Vectores en el espacio

Producto escalar

Se define el producto escalar entre dos vectores como la sumatoria de los productos entre las componentes correspondientes.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow \ \vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Con esta definición, podemos hallar el producto escalar

Por ejemplo:

$$\overline{\mathbf{u}} = (0;0;10) \qquad \vec{\mathbf{v}} = (0;15;-15)$$

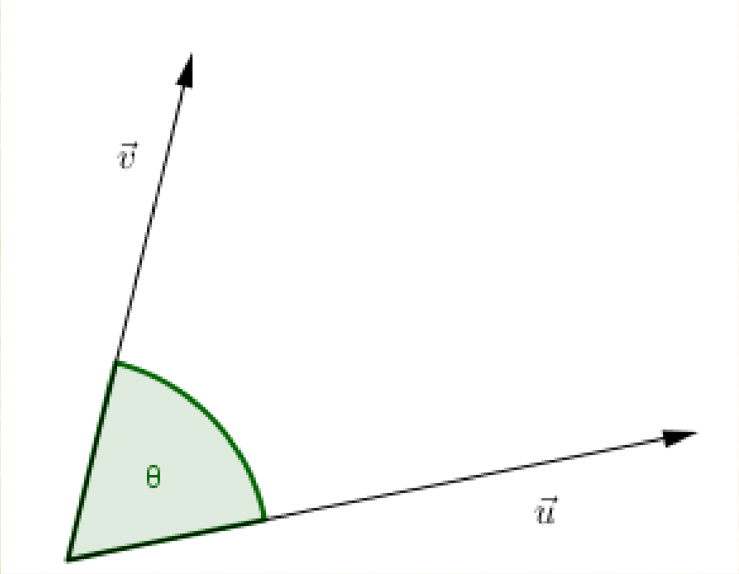
$$\overline{\mathbf{u}}.\overline{\mathbf{v}} = (0.10 + 0.15 + 10.(-15) = -150$$

El producto escalar entre vectores da por resultado un número

Producto escalar

Siendo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (o a $\mathbb{R}^2$) y θ el ángulo entre los mencionados vectores, el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define así:

$$\vec{u} \, . \, \vec{v} = |\vec{u}| . |\vec{v}| . cos\theta$$

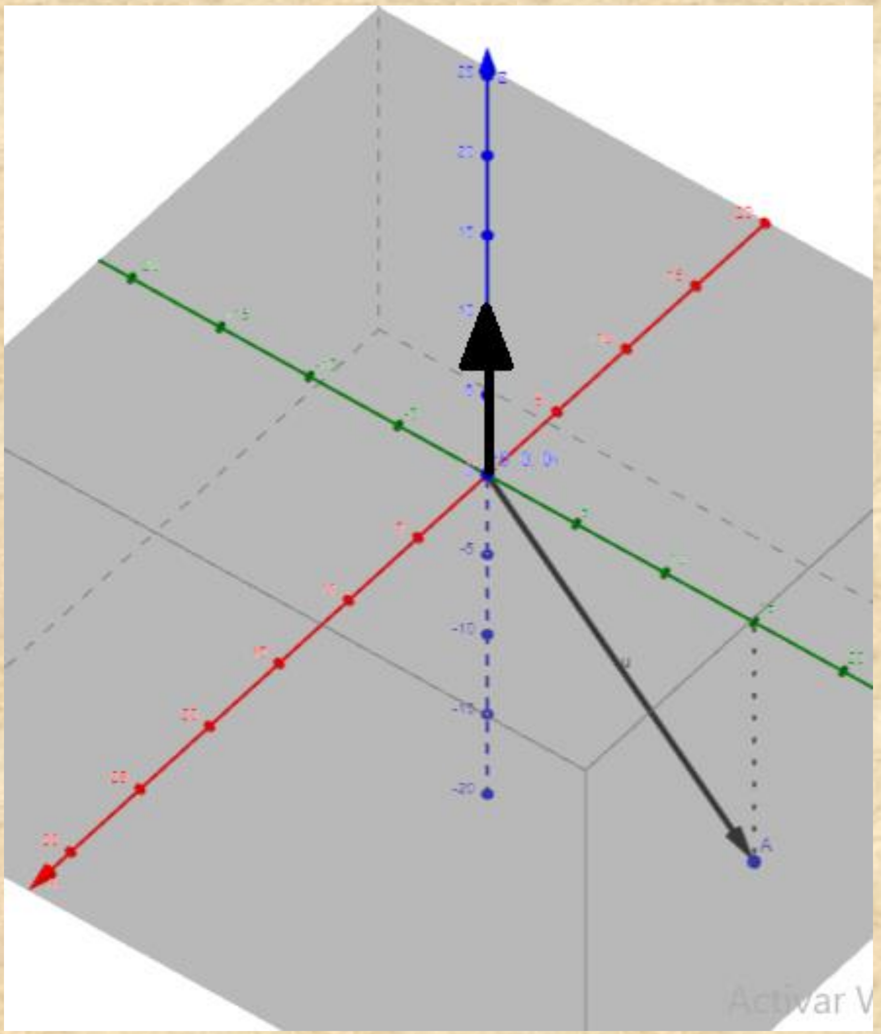


El producto escalar entre dos vectores da como resultado un número

El símbolo que usamos para expresar al producto escalar es $\boxed{.}$
(es un punto)

Producto escalar: ejemplo

Por ejemplo, $\vec{u} = (0; 0; 10)$ y $\vec{v} = (0; 15; -15)$.



Calculamos sus módulos:

$$|\vec{u}| = 10$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-15)^2} = 15\sqrt{2}$$

En el gráfico podemos visualizar que el ángulo θ entre los dos vectores, es de 135°

Con esta información, resulta

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\theta$$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = 10.15\sqrt{2}.cos135°$$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = 10.15\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = -150$$

Resolvemos el ejercicios de la guía de actividades

Calcular el producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

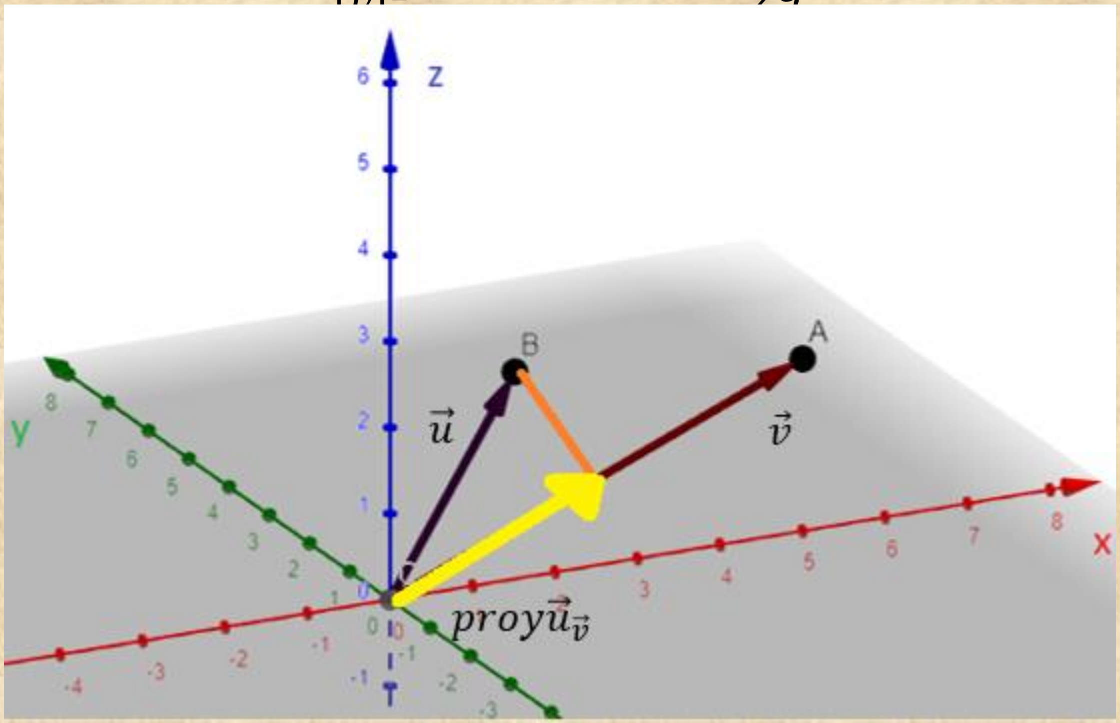
$\vec{a}$ = (1;1;1) y$\vec{b}$ =(-2;-1;1)

$\vec{a}$ = (2;1;-2) y $\vec{b}$ =(1;-3;2)

Proyección ortogonal: ejemplo

Dados $\vec{u} = (2;1;2)$ y $\vec{v} = (5;0;2)$, hallar $proy\vec{u}_{\vec{v}}$

$$proy\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}.\vec{v} \Rightarrow proy\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{14}{29}.(5;0;2) \Longrightarrow proy\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{70}{29};0;\frac{28}{29}\right)$$



Cálculos Auxiliares

$\vec{u}.\vec{v} = (5;0;2).(2;1;2)$
$\vec{u}.\vec{v}$ =5.2+0.1+2.2
$\vec{u}.\vec{v}$ =14

$|\vec{v}|^2 = \vec{v}.\vec{v}$
$|\vec{v}|^2 = (5;0;2).(5;0;2)$
$|\vec{v}|^2$ =5.5+0.0+2.2
$|\vec{v}|^2$ =29

Sean u y v vectores no-nulos, la proyección de u sobre v, es un vector cuyo origen es 0 y cuyo extremo es el pie de la perpendicular trazada desde B a la recta v

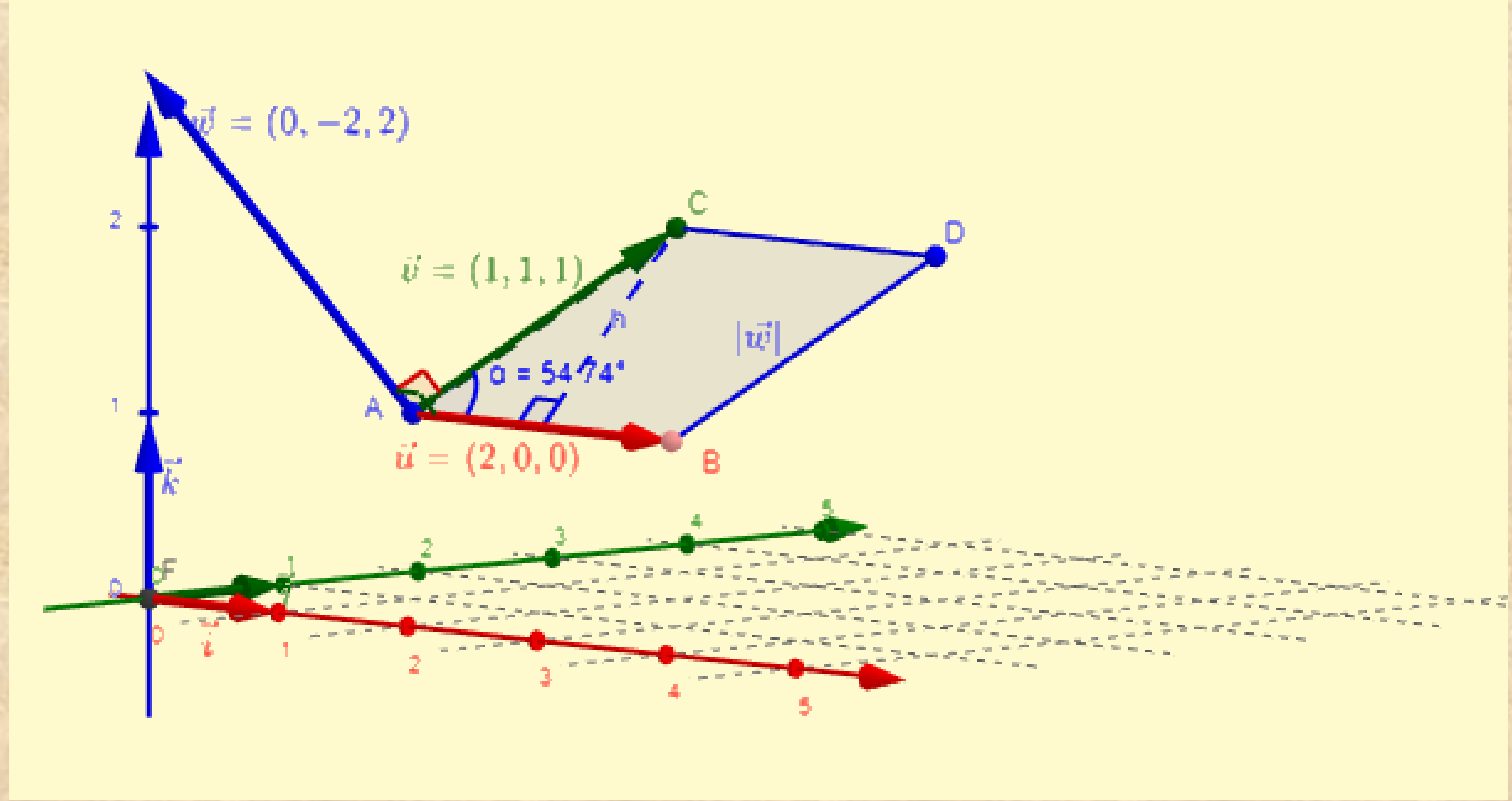
Resolvemos el ejercicios de la guía de actividades

Calcular la $proy_{PQ}$ RS y $proy_{RS}$PQ
siendo:

P=(2;3)
Q=(5;7)
R=(2;-3)
S=(1;2)

Producto vectorial

El producto vectorial entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ perpendicular al plano que ellos determinan. El símbolo que usamos para el producto vectorial es: $\wedge$



$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$; siendo $\vec{w} \perp \vec{u}$; $\vec{w} \perp \vec{v}$

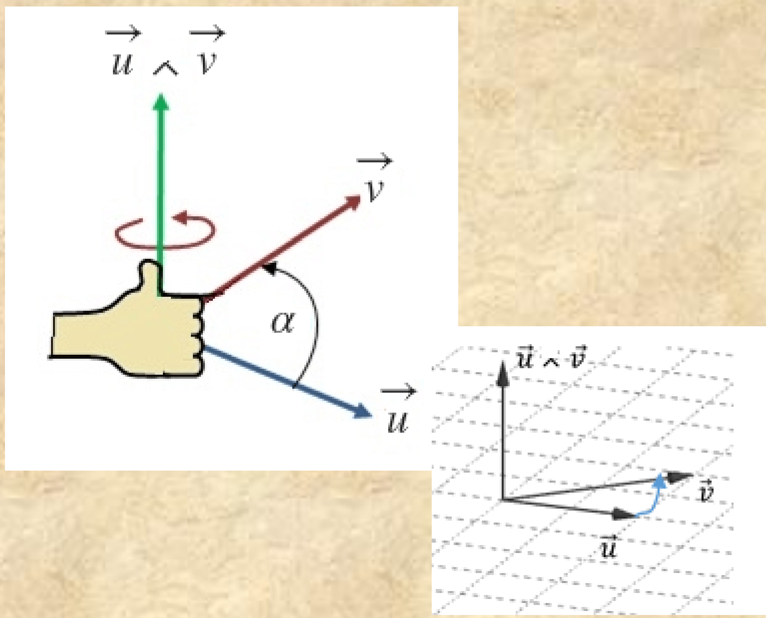
Producto vectorial

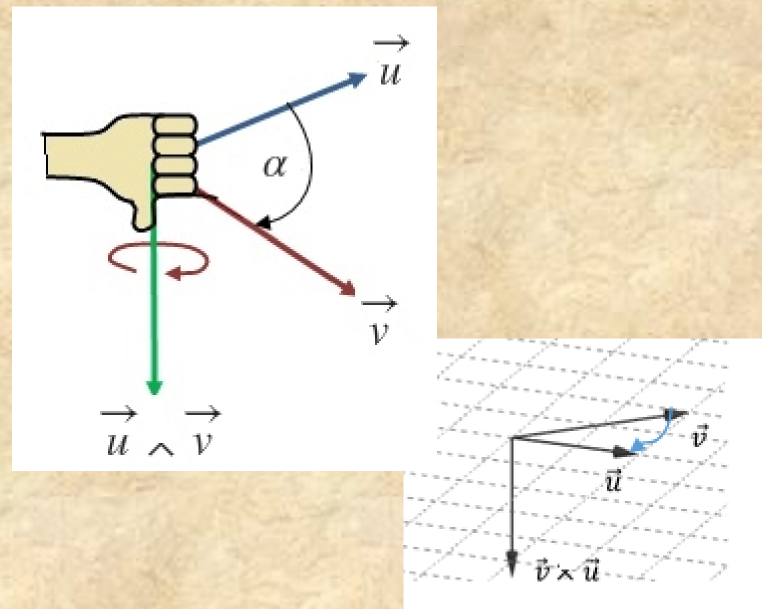
El producto vectorial entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

que tiene

- Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\vec{w} \perp \vec{u}$; $\vec{w} \perp \vec{v}$
- Sentido: depende de la orientación del espacio. Puede determinarse mediante la regla del tirabuzón: si gira en sentido antihorario o en sentido horario, como muestran las figuras





- Módulo, que se determina así: $|\vec{w}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta,$ donde θ es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Producto vectorial

Ejemplo: $\vec{u} = (3; 0; 0)$y $\vec{v} = (0; 2; 0)$
Como vemos, $\vec{u}$ está situado sobre el eje x, $\vec{v}$ está situado sobre el eje y

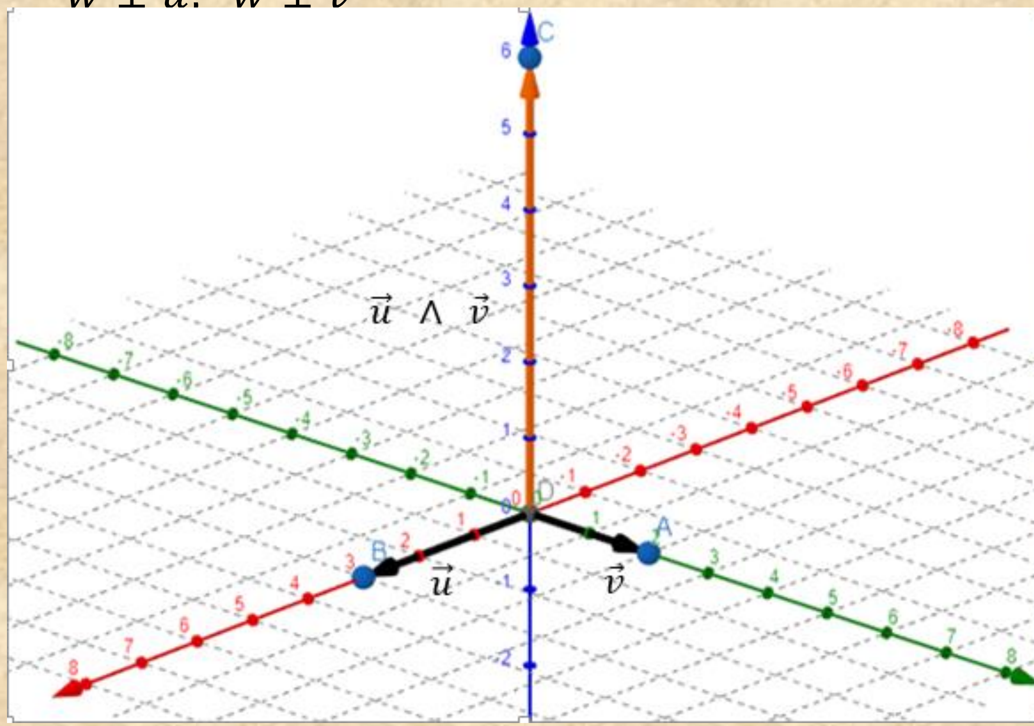
$\vec{w} \perp \vec{u}$; $\vec{w} \perp \vec{v}$

Por lo tanto,
dirección de $\vec{u} \ \wedge \ \vec{v}$: eje z

Sentido de $\vec{u} \ \wedge \ \vec{v}$: semieje positivo de z

Módulo de $\vec{u} \ \wedge \ \vec{v}$:

$|\vec{u}$



Entonces, $\vec{u} \ \wedge \ \vec{v} = (0,0,6)$

Producto vectorial: fórmula

Aplicando propiedades del producto vectorial, y calculando los productos entre los versores canónicos, se deduce la fórmula para calcular el producto vectorial. Esta fórmula puede calcularse en forma sencilla utilizando determinantes. Para hallar $\vec{u} \wedge \vec{v}$, siendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\ y\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ubicamos en la primera fila del determinante, los versores fundamentales; en la segunda, las componentes de $\vec{u}$ y en la tercera las componentes de $\vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Con $\vec{u} = (2; 1; 2)$y $\vec{v} = (5; 0; 2)$, hallamos

$A)\ \vec{u} \wedge \vec{v}$ $\qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\check{\imath} + 6\check{\jmath} - 5\check{k}$

B) $\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\qquad \vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\check{\imath} - 6\check{\jmath} + 5\check{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$y $\vec{v} \wedge \vec{u}$ son vectores opuestos; esto comprueba que el producto vectorial no es conmutativo

El producto vectorial entre dos vectores da por resultado un vector

Resolvemos el ejercicios de la guía de actividades

Si $\vec{a} = (1;2;-1)$; $\vec{b}$ =ˇ+ ˇ− ˇ y $\vec{c}$ =-ˇ+ 3ˇ+ 4ˇ,
calcular, siempre que sea posible :

A) $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - 3\,\vec{c})$

B) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

C) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vectores y k un número real

a) El producto vectorial NO es conmutativo: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

b) Distributividaddel producto vectorial respecto de la suma de vectores: $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

c) Asociatividad mixta: $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$

d) El producto vectorial entre un vector $\vec{a}$cualquiera, y el vector nulo es cero: $\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

Condición de paralelismo entre dos vectores

Trabajamos con $\vec{u}, \vec{v}$ no nulos. Bajo esta consideración,

$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = k.\vec{v} \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

(porque $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta$; siendo $|\vec{u}| \neq 0$ porque $\vec{u} \neq \vec{0}$; $|\vec{v}| \neq 0$ porque $\vec{v} \neq \vec{0}$. En consecuencia, para que el resultado sea 0, la única posibilidad es que $\mathrm{sen}\theta = 0$, lo cual sucede cuando $\theta=0°$ ó $\theta=180°$

Esto nos permite enunciar una condición necesaria y suficiente de paralelismo entre vectores:

$$\boxed{\vec{u} \neq \vec{0}; \vec{v} \neq \vec{0}; \vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}}$$

La expresión anterior indica que:

1) Si dos vectores son paralelos, el producto vectorial entre ellos es el vector nulo
2) Si el producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector nulo, dichos vectores son paralelos

Módulo del producto vectorial

$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta,$ donde θ es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Por otro lado, ahora que ya sabemos calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$, para hallar $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ podemos calcular el módulo del vector obtenido

Ejemplo:
Previamente obtuvimos $\vec{u} \wedge \vec{v} == 2\check{\imath} + 6\check{\jmath} - 5\check{k}$

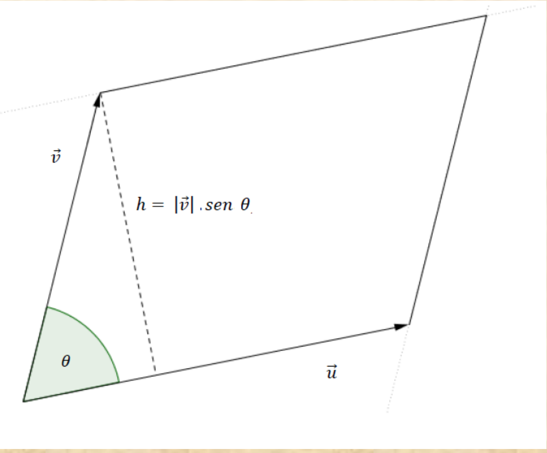
Entonces,

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-5)^2} = \sqrt{65}$$

De acuerdo con la información que se posea, se calcula el módulo por uno u otro camino

Interpretación geométrica del producto vectorial

Consideramos un paralelogramo cuyos lados consecutivos son $\vec{u}$ y $\vec{v}$



Si trazamos la altura del paralelogramo, queda formado un triángulo rectángulo. Por trigonometría, sabemos que $sen\theta = \frac{catero\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|.sen\theta$. La base del paralelogramo es $|\vec{u}|$. Entonces,

$$\text{Área}\ paralelogramo = b.h$$
$$\text{Área}\ paralelogramo = |\vec{u}||\vec{v}|.sen\theta$$
$$\text{Área}\ paralelogramo = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

Dados dos vectores no paralelos, el módulo del producto vectorial entre ellos representa el área del paralelogramo que tiene a dichos vectores por lados consecutivos

Resolvemos el ejercicios de la guía de actividades

Dados los puntos P=(-1;-1;2) Q=(-3;0;2) y R=(-1;3;5).

Hallar:

A) El ángulo PQR

B) El área del triángulo que tiene por vértices a los puntos dados

C) El perímetro del triángulo PQR

Producto mixto

Dados $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{w}$ se denomina **producto mixto** al número real que se obtiene al multiplicar:

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Para obtener el producto mixto, se calcula primero el producto vectorial, y luego el producto escalar.

No hay un símbolo específico para referirse al producto mixto

Producto mixto: ejemplo

Hallar $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$ siendo $\vec{u} = (1; 3; -2)$, $\vec{v} = (2; 1; 4)$ y $\vec{w} = (-3; 1; 6)$

Empezamos por el producto vectorial:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\check{\imath} - 24\check{\jmath} + 5\check{k}$$

Y luego, el producto escalar entre $\vec{u}\ y\ (\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (1; 3; -2) \times (2; -24; 5)$$

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 2 - 72 - 10$$

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = -80$$

El producto mixto entre tres vectores da por resultado un número real

Propiedad del producto mixto

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{(por definición de producto mixto)}$$

Si permutamos la primera y la segunda fila, el determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Si permutamos la segunda y la tercera fila, el determinante cambia nuevamente de signo.

$$-\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

En definitiva, obtenemos: $\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$

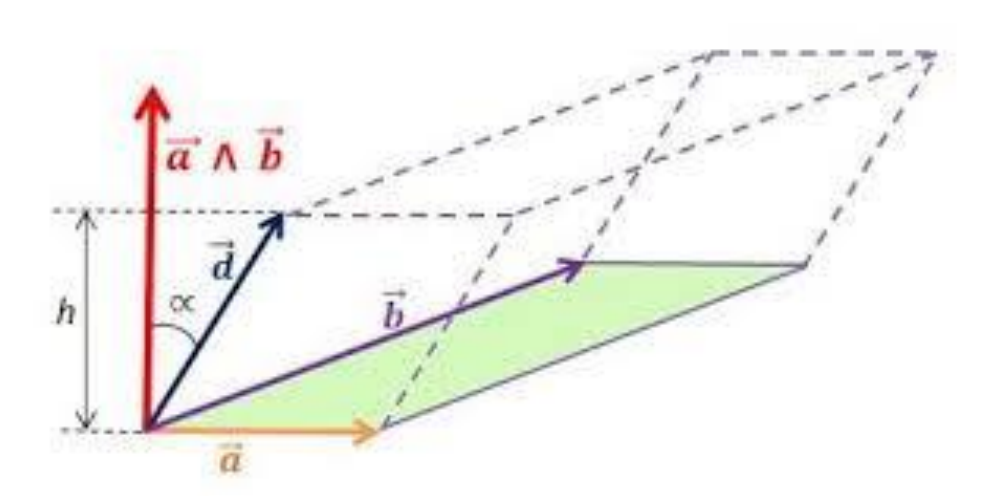
Por otro lado, $\boxed{\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$ (por definición de producto mixto)

Aplicando propiedades de los determinantes, demostramos que

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

Interpretación geométrica del producto mixto

Consideramos tres vectores de $\mathbb{R}^3 \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$, y construimos un paralelepípedo (cuerpo cuyas caras están formadas por paralelogramos) de manera tal que los tres vectores formen tres aristas concurrentes en un vértice



$Volumen\ del\ paralelepipedo$ = Á$rea\ de\ la\ base$. $Altura$

Siendo: Á$rea\ de\ la\ base$= $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$

$$cos\alpha = \frac{catero\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{h}{|\vec{d}|} \Rightarrow h = |\vec{d}|.cos\alpha$$

(α es el ángulo que forman $\vec{d}$ y $\vec{a} \wedge \vec{b}$)

Como la altura debe ser positiva, y $cos\alpha$ puede ser negativo,($si\ 90° < \alpha < 180°$), lo consideramos en valor absoluto. Así,

$Volumen\ del\ paralelepipedo$ = $|\vec{a} \wedge \vec{b}|.|\vec{d}|.|cos\alpha\ |$

Interpretación geométrica del producto mixto

$Volumen\ del\ paralelepipedo$ = $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| . \left|\vec{d}\right| . |cos\alpha\ |$

Por otro lado, tenemos que

$$\left|\vec{d}.\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right| = \left|\vec{d}\right|.\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|.\left|cos\left(\widehat{\vec{d};\vec{a} \wedge \vec{b}}\right)\right|$$

Pero $\left(\widehat{\vec{d};\vec{a} \wedge \vec{b}}\right) = \hat{\alpha}$

Entonces:

$$Volumen\ del\ paralelepipedo = \left|\vec{d}.\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right|$$

El valor absoluto del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas concurrentes en uno de sus vértices a dichos vectores

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Determinar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:
$PQ^{\rightarrow}$,$PR^{\rightarrow}$ y$PS^{\rightarrow}$, en donde:

P=(2;1;-1) ;

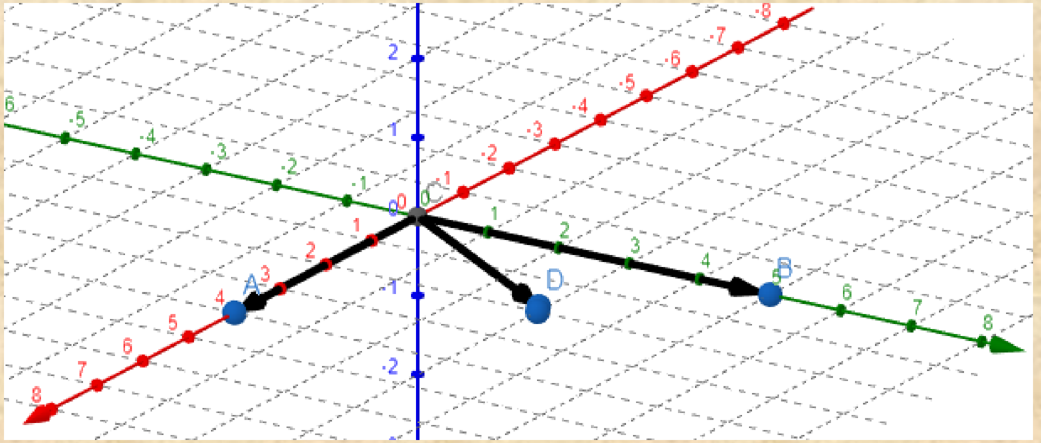
Q=(-3;1;4) ;

R=(-1;0;2) ;

S=(-3;-1;5)

Vectores coplanares

Tres o más vectores de $\mathbb{R}^3$son coplanaressi, considerados con un origen común, sus direcciones quedan incluidas en un mismo plano.
Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (4;0;0)$, $\vec{v} = (2;3;0)$ y $\vec{w} = (0;5;0)$ son coplanares, porque tienen origen común, y las rectas que determinan sus direcciones están incluidas en el plano xy.



Si los vectores están incluidos en un mismo plano, no forman un paralelepípedo; y su producto mixto da cero. Entonces:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son coplanares$\Leftrightarrow \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$

1) Si tres vectores son coplanares, su producto mixto es cero
2) Si el producto mixto entre tres vectores es nulo, dichos vectores son coplanares

Trabajo práctico

Completar la primera parte de la
Guía Nº 4