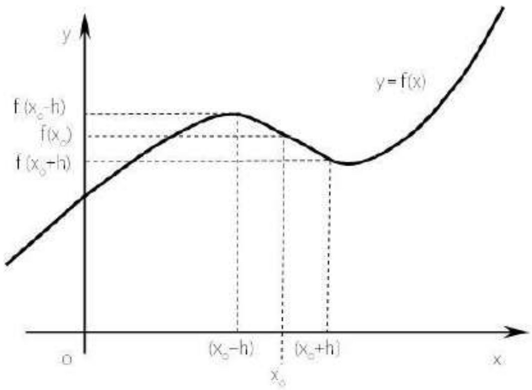
Ejemplos:

Función creciente en x_0



$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$

Función decreciente en x_0



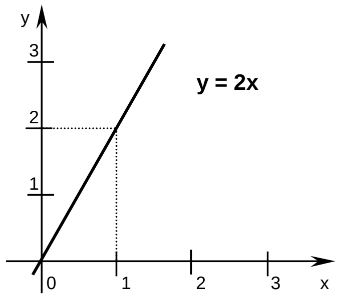
$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$

Una función se llama **creciente (o decreciente)** en un intervalo, cuando lo es en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

MONOTONÍA
Una función **y = f(x)** tal que, dentro de su campo de definición, cumpla la condición $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ perteneciente al dominio se llamará **monótona creciente**; en cambio es monótona **decreciente** si $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ perteneciente al dominio

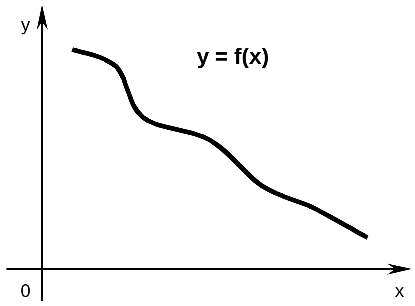
Ejemplos:

Monótona creciente



$f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$

Monótona decreciente

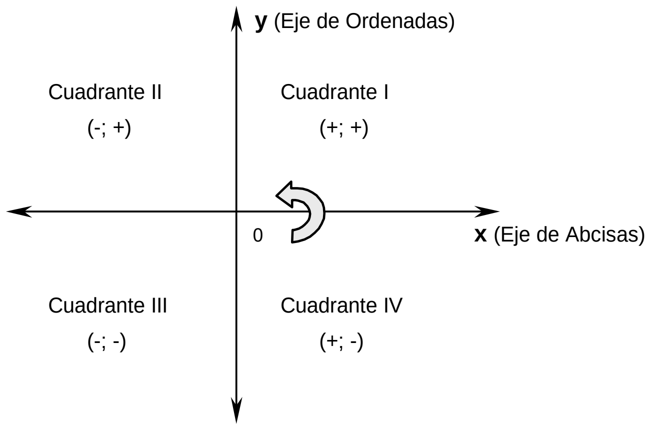


$f(x_1) \geq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$

RECTAS EN EL PLANO

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Este sistema divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto P (0 ; 0) que es el centro u origen del sistema.
La distancia de un punto al eje **y** se llama *abscisa* del punto.
La distancia de un punto al eje **x** es la *ordenada*.
Un punto se representa en algún cuadrante del plano como **P(x; y)** que es un par ordenado.



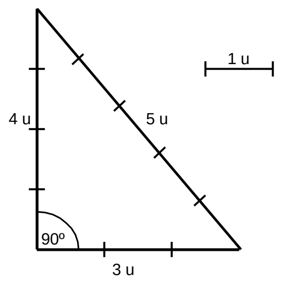
Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Como sabemos, el triángulo rectángulo tiene dos lados, llamados **catetos**, que forman un ángulo recto (90º); y el lado opuesto a este ángulo, se llama **hipotenusa**.

Si construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 unidades respectivamente. (En este caso, la unidad u = 1 cm).

¿Cuántas unidades mide la hipotenusa?

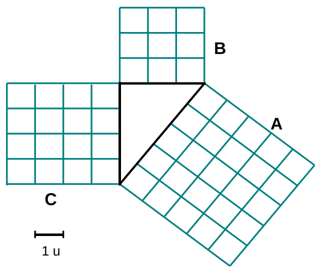


Como denota la gráfica, la respuesta a nuestra pregunta será 5 unidades.

Así, si construimos triángulos rectángulos cuyos catetos midan 3 u y 4 u respectivamente, pero con unidades que tengan diferente valor; podrás verificar que la hipotenusa siempre mide 5 unidades.

Si construyéramos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 u y 8 u respectivamente, veríamos que la hipotenusa siempre mide 10 unidades.

Ahora bien, si tomamos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 u y 4 u respectivamente; y construimos cuadrados sobre cada uno de los lados (catetos e hipotenusa) y lo cuadriculamos tomando como escala la unidad establecida (1u por lado del cuadradito).



Llegamos a establecer que la superficie de cada una de las figuras viene dada por:

Sup. cuadrado **A** = 25 cuadraditos
Sup. cuadrado **B** = 9 cuadraditos
Sup. cuadrado **C** = 16 cuadraditos

Observamos que:

Sup. **A** = Sup. **B** + Sup. **C**

Tomando sus medidas es:

$$25 = 9 + 16$$

Expresado como potencia es:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\text{hipotenusa}^2 = (\text{cateto menor})^2 + (\text{cateto mayor})^2 \quad .$$

el cuadrado de la hipotenusa = a la suma de los cuadrados de los catetos.

Esta relación, que hemos comprobado en un triángulo rectángulo con ciertas medidas, se cumple en todo triángulo rectángulo, y fue descubierta por el célebre matemático griego llamado **Pitágoras**, que lo defino en el teorema que lleva su nombre:

TEOREMA DE PITÁGORAS:

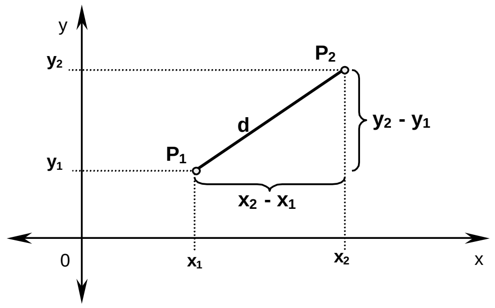
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ Ecuación general de aplicación

Por lo anteriormente dicho, y aplicando esta relación, determinaremos la <u>distancia entre dos puntos</u>.

Partiendo de la Ecuación General de Aplicación:

$$a^2 = b^2 + c^2 \ .$$



Aplico según la gráfica:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \ .$$

Donde: d = hipotenusa (a)
$x_2 - x_1$ = cateto (b)
$y_2 - y_1$ = cateto (c)

Despejo la ecuación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<u>Ejemplo de ejercicio</u>: Encontrar la distancia entre los puntos:

$P_1\,(0;-1)$ $x_1 = 0$ $y_1 = -1$
$P_2\,(-4;3)$ $x_2 = -4$ $y_2 = 3$

$$\boxed{d = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-(-1))^2} \cong 5{,}6568}$$

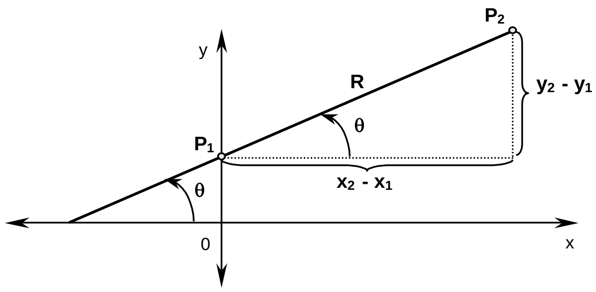
INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

a - Inclinación de una recta (θ): Que no sea paralela al eje **x**, es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el eje (x) positivo. Se mide desde el eje **x** a la recta **R**, en contra de las agujas del reloj (sentido antihorario); y así se considera el sentido (+). Si **R** fuera paralela al eje **x**, su inclinación sería cero.

b - Pendiente de una recta: Es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación θ.
Es decir:

$$\boxed{m = \text{tg}\,\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Esta es la pendiente de la recta que pasa por dos puntos.



θ → inclinación
tg $\theta = m$ → pendiente

Ejemplo de ejercicio: Encontrar la pendiente de la recta formada por los puntos del Ejemplo Nº 1 y su ángulo de inclinación. $P_1(0; -1)$ $x_1 = 0$; $y_1 = -1$ / $P_2(-4; 3)$ $x_2 = -4$; $y_2 = 3$

$$m = tg\,\theta = \frac{3-(-1)}{-4-0} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\theta = arc\,tg\,m = arc\,tg\,(-1)$$

Para encontrar el ángulo de inclinación en la máquina hacemos:
shift tg (-1) = - 45, luego: **shift ° ′ ″ = - 45° 00′ 00″** .

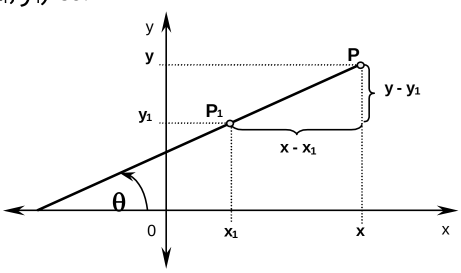
LÍNEA RECTA
Analíticamente es una ecuación Lineal o de primer grado con dos variables.
Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico, cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una Recta.
Una recta es determinada si se conocen dos condiciones:
a) Dos de esos puntos.
b) Un punto y su dirección (pendiente).

<u>ECUACIONES DE LA RECTA</u>

a) **La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$ y cuya pendiente es <u>m</u>**, es:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

<u>Demostración</u>: Sea **P(x; y)**, otro punto de la recta. La pendiente <u>**m**</u> de la recta que pasa por los puntos **P(x; y)** y **$P_1(x_1; y_1)$** es:

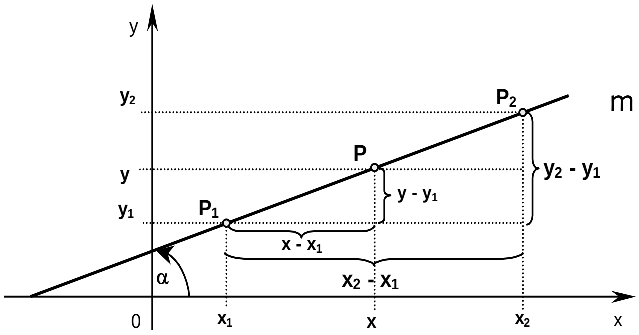


$$m = tg\,\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1} = y - y_1 = m(x - x_1)$$

b) **La ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$** es:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Demostración: Sea **P(x; y)** otro punto cualquiera de la recta que pasa por P_1 y P_2. La pendiente **m** que une **P(x; y)** y $P_1(x_1; y_1)$ es igual a la pendiente de la recta que une P_1 y P_2.



$$m = tg\,\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

FORMAS DE EXPRESAR LA RECTA

a) La ecuación de la recta de pendiente **m** y que corta al eje **y** en el punto **(o; b)**, siendo **b** ordenada al origen es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - o)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

Se llama Ecuación **EXPLÍCITA** de la recta

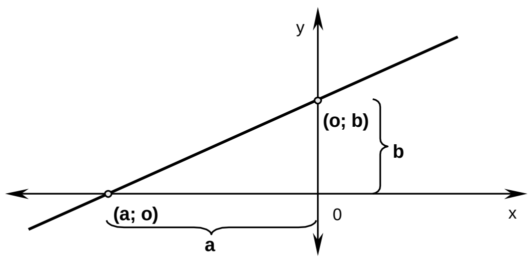
Donde: **m** = pendiente
b = ordenada al origen

b) La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados (x e y) en los puntos **(a, o)** y **(o, b)** es:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Se llama Ecuación **SEGMENTARIA** de la recta

Donde: **a** = abscisa al origen
b = ordenada al origen



c) Ecuación **GENERAL** o **IMPLÍCITA** de la recta de primer grado en dos variables (x e y), tiene la forma:

$\boxed{Ax + By + C = 0}$ Donde A, B y C son constantes arbitrarias

$$m = \frac{-A}{B}, \quad b = \frac{-C}{B} \quad y \quad a = \frac{-C}{A}.$$

m = pendiente
b = ordenada al origen
a = abscisa al origen

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS EN EL PLANO

RECTAS PARALELAS	RECTAS PERPENDICULARES
Si dos rectas R_1 y R_2 son paralelas, sus pendientes m_1 y m_2 son iguales. Es decir: $m_1 = m_2$	Si dos rectas R_1 y R_2 son perpendiculares, la pendiente m_1 de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de m_2 de la otra con signo contrario. Es decir: $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ o bien: $m_1 . m_2 = -1$

a) Si dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ son Paralelas, sus pendientes son $m = m_1$

Es decir: $m = \frac{-A}{B}$

$m_1 = \frac{-A_1}{B_1}$.

$$\frac{-A}{B} = \frac{-A_1}{B_1}$$

$$\boxed{\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}}$$

b) Si dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ son Perpendiculares, sus pendientes $m = \frac{-1}{m_1}$ es decir:

$$\frac{-A}{B} = \frac{-1}{\frac{-A_1}{B_1}} = \frac{B_1}{A_1} \qquad \frac{A}{B} = \frac{-B_1}{A_1}$$

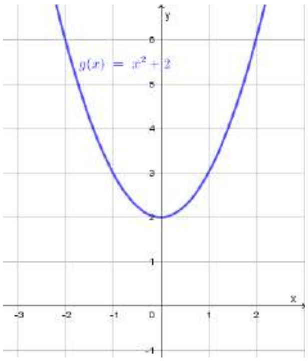
$$\boxed{A . A_1 + B . B_1 = 0}$$

EJERCITACIÓN UNIDAD Nº 2

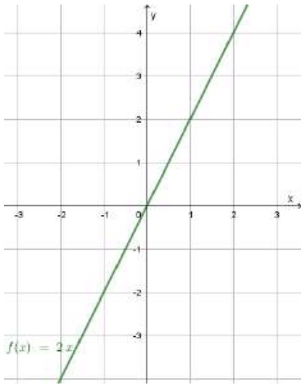
FUNCIONES. RECTAS EN EL PLANO

FUNCIONES

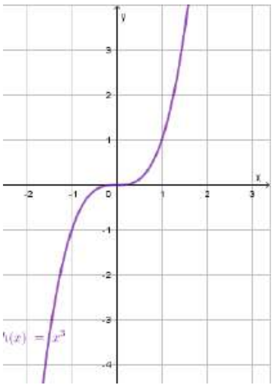
1. Escriba el dominio y la imagen de las funciones representadas en cada gráfico:



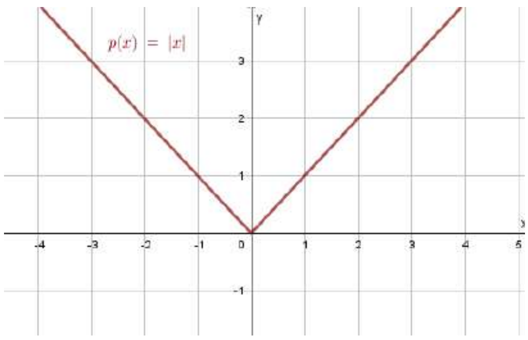
Dominio:………………
Imagen:………………



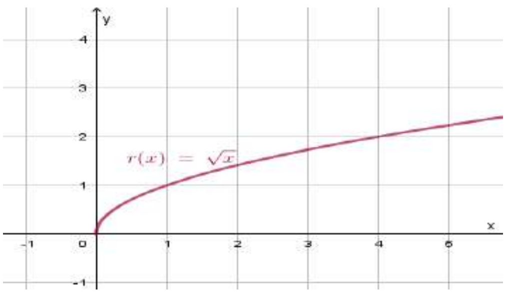
Dominio:………………
Imagen:………………



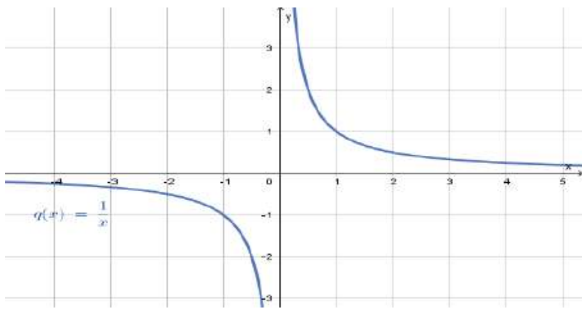
Dominio:………………
Imagen:………………



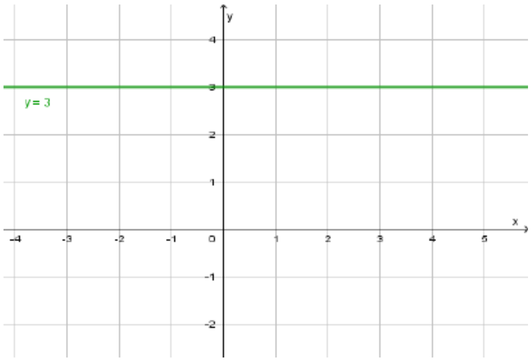
Dominio:………………
Imagen:………………



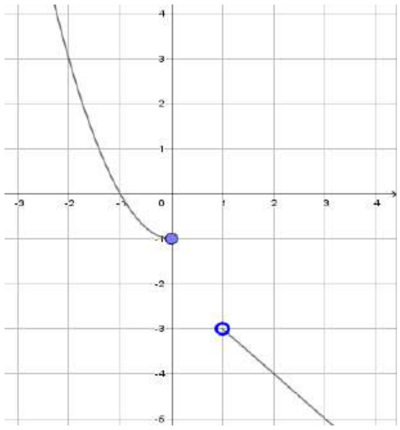
Dominio:………………
Imagen:………………



Dominio:………………
Imagen:………………



Dominio:………………
Imagen:………………



Dominio:………………
Imagen:………………

2. **Dadas las siguientes ecuaciones:**

a) Grafique

b) Determine dominio e imagen

c) Determine f (0), f (-2), f (4)

a- $f(x) = -2x + 1$

b- $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$

c- $f(x) = x^2 - 3$

d- $f(x) = -x^2 + 4$

e- $f(x) = -x^2 - 4x$

f- $f(x) = x^3$

g- $f(x) = \sqrt{x - 2}$

h- $f(x) = |x - 1|$

i- $f(x) = -|x| + 4$

j- $f(x) = \frac{1}{x+2}$

k- $f(x) = x^3 + 3$

l- $f(x) = -\frac{5}{4}x$

m- $f(x) = 3$

n- $f(x) = -2$

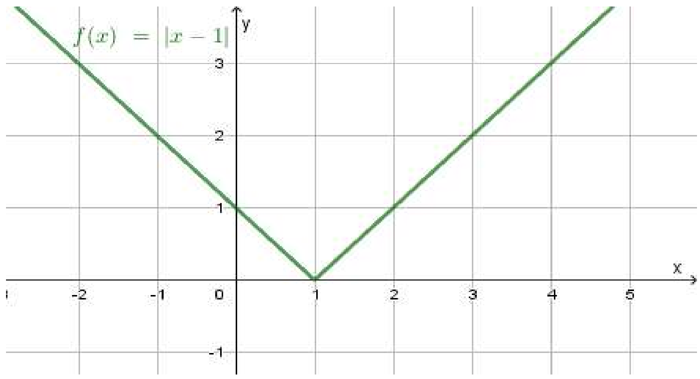
o- $f(x) = |x|$

Solución ejercicio 2h

a) Gráfica de la función $f(x) = |x - 1|$

Para graficar una función es conveniente hacer una tabla de valores donde se le asignan valores a la variable independiente **x** y se obtienen los correspondientes valores de la variable dependiente **y**

Por ejemplo, si **x**=-3, se reemplaza en la función y se obtiene **y**=$f(-3) = |-3 - 1| = 4$.Se procede de igual forma para otros valores de **x,** tanto positivos como negativos.



x	y= | x-1|
0	1
1	0
2	1
4	3
-1	2
-2	3
-3	4

b)- Dominio e imagen de la función

El dominio son los reales $D: (-\infty, \infty)$

La imagen de esta función son los reales positivos incluyendo el cero $I: [0, \infty)$

c)- $f(0) = |0 - 1| = 1$

$f(2) = |2 - 1| = 1$

$f(4) = |4 - 1| = 3$

3. **Diga si las siguientes funciones son creciente o decreciente en un punto dado. Justifique su respuesta en forma analítica, tomando h=0,1.**

a) $f(x) = -3x + 2$ en x=2

b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ en x=6

c) $f(x) = 2x^2 + 3$ en x= -2

d) $f(x) = |x + 2|$ en x=-1

e) $f(x) = 5x$ en x=3

f) $f(x) = \sqrt{x}$ en x=4

Solución ejercicio 3a)

Análisis del crecimiento o decrecimiento de la función $f(x) = -3x + 2$, en x=2.

En x=2 la función decrece ya que si tomamos un $h = 0{,}1$ y reemplazamos los valores en la siguiente condición obtenemos:

$$f(x_0 - h) > \quad f(x_0) \quad > f(x_0 + h)$$

$$f(1{,}9) > \quad f(2) \quad > f(2{,}1)$$

$$-3.(1{,}9) + 2 > -3.(2) + 2 > -3.(2{,}1) + 2$$

$$-3{,}7 > \quad -4 \quad > -4{,}3$$

x	y= -3x + 2
(X_0)= 2	-4
$(X_0 + h)$= 2,1	-4,3
$(X_0 - h)$= 1,9	-3,7

4. **Dadas las siguientes funciones**
   a)- Grafique

   b)- Determine Dominio e Imagen.

   c)-Determine el valor de la función en x=2

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ -2} & \text{si x<0} \\ \text{2x+3} & \text{si x>0} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \text{3x} & \text{si -2} \leq x < 0 \\ 2\text{x}^2 + 1 & \text{si x>0} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si x<-1} \\ \text{x+1} & \text{si x} \geq 0 \end{cases}$

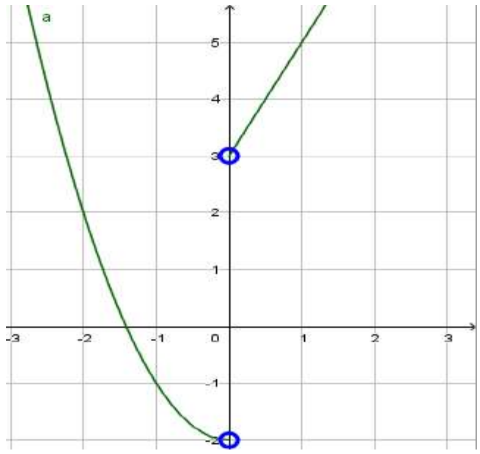
d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ -2} & \text{si x<0} \\ |\text{x-3}| & \text{si x>0} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \text{-x} + 3 & \text{si -2} \leq \text{x<2} \\ \sqrt{\text{x-4}} & \text{si x} \geq 4 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \text{-x}^2 + 3 & \text{si -3} \leq \text{x<1} \\ x - 5 & \text{si x} \geq 3 \end{cases}$

Solución Ejercicio 4a

Grafica de la función $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2} \text{ -2} & \text{si x<0} \\ \text{2x+3} & \text{si x>0} \end{cases}$



Para graficar la función conviene realizar una tabla de valores donde se le asignan valores a la variable independiente "**x**" y se obtienen los correspondientes valores de la variable dependiente "**y**".

En este caso se debe tener precaución en cuál de las expresiones se reemplaza la variable x.

Para los valores de $x<0$ se reemplaza en la primera expresión ($x^2 - 2$)

Para $x>0$ se reemplaza en la segunda ($2x+3$).

La función está definida para todos los reales **excepto el cero**, es por ello que el dominio se puede expresar como unión de intervalos de la siguiente forma:

D: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

La imagen de esta función serán los valores de **y** mayores que -2 (sin tomar este valor) I: $(-2, \infty)$

En la gráfica: Se coloca

- punto lleno cuando tenemos los siguientes signos $\geq o \leq$, en las restricciones del dominio
- punto vacío cuando tenemos los siguientes signos > o < , en las restricciones del dominio

El valor de $f(2) = 2.2 + 3 = 7$.

Notar que para $x=2$ se ha reemplazado en la ecuación $2x+3$ ya que esta expresión es la que corresponde para valores mayores que cero.

RECTAS

1. **Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto:**
   a) P (-4; 3) y tiene pendiente m = -2. Graficar
   b) $P\left(-\frac{5}{2},\ 1\right)$ y tiene pendiente m = $\frac{2}{3}$. Graficar
   c) $P\left(\frac{1}{3},\ -2\right)$ y tiene pendiente m = 3. Graficar
   d) P (-4; 3) y tiene pendiente m= -2. Graficar

1.1 **Exprese cada una de las ecuaciones de la rectas encontradas en forma explícita, implícita y segmentaria. Complete el cuadro**

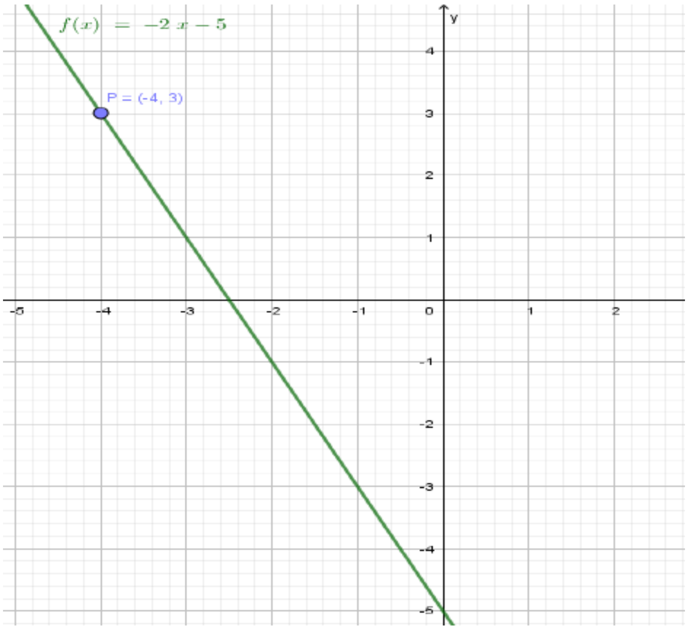
Datos: P(- 4; 3) $x_1 = -4$; $y_1 = 3$

$m = -2$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 3 = -2\,(x + 4)$$

$$y = -2x - 8 + 3$$



Ecuación explícita de la recta (y= mx +b)

y = - 2x - 5

Ecuación implícita de la recta (Ax +By +C= 0)

2x+y+5=0

Ecuación segmentaria de la recta $\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right) = 1$

2x+y+5=0

Despejo el término independiente.

2x + y = -5

Divido por el mismo valor a ambos lados de la igualdad.

$$\frac{2x}{-5} + \frac{y}{-5} = \frac{-5}{-5}$$

Resuelvo

$$-\frac{2x}{5} - \frac{y}{5} = 1$$

Ecuación Segmentaria de la recta

$$\left(\frac{x}{-\frac{5}{2}}\right) - \left(\frac{y}{5}\right) = 1$$

	Ec de la recta	Explicita	Implícita	Segmentaria
A)	Y=-2X -5	Y=-2X -5	Y+2X+5=0	$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-5} = 1$
B)				
C)				
D)				

2. Encontrar la ecuación de la recta dados los siguientes puntos:
   a) P_1 (-2; -3) y P_2 (4; 2)
   b) P_1 (-3; -5) y P_2 (1; 3)
   c) P_1 (-1; 3) y P_2 (2; -3)
   d) P_1 (3; 2) y P_2 (-1; 3)

2.1 Complete lo pedido con las rectas obtenidas en el punto anterior. Graficar.

Función lineal y= mx + b	Pendiente	Ordenada	Abscisa
a) $y = \frac{5}{6}x - \frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{24}{15}$
a)			
c)			
d)			

Solución ejercicio 2.1 a)

<u>Datos</u>: P_1 (-2; -3) $x_1 = -2$; $y_1 = -3$

P_2 (4; 2) $x_2 = 4$; $y_2 = 2$

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}\quad \frac{y-(-3)}{x-(-2)}=\frac{2-(-3)}{4-(-2)} \to \frac{y+3}{x+2}=\frac{5}{6} \to y+3=\frac{5}{6}(x+2) \to$$

$$y=\frac{5}{6}(x+2)-3 \to y=\frac{5}{6}x+\frac{5}{3}-3 \to \boxed{y=\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}}$$

2.2 Encontrar una recta paralela a la encontrada en el punto 2 y que pase por el punto:

a) P(1,-5). Para la recta 2a). Graficar
b) P(-2,3). Para la recta 2b). Graficar
c) P(-1,-2). Para la recta 2c). Graficar
d) Origen de coordenadas. Para la recta 2d). Graficar

2.3 Encontrar una recta perpendicular a la encontrada en el punto 2 que pase por el punto:
a) Origen de coordenadas. Para la recta 2a). Graficar
b) P(-1,3).Para la recta 2b). Graficar
c) P(-2,-2). Para la recta 2c). Graficar
d) P(-3,2). Para la recta 2d). Graficar

Solución ejercicio 2.2 a) Recta Paralela : Condición de paralelismo entre rectas $m_1 = m_2$

$m_1 = \frac{5}{6}$ $\qquad P(1,-5)$

$$m_2 = \frac{5}{6}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = \frac{5}{6}(x-1)$$

$$y + 5 = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6} - 5$$

$$\boldsymbol{y = \frac{5}{6}x - \frac{35}{6}}$$

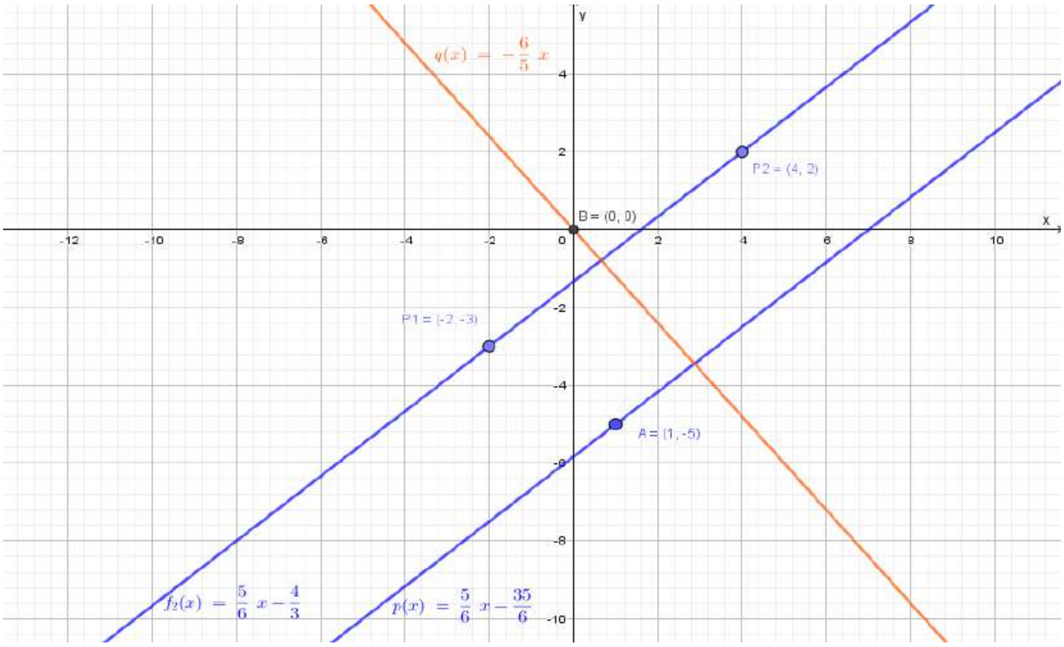
Solución ejercicio 2.3 a) Recta Perpendicular: Condición de perpendicularidad entre rectas $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

$m_2 = -\frac{6}{5}$ $\qquad P(0,0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 0 = -\frac{6}{5}(x-0)$$

$$y = -\frac{6}{5}x$$



3 Ecuaciones especiales

a) Escribir la ecuación del eje x
b) Escribir la ecuación del eje y
c) Escribir la ecuación de una recta paralela al eje x
d) Escribir la ecuación de una recta paralela al eje y

4 Obtenga la pendiente y la ordenada al origen de la recta determinada por la ecuación indicada y grafique. Obtenga el ángulo de inclinación de la recta.

a) $3x - 2y - 4 = 0$ pendiente………… Ordenada al origen…………abscisa al origen…………..
b) $x - 4 = -\frac{1}{2}y - 3$ pendiente………… Ordenada al origen…………abscisa al origen…………..
c) $y - 6 = 3(x - y)$ pendiente………….Ordenada al origen…………abscisa al origen………….

5 Ejercicio integrador

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2-1) y tiene pendiente m=-1/3. Expresarla en todas las formas conocidas. Graficar.
b) Escribir la ecuación de una recta paralela y otra perpendicular a la anterior y que pase por el origen de coordenadas. Graficar.
c) Escribir la ecuación de una recta paralela y una recta perpendicular a la encontrada en a) y que pase por el punto P(-4,-2) Graficar.
d) Encontrar las rectas paralelas a los ejes coordenados que pasan por el punto P(5,-1). Graficar.

UNIDAD 3:
NÚMERO DE ORO Y TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

RAZONES Y PROPORCIONES NUMÉRICAS

1. RAZÓN:

Dados en un cierto orden dos números **a** y **b** $\neq$ 0 se llama **razón** entre a y b, al número n, **cociente** entre ambos números.

$$\text{Razón: } \frac{a}{b} = n$$

Al primer número "a" se le llama **antecedente** de la razón y al segundo "b" se le llama **consecuente.**
Ejemplo: En su actividad normal el corazón de un adulto late alrededor de 70 veces por minuto, mientras que el de un recién nacido alcanza 140 latidos por minuto.

$$\frac{\text{números de latidos del corazón del recién nacido}}{\text{números de latidos del corazón del adulto}} = \frac{140}{70} = 2$$

Respuesta: la razón de latidos entre un adulto y un recién nacido es igual a 2.

2. PROPORCIÓN

Dados en un cierto orden cuatro números a, b, c y d $\neq$ 0, se dice que forman proporción cuando la razón entre los dos primeros a y b es igual a la razón entre los dos últimos c y d; es decir que una proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{(I)}$$

Los números a y d se llaman **extremos** de la proporción y los números c y b, **medios**.
La proporción se llama **proporción ordinaria**. Al extremo **d** se le llama **cuarto proporcional.**

Ejemplo:

✓ $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$ Proporción ordinaria

Una proporción, se dice **continua,** cuando los medios son iguales. Al extremo **c** se le llama **tercero proporcional** y al medio **b** se le llama **medio proporcional**: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

✓ $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ Proporción continua

Propiedad Fundamental: "EL PRODUCTO DE LOS MEDIOS ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS".

En la vida cotidiana se pueden encontrar muchas magnitudes que se relacionan entre sí mediante una proporción (velocidad, tiempo, peso, precio, etc), veamos algunos ejemplos:

a) Un rectángulo mide 50 cm de ancho y 20 cm de alto. Hallar la razón entre el ancho y el alto. ¿Qué nos indica la razón?

Solución: Calculamos el cociente entre el ancho del rectángulo y su altura.

$$\frac{50cm}{20cm} = 2{,}5$$

Respuesta: La razón es 2,5 e indica que la anchura es 2,5 veces la altura.

b) 2) Una chica tiene 15 años y su padre 45 años. Hallar la razón entre la edad de la hija y la edad del padre. Explica qué significa la razón.

Solución: Calculamos el cociente entre la edad de la hija y la edad del padre.

$$\frac{15 \text{ años}}{45 \text{ años}} = \frac{1}{3}$$

Respuesta: La razón es 1/3 e indica que la edad de la hija es la tercera parte de la edad del padre.

3. ESCALA

La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de estos.

Esta problemática la resuelve la ESCALA, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo.

La Escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad sobre un plano o mapa. Las escalas se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor de las medidas del plano y el consecuente, el valor de las medidas en la realidad.

$$\textbf{Escala} = \frac{\text{long. del dibujo}}{\text{long. real}}$$

Despejando la fórmula obtenemos:

$$\textbf{long. del dibujo} = \text{escala. long.real}$$

$$\textbf{long. real} = \frac{\text{long. del dibujo}}{\text{escala}}$$

La proporción relativa entre elementos debe ser equilibrada, lo que implica el uso de una escala correcta en la composición.

Esta representación gráfica que se hace, cuidando de conservar exactamente la forma, es necesaria, para que el objeto y su representación sean *semejantes*. Por lo general, de distinto tamaño que el objeto real; pero como la forma debe conservarse, las relaciones entre las dimensiones reales y las correspondientes a la representación deben ser constantes.

Así, por ejemplo, si a una longitud de 15 m corresponde en la representación una longitud de 5 cm, la escala del plano es:

$$\frac{5\text{ cm}}{15\text{ m}} = \frac{5\text{ cm}}{1500\text{cm}} = \frac{1}{300}$$

Esto significa que una longitud del dibujo es 300 veces menor que la correspondiente a la longitud real.

EJEMPLOS DE ESCALAS NORMALIZADAS

ESCALAS DE REDUCCION				ESCALAS DE AMPLIACIÓN
Fabricación e instalaciones	Construcciones civiles	Topografía	Urbanismo	
		1 : 100		
	1 : 5	1 : 200		
1 : 2,5	1 : 10	1 : 500		
1 : 5	1 : 20	1 : 1.000		
1 : 10	1 : 50	1 : 2.000	1 : 500	
1 : 20	1 : 100	1 : 5.000	1 : 2.000	
1 : 50	1 : 200	1 : 10.000	1 : 5.000	2 : 1
1 : 100	1 : 500	1 : 25.000	1 : 25.000	5 : 1
1 : 200	1 : 1.000	1 : 50.000	1 : 50.000	10 : 1
ESCALA REAL				1:1

EJEMPLO DE APLICACIÓN

El siguiente plano corresponde a una casa en Esc= $\frac{1}{200}$ o también Esc=1:200, esto significa que cada unidad del dibujo representa 200 unidades de longitud en el objeto real. Si queremos calcular las dimensiones reales del dormitorio más grande a partir del dibujo, será:

long. dibujo = 2,4 cm(medir con la regla)

Esc. = $\frac{long\ dibujo}{Long\ \ real}$ reemplazando $\frac{1}{200} = \frac{2{,}4cm}{x}$

Despejando $x = \frac{200.2{,}4\,cm}{1} = 480\ cm = 4{,}8\,m$

La otra medida de la habitación es:
long dibujo =1,75 cm.

Aplicando el mismo procedimiento obtendremos que la Long real = 3,5m

NÚMERO DE ORO

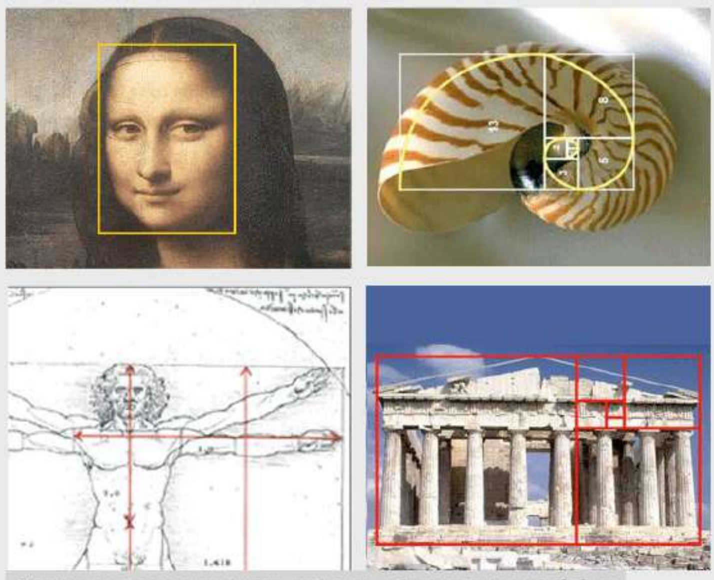
El número de oro (también llamado número áureo, razón dorada, proporción áurea o divina proporción) **es un número irracional, representado por la letra griega φ** (phi)

φ = 1,61803398874988…

Se trata de un número irracional (su representación decimal no tiene período) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como una expresión aritmética, sino como **relación o proporción entre dos segmentos de una recta**, es decir, **una construcción geométric**a. Esta proporción **se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza**: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etc. Una de sus propiedades aritméticas más curiosas es que su cuadrado (Φ^2 = 2,61803398874988…) y su inverso ($1/\Phi$ = 0,61803398874988…) tienen las mismas infinitas cifras decimales.

Durante los últimos siglos, creció el mito de que los antiguos griegos estaban sujetos a una proporción numérica específica, esencial para sus ideales de belleza y geometría (creían que la proporción conducía a la salud y a la belleza). Dicha proporción es conocida con los nombres de **razón áurea** ó **divina proporción**.

Esta brillante mística está totalmente vinculada a Pitágoras, filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón, pudiéndose demostrar la proporción que Platón había denominado "la sección" y que más tarde se conocería como "sección áurea", en la Edad Media, la sección áurea era considerada de origen divino: se creía que encarnaba la perfección de la creación divina. Esta constituía la base, en la que se fundaba el arte, el diseño y la arquitectura, donde se considera agradable la proporción entre longitud y anchura de aproximadamente 1,618, uno de los ejemplos más renombrado es el diseño del Partenón de Atenas. Por ello y muchos más motivos, podemos afirmar que toda armonía puede se expresada por números, las extrañas propiedades de la Sección Áurea son la causa de que haya sido considerada históricamente como **divina en sus composiciones e infinita en sus significados.**



Obras de arte, naturaleza, cuerpo humano, arquitectura... todas presentan la proporción áurea

La existencia de un número nada fácil de imaginar, que convive con la humanidad porque aparece en la naturaleza, y desde la época griega como ya dijimos y hasta nuestros días en el arte y el diseño, es el llamado **número de oro,** designado con letra griega $\phi = 1{,}61803$... (Fi), es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que lo tuvo presente en sus obras.
Podemos nombrar otros dos números de gran importancia en matemáticas y que "paradójicamente" también se los designa con una letra.

Estos números son:

- El número designado con la letra griega $\pi = 3{,}14159$....(Pi) que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro (Longitud = 2. π .radio= π .diámetro).
- El número $e = 2{,}71828$......, inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler

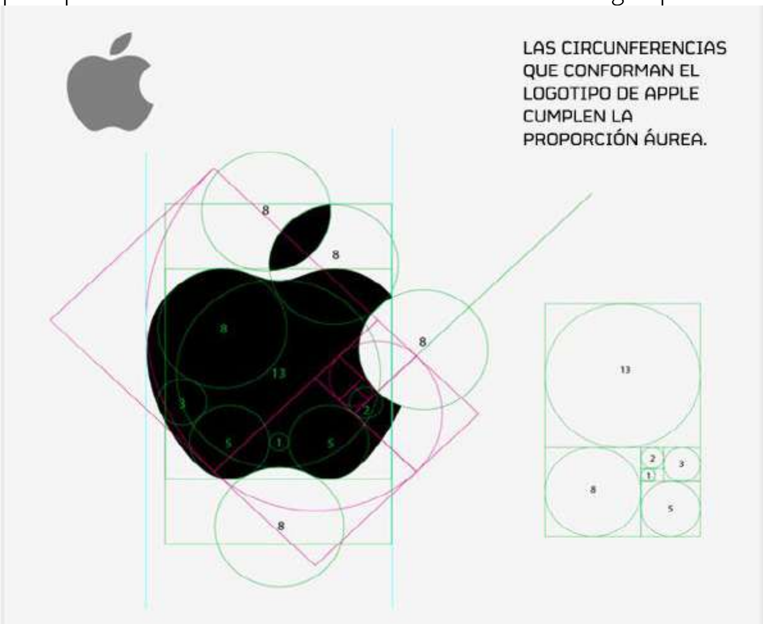
Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente).

Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los números π y e, con el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación polinómica (a estos números se les llama trascendentes), mientras que el número de oro si lo es. Efectivamente y como veremos más adelante, **es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado** que da como resultado el ya nombrado número de oro.

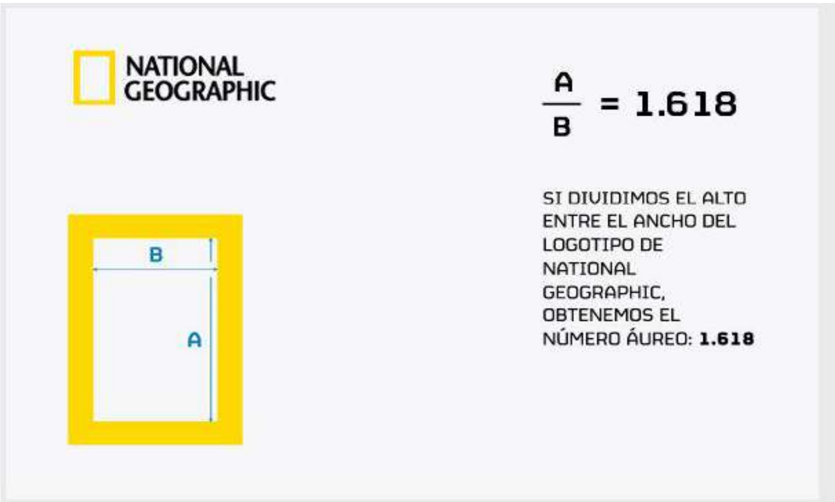
APLICACIONES EN EL CAMPO DEL DISEÑO

El ejemplo más cercano y curioso en el que encontraremos la proporción áurea es en las tarjetas de crédito. Si dividimos el largo en el alto de una tarjeta de crédito obtendremos el número áureo: 1,618 . Esta fascinación y mitificación de la proporción áurea continúa viva en nuestros días, y es precisamente en el diseño de logotipos donde encontramos grandes ejemplos de ello.

Creyendo que la proporción áurea ayudará a crear diseños estéticamente más agradables, muchos creativos han optado por aplicar esta relación a la construcción de sus logotipos.

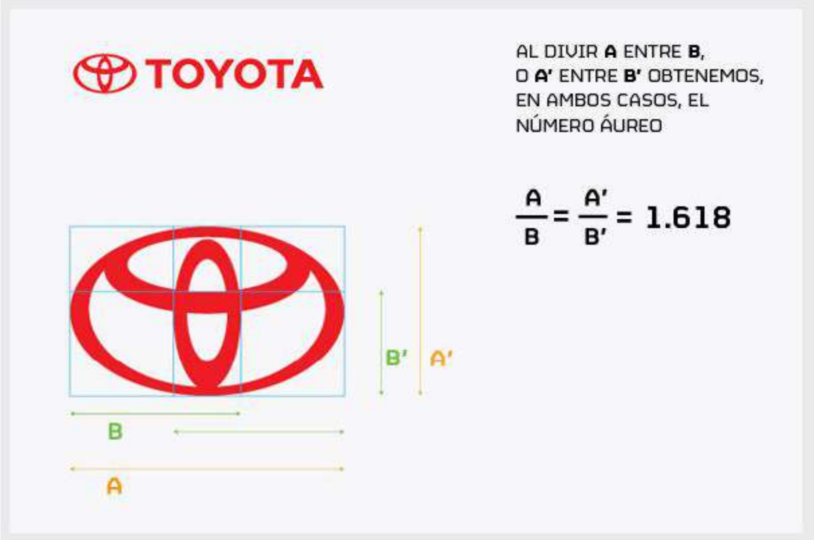


Por ejemplo, observamos esta relación áurea en el logotipo de Apple, uno de los iconos más reconocible de nuestro siglo. Su diseño, limpio y proporcionado, está además construido en función a una serie de circunferencias, cuya relación encaja perfectamente en la proporción áurea.

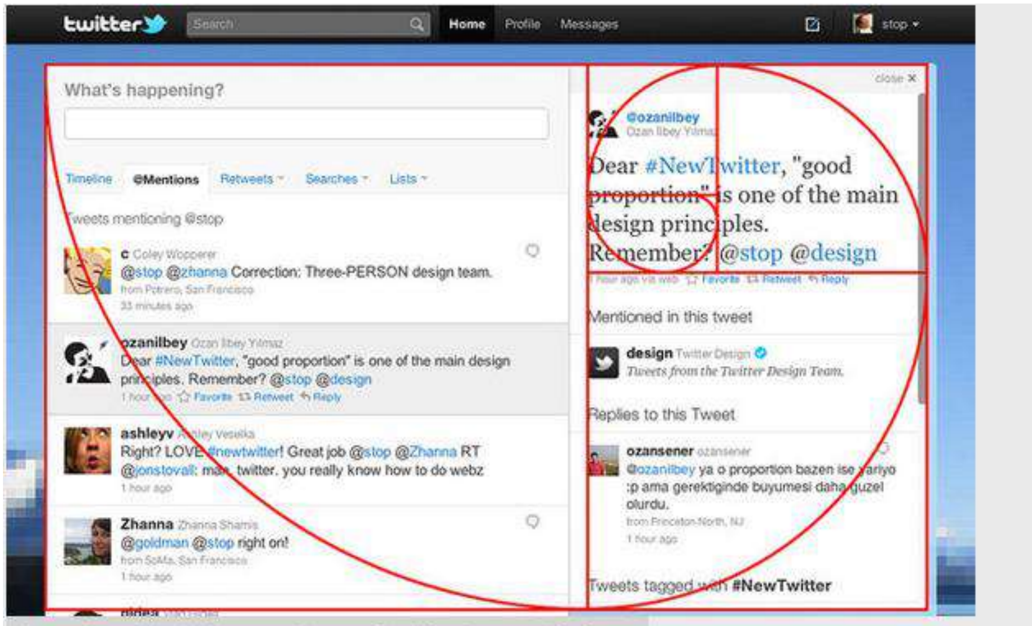


El segundo ejemplo que nos encontramos es el del logotipo de National Geographic, diseñado por el estudio neoyorkino Chermayeff & Geismar (http://www.cgstudionyc.com/identities/national-geographic).

Aunque en apariencia parezca un simple rectángulo amarillo, en realidad este rectángulo respeta a la perfección las proporciones áureas. Un detalle muy apropiado para una marca centrada en la belleza de la naturaleza.



En el logotipo de Toyota podemos observar fácilmente esta divina proporción. Enmarcando el logotipo en una cuadrícula, se aprecia que las relaciones entre las distintas distancias resultantes es siempre 1,618, el número áureo.



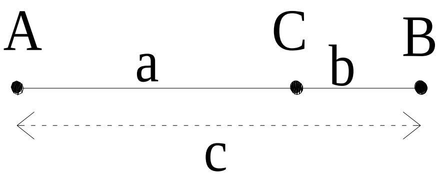
La propia web de twitter se construye en función a la proporción áurea

Pero lo más curioso de todo esto es cómo la propia web de Twitter presenta una estructura compuesta en función a la divina proporción. Con rectángulos áureos, podemos diseñar la retícula básica para hacer el diseño de nuestro sitio web.

O en el diseño de un simple ratón de ordenador. Muchos objetos cotidianos, empiezan sus inicios en un diseño basado en el **rectángulo áureo** aunque posteriormente sean deformados según necesidades o objetivos de utilidad.

¿QUÉ ES Y DE DÓNDE PROVIENE EL NÚMERO DE ORO?

Si tomamos un segmento AB y le aplicamos una partición asimétrica definiendo un tercer punto C, el número de oro nace de plantear la proporción entre los segmentos obtenidos y el total.



"Buscar dos segmentos tales que el cociente entre el segmento mayor a y el menor b sea igual al cociente que resulta entre la suma de los dos segmentos y el mayor".

Expresado matemáticamente: $\frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$

Es decir:

$$\frac{\text{segmento mayor}}{\text{segmento menor}} = \frac{\text{segmento total}}{\text{segmento mayor}}$$

A esta razón, Euclides lo llamo "**división de una longitud en media y extrema razón**", siendo esto la **divina proporción**, pudiéndose alcanzar el valor numérico del **"numero de oro"**.

Podemos obtener el número a partir de la expresión anterior:

$$\frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$$

Dividimos por "b" los dos términos del segundo miembro.

$$\frac{a}{b} = \frac{(a+b)/b}{a/b} = \frac{a/b + 1}{a/b}$$

Si ponemos $\frac{a}{b} = x$; reemplazamos en la expresión anterior nos queda :

$$x = \frac{x+1}{x}$$

por lo que, $x^2 = x + 1$ o bien $x^2 - x - 1 = 0$

Esta última, es una ecuación completa de segundo grado en x, cuyas raíces se pueden encontrar por la formula:

$$\mathbf{x_{1,2}} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - \mathbf{4.a.c}}}{\mathbf{2.a}}$$ de donde

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solución positiva de la ecuación es el número de oro.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

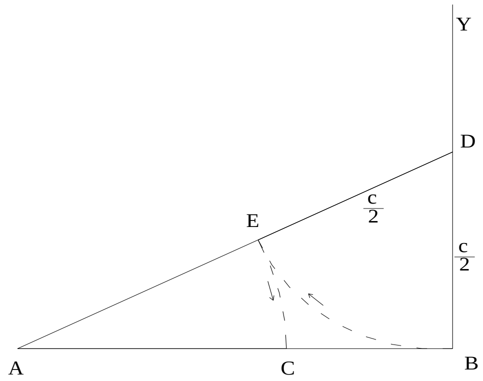
Φ **se obtiene** a partir de la relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir, **a partir de una construcción geométrica** y como vimos es el **resultado** de una de las soluciones **de una ecuación de segundo grado**.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS:

1- <u>DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN SECCIÓN ÁUREA</u>

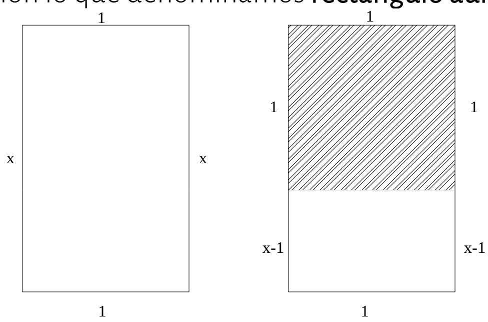
Dado el segmento AB, tomamos sobre BY, perpendicular a AB, un segmento $BD = \frac{AB}{2}$, se une A con D, y se obtiene DE = DB

Con A, como centro, se describe el arco de circulo EC, y C es el punto buscado, tal que $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \Phi$



2- <u>RECTÁNGULO ÁUREO</u>

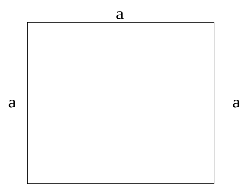
Tomando el **rectángulo** como una de las figuras que se encuentra con mayor frecuencia en construcciones (fachadas de edificios, puertas, ventanas, cuadros, espejos, etc.), nos preguntamos: ¿qué relación debe haber entre la base y la altura de esta figura para que sea **lo más armoniosa posible a la vista**? Haciendo así su aparición lo que denominamos **rectángulo áureo.**



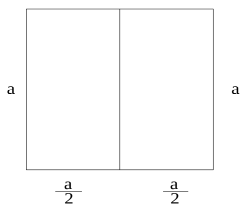
Es aquel que posee una propiedad curiosa: si se le quita un cuadrado -el mayor posible- se obtiene otro rectángulo semejante al primero. Es armonioso en sus proporciones.
Si tomamos como unidad el lado menor, podemos calcular la medida del mayor.

Construcción del rectángulo áureo:

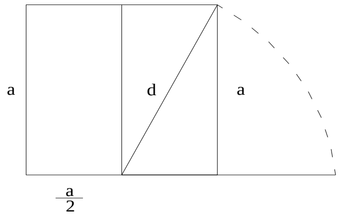
1°) Construimos un cuadrado de lado a



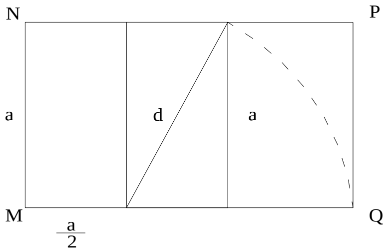
2°) Dividimos el cuadrado en dos rectángulos iguales:



3°) Trazamos la diagonal del segundo rectángulo y marcamos dicha medida sobre la horizontal:

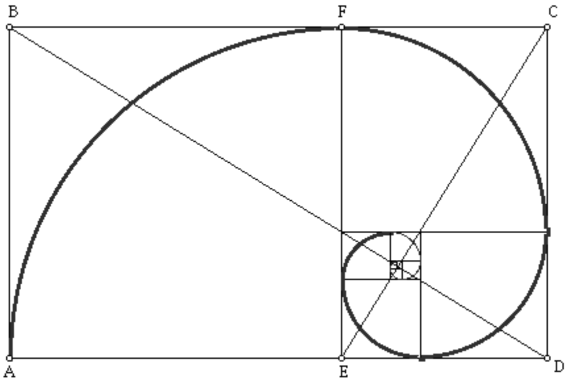


4°) Queda así determinado la base de un rectángulo áureo, que tiene como altura el lado del cuadrado:



$\overline{MN} = a$, altura del rectángulo $\qquad \overline{MQ} = \frac{a}{2} + d$, base del rectángulo áureo

Para comprobar que realmente se trata de un rectángulo áureo, debemos dividir su base por su altura: si el número que resulte de esta operación es el número de oro, habremos logrado nuestro objetivo.
Es posible construir una espiral de oro con un rectángulo áureo (es decir, un rectángulo cuyos lados están en la proporción de oro). Podemos entonces con un compás proyectar un lado y trazar una línea perpendicular. Así tenemos un cuadrado y otro rectángulo áureo. Repetimos esto unas cuantas veces y finalmente unimos los lados con el compás. En realidad, es una falsa espiral, ya que está constituida por arcos de circunferencia y por tanto no hay una variación continua del radio.



En el siguiente enlace encontraras la construcción. https://www.youtube.com/watch?v=BEIR2UyyphE&t=26s

LA SERIE DE FIBONACCI:

La serie de Fibonacci es una secuencia infinita de número que comienza por: 1, 1, *2,* 3, 5, 8, 13..., en la que cada uno de ellos es la suma de los dos anteriores.
Así: 2=1+1, 3=2+1, 5=3+2, 13=8+5 .

Hemos calculado los primeros catorce términos de esta serie:

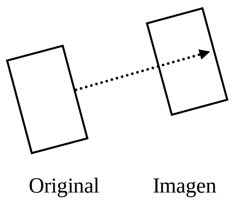
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	T_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

La serie de Fibonacci presenta una propiedad sorprendente: si dividimos dos términos consecutivos de la serie, siempre el mayor dividido en el menor obtenemos Φ =1,61803.....
Cuanto mayores son los términos, los cocientes se acercan más a Φ =1,61803.....

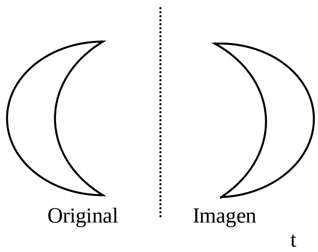
TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

INTRODUCCIÓN

Si se mueven todos los puntos de una figura según ciertas reglas se obtiene una nueva figura. Ese movimiento establece una correspondencia entre los puntos de la figura original y los puntos de la nueva figura. Esta nueva figura se llama *imagen*.



TRASLACIÓN



SIMETRÍA

Existe una función donde a cada punto del plano le hace corresponder un punto del mismo plano. Los movimientos son funciones biyectivas del plano en sí mismo, que conservan la pertenencia, el orden y la distancia.

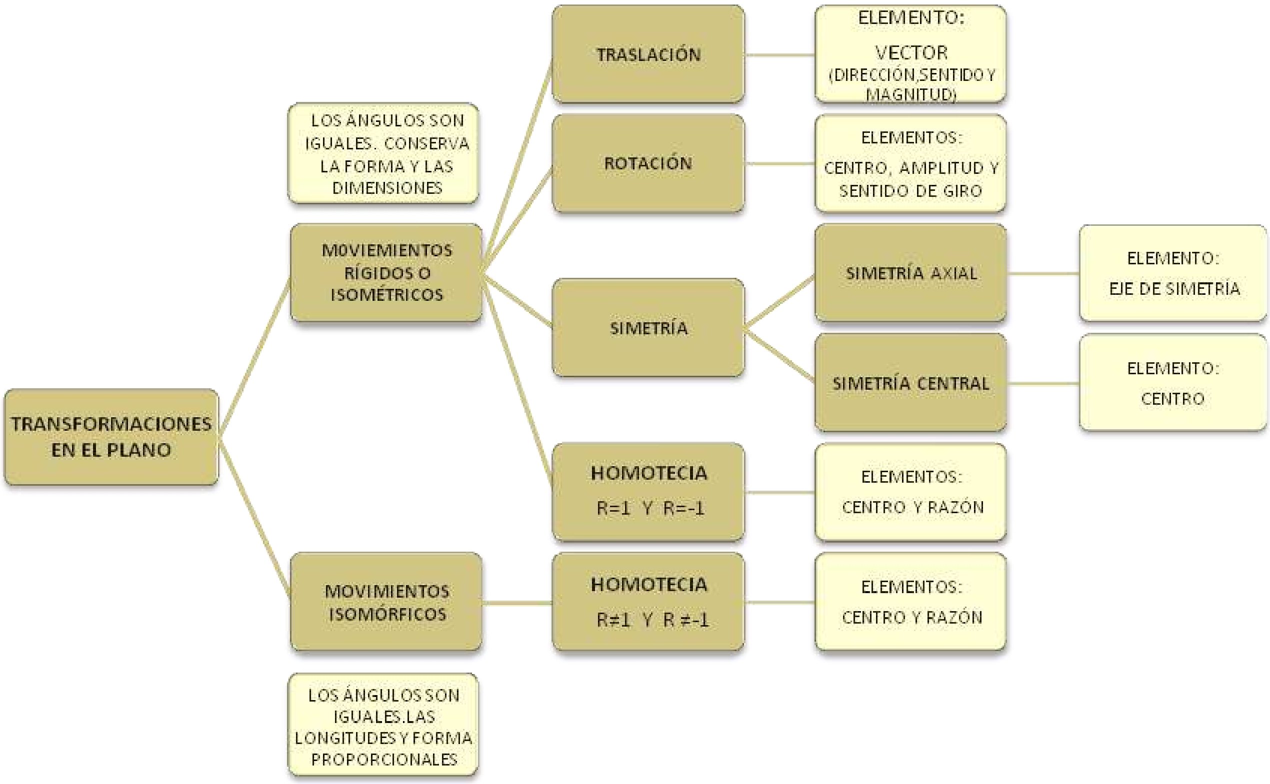
Entre las reglas o condiciones tendremos:

- Un movimiento que conserva el tamaño y las formas de la figura se llama ***movimiento rígido o isometría*** (estos movimientos son transformaciones de figuras en el plano que se realizan sin variar la forma, las dimensiones ni el área de estas; la figura inicial y la imagen son semejantes y por lo tanto congruentes.

- La palabra isometría tiene su origen en el griego *iso* (igual o mismo) y *metria* (medir), *igual medida*.

- Las traslaciones, las rotaciones y las simetrías son movimientos isométricos.

- En una isometría la imagen es siempre **congruente,** es decir, no modifica sus ángulos, sus medidas, ni su forma en relación con la figura original.



MOVIMIENTOS RÍGIDOS O ISOMÉTRICOS:

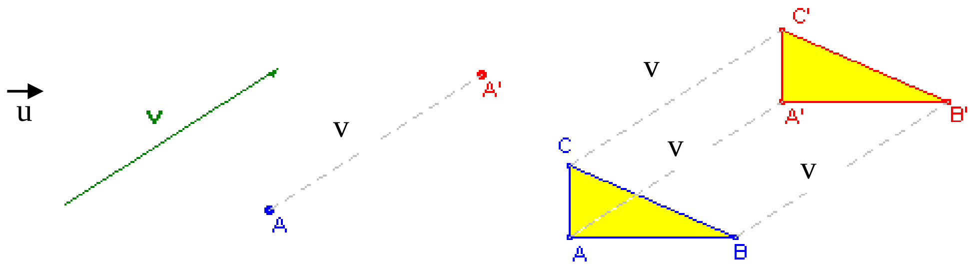
1.TRASLACIÓN

Dado **un vector** se llama **Traslación** a toda transformación que a cada punto A le hace corresponder un punto A' obtenido de aplicar el vector AA' con longitud y orientación invariantes.

Elemento necesario para definir una traslación:

Vector (módulo, sentido y dirección del movimiento)

Para encontrar la imagen del triángulo ABC por $\vec{u}$ hallamos la imagen de cada vértice.



Donde A'B'C' es la imagen de ABC por $\vec{u}$

Con origen en A trazamos $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ A' es la imagen de A por $\vec{u}$

Con origen en B, $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$ B' es la imagen de B por $\vec{u}$

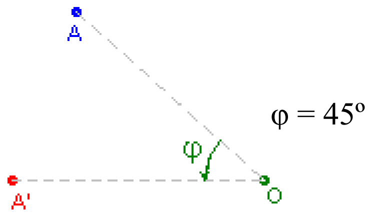
Con origen en C, $\overrightarrow{CC'} = \vec{u}$ C' es la imagen de C por $\vec{u}$

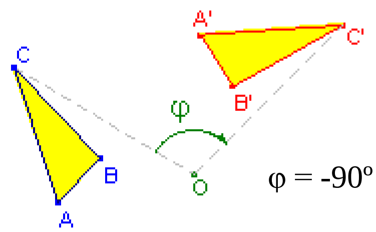
2. ROTACIÓN

Dado **un punto O y un ángulo** α se llama **Rotación** a toda transformación que a cada punto A le hace corresponder un punto A' obtenido de girar el segmento OA un ángulo α

Para determinar un giro o rotación hay que conocer:

- Un punto(O) alrededor del cual se hace el giro.
- Un ángulo (α) que da la amplitud del giro.
- Un sentido del giro. Se considerará el sentido positivo (+) cuando este se realice en sentido contrario a las agujas del reloj,y con sentido negativo (-) cuando el giro se realice en el mismo sentido que las agujas del reloj.
- Simbolicamente la rotación de un punto será P $\xrightarrow{R(O,\pm\alpha)}$ P'



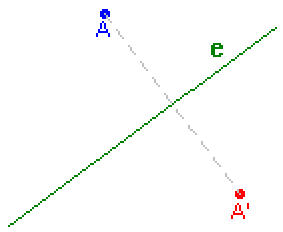


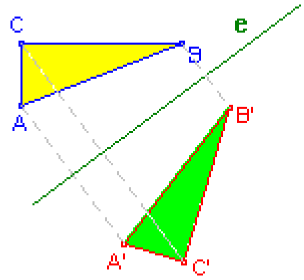
3. SIMETRÍAS

Una simetría respecto a una línea se llama **Simetría Axial** y cuando la simetría es respecto de un punto se llama **Simetría Central**

3.1. SIMETRÍA AXIAL

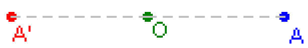
Dado **una recta e** se llama **Simetría Axial** a toda transformación que a cada punto A le hace corresponder un punto A' de forma que la recta **e** sea mediatriz del segmento AA'.

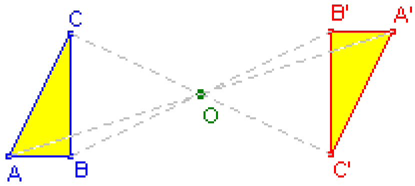




3.2. SIMETRÍA CENTRAL

Dado **un punto O** se llama **Simetría Central** a toda transformación que a cada punto A le hace corresponder un punto A' tal que el punto **O** sea el punto medio del segmento AA'.



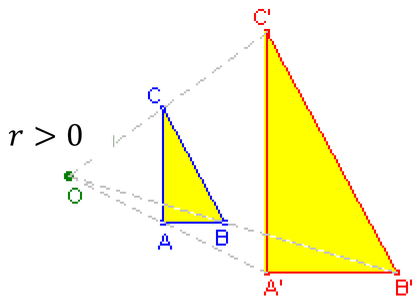


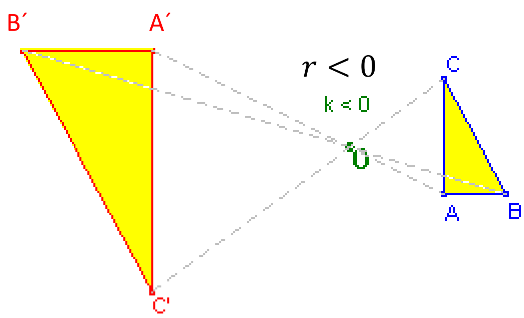
MOVIMIENTOS ISOMÓRFICOS:

1. HOMOTECIA

Dado un **punto O** del plano y **un número real** $r \neq 0$, llamaremos **Homotecia** de centro O y razón *r*, a la transformación que hace corresponder a cada punto A del plano, otro punto A' alineado con O y con A y tal que OA'/ OA = *r* de forma que A' estará situado en la semirrecta OA si es $r > 0$ y en la opuesta si es $r < 0$.

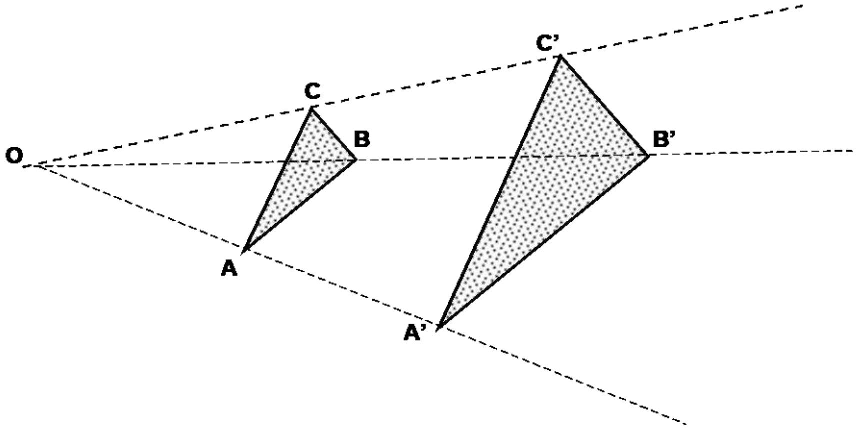
Toda homotecia de razón negativa –r' puede obtenerse como producto de la homotecia de razón positiva +r' por la simetría respecto del centro O.





H(O, r = 2) H(O, r = - 2)

Para definir una homotecia hay que indicar el centro O y la razón r.
Si consideramos ahora un triángulo y lo transformamos por una homotecia de r = 2, nos da otro triángulo de lados proporcionales a los del primero, siendo los ángulos respectivamente iguales.



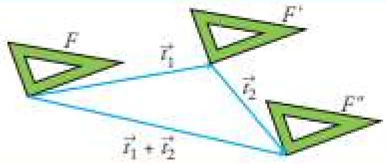
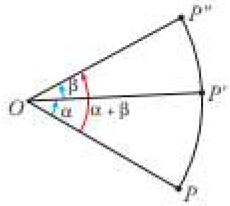
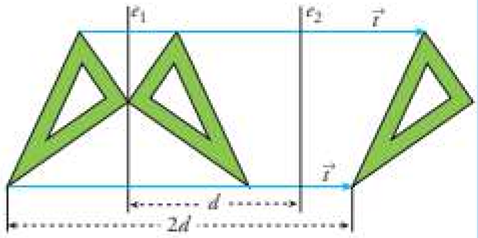
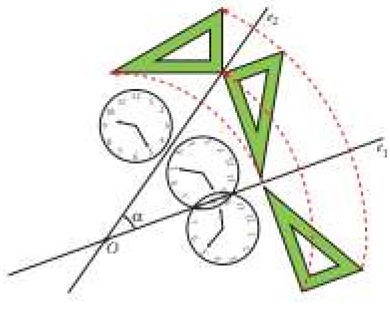
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.

Cuando se aplican a una misma figura varios movimientos se dice que se ha hecho **una composición de movimientos.** El siguiente es un cuadro que resume la aplicación de composiciones:

COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES	Al componer dos traslaciones de vectores $\vec{t_1}$ y $\vec{t_2}$, el resultado es otra traslación cuyo vector es la suma $\vec{t_1}+\vec{t_2}$.	
COMPOSICIÓN DE GIROS DEL MISMO CENTRO	El resultado de componer dos giros con el mismo centro, O, y ángulos α y β, es un nuevo giro de centro O y ángulo $\alpha+\beta$. Si α y β son de sentidos opuestos, la amplitud de $\alpha+\beta$ es la diferencia de sus amplitudes.	
COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS AXIALES CON EJES PARALELOS	El resultado de componer dos simetrías, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, de ejes e_1 y e_2 paralelos, es una traslación $\mathbf{T}$, cuyo vector $\vec{t}$ es perpendicular a los ejes y cuya longitud es el doble de la distancia que los separa, $2d$. (El sentido de $\vec{t}$ es el que va de e_1 a e_2.)	
COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS AXIALES CON EJES QUE SE CORTAN	El resultado de componer dos simetrías, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, de ejes e_1 y e_2 que se cortan bajo un ángulo α, es un giro de ángulo 2α y centro el punto de corte de los dos ejes. El ángulo α que forman los ejes es un ángulo orientado. ($\alpha = \widehat{e_1 e_2}$ es el menor de los ángulos que forman los ejes al cortarse y tiene el sentido de e_1 a e_2.)	

APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL CAMPO DEL DISEÑO

La geometría se encuentra presente en todos los objetos que concibe el hombre.
Iniciamos el estudio de las transformaciones, como medio para abordar una visualización más amplia de los conceptos básicos de la geometría desarrollando el razonamiento y estimulando el análisis de las propiedades de las figuras y sus transformaciones.
Los siguientes son ejemplos de isologos en lo que en su estructuración se han empleado transformaciones

Giro

Simetría central o axial, Giro

Simetría Central

Giro, Simetría axial

Traslación

Semejanza, Giro

Aplicaciones en Diseño Industrial:

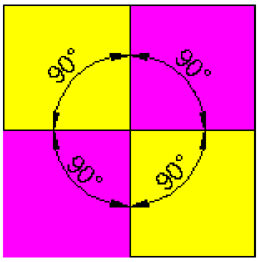
Ejemplos del uso de las transformaciones: traslación, homotecia, simetría y rotación.

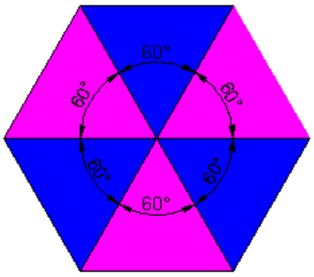
UTILIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

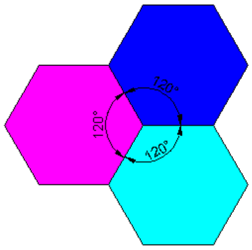
Las transformaciones geométricas han sido una constante en la práctica totalidad de nuestras culturas desde los tiempos remotos hasta la actualidad. Si observamos la pintura (símbolo de la cultura aborigen canaria), a partir de uno de los triángulos rectángulos puedes construir toda la figura. Haciendo combinaciones de los movimiento vistos, es posible cubrir el plano en forma total o parcial con una o varias figuras que se repiten. A esto proceso se le denomina cubrimientos.

Teselar es embaldosar una superficie con figuras regulares o irregulares. Al teselar un plano, las figuras geométricas por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana sin dejar huecos ni superponerse. Para teselar un plano los polígonos se deben someter a **rotación**, **traslación** y o **simetría.**

La condición de formar mosaico es que en la **suma de ángulos en cada vértice** sea **360º.** Solamente tres polígonos regulares rellenan el plano sin solaparse ni dejar huecos: el **triángulo equilátero**, el **cuadrado** y el **hexágono regular**. Los ángulos interiores de estos tres polígonos regulares son **60º**, **90º** y **120º**, respectivamente.





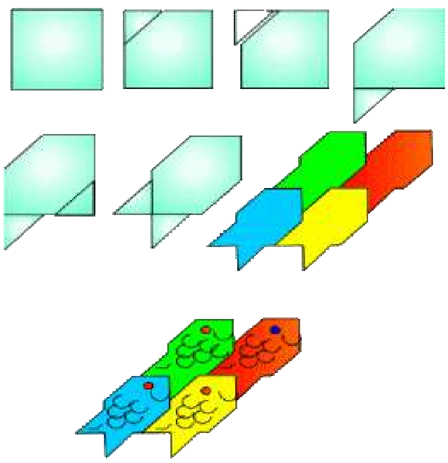


Los cubrimientos realizados con baldosas, cerámicos, pastelones, azulejos, tejas en pisos, muros y techos son las más comunes teselaciones que se encuentran en la realidad. En estas acciones convergen la técnica, el arte y la decoración.

La técnica tiene su lugar cuando se tesela un piso, un muro, una cúpula con figuras o polígonos. En el arte, el cubrimiento con figuras geométricas regulares e irregulares alcanza una combinación de formas, colores y líneas que dan alguna calidad y armonía estética. La decoración, es otra área donde el embaldosado tiene espacio de aplicación. Maurits Cornelis Escher, pintor holandés, cuyos sus trabajos son apreciados por matemáticos, realiza una obra que puede ser calificada como arte matemático y se caracteriza por la división regular del plano. Es un arte surrealista, que divide el plano a través de aves, peces, seres humanos, reptiles donde en la combinación total es difícil apreciar la figura y su fondo.

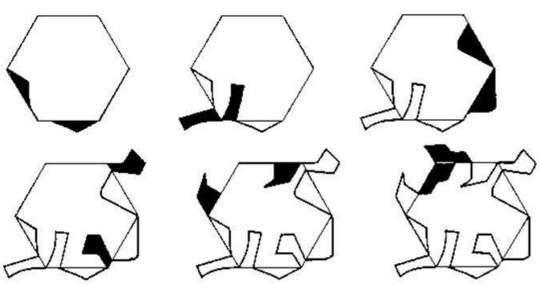
ALGUNOS EJEMPLOS:

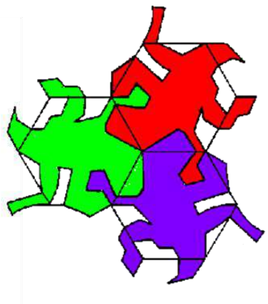
- Utiliza uno de los polígonos regulares con los que se puede teselar el plano, por ejemplo, un cuadrado.
- Recorta una sección del cuadrado a lo largo de una curva que no tenga autointerserciones.
- Pega el segmento recortado del lado opuesto al que fue cortado.
- Repite este proceso cuantas veces quieras.
- Utiliza esta figura como molde para copiarla en una hoja, después trasládala sobre la hoja sin que haya traslapes.
- Decora tus figuras.

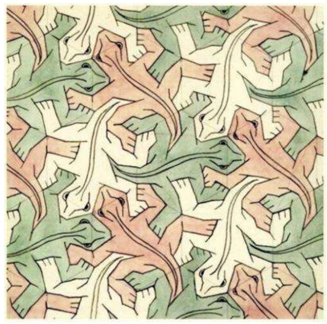


Pasos para construir este teselado:

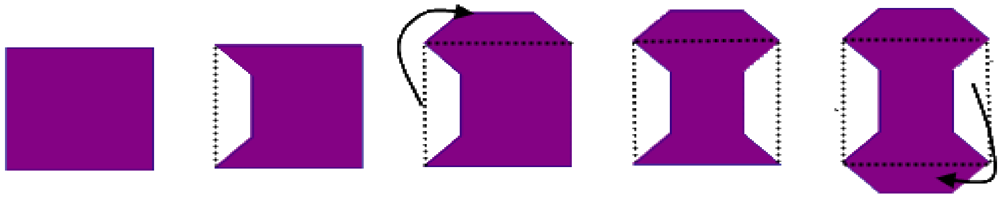
- Se parte de un hexágono regular y se elimina una parte de un lado del polígono para añadirla a otro y se aplica una traslación o una rotación.
- Repetirás este par de acciones y siguiendo siempre el mismo criterio obtendrás la figura deseada.
- Este mosaico encajará con el resto en virtud del proceso de construcción que hayas seguido.

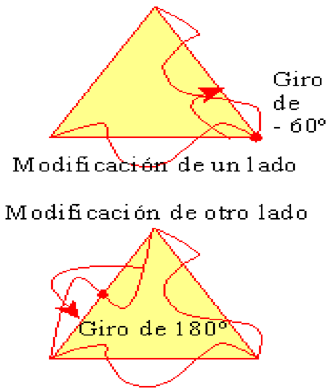


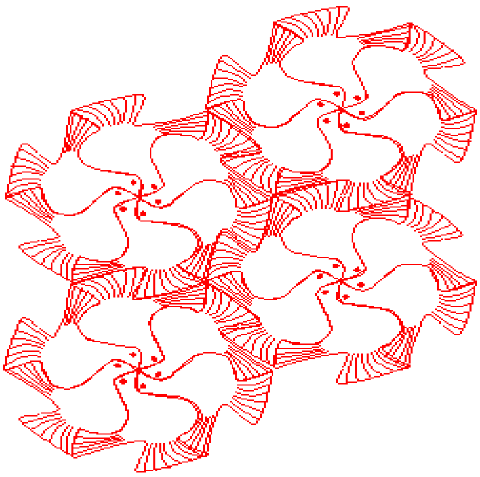




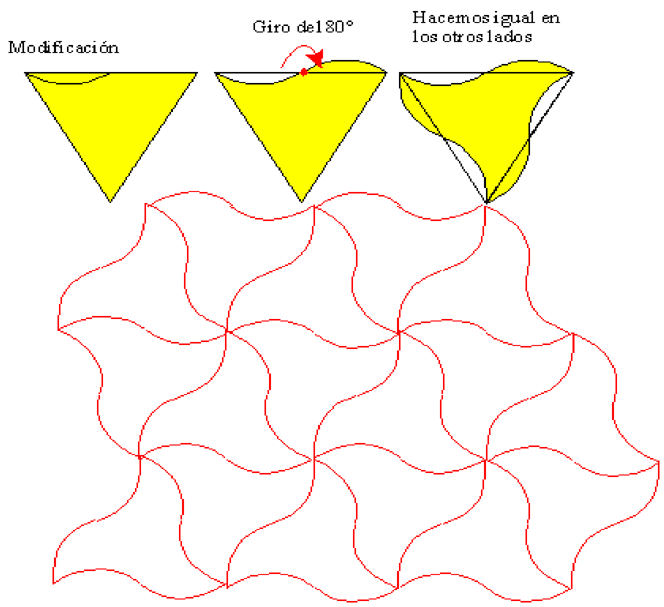
55ghfgh



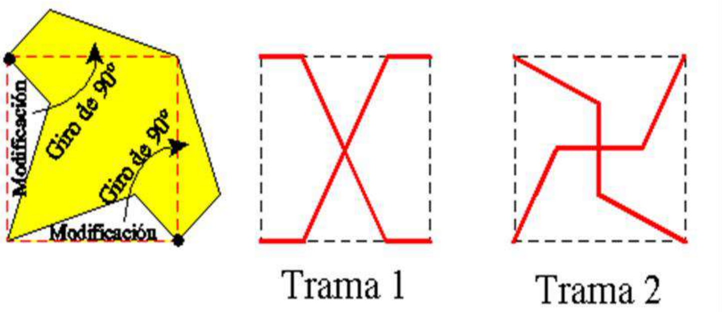


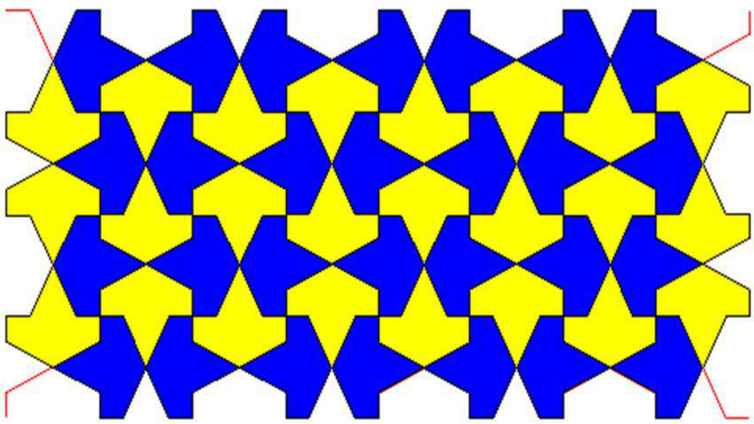


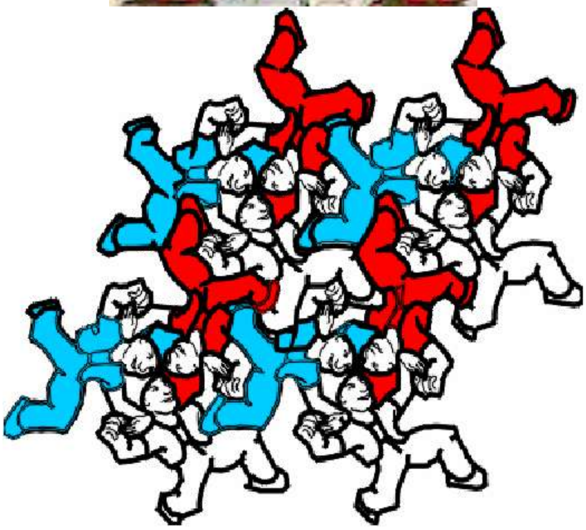
La paloma tesela el plano



¡La pajarita tesela el plano!







EJERCITACIÓN UNIDAD Nº 3
NÚMERO DE ORO. TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

ESCALA

1. Graficar el segmento dado en la Escala de dibujo pedida:

   a) $\overline{AB}$ = 4m→ en Esc: 1:50

   b) $\overline{CD}$= 8m → en Esc: 1:100

   c) $\overline{EF}$ = 3m→ en Esc: 1:20

   d) $\overline{GH}$ = 2m→ en Esc: 1:25

   e) $\overline{IJ}$= 2m →en Esc: 1:300

NÚMERO DE ORO

2. Partiendo del segmento dado, construya la división del mismo, en media y extrema razón, tal que quede determinado el segmento áureo. Verifique si la relación de sus segmentos corresponde al número de Oro.

a) $\overline{AB}$ = 8m → Esc: 1:100

b) $\overline{CD}$= 2m → Esc 1:20

c) $\overline{EF}$ = 3m → Esc 1:50

d) $\overline{GH}$ = 5m → Esc 1:100

3. Dadas las siguientes medidas del lado de un cuadrado y su respectiva escala, construya el rectángulo áureo. Verifique que la razón entre la longitud de su base y la altura corresponde al número de oro.

a) 10m - Esc:1:100

b) 3m - Esc:1:50

c) 2m – Esc: 1:20

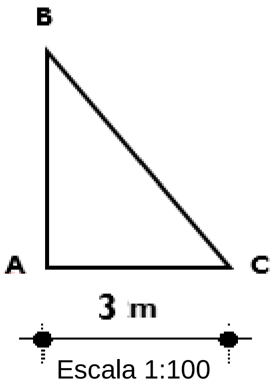
d) 5m – Esc: 1:100

4. A partir del rectángulo áureo del apartado anterior, construye una sucesión de rectángulos áureos y la espiral áurea.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

1- Dadas las siguientes figuras, realice las transformaciones en la escala indicada.

Triángulo Rectángulo



TRASLACIÓN

Vector 30°

$\overline{AA'}$ = 2 unidades = 2m

Esc. 1:20

ROTACIÓN

ϕ = 45°
$\overline{AO}$= 3 unidades = 3m

Esc. 1:50

SIMETRÍA AXIAL

Eje // a los bordes de la lámina
$\overline{Ar}$ = 4 unidades = 4m

Esc. 1:100

SIMETRÍA CENTRAL

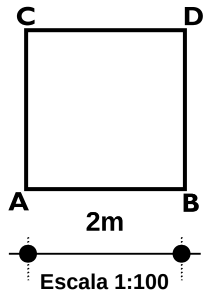
$\overline{AO}$= 5 unidades = 5m

Esc. 1:100

HOMOTECIA

- H (O; r= - 1,5)
- H (O; r = 2
- H (O; r = 1,5)

Cuadrado



TRASLACIÓN

Vector 45º

$\overline{AA'}$ = 4 unidades = 4m

Esc. 1:100

ROTACIÓN

ϕ = 60º

$\overline{AO}$ = 6 unidades = 6m

Esc. 1:100

SIMETRÍA AXIAL

Eje inclinado

$\overline{Ar}$ = 2 unidades = 2m

Esc. 1:50

SIMETRÍA CENTRAL

$\overline{AO}$ = 1 unidad = 1m

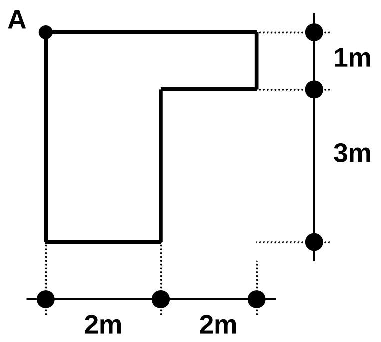
Esc. 1:20

HOMOTECIA

- H (O; r= - 1,5)
- H (O; r = 2
- H (O; r = 1,5)

2- Composición de Movimientos

Dada la siguiente figura (en escala 1:100):



a) Realice una **Simetría Axial**

Eje // a los bordes de la lámina

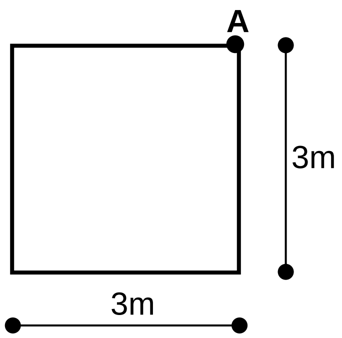
$\overline{Ar}$ = 2 unidades = 2m

Esc. 1:100

b) A la figura obtenida, aplíquele una **Homotecia H (O; r = 2)**

3- Composición de Movimientos

Dada la siguiente figura (en escala 1:100):



a) Realice una **Simetría Central**

$\overline{AO}$= 2 m.

Esc. 1:50

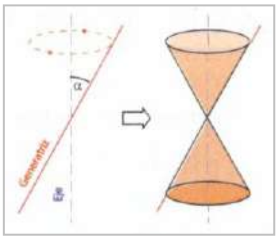
b) A la figura obtenida, aplíquele una **Homotecia H (O; r = -1.5)**

UNIDAD 4:
CÓNICAS

SECCIONES CÓNICAS

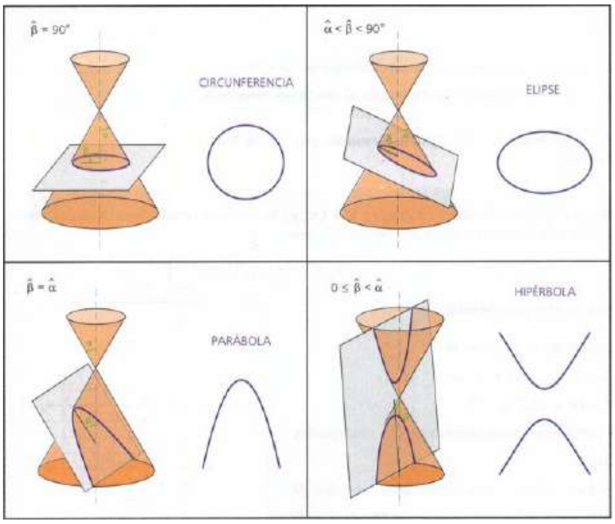
GENERACIÓN

Al seccionar con un plano la superficie de un *cono circular recto infinito*, se obtienen diferentes curvas, llamadas **Cónicas**, que tienen numerosas aplicaciones. Hemos trabajado con algunas de estas curvas cuando analizamos las funciones cuadráticas y racionales. Ahora estudiaremos sus características geométricas.



Llamaremos α a la *abertura* del cono y β al *ángulo de inclinación* del plano con el eje del cono.

Las secciones cónicas resultantes son:



DEFINICIÓN: Es <u>*el lugar geométrico*</u> de los puntos cuya relación de distancias a un punto fijo y a una recta, es constante.

- El punto fijo se llama ***Foco*** **(F)** de la cónica.
- La recta fija se llama ***Directríz*** **(D)** de la cónica.
- La relación constante entre ambas se llama ***Excentricidad*** **(e)**.

ECUACIÓN GENERAL

<u>Analíticamente</u>: son ecuaciones de segundo grado en dos variables.

$$Ax^2 + By^2 + \overbrace{Cxy}^{\text{indica rotación}} + \underbrace{Dx + Ey}_{\text{indica traslación}} + F = 0$$

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS

Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías según formas y propiedades:

1 - PARÁBOLA

Si $e = 1 \Rightarrow$ PARÁBOLA

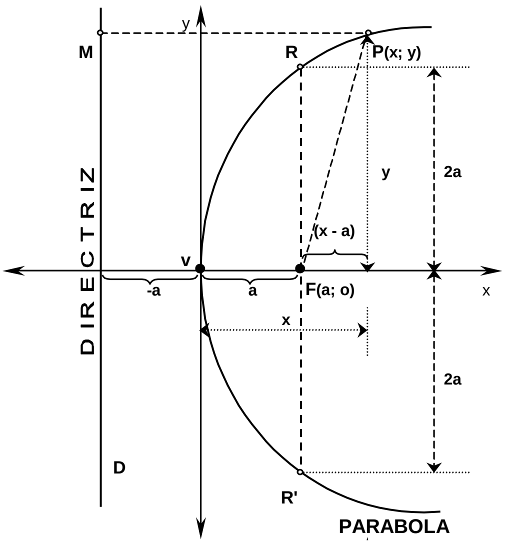
DEFINICIÓN: Una **Parábola** es el conjunto de todos los puntos **P** del plano que son equidistantes de una recta fija **D**, llamada *directríz*, y de un punto **F**, llamado *foco*.

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Una parábola tiene un eje de simetría que pasa por el *foco* **F** y es perpendicular a la *directriz*. El punto medio entre **F** y **D** sobre el eje se llama *vértice* **(V)** de la parábola.

La distancia entre el *vértice* **(V)** y el *foco* **(F)**, y entre el *vértice* **(V)** y la *directriz* **(D)** es siempre igual y la llamaremos **a**.

La recta perpendicular al eje focal que pasa por el *foco* **F** y corta a la curva en los puntos **R** y **R'** se llama *lado recto* y equivale a **4a**.



Elementos:

- Vértice (V): punto que la curva corta al eje de simetría.
- Eje de la parábola: Es la recta perpendicular a la Directriz que contiene al foco.
- L.R (Lado Recto) = **RR´ = 4a** (el coeficiente del término de primer grado en la ecuación).
- Coordenadas del foco **F** son **(a, o)**
- Directriz (D) $\Rightarrow$ **x = - a**.
- **P(x, y)** punto genérico de la parábola de modo que: $\frac{PF}{PM} = e = 1$

Por definición y teniendo en cuenta el gráfico anterior:

$\Rightarrow$ Donde **M** es un punto que $\in$ a **D** ubicado a una distancia **y** del eje **x**.

Por definición $\overline{PF} = \overline{PM}$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

Por Pitágoras

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 2ax + 2ax$$

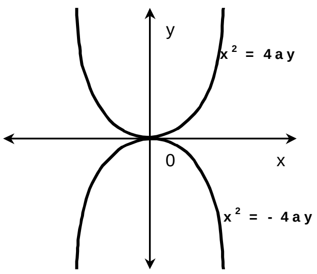
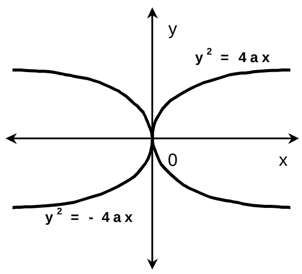
$$\boxed{y^2 = 4ax}$$ Ecuación General de la PARÁBOLA

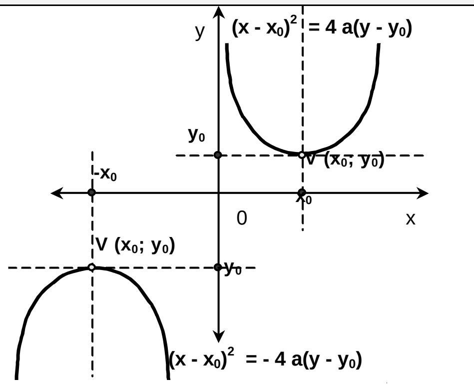
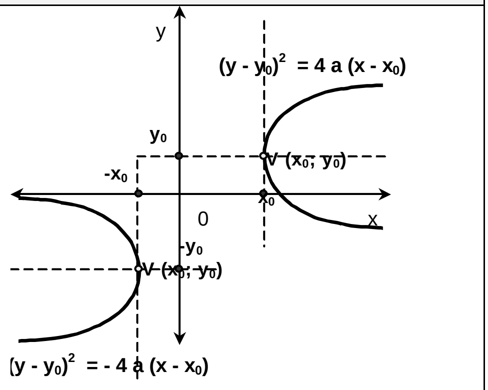
DISTINTAS POSICIONES DE LA PARÁBOLA EN EL PLANO

Las distintas posiciones de la parábola en el plano vienen dadas por las fórmulas:

1) $y^2 = \pm\ 4ax$
2) $x^2 = \pm\ 4\ ay$
3) $(y - y_0)^2 = \pm\ 4\ a\ (x - x_0)$
4) $(x - x_0)^2 = \pm\ 4\ a\ (y - y_0)$

Ecuación	Vértice	Eje de desarrollo	Foco	Directriz	La Gráfica se extiende hacia:
$x^2 = \pm 4\ ay$	(0; 0)	x = 0	(0; a)	y = -a	Arriba sí: a > 0 Abajo sí: a < 0
$y^2 = \pm 4ax$	(0; 0)	y = 0	(a; 0)	x = -a	Derecha sí: a > 0 Izquierda sí: a < 0
$(x - x_0)^2 = \pm 4\ a\ (y - y_0)$	$\pm (x_0; y_0)$	$x = \pm x_0$	$(x_0; y_0 + a)$	$y = y_0 - a$	Arriba sí: a > 0 Abajo sí: a < 0
$(y - y_0)^2 = \pm 4\ a\ (x - x_0)$	$\pm (x_0; y_0)$	$y = \pm y_0$	$(x_0 + a; y_0)$	$x = x_0 - a$	Derecha sí: a > 0 Izquierda sí: a < 0

Ecuación	$x^2 = \pm 4\ ay$	$y^2 = \pm 4ax$
Gráfica		

Ecuación	$(x - x_o)^2 = \pm 4\,a\,(y - y_o)$	$(y - y_o)^2 = \pm 4\,a\,(x - x_o)$
Gráfica		

2- ELIPSE

$$\boxed{\text{Si } e < 1 \Rightarrow \text{ELIPSE}}$$

<u>Definición</u>: Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se mueven de manera que la suma de distancias desde un punto **P** cualquiera de la curva hasta dos puntos fijos llamados *focos* (F_1 y F_2), es siempre la misma y equivalente al *diámetro mayor* (DM).

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$ → suma constante; donde **a > c**.

Los ejes se denominan *eje o diámetro mayor* (DM) y *eje o diámetro menor* (Dm) y pueden darse en los dos ejes; el intercambio de menor y mayor o de mayor a menor determinan la posición de la Elipse.

- **2a** = Diámetro o eje mayor (DM)
- **2b** = Diámetro o eje menor (Dm)
- **c** = Distancia del centro (**o**) de la elipse a cada uno de los focos (F_1 y F_2)

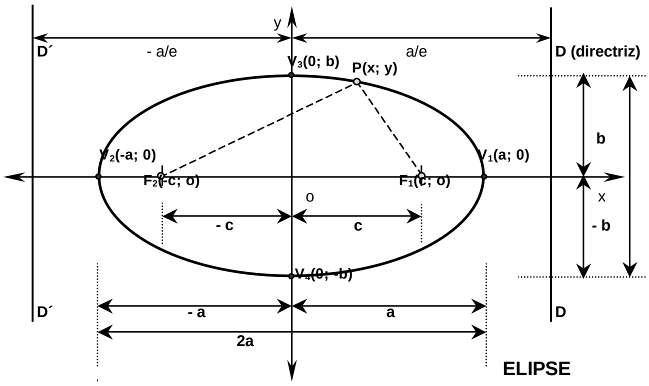
<u>Por definición</u>:

Trabajando la relación: $$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

Se llega a la fórmula: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$ Como **a > c ⇒ $a^2 - c^2$** es **Positivo** (+)

Haciendo: $$\boxed{a^2 - c^2 = b^2}$$

Resulta: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ **Ecuación General de la ELIPSE**



ELEMENTOS:

- Por tener esta ecuación potencias pares de (**x** e **y**), la curva es simétrica con respectos a los ejes coordenados y con respecto al origen.

- **Vértices** (V): Se llaman vértices de la Elipse a las intersecciones de las mismas con los ejes. En el eje Mayor: V_1 **(a; 0)** y V_2 **(-a; 0)**. En el eje Menor: V_3 **(0; b)** y V_4**(0; -b)**.

- **Semiejes**: **a** = semieje Mayor
  b = semieje Menor

- Los **ejes** se denominan eje mayor y eje menor y pueden darse en los dos ejes, el intercambio de menor y mayor o de mayor a menor determina las diferentes posiciones de la Elipse en el Plano.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$a^2 \rightarrow b^2$ mayor $\leftarrow$ menor

- **Excentricidad**: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ o también $c = e \cdot a$

- **Directrices**: $x + \frac{a}{e} = 0 \Rightarrow D: \ x = -\frac{a}{e}$ (Ecuaciones de las rectas directrices)

  $x - \frac{a}{e} = 0 \Rightarrow D': \ x = \frac{a}{e}$

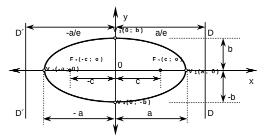
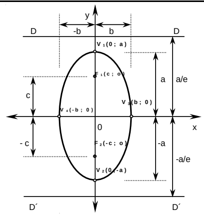
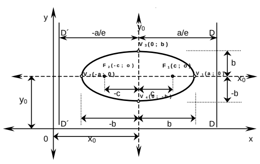
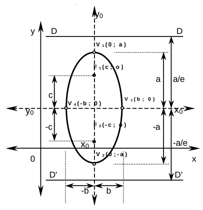
- **Lado Recto**: $L.R. = \frac{2b^2}{a}$

- **Focos**: Se ubican siempre en el eje mayor, a una *distancia* **(c)** del *centro* **(o)** de la elipse y se expresa con un par ordenado (coordenadas del punto):

  $F_1(c; 0) \qquad F_2(-c; 0)$

DISTINTAS POSICIONES DE LA ELIPSE EN EL PLANO:

Depende del valor del semieje mayor y su ubicación. Si el semieje mayor está en la ecuación debajo de las x, la elipse tendrá su mayor tamaño sobre el eje de las x, si el semieje mayor está en la ecuación debajo de las y, la elipse tendrá su mayor tamaño sobre el eje de las y.

Ecuación	Centro	Vértices	Eje de desarrollo		Focos	Directriz	Gráfica genérica
			Mayor	Menor			
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(0; 0)	(a; 0) (-a; 0)	x	y	(c; 0) (-c; 0)	$x=\frac{a}{e}$ $x=\frac{-a}{e}$	
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	(0; 0)	(b; 0) (-b; 0) (0; a) (0; -a)	y	x	(0; c) (0; -c)	$y=\frac{a}{e}$ $y=\frac{-a}{e}$	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\pm(x_0;y_0)$	$(x_0+a; y_0)$ $(x_0-a; y_0)$ $(x_0; y_0+b)$	$\pm x_0$	$\pm y_0$	$(x_0+c; y_0)$ $(x_0-c; y_0)$	$x=x_0+\frac{a}{e}$ $x=x_0-\frac{a}{e}$	
$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$	$\pm(x_0;y_0)$	$(x_0+b; y_0)$ $(x_0-b; y_0)$ $(x_0; y_0+a)$ $(x_0; y_0-a)$	$\pm y_0$	$\pm x_0$	$(x_0; y_0+c)$ $(x_0; y_0-c)$	$y=y_0+\frac{a}{e}$ $y=y_0-\frac{a}{e}$	

2.1. CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN: La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano de manera que sus distancias a un punto fijo llamado *centro* (C) es constante y se denomina *radio* (r).

Analíticamente es una ecuación de segundo grado en dos variables:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Más conocida como:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

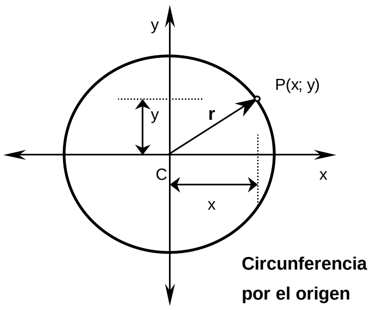
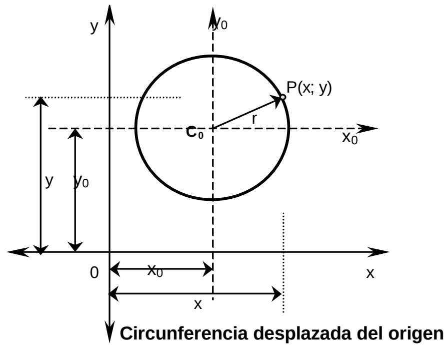
Ecuación General de la CIRCUNFERENCIA

puede ser considerada como un *caso particular de la Elipse*, cuando **a = b**

$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$ **Ecuación CIRCUNFERENCIA trasladada**

La circunferencia queda totalmente determinada si se conocen su *centro* (C) y su *radio* (r).

Verificación de la ecuación de la circunferencia en forma gráfica:

<table>
<tr><td>Ecuación</td><td>$x^2 + y^2 = r^2$</td><td>$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

3- HIPÉRBOLA

$\boxed{\text{Si } e > 1 \Rightarrow \text{HIPERBOLAS}}$

DEFINICIÓN: Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano de manera que la diferencia de las distancias desde un punto **P** cualquiera de la curva hasta dos puntos fijos llamados *focos* (F_1 y F_2) es siempre igual y equivalente a la distancia entre los *vértices reales* (V_1 y V_2) que es **2 a**.

$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a$$

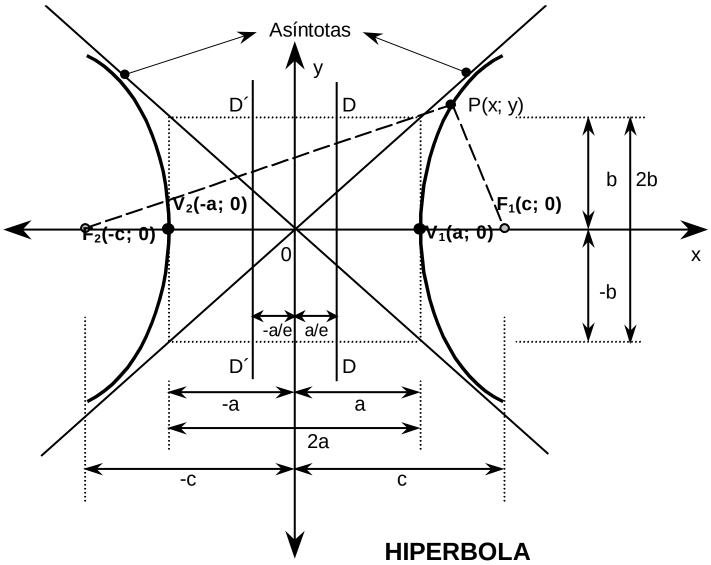
Trabajando esta relación se llega a la fórmula:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1}$$ Como $c > a \Rightarrow c^2 - a^2$ es Positivo

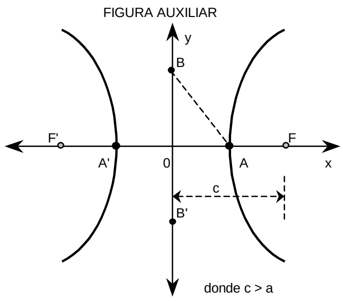
Haciendo $\boxed{c^2 - a^2 = b^2}$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ **Ecuación General de la HIPÉRBOLA**

La ecuación tiene potencias pares de **x** e **y**, por lo tanto, la curva es simétrica respecto a los ejes **x** e **y**; y al origen.



HIPERBOLA



ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA:

— Ejes: la hipérbola tiene el *eje real o transversal* que es AA' = 2a sobre el que se encuentran los focos y los vértices de la hipérbola, y perpendicular a él, y pasando por el centro de la hipérbola tenemos el *eje imaginario* que es BB' = 2b.

— Vale aclarar que el término positivo de la ecuación siempre indica el eje real o transversal.

— Excentricidad (e): En la hipérbola es mayor que 1, y que demostrado en:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

— Vértice (V): Se llama vértice de la hipérbola a la intersección de la misma con el eje real. Ejemplo: $V_1(a; 0)$ y $V_2(-a ; 0)$.

— Focos: $F_1(c; 0)$ $F_2(-c; 0)$

— Directrices (D): Vienen dadas por: D: $x = \pm \frac{a}{e}$.

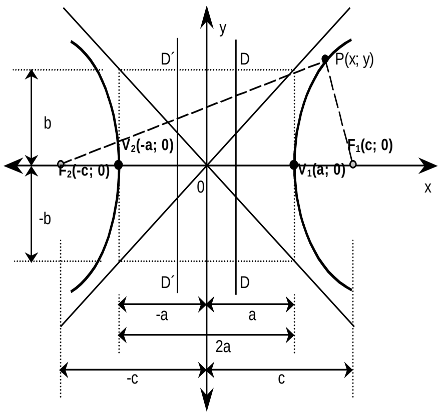
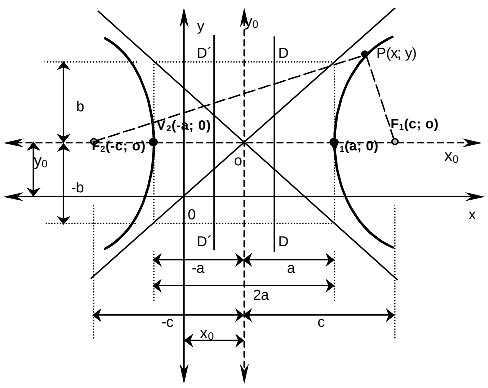
— Lado Recto: $L.R = \frac{2b^2}{a}$.

— Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$

DISTINTAS POSICIONES DE LA HIPÉRBOLA EN EL PLANO:

Depende de donde este el signo en la ecuación y no del valor de los semiejes, ya que en el caso de las hipérbolas no hay eje mayor y menor como en las elipses, sino real e imaginario. Las distintas posiciones de la hipérbola en el plano vienen dadas por las fórmulas y gráficos indicados en los siguientes cuadros:

Ecuación	Centro	Vértices	Eje de desarrollo		Focos	Directriz	Asíntotas (se pueden deducir como rectas por dos puntos)
			Real	Imag.			
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	(0; 0)	(a; 0) (-a; 0)	x	y	(c; 0) (-c; 0)	$x = \frac{a}{e}$ $x = \frac{-a}{e}$	$y = \frac{b}{a}x$ $y = \frac{-b}{a}x$
$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	(0; 0)	(0; a) (0; -a)	y	x	(0; c) (0; -c)	$y = \frac{a}{e}$ $y = \frac{-a}{e}$	$y = \frac{a}{b}x$ $y = \frac{-a}{b}x$
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\pm (x_0; y_0)$	$(x_0 + a; y_0)$ $(x_0 - a; y_0)$	$\pm x_0$	$\pm y_0$	$(x_0 + c; y_0)$ $(x_0 - c; y_0)$	$x = x_0 + \frac{a}{e}$ $x = x_0 - \frac{a}{e}$	$y - yo = \frac{b}{a}(x - xo)$ $y - yo = -\frac{b}{a}(x - xo)$
$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$	$\pm (x_0; y_0)$	$(x_0; y_0 + a)$ $(x_0; y_0 - a)$	$\pm y_0$	$\pm x_0$	$(x_0; y_0 + c)$ $(x_0; y_0 - c)$	$y = y_0 + \frac{a}{e}$ $y = y_0 - \frac{a}{e}$	$y - yo = \frac{a}{b}(x - xo)$ $y - yo = -\frac{a}{b}(x - xo)$

<table>
<tr><td>Ecuación</td><td>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>
</td><td>Las ramas de la hipérbola abrazan al eje que se encuentra positivo en la ecuación
En esta ecuación, la gráfica sería exactamente igual a la de la izquierda, pero abrazando al eje y, es decir rotada 90º</td></tr>
<tr><td>Ecuación</td><td>$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$</td><td>$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>
</td><td>Las ramas de la hipérbola abrazan al eje que se encuentra positivo en la ecuación
En esta ecuación, la gráfica sería exactamente igual a la de la izquierda pero abrazando al eje y, es decir rotada 90º</td></tr>
</table>

Nota:
La posición de la hipérbola no tiene que ver con los valores de los semiejes, sino con el signo que tienen las variables

a = distancia medida en el eje real desde el *origen* (o) a los *vértices* (A y A').
b = distancia medida en el eje imaginario desde el *origen* (o) a los *vértices imaginarios* (B y B').
c = distancia medida en el eje real desde el *origen* (o) a los *focos* (F_1 y F_2).
D y D' = directrices de la hipérbola.

APLICACIÓN DE LAS CONICAS EN EL CAMPO DEL DISEÑO

Algunos ejemplos de isologos cuyos diseños se definen a partir de cónicas:

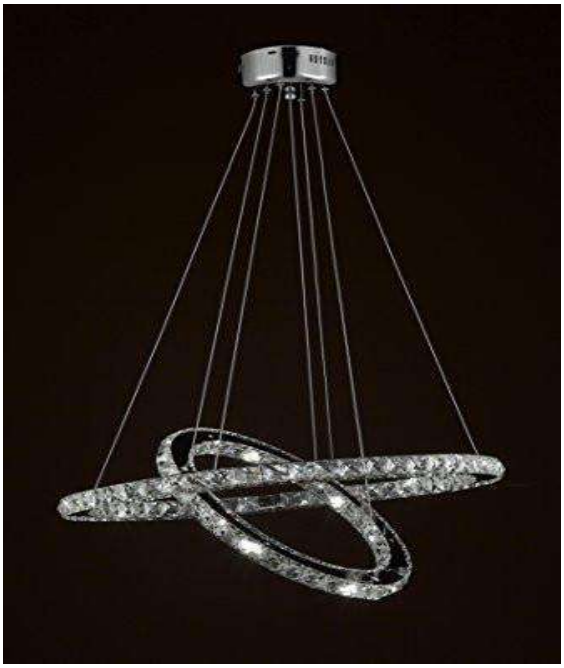
Ejemplo de folleteria diseñada con estas curvas

Ser

Fichas nutricionales para distribución en consultorios médicos.

Merck Sharp & Dohme

Realización de campaña gráfica de lanzamiento de productos en congresos nacionales e internacionales, simposios. Material promocional para visitadores médicos. Para diferentes líneas de productos.




EJERCITACIÓN UNIDAD N°4:
CÓNICAS

CÓNICAS

PARÁBOLA

1- Encuentre el vértice, foco, lado recto y directriz. Grafique la Parábola cuya ecuación se indica:

a) $x^2 = 8\,y$

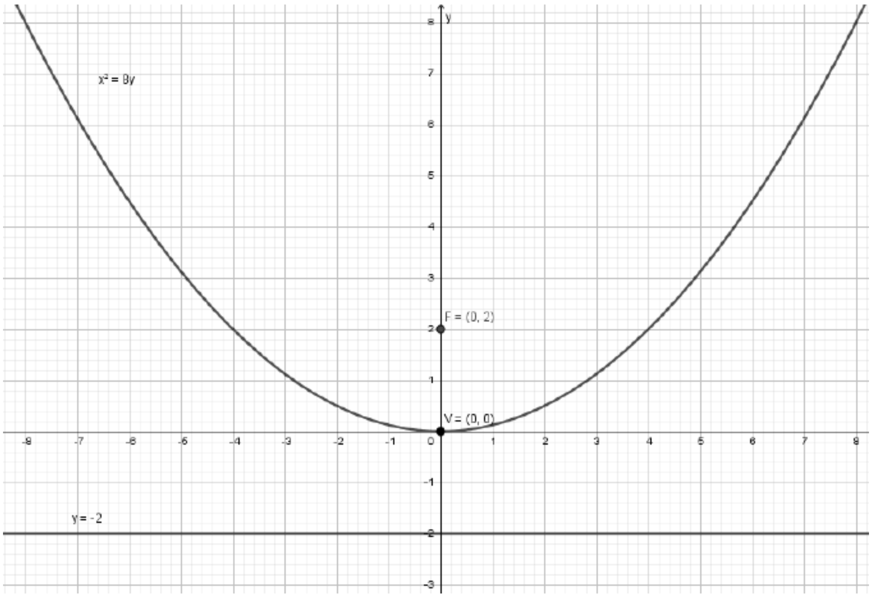
Cálculo de la distancia focal

LR= 4a → LR= 8

8= 4. a

8/4= a

2= a



VÉRTICE	FOCOS	DIRECTRIZ	EXCENTRICIDAD	LADO RECTO
V (0; 0)	F_1 (0; 2)	y= -2	1	LR= 8

b) $y^2 = 12\,x$

c) $(x-1)^2 = -\,4\,(y+2)$

d) $(y+2)^2 = -16\,x$

e) $(x-4)^2 = 4\,(y+3)$

f) $-\,(x+2)^2 = 4\,(y - 16)$

2- Encuentre una ecuación de la Parábola que satisfaga las condiciones indicadas. Grafique.

a) Vértice (1; 2) F (1;1)

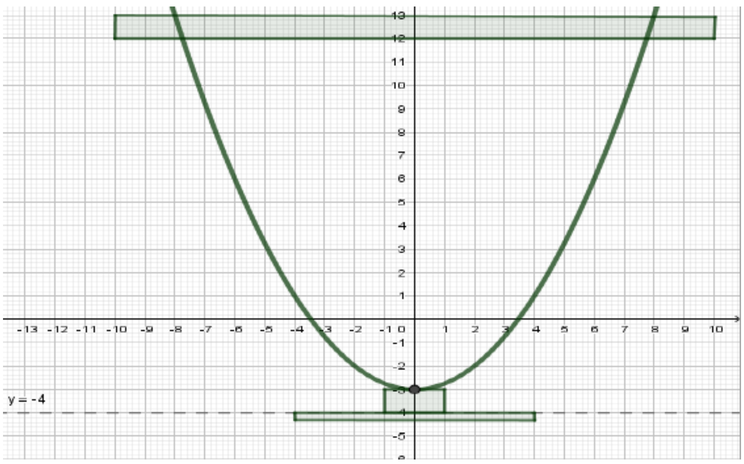
b) Vértice (1; 1) Directriz x = 4

c) Vértice (3; -2) Directriz y = 2

d) Foco (-2; 3) Directriz y = -1

3- La siguiente fotografía corresponde a una mesa con una estructura metálica en forma de parábola.

a) Observe la siguiente gráfica y encuentre la ecuación de la parábola según los datos que le proporciona el dibujo.
b) Encuentre todos sus elementos y grafique.



ELIPSE

4- Encuentre los vértices, los focos, las directrices, la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación se indica:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$

c) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

d) $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

5- Obtenga la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas. Grafique.

a) Centro (0; 0) Vértices $\rightarrow$ (5; 0) (0; -2)

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $\rightarrow a = 5$ $b = -2$

Reemplazo los datos en la ecuación $\rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(-2)^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1}$

b) a=6; b=2; eje mayor paralelo al eje y, centro (-1, 2)

c) a=5; c=4; eje mayor paralelo al eje x, centro (0, 0)

d) c=5; b=3; eje mayor paralelo al eje y, centro (-2,0)

6- Casos particulares de la elipse

Escriba la ecuación:

a) Elipse puntual
b) Elipse imaginaria
c) Elipse con centro en el origen de coordenadas.
d) Elipse con centro trasladado.

CIRCUNFERENCIA

7- Encontrar la ecuación de la circunferencia con los siguientes datos. Graficar.

a) Centro; (-2, 3) Radio = 4cm
b) Centro: (-2; -4) Radio = 2cm
c) Centro: (2; - 3) Radio = 3cm
d) Centro: (0, 0) Radio = 4cm

Resolución ejercicio 7 a)

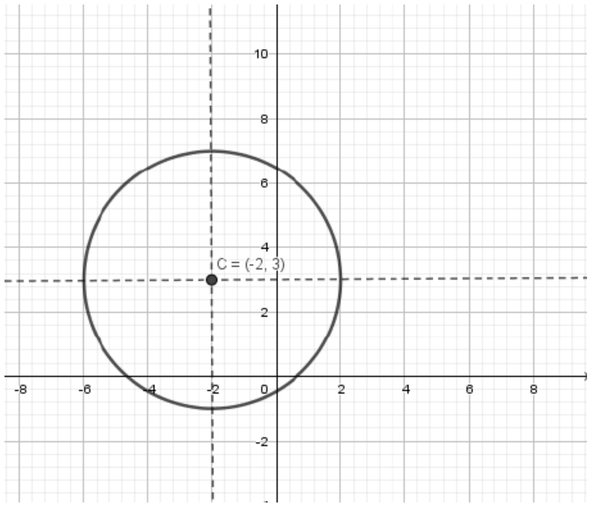
a) Centro: (-2; 3) Radio = 4cm

Datos: Centro (-2; 3)
Radio = 4

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Reemplazo $\rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

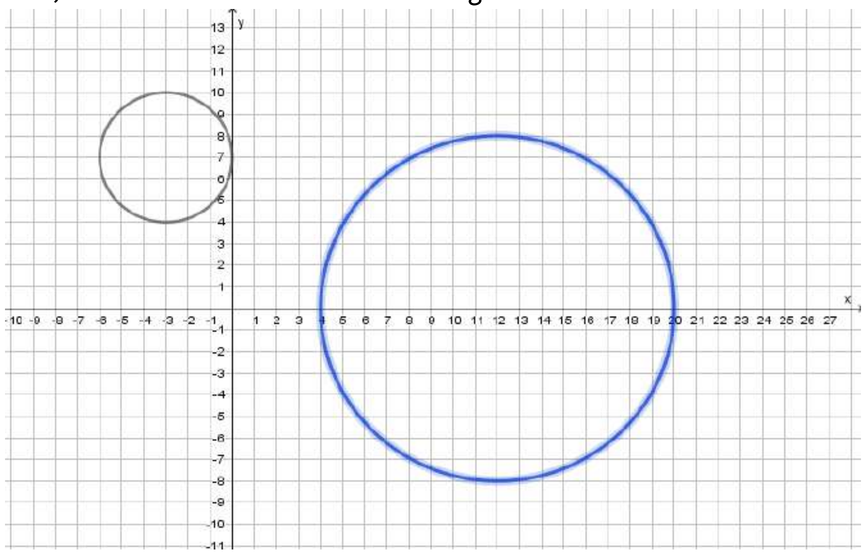
$$\boxed{(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16}$$



8. Dadas las siguientes ecuaciones encontrar los radios y las coordenadas de los centros de cada una de ellas. Graficar.

   a) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$
   b) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$
   c) $(x-2)^2 + (y + 3)^2 = 36$
   d) $x^2 + y^2 = 100$
   e) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$

9. Dada la gráfica, encontrar las ecuaciones de las siguientes circunferencias.



HIPÉRBOLA

10- Obtenga los vértices, focos, asíntotas, excentricidad, directrices y gráfica de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$b = 3 \rightarrow$ Vértices reales $\rightarrow (\pm 4; 0)$

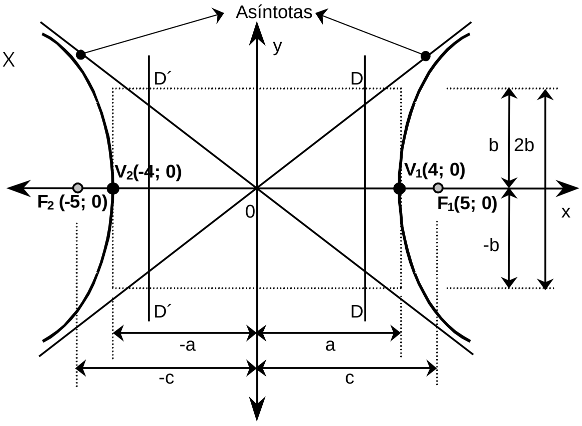
$a = 4 \rightarrow$ Vértices imaginarios $\rightarrow (0; \pm 3)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow c = \sqrt{4^2 + 3^2} \rightarrow c = \sqrt{16 + 9} \rightarrow c = 5$ Focos: $F_1; F_2\ (\pm 5; 0)$

Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x \rightarrow y = \pm \frac{3}{4} x$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \rightarrow e = \frac{5}{4}$

Directrices: $x = \pm \frac{a}{e} \rightarrow x = \pm \frac{4}{5/4}$



b) $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

d) $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$

e) $\frac{(y+1)^2}{36} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$

f) $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

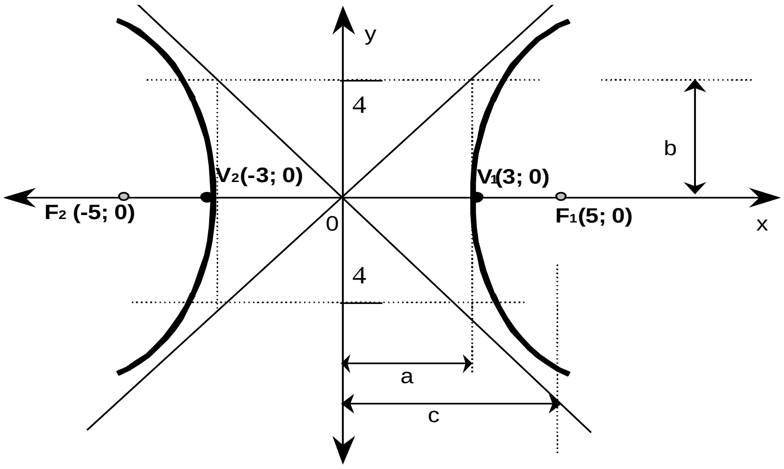
11. Encuentre la ecuación de la Hipérbola que satisfaga los datos indicados:

a) Centro: C (0; 0) Vértices: $V_1 ; V_2$ (±3; 0) Focos: $F_1 ; F_2$ (±5 ;0)

Datos $\rightarrow$ $a = 3$ $\rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 5^2 - 3^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

$c = 5$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Reemplazo los datos $\rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$



b) Vértices: (1; -1) y (1; 5) y un foco en (1; -2)

c) Centro: C (-2; -5), Longitud del eje real horizontal = 14 y Longitud del eje imaginario = 12

d) Vértices: (0, 2) y (0,-2) y Focos: (0; 4) y (0,-4)

e) Vértices: (4, 1) y (0,1) y Focos: (-1; 1) y (5, 1)

f) Vértice (7, 3); Foco (8; 3) y Centro (4, 3)

12- Dados los semiejes (a = 5 ; b = 3) y el centro C(3 ; -2) de la hipérbola. Con eje real x.

a) Encontrar los vértices
b) Encontrar los focos y la ecuación de las directrices
c) Graficar

13- Analice las siguientes ecuaciones y observe que se obtiene.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 0$

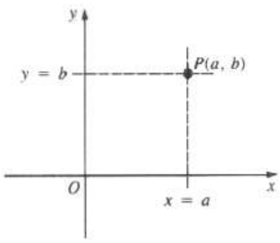
b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$

14- Identifique cada ecuación y complete el cuadro

Ecuación	Nombre de la cónica	Trasladada/ Sin Trasladar
$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$		
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$		
$y^2=20x$		
$x^2+y^2=36$		
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$		
$(x-1)^2+(y-2)^2=16$		
$-\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$		
$-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$		
$(x-x)^2=16y$		
$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$		

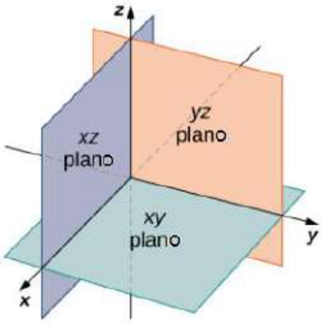
UNIDAD 5:
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: RECTAS, PLANOS Y CUÁDRICAS

NOCIONES DE GEOMETRÍA EN EL ESPACIO



Una manera de describir la posición de un punto *P* en el plano, consiste en asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales (o perpendiculares), llamados ejes *x* e *y*.
Si *P* es el punto de intersección de la recta *x = a* (perpendicular al eje x) y la recta *y = b* (perpendicular al eje y), entonces se dice que los elementos de la pareja ordenada *(a; b)* son las coordenadas cartesianas rectangulares del punto.

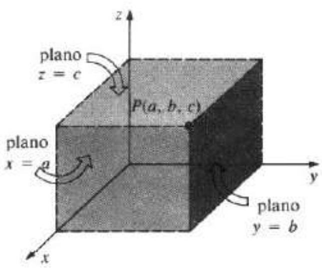
En el espacio de tres dimensiones se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando *tres ejes* mutuamente ortogonales. El punto en el que estos ejes se cortan se llama origen (*O*).



Ahora bien, si:

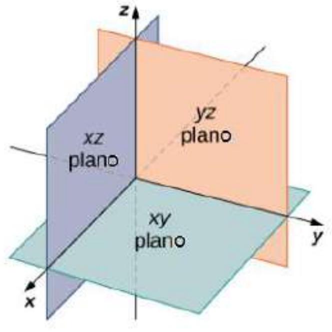
$$x = a \qquad y = b \qquad z = c$$

Son tres planos perpendiculares al eje *x*; eje *y* y eje *z* respectivamente; el punto *P* en el cual se cortan dichos planos se puede representar por una **tríada ordenada** de números (a; b; c) llamados *coordenadas cartesianas rectangulares* del punto. Los puntos **a**; **b** y **c** se denominan coordenadas x; y; z de *P(a; b; c)* respectivamente.



Cada pareja (o par) de ejes coordenados determina un *plano coordenado*. Los ejes *x* e *y* determinan el *plano xy*, los ejes *x* y *z* determinan el *plano xz* y así sucesivamente. Los planos coordenados dividen el

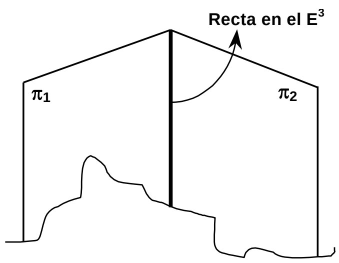
espacio tridimensional en ocho partes conocidas como ***octantes***. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se llama *primer octante*. No existe ningún acuerdo para denominar a los otros siete octantes.
La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto que se encuentre en un eje coordenado o en un plano coordenado. Es también posible describir, por ejemplo, el ***plano xy*** mediante la simple ecuación $z = 0$, como se ve en la tabla. De manera semejante, el ***plano xz*** es $y = 0$, y el ***plano yz*** es $x = 0$.



Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x **y** **z**	(a; 0; 0) (0; b; 0) (0; 0; c)	**xy** **xz** **yz**	(a; b; 0) (a; 0; c) (0; b; c)

ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL ESPACIO:

Viene definida por la intersección de dos planos:



$$\cap \begin{cases} -\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ -\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y $P_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(u; v y w son coeficientes directores de la recta que son números cualesquiera proporcionales a los cósenos directores de la recta)

$$u = x_2 - x_1 \ ; \ v = y_2 - y_1 \ ; \ w = z_2 - z_1$$

- Condición para que DOS RECTAS SEAN PARALELAS:

Sí: $\boxed{\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{w_1}{w_2}}$

- Condición para que DOS RECTAS SEAN PERPENDICULARES:

Sí: $\boxed{u_1.u_2 + v_1.v_2 + w_1.w_2 = 0}$

ECUACIÓN DEL PLANO:
Toda ecuación lineal en (x; y; z) representa un plano. Su ecuación general es:

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ A, B y C **Coeficientes directores** del plano. No nulos simultáneamente

El plano queda identificado por su **recta normal "n"** que tiene coeficientes A, B y C

- La ecuación de la familia de **planos que pasa por un punto** $P_0(x_0; y_0; z_0)$ es:

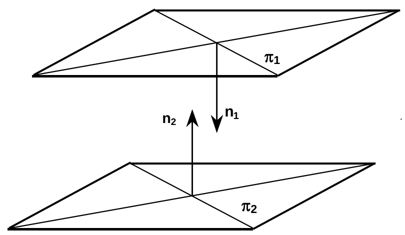
$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

- Condición para que DOS PLANOS SEAN PARALELOS:

Sí: $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}}$

- π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ - $n_1 (A_1; B_1; C_1)$

- π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ - $n_2 (A_2; B_2; C_2)$

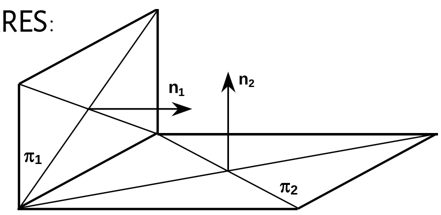


- Condición para que DOS PLANOS SEAN PERPENDICULARES:

Sí: $\boxed{A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0}$

- π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ - $n_1 (A_1; B_1; C_1)$

- π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ - $n_2 (A_2; B_2; C_2)$



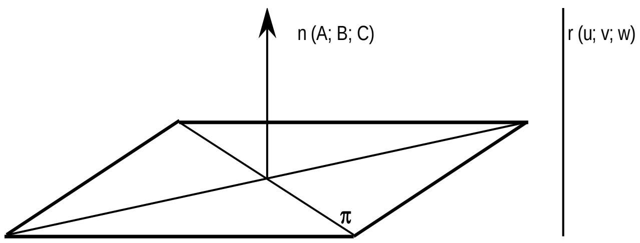
- RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO:

Sean (u; v; w) las componentes o coeficientes directores de una recta; para que ésta sea *perpendicular al plano* de ecuación:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Se ha de verificar que dichas componentes sean proporcionales a los coeficientes de (x; y; z) de la ecuación del plano que son A; B y C.
Es decir:

$$\boxed{\frac{u}{A} = \frac{v}{B} = \frac{w}{C}}$$

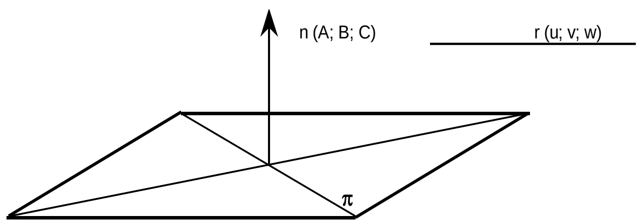


- RECTA PARALELA A UN PLANO:

La condición es:

$$\boxed{u \cdot A + v \cdot B + w \cdot C = 0}$$

Puesto que la *recta paralela* (//) al plano **π** es perpendicular a la normal del plano.



- Planos Proyectantes:

Cada una de las siguientes ecuaciones:

$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v}$	$\frac{x - x_1}{u} = \frac{z - z_1}{w}$	$\frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w}$

Son las de un plano que contiene a la recta. Como cada uno de estos planos es perpendicular a uno de sus planos coordenados, reciben el nombre de *Planos Proyectantes de la recta*; y sus trazas con aquellos son las proyecciones de la recta sobre dichos planos coordenados.

Ejemplo:

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} \Rightarrow \boxed{y - y_1 = \frac{v}{u}(x - x_1)}$$

$\Rightarrow$Ecuación de la recta por el Punto P_1 $(x_1; y_1)$

SUPERFICIES CUÁDRICAS

GENERACIÓN

Está definida por una ecuación de segundo grado en 3 (tres) variables. Una sección plana (corte) de una cuádrica es una cónica o una forma degenerada o límite de ésta.

ECUACIÓN GENERAL

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \underbrace{Dxy + Exz + Fyz}_{\text{Rotación}} + \underbrace{Gx + Hy + Iz}_{\text{Translación}} + K = 0$$

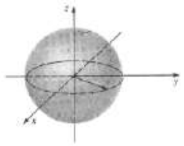
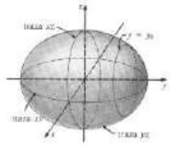
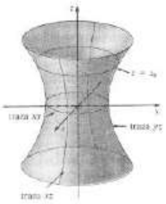
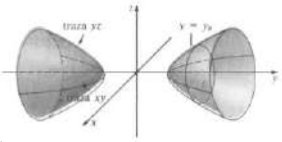
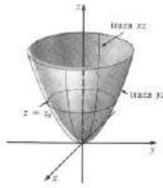
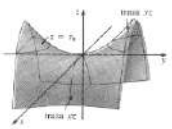
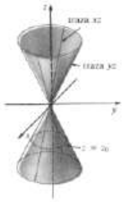
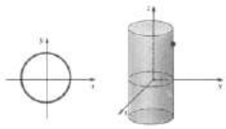
Por Rotación o Translación de ejes, o bien por ambas transformaciones (cálculo bastante complejo que trata el "Álgebra Lineal" y que en la actualidad está en programas de computación) se analizan las diversas superficies Cuádricas surgidas de la combinación de 3; 2 o 1 término cuadrático.

TRAZA DE UNA SUPERFICIE

Una **traza de una superficie** es una línea (curva o recta) formada por la **intersección** de una superficie y un plano coordenado, y proporciona a la gráfica características particulares.

ECUACIONES Y GRÁFICAS DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS:

En el siguiente cuadro se detallan las gráficas con las Ecuaciones correspondientes de todas las Superficies cuádricas:

<table>
<tr><th colspan="4">SUPERFICIES CUADRICAS</th></tr>
<tr>
<td>
ESFERA
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$</td>
<td>
ELIPSOIDE
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</td>
<td>
HIPERBOLOIDE DE 1 HOJA
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$</td>
<td>
HIPERBOLOIDE DE 2 HOJAS
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>
PARABOLOIDE
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$</td>
<td>
PARABOLOIDE HIPERBOLICO
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$</td>
<td>
CONO RECTO
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$</td>
<td>
CILINDRO
$x^2 + y^2 = c$</td>
</tr>
</table>

CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS

— SEGÚN SU CENTRO:

La ecuación general puede tomar una de las siguientes formas

I - $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$	Cuádricas con centro
II - $Ax^2 + By^2 = Iz$	Cuádricas sin centro

Si ninguna de las constantes de las ecuaciones I ó II es nula, las ecuaciones se pueden escribir de estas dos maneras:

+ CUÁDRICAS CON CENTRO:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

Dependiendo de los signos que tome la ecuación, puede representar 3 superficies esencialmente distintas y simétricas con respecto al origen.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Elipsoide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hiperboloide de una hoja

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hiperboloide de dos hojas

+ CUÁDRICAS SIN CENTRO

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \rightarrow$$

Las dos superficies esencialmente distintas que puede representar, son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$ Paraboloide Elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$ Paraboloide Hiperbólico

— SUPERFICIES REGLADAS

Las superficies cuádricas se pueden clasificar también en superficies regladas o no regladas.
Pueden ser simplemente regladas o doblemente regladas.

- Una superficie cuádrica se dice **simplemente reglada** si por cada uno de sus puntos pasa una recta íntegramente contenida en ella. Ejemplo: cilindros y cono.
- Una superficie se dice que es **doblemente reglada** si por cada uno de sus puntos pasan dos rectas íntegramente contenidas en la superficie. Por ejemplo, Paraboloide hiperbólico e Hiperboloide de una hoja.

ANÁLISIS DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS

Las cuádricas se clasifican según sus formas, ecuaciones y propiedades:

1- ELIPSOIDE

La forma canónica de la ecuación del elipsoide con centro en el origen es:

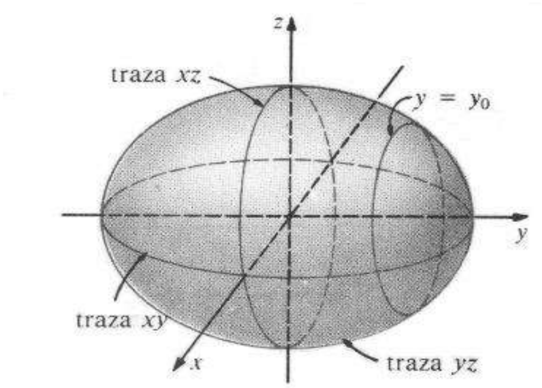
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Un ejemplo real

a) TRAZAS EN LOS PLANOS COORDENADOS

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ Elipse
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Elipse
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Elipse

La figura resume las trazas en los planos coordenados y proporciona una gráfica característica.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

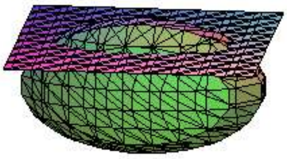
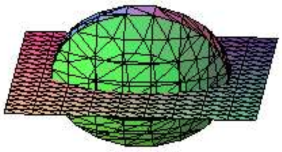
b) CORTES CON PLANOS PARALELOS A LOS COORDENADOS

Los cortes del elipsoide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas de tipo elipse (en lo siguiente se supone que el elipsoide está centrado en el origen de coordenadas y tiene la ecuación que se da arriba):

A- Sobre el plano xy: z=k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

si $1 - \frac{k^2}{c^2} > 0 \Rightarrow \frac{k^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |k| < c$ Elipses reales en planos paralelos al xy

Para 0<k<c	Para k=0
	

si $1-\frac{k^2}{c^2}=0 \Rightarrow \frac{k^2}{c^2}=1 \Rightarrow |k|=c$ Elipses Puntuales

si $1-\frac{k^2}{c^2}<0 \Rightarrow \frac{k^2}{c^2}>1 \Rightarrow |k|>c$ Elipses Imaginarias

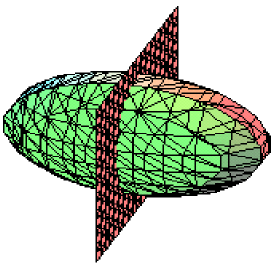
B- Sobre el plano xz: $y=k$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$

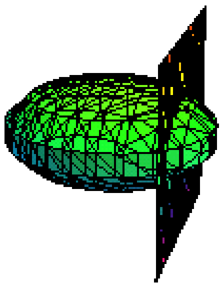
si $1-\frac{k^2}{b^2}>0 \Rightarrow \frac{k^2}{b^2}<1 \Rightarrow |k|<b$ Elipses en planos paralelos al xz

Si $1-\frac{k^2}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{k^2}{b^2}=1 \Rightarrow |k|=b$ Elipses puntuales (cuando el plano es tangente al elipsoide)

k=0



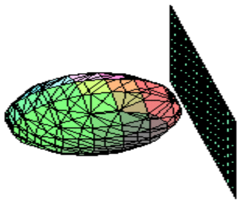
Para 0<k<b



Si $1-\frac{k^2}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{k^2}{b^2}=1 \Rightarrow |k|=b$ Elipses puntuales (cuando el plano es tangente al elipsoide)

Si $1-\frac{k^2}{b^2}<0 \Rightarrow \frac{k^2}{b^2}>1 \Rightarrow |k|>b$

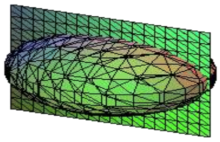
Elipses Imaginarias (no existe intersección real).



C- Sobre el plano yz: x=k

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

x= k=0

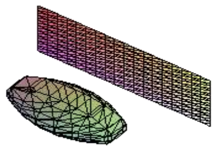


Si $1-\frac{k^2}{a^2}>0 \Rightarrow \frac{k^2}{a^2}<1 \Rightarrow |k|<a$

Elipses reales en planos paralelos al yz

Si $1-\frac{k^2}{a^2}=0 \Rightarrow \frac{k^2}{a^2}=1 \Rightarrow |k|=a$ Elipses puntuales

Si $1-\frac{k^2}{a^2}<0 \Rightarrow \frac{k^2}{a^2}>1 \Rightarrow |k|>a$ Elipses Imaginarias →



2- ESFERA

En particular si en la ecuación del elipsoide se tiene a=b=c queda: $x^2+y^2+z^2=r^2$, que es la ecuación de una esfera de radio r y centro en el origen de coordenadas.

Definición: Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos **P** del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo llamado *centro* (c). El *radio* (r) de la esfera denota una distancia fija al centro de esta.

En el caso de que el *centro* (c) de la esfera fuera un punto **P(x_0; y_0; z_0)** en lugar del origen de coordenadas. Su ecuación será:

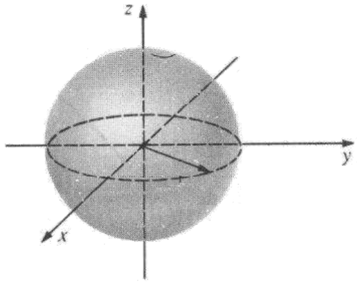
$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2}$$

Esta ecuación representa una esfera con centro en **P(x_0; y_0; z_0)** y radio **a**.

a) TRAZA DE LA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy ($z = 0$)	$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ Circunferencia
xz ($y = 0$)	$x^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$ Circunferencia
yz ($x = 0$)	$y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$ Circunferencia

La figura resume las trazas en los planos coordenados y proporciona una gráfica característica.



— Si $a \neq b$, pero $a = c$, el **elipsoide es de revolución**. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

— Si el centro del elipsoide es el punto **P**(x_0; y_0; z_0) y sus ejes son paralelos (//) a los coordenados, la ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1}$$

Es un **Elipsoide** con centro en **P**(x_0; y_0; z_0).

3- HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

La gráfica de una ecuación de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

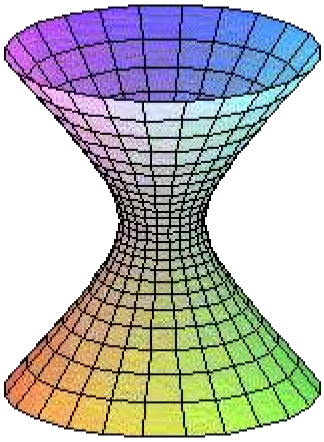
$a > 0$; $b > 0$; $c > 0$

Es un **Hiperboloide de una hoja** con centro en el origen.

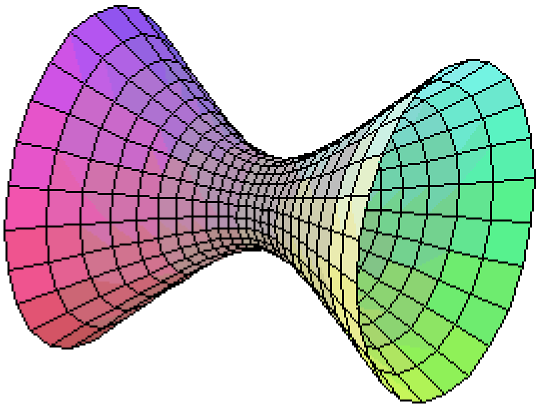
La cuádrica que obtenemos es el **Hiperboloide de una hoja** en el caso de que el *signo de uno de los coeficientes tenga signo negativo y las otras dos con signo positivo.*

Si **a = b**, la superficie cuádrica es el **Hiperboloide de revolución de una hoja**.
Las secciones paralelas al plano **xy** son *Elipses*, excepto en el caso del *Hiperboloide de revolución* en el que son *circunferencias*.

Un ejemplo real



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



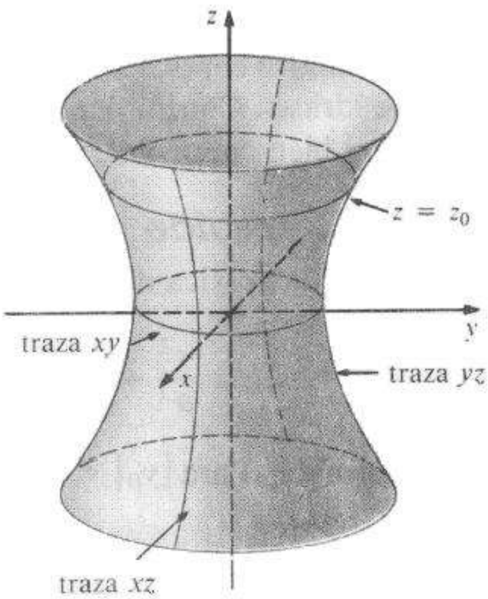
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a) TRAZA DE LA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS:

En este caso, analizaremos la primera de las ecuaciones. Con un plano **$z = x_0$**, paralelo (//) al plano **xy**, corta la superficie en secciones transversales elípticas (ó circulares, si a = b). La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ Elipse
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ Hipérbola
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ Hipérbola

En la siguiente figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación. Un método para graficar el **Hiperboloide de una hoja** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término negativo (-) de la ecuación.



b) SECCIONES CON PLANOS PARALELOS A LOS COORDENADOS

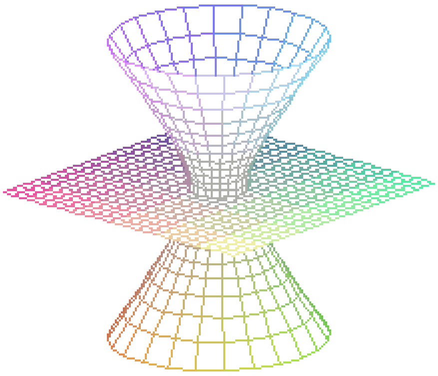
Los cortes del Hiperboloide de una hoja por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas (hipérbolas y elipses). Se supone que el Hiperboloide de una hoja está centrado en el origen de coordenadas y tiene la ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

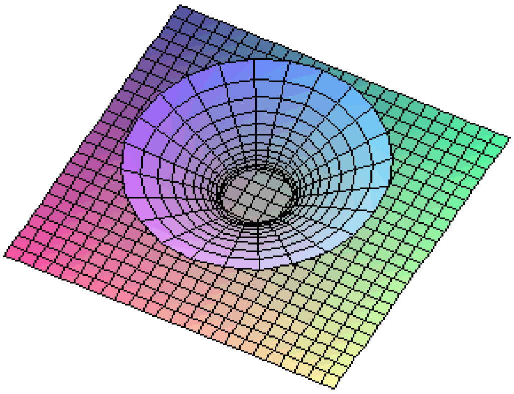
A- Sobre el plano xy: z=k

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

Siempre $1+\frac{k^2}{c^2}>0$ Elipses reales en planos paralelos al xy. La elipse de menores semiejes será para z=0.

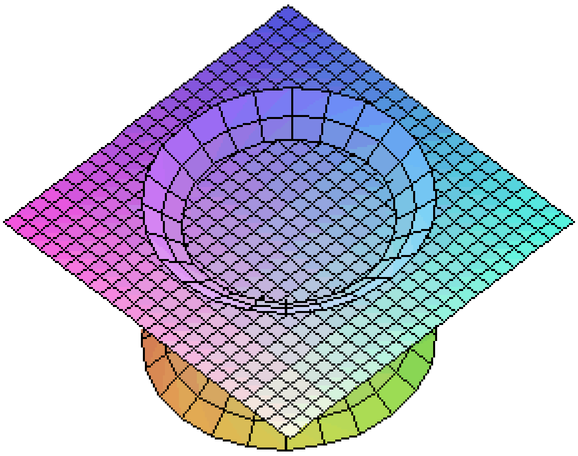
Corte con plano z=k=0. Se obtiene la elipse de garganta

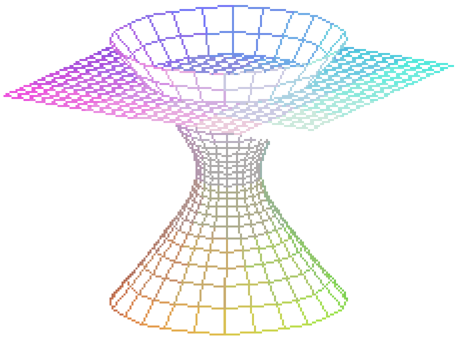




.

Cortes por planos z =k para k>0





B- Cortes sobre el plano yz: x =k

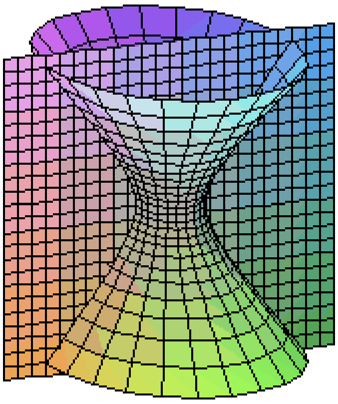
$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$ Dividiendo ambos términos en $1 - \dfrac{k^2}{a^2}$,obteniendo la ecuación de una

hipérbola: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2(1-\dfrac{k^2}{a^2})} - \dfrac{z^2}{c^2(1-\dfrac{k^2}{a^2})} = 1 \\ x = k \end{cases}$

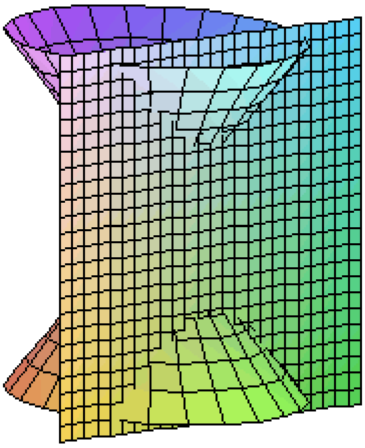
Esta hipérbola tendrá **eje real** y si $1 - \dfrac{k^2}{a^2}$ >0, es decir si $|k| < a$.

La hipérbola tendrá **eje real z** si $1-\frac{k^2}{a^2}<0$, es decir si $|k|>a$

Se tendrá asíntotas si $1-\frac{k^2}{a^2}=0$, esto sucederá cuando $|k|=a$



Para $|k|<a$, en este caso k=0



Para $|k|>a$

C- Cortes por planos y =k

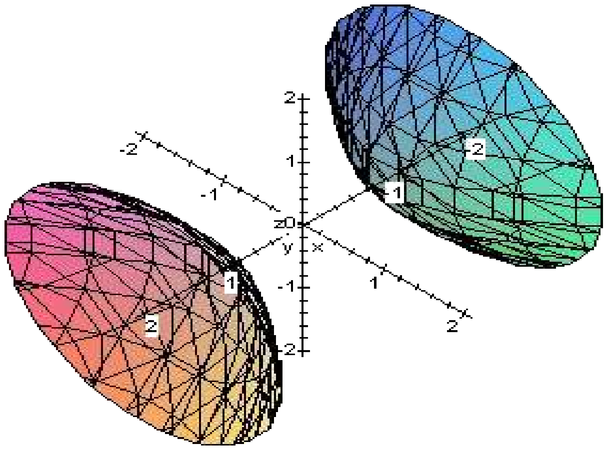
El corte es una hipérbola como la del caso anterior donde los roles de x e y se han intercambiado. Además, el Hiperboloide de una hoja es una superficie doblemente reglada puesto que contiene a las dos familias de rectas.

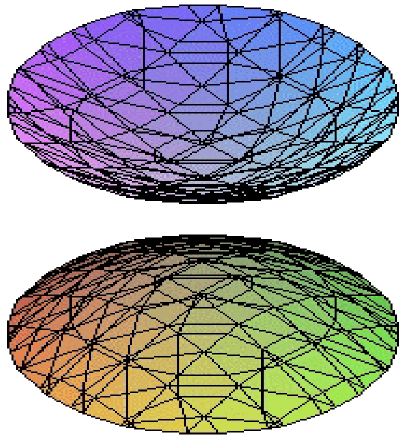
4- HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Su ecuación es de la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

La orientación dependerá de que variable presenta signos positivos





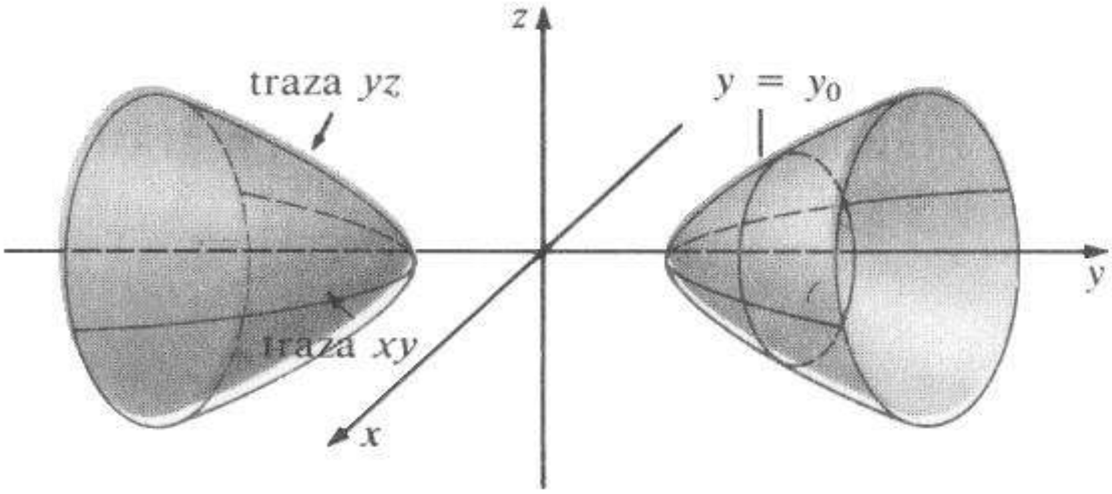
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a) TRAZA DE LA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS:

- Las secciones paralelas a los planos **xy** e **yz** son *Hipérbolas*.
- Las secciones paralelas al plano **xz** son *Elipses*; excepto en el caso del *Hiperboloide de dos hojas de revolución* en el que son *Circunferencias*.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ Hipérbola
xz (y = 0)	Ninguna
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ Hipérbola

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hiperboloide de dos hojas

Un método para graficar un **Hiperboloide de dos hojas** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término (+) de la ecuación.

b) SECCIONES CON PLANOS PARALELOS A LOS COORDENADOS

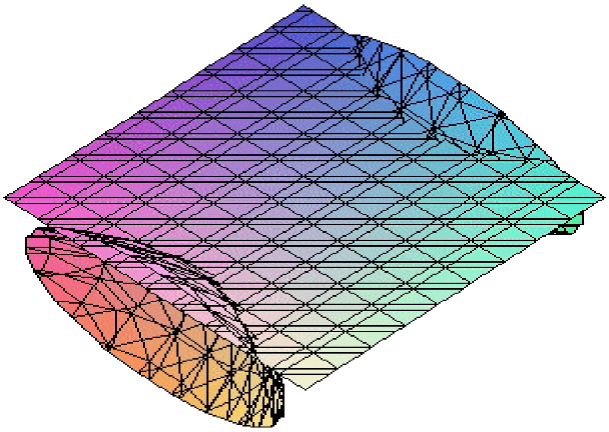
Los cortes de un hiperboloide de ecuación: $+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ con planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas.

A- Cortes por planos z =k

El desarrollo que sigue se ha hecho utilizando la primera de las ecuaciones

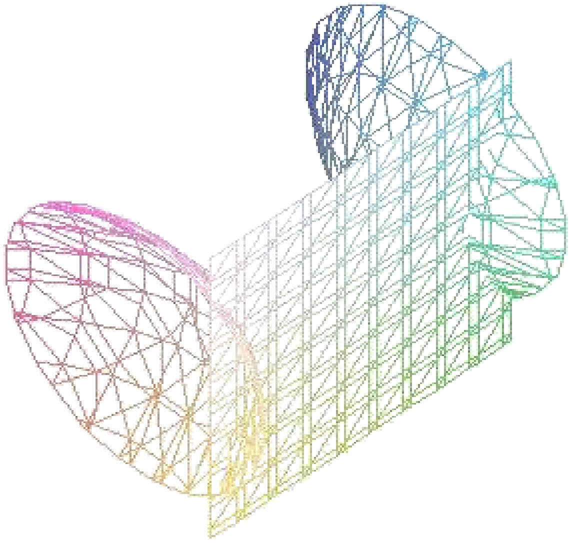
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}$$ esta intersección da una hipérbola con eje real x en un plano xy, esta hipérbola

será $$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{c^2})}-\frac{y^2}{b^2(1+\frac{k^2}{c^2})}=1$$



B- Corte por planos $y = k$

El resultado es análogo al anterior intercambiando los papeles de *y* y *z*



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$ esta intersección

da una hipérbola con eje real x en un plano xz, esta hipérbola será

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{b^2})} - \frac{z^2}{c^2(1+\frac{k^2}{b^2})} = 1$$

C- Cortes por planos yz: $x = k$

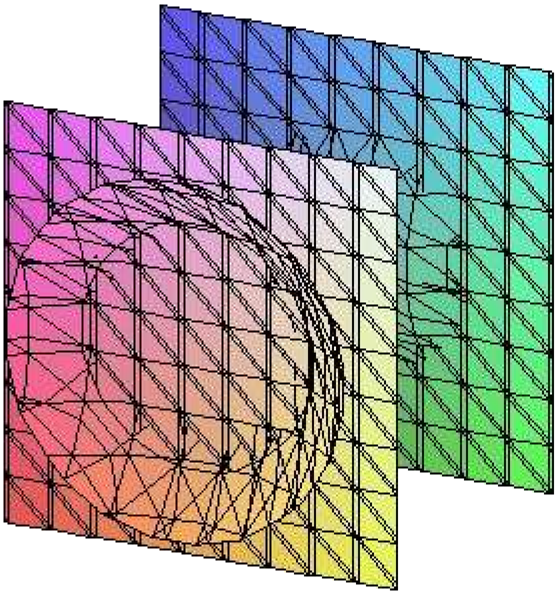
Se multiplica ambos miembros de la igualdad por -1 y se dejan las variables a la izquierda y las constantes a la derecha se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases}$$ Ecuación que representa una elipse

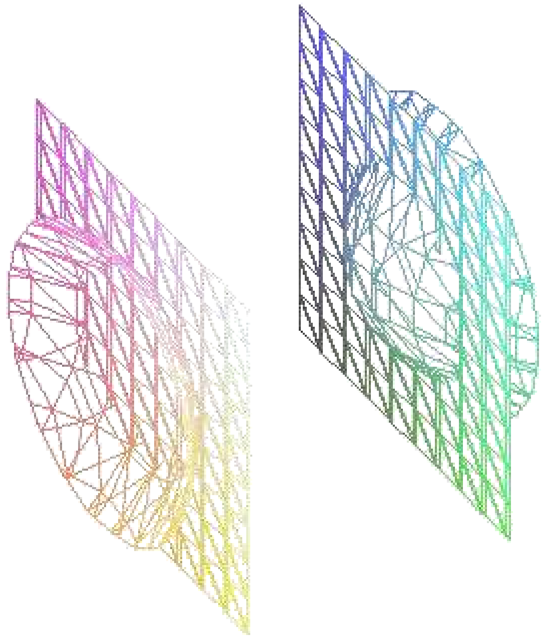
Si $|k| > a$, entonces la curva intersección resulta ser una elipse real.

Si $|k| = a$, entonces la curva intersección será una elipse puntual (el plano es tangente a la superficie).

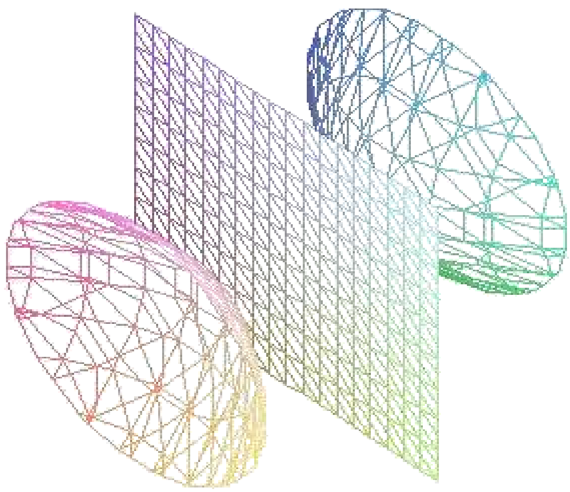
Si $|k| < a$, entonces la intersección será una elipse imaginaria (no hay intersección e real entre la superficie y el plano).



X=|k| > a



X=|k| > a

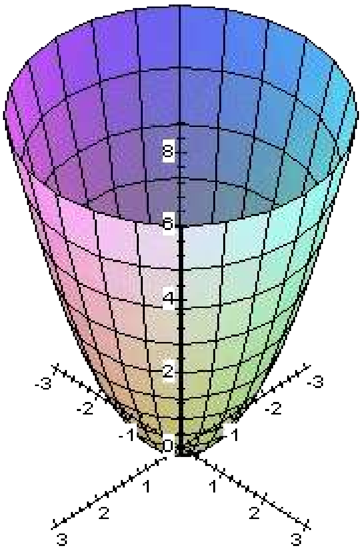


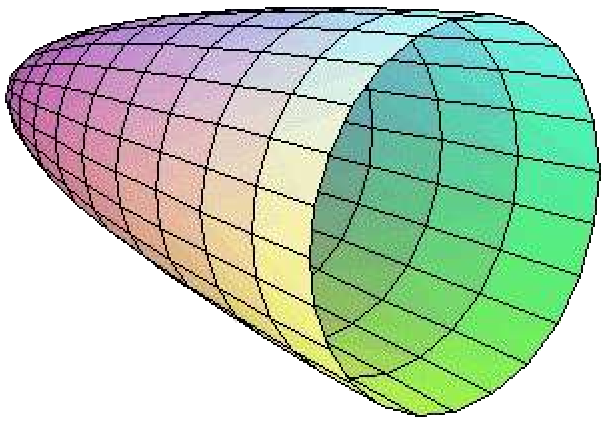
(x=k= 0)

4- PARABOLOIDE

+ PARABOLOIDE ELIPTICO

Su ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ La orientación del Paraboloide elíptico dependerá de la variable que aparece lineal.





$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

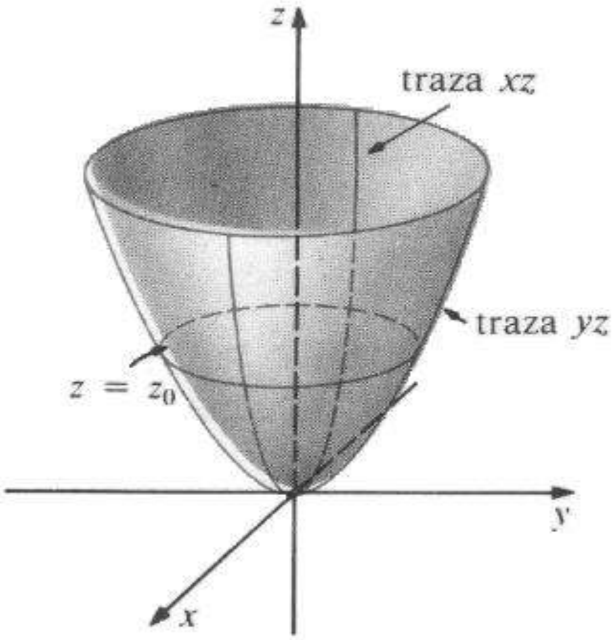
$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

a) TRAZA DE LA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS:

— Las secciones obtenidas por los planos **z = k** son <u>*Elipses*</u>, cuyas dimensiones van aumentando a medida que el plano se aleja del plano **xy**.
— Las secciones correspondientes a los planos paralelos a los coordenados **xz** o **yz** son <u>*Parábolas*</u>.
— Si **c > 0** la cuádrica está, toda ella, por encima del plano **xy**.
— Si **c < 0** está toda ella por debajo de dicho plano **xy**.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	(0; 0) $\Rightarrow$ Punto
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2} = cz \Rightarrow$ Parábola
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow$ Parábola

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



b) SECCIONES CON PLANOS PARALELOS A LOS COORDENADOS

Los cortes del paraboloide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas,

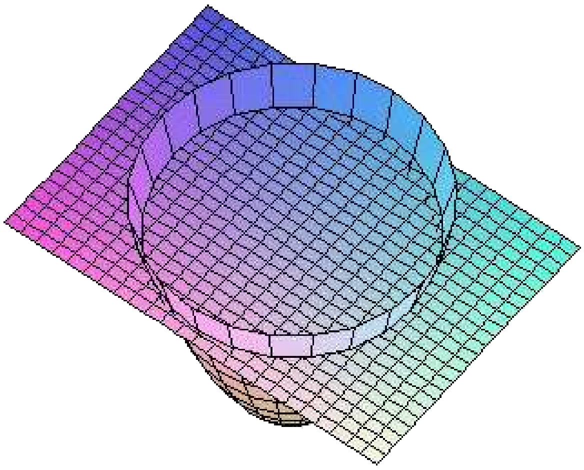
A- Cortes por planos $z = k$

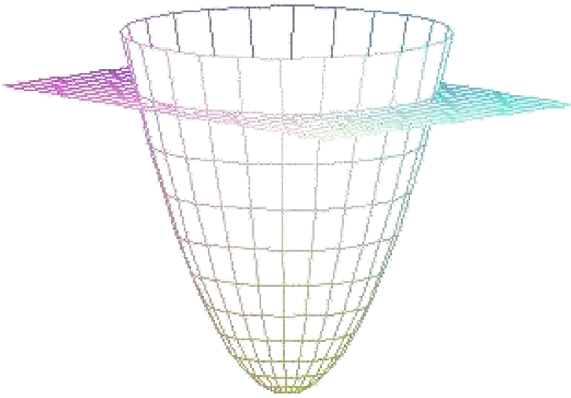
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}$$

si k > 0, entonces la curva intersección resulta ser una elipse de semiejes proporcionales a a y b con ecuación $\dfrac{x^2}{a^2ck} + \dfrac{y^2}{b^2ck} = 1$

si k = 0 la intersección se reduce a un punto, siendo la superficie cuádrica tangente al plano en dicho punto.

si k < 0, entonces no existe intersección.





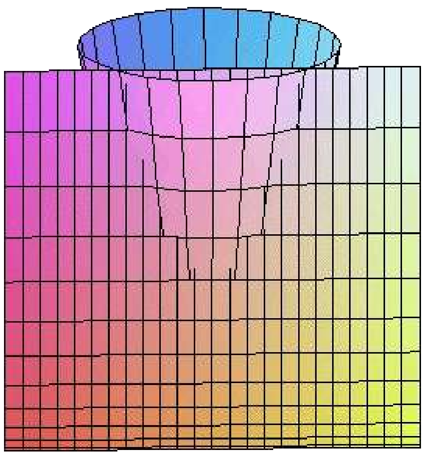
(k < *0*)

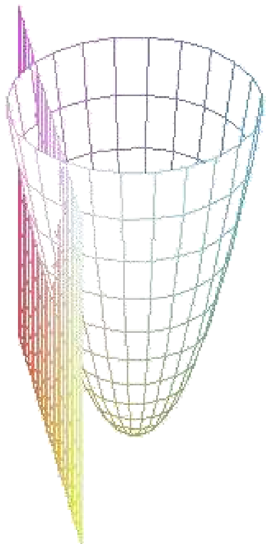
B- Corte por planos xz: $y=k$ o por planos yz: $x=k$ las curvas intersección son parábolas

Se analizará para x=k

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

La intersección de la superficie con el plano x=k dará siempre una parábola de ecuación $y^2 = cb^2(z - \dfrac{k^2}{c.a^2})$





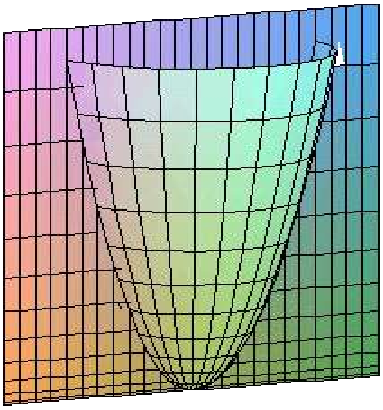
(corte por plano x = k >0)

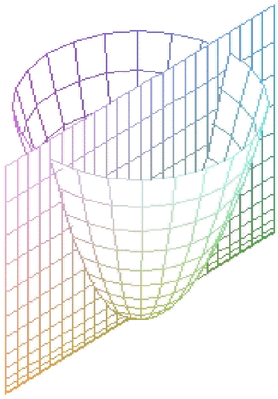
C- De igual forma para y=k se obtiene siempre parábola

Se analizará para y=k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$ La intersección de la superficie con el plano y=k dará siempre una parábola

de ecuación $x^2 = ca^2(z - \dfrac{k^2}{c.b^2})$



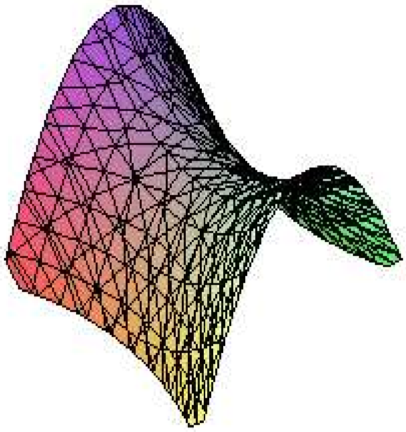


y = k = 0

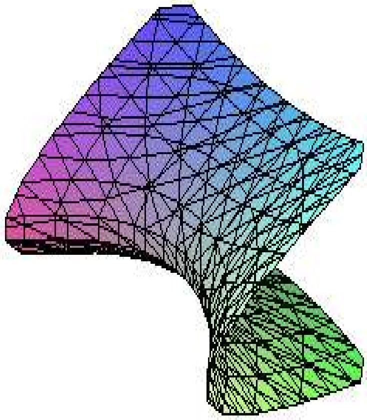
+ PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Esta superficie responde a una ecuación del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$



$$-\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=ax$$

El paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada por las familias de rectas.

a) TRAZAS DE LA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS:

— Las secciones por los planos **z = k** (donde **k > 0**) son *Hipérbolas* cuyos ejes real e imaginario son paralelos respectivamente a los ejes coordenados **x** e **y**; y cuyas dimensiones aumentan a medida que lo hace **k**.

— Si **k < 0**, los ejes reales e imaginarios son paralelos a los **xy** respectivamente.

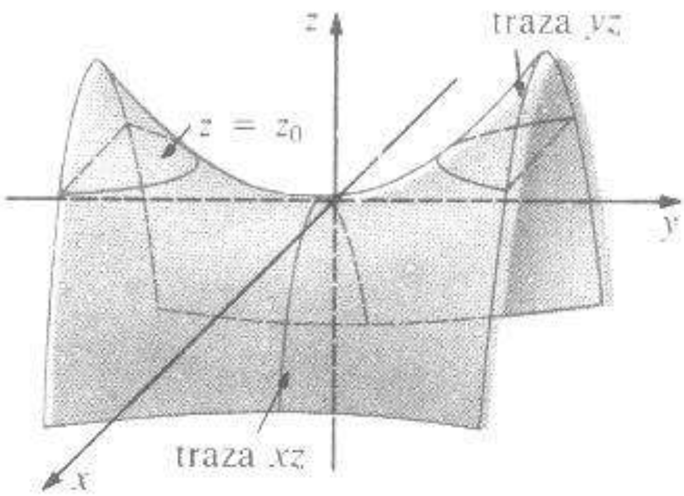
— Si **k = 0**, la sección degenerada es el par de rectas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (5^to Factoreo)

— Las secciones correspondientes a los planos **y = k** son *Parábolas* abiertas hacia abajo.

— Las secciones correspondientes a **x = k** son *Parábolas* abiertas hacia arriba.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$y = \pm \frac{a}{b} x \Rightarrow$ Rectas
xz (y = 0)	$-\frac{x^2}{b^2} = cz \Rightarrow$ Parábola
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{a^2} = cz \Rightarrow$ Parábola

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



Un método para graficar el **Paraboloide Hiperbólico** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término positivo de la ecuación.

b) SECCIONES CON PLANOS PARALELOS A LOS COORDENADOS Los cortes del paraboloide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas:

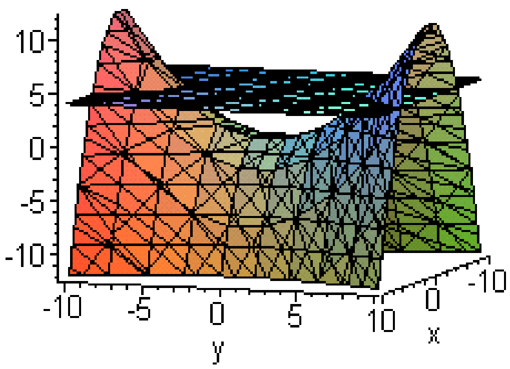
A- Cortes por planos *z =k*

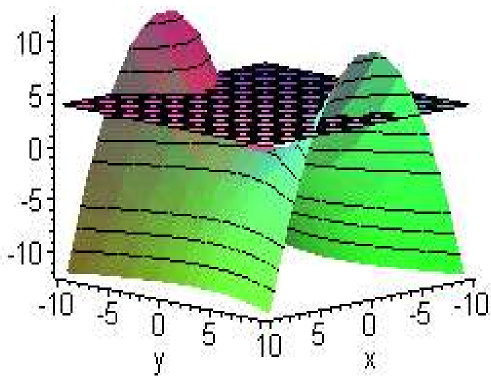
$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}$$

si **k = 0**, e la curva intersección es un par de rectas (asíntotas),

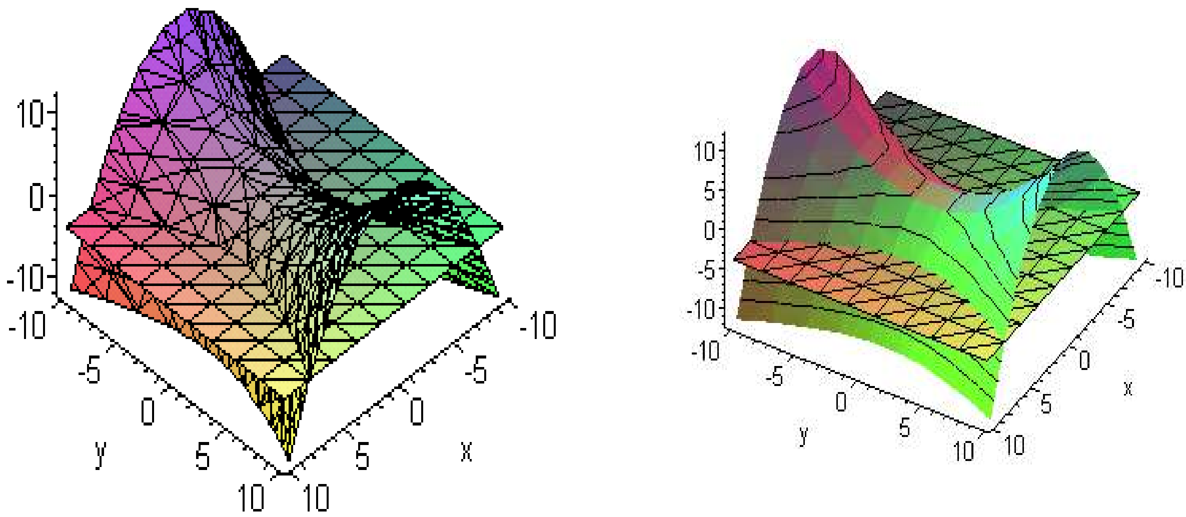
si **k>0** la hipérbola tiene eje real paralelo al eje y, como se muestra en las dos primeras figuras,

si **k<0** la hipérbola tiene eje real paralelo al eje x como se muestra en las dos figuras correspondiente.



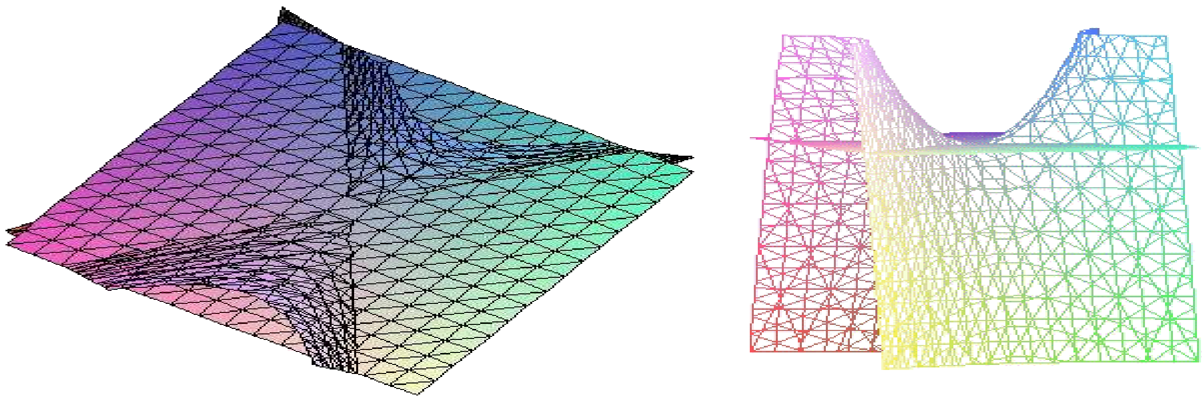


(k > 0)



(k < 0)

si k = 0, la intersección es un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas.

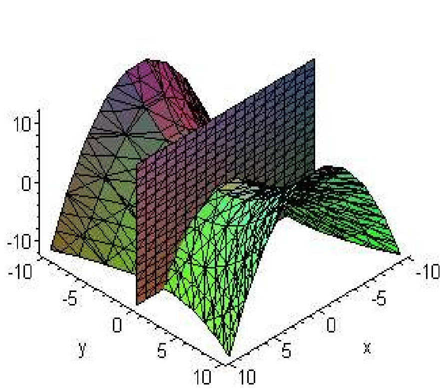


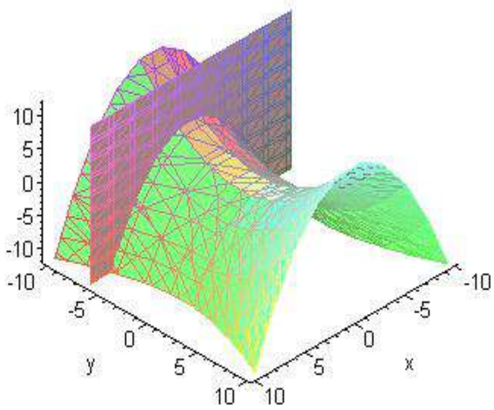
(k = 0)

B- Cortes por planos $y = \mathrm{k}$

La curva intersección son parábolas: $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} = cz - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$ ecuación de una parábola trasladada

$$\begin{cases} x^2 = -a^2 c\left(z + \dfrac{k^2}{cb^2}\right) \\ y = k \end{cases}$$

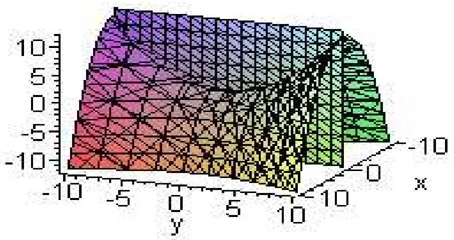


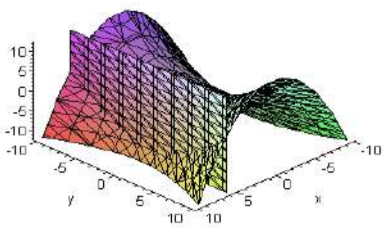


y=k=0 y=k<0

B- **Cortes por planos x = k** las curvas de intersección son parábolas: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$

Es la ecuación de una parábola trasladada $\begin{cases} y^2 = b^2c(z + \dfrac{k^2}{ca^2}) \\ x = k \end{cases}$





X=k=0 x=k>0

5- CONO RECTO

La gráfica de una ecuación de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}}$$

$a > 0;\ b > 0;\ c > 0$

Es un **Cono Recto Elíptico** (ó **Circular** si **a = b**)

Esta superficie se puede considerar generada por la rotación de la recta **y = kx** alrededor del eje **z**.

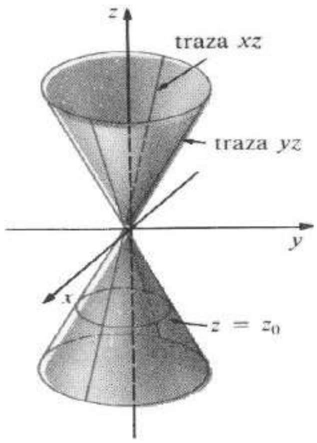
$\boxed{x^2 + y^2 - c^2z^2 = 0}$ → Es como la I $\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D}$ pero en ésta → **A = B**; y **Cz²** es negativo y **D**

a) TRAZA DE UNA SUPERFICIE EN LOS PLANOS COORDENADOS:

— Las secciones horizontales producidas por los planos paralelos al plano coordenado **xy** son *Elipses*, excepto cuando **a = b** que son *Circunferencias*.
— Las secciones correspondientes a planos paralelos (//) al **yz** o al **xz** son *Hipérbolas*.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	(0; 0) ⇒ Punto
xz (y = 0)	$z = \pm \frac{c}{a} x$ ⇒ Rectas
yz (x = 0)	$z = \pm \frac{c}{b} x$ ⇒ Rectas

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



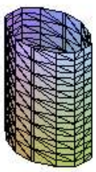
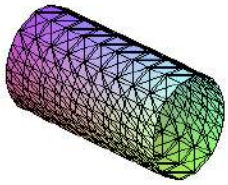
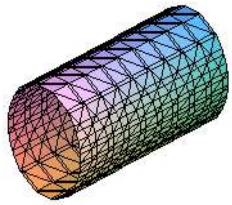
SUPERFICIES CILÍNDRICAS

Está generada por una recta que se desplaza paralelamente a otra fija y que se apoya constantemente en forma perpendicular a una curva también fija.
La recta móvil es la generatriz.
La curva fija es la directriz de la superficie en cuestión.

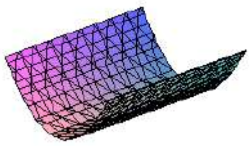
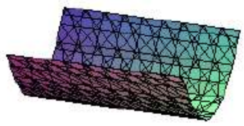
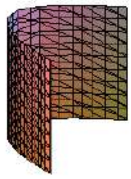
Una superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela (//) a uno de los ejes coordenados y cuya directriz es una curva en el plano coordenado que es perpendicular a la generatriz, tiene la misma ecuación que la directriz.

En general una ecuación que contenga dos variables, si representa una curva en el plano de dichas variables, será la ecuación de una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son paralelas al eje de la variable faltante.

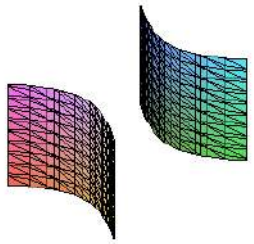
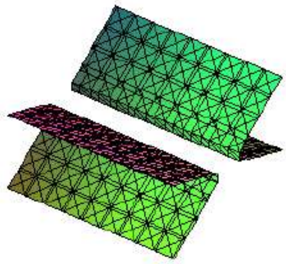
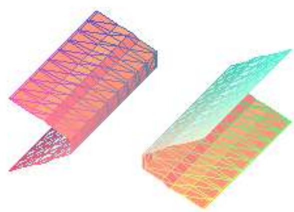
- CILINDROS ELÍPTICOS:

		
Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje z. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje y. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje x. $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- CILINDROS PARABÓLICOS:

		
Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje x. $y^2 = cz$	Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje y. $x^2 = cz$	Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje z. $x^2 = by$

- CILINDROS HIPERBÓLICOS:

		
Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje z. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje y. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje x. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

a) ANÁLISIS DE TRAZAS EN LOS PLANOS COORDENADOS DE CILINDRO ELIPTICO – CILINDRO CIRCULAR

Se analizará un cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje x.
En el caso de un cilindro elíptico o circular, si la directriz es paralela al eje z las correspondientes ecuaciones son:

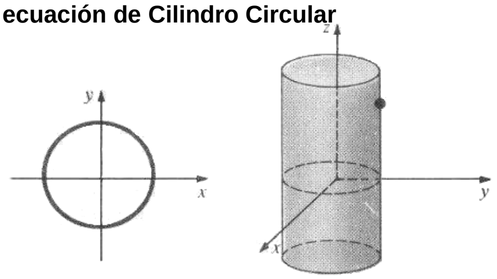
$a \neq b \Rightarrow$ Elipse $\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ La ecuación del **Cilindro** es $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$a = b = r \Rightarrow$ Circunferencia $\quad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ La ecuación del **Cilindro circular** es $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

b) TRAZA DE UNA SUPERFICIE CILINDRICA: "CILINDRO ELIPTICO"

Cortados por el plano coordenado	Las trazas obtenidas:
Plano xy: $z = 0$	Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Plano yz: $x = 0$	Par de rectas paralelas $y = \pm b$
Plano xz: $y = 0$	Par de rectas paralelas: $x = \pm a$

Gráfica y ecuación de Cilindro Circular



x e y están relacionadas por:
$x^2 + y^2 = r^2$
z es arbitraria.

EJERCITACIÓN UNIDAD N°5
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

RECTAS EN EL ESPACIO

1- Dada la recta que pasa por los puntos: $\boldsymbol{P_1(1;\ 2; -3)}$ $\boldsymbol{P_2(0;\ 1; -2)}$

a) Encontrar la ecuación de la recta:

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

$$\frac{x-x_1}{\underbrace{x_2-x_1}_{U}} = \frac{y-y_1}{\underbrace{y_2-y_1}_{V}} = \frac{z-z_1}{\underbrace{z_2-z_1}_{W}} \Longrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z+3}{-2+3}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

$$u_1 = -1 \qquad v_1 = -1 \qquad w_1 = 1$$

b) Encontrar la ecuación de una recta paralela que pase por: $P(3;\ -2;\ 1)$

Condición de paralelismo entre rectas $\Longrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$

Adopto valores para u_2, v_2, w_2 que sean proporcionales a u_1, v_1, w_1

$u_2 = -2 \qquad v_2 = -2 \qquad w_2 = 2$

$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{2}$ Ecuación de una recta paralela que pasa por: $P(3;\ -2;\ 1)$

c) Encontrar la ecuación de una recta perpendicular que pasa por: $P(1;\ 5;\ -3)$

Condición de perpendicularidad entre rectas $\Longrightarrow u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0$

En esta ecuación hay tres incógnitas, si adoptamos valores para u_2 y v_2, podemos calcular w_2.

Adoptando $u_2 = 1 \qquad v_2 = 1; \quad w_2 = ?$

$$u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0 \Longrightarrow (-1).1 + (-1).1 + 1.\ w_2 = 0$$

$$-1 - 1 + 1.\ w_2 = 0$$

$$-2 + 1.\ w_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w_2 = 2$$

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{2}}$$

2- Dada la recta que pasa por los puntos: $P_1(3; -2;\ 1)$ $\quad P_2(0;\ 4; -1)$

a) Encontrar la ecuación de la recta.
b) Encontrar la recta paralela que pase por: $P\ (3; -5;\ 4)$
c) Encontrar la recta perpendicular que pase por: $P\ (2; -4;\ 5)$

PLANOS EN EL ESPACIO

3- Dada la siguiente ecuación del plano $\boldsymbol{6x + 4y + 3z - 12 = 0}$
Obtener:
a) Gráfica aproximada.

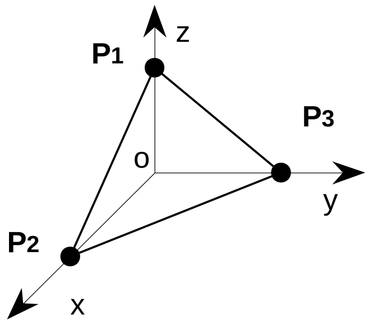
Ecuación general del plano $\longrightarrow$ $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$

$z = \frac{12}{3} \quad \rightarrow \quad z = 4$

$x = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad x = 2$

$y = \frac{12}{4} \quad \rightarrow \quad y = 3$

x	y	z	
0	0	4	P1
2	0	0	P2
0	3	0	P3



b) Encontrar la ecuación de un plano paralelo que pase por el punto: $P_1\ (2;\ 1;\ -3)$

Plano que pasa por un punto $P_1(x_1; y_1; z_1)$ $\longrightarrow$ $\mathbf{A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0}$

Condición de paralelismo entre planos $\longrightarrow$ $\mathbf{\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}}$

$$6(x - x_1) + 4(y - y_1) + 3(z - z_1) = 0$$

$$6(x - 2) + 4(y - 1) + 3(z + 3) = 0$$

c) Encontrar la ecuación de un plano perpendicular que pase por el punto: $P_2\ (3;\ -2;\ 1)$

Recordemos:
Plano que pasa por un punto $P_2(x_2; y_2; z_2)$ $\longrightarrow$ $\mathbf{A_2(x - x_2) + B_2(y - y_2) + C_2(z - z_2) = 0}$

Condición de Perpendicularidad entre planos $\longrightarrow$ $\mathbf{A\ A_2\ + B\ B_2\ + C\ C_2} \ = 0$

En esta ecuación hay 3 incógnitas, dando valores, por ejemplo a A_2 y B_2, se puede calcular C_2.
Adoptando $A_2 = 1$; $B_2 = 1$

$$A\ A_2 + B\ B_2 + C\ C_2 = 0$$

$$6 . 1 + 4 . 1 + 3 . \mathbf{C_2} = 0$$

$$6 + 4 + 3 . \mathbf{C_2} = 0 \qquad \rightarrow \quad \mathbf{C_2} = -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$$

$$(x-3) + (y+2) - \frac{10}{3}(z-1) = 0$$

4- Dada la ecuación del plano: $\boldsymbol{x + 2y + 5z - 10 = 0}$

a) Graficar aproximadamente
b) Encontrar la ecuación de un plano paralelo que pase por el punto: $P_1(2;\ -4;\ 1)$
c) Encontrar la ecuación de un plano perpendicular que pase por el punto: $P_2(-3;\ 2;\ 1)$

5- Encontrar la ecuación de una recta paralela al plano 3x-2y+z-1=0 que pase por el punto $\boldsymbol{P(1;\ -2;\ 4)}$

6- Encontrar la ecuación de una recta perpendicular al plano 5x+2y-z+8=0 que pase por el punto P (3; -5; 2)

7- Encontrar la ecuación de un plano perpendicular a la recta $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ que pase por el punto $P(2;\ 1;\ -3)$

8- Encontrar la ecuación de un plano paralelo a la recta $\frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{2}$ que pase por el punto $P(-4;\ 2;\ 2)$

9- Posiciones particulares del plano.

a) Escriba la ecuación del plano xy
b) Escriba la ecuación del plano xz
c) Escriba la ecuación del plano yz
d) Escriba las ecuaciones de tres planos paralelos a los coordenados que pasen por el punto P(2,1,-3)
e) Escriba la ecuación de un plano paralelo eje x
f) Escriba la ecuación de un plano paralelo eje y
g) Escriba la ecuación de un plano paralelo eje z
h) Escriba la ecuación de un plano que contenga al eje x
i) Escriba la ecuación de un plano que contenga al eje y
j) Escriba la ecuación de un plano que contenga al eje z

SUPERFICIES CUÁDRICAS

10- Analizar las TRAZAS de las siguientes superficies. Graficar aproximadamente cada una de ellas y la superficie completa:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$
4. $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
5. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 0$
6. $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{8} = 6y$
7. $4x^2 + 3y^2 = z$

11- Analizar los CORTES PARALELOS de las siguientes superficies cuádricas. Graficar aproximadamente cada una de ellas y la superficie completa

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$
4. $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{8} = 6y$

12- Graficar de forma aproximada las siguientes superficies trasladadas.

1. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + \frac{(z+4)^2}{16} = 1$
2. $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 4z$
3. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} - (z+4)^2 = 0$
4. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{36} = 1$
5. $(x-6)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$

13- Graficar las siguientes SUPERFICIES CILÍNDRICAS. Indique en que plano se encuentra la directriz y a que eje es paralela la generatriz.

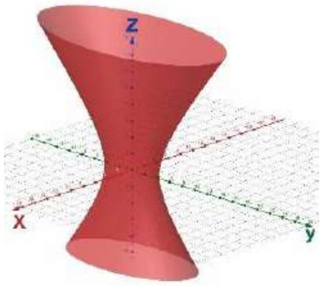
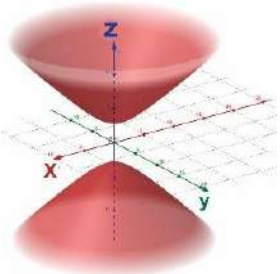
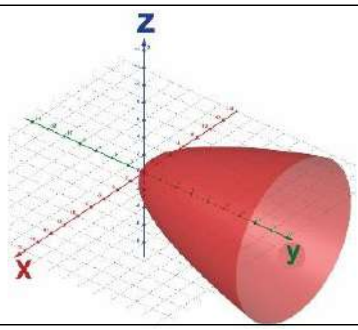
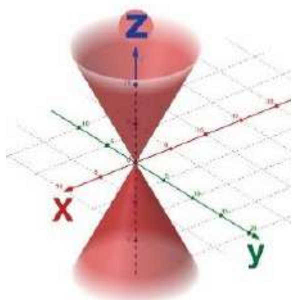
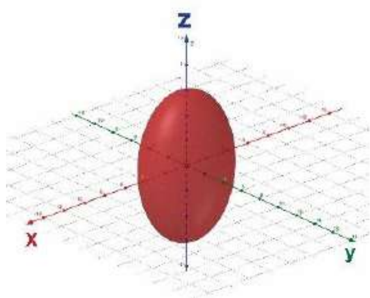
1. $x^2 = 8y$
2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 4$
3. $y^2 = 4z$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
5. $x^2 + y^2 = 9$

14- Encuentre la ecuación de un cilindro parabólico cuya generatriz sea paralela al eje y

15- Encuentre la ecuación de un cilindro elíptico cuya generatriz sea paralela al eje z

16- Encuentre la ecuación de un cilindro hiperbólico cuya generatriz sea paralela al eje x

17- Ejercicio Integrador. Indique el nombre y la ecuación de las siguientes superficies cuádricas

Superficie cuádrica	Nombre	Ecuación
		
		
		
		
		

Superficie cuádrica	Nombre	Ecuación