Sistemas de ecuaciones.

Ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** es una igualdad que se verifica para ciertos valores de la/s incógnita/s. Dicha/s incógnita/s están elevadas a la primera potencia. Ejemplos:

$3x - 4 = 5$ $x+y-4z=2$ $2x - 0,5y = 1$ $x+y = 0$

Sistema de ecuaciones lineales: definición

Un sistema de m ecuaciones lineales con *n* incógnitas **es un conjunto de ecuaciones como:**

m ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \boxed{a_{1n}}x_n = \boxed{b_1} \\
\boxed{a_{21}}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = \boxed{b_2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = \boxed{b_m}
\end{array}\right.$$

n incógnitas

términos independientes

incógnitas

Coeficientes del sistema

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones
Ejemplo

El sistema: $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$ puede escribirse como producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donde $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x3}$ es la matriz de los coeficientes

$X= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x1}$ la matriz columna de las incógnitas, y $B\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x1}$ la columna de los términos independientes.

Por lo tanto, la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales es:

$$A.X=B$$

Si B=N (matriz nula), el sistema se llama homogéneo.

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales
Generalización

El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Expresión matricial del sistema **AX=B**

A: matriz de los coeficientes

X: matriz de las incognitas

B: matriz de los términos independientes

Expresión matricial: ejemplo

El sistema $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{cases}$

Tiene como **expresión matricial:** $\boldsymbol{A.X = B} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

La **matriz de los coeficientes** es**: A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

La **matriz de las incógnitas** es: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ y la **matriz de coeficientes** es $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

La **matriz ampliada** es: A´ $= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Ejercicio

Resolvemos el ejercicio de la guía

5 a

Matriz ampliada

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} & b_3 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Si a la matriz de coeficientes ***A***, de orden ***mxn***, se le agrega una columna con los términos independientes, se obtiene la matriz ampliada, que se designa como ***A´***, de orden ***m x (n+1***) donde el separador es sólo un recurso visual para recordar que allí debe estar el signo igual

Solución de un sistema de ecuaciones: ejemplos

Dado el sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ podemos afirmar que:

- $(1; -2)$ es solución del sistema, porque $\begin{cases} 2.1 - (-2) = 2 + 2 = 4 \\ 1 + 2(-2) = 1 - 4 = -3 \end{cases}$
- $(2; -4)$ no es solución del sistema, porque $\begin{cases} 2.2 - (-4) = 4 + 4 = 8 \neq 4 \\ 2 + 2(-4) = 2 - 8 = -6 \neq -3 \end{cases}$
- $(-3; 0)$ no es solución del sistema, porque $\begin{cases} 2.(-3) - 0 = -6 \neq 4 \\ -3 + 2.0 = -3 \end{cases}$ (para que sea solución, deberían ser ciertas AMBAS igualdades)

Dado el sistema $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ -3x + y + 4z = 4 \\ x + z = 3 \end{cases}$ comprobamos que:

- $(1; 1; 1)$ no es solución del sistema, porque $x - y + z = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 4$ (si no verifica una igualdad, alcanza para afirmar que no es solución)
- $(1; -1; 2)$ es solución del sistema, porque $\begin{cases} 1 - (-1) + 2 = 4 \\ -3 + (-1) + 4.2 = 4 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$

Solución de un sistema de ecuaciones: expresión simbólica

Una **solución** del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, s_3, ... , s_n) tales que se verifican todas las igualdades:

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + a_{m3}s_3 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

Ejercicio

Resolver ejercicio Nº 1 parte a) y ejercicio N°9 del Trabajo práctico Nº 3

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema con al menos una solución se denomina sistema compatible

Si la solución es única, se lo denomina sistema compatible determinado.

Si existen infinitas soluciones se lo llama sistema compatible indeterminado.

Un sistema sin solución se llama sistema incompatible.

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema se lo llama conjunto solución, y se designa con la letra *S*.

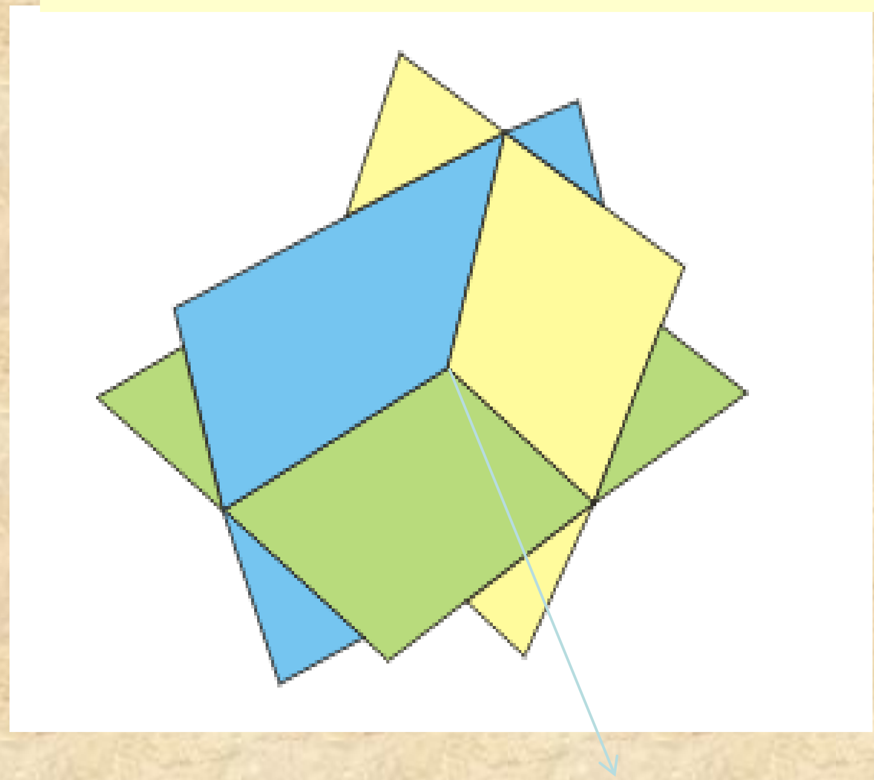
$$Sistema \begin{cases} compatible \begin{cases} determinado \\ indeterminado \end{cases} \\ incompatible \end{cases}$$

Interpretación geométrica de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas (síntesis)

	Si las rectas son secantes, entonces el sistema tiene una única solución: **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**
	Si las rectas son paralelas, entonces el sistema no tiene solución: **SISTEMA INCOMPATIBLE**
	Si las rectas son coincidentes (una recta está justo encima de la otra), el sistema tiene infinitas soluciones: **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO**

Sistemas de Ecuaciones lineales en el espacio

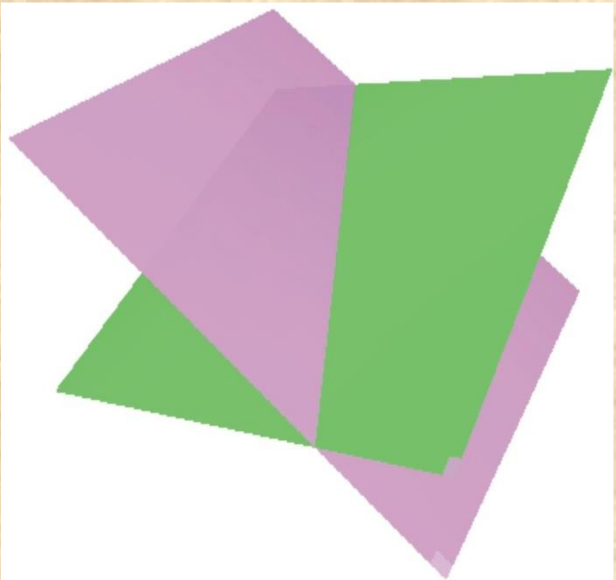
Sistema compatible determinado SCD.



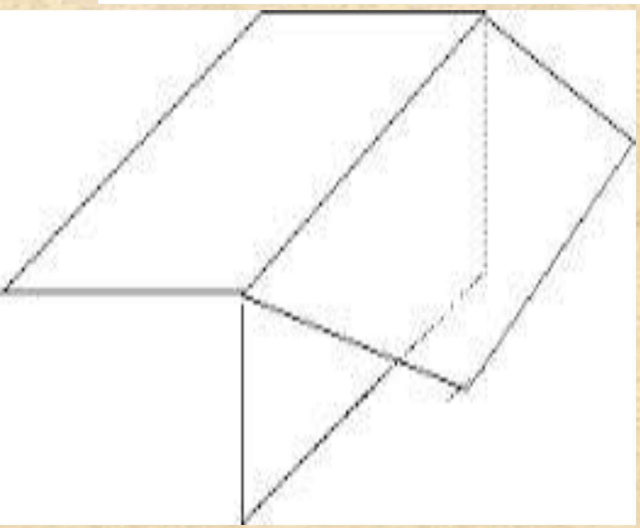
P=(x;y;z)

Los tres planos se intersecan en un punto. En este caso el sistema tiene como solución única la terna de números reales (x, y, z) que representan las coordenadas del punto P.

Sistema compatible indeterminado SCI.



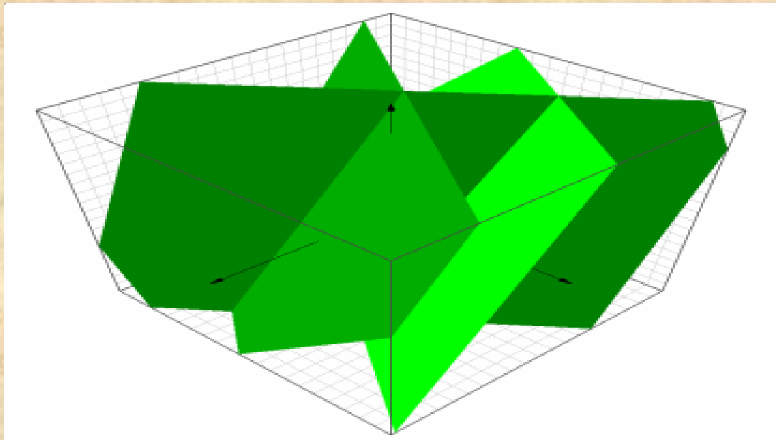
Dos de los planos son coincidentes.



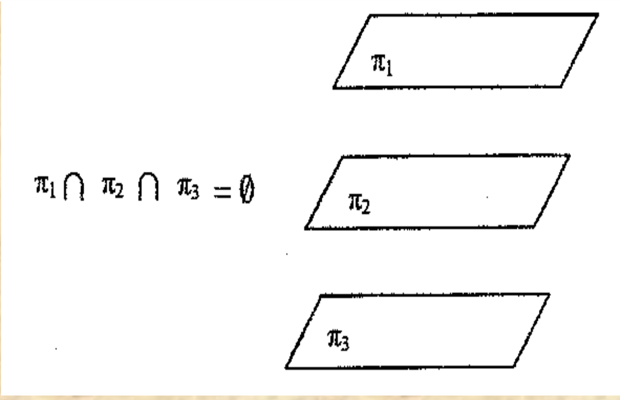
Los tres planos se cortan en una recta.

Ambos sistemas tienen infinitas soluciones, Representados por todas las ternas (x, y, z) que representan las coordenadas de los infinitos puntos de la recta.

Sistema incompatible SI.



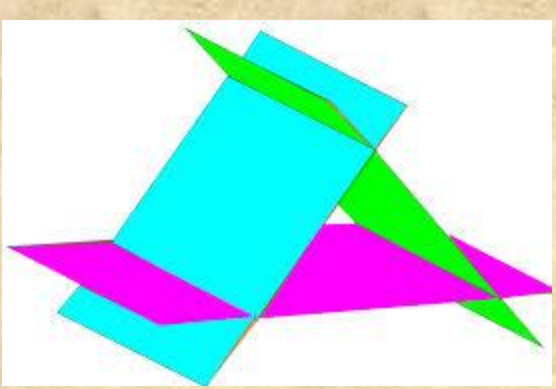
Dos planos paralelos son cortados por otro plano



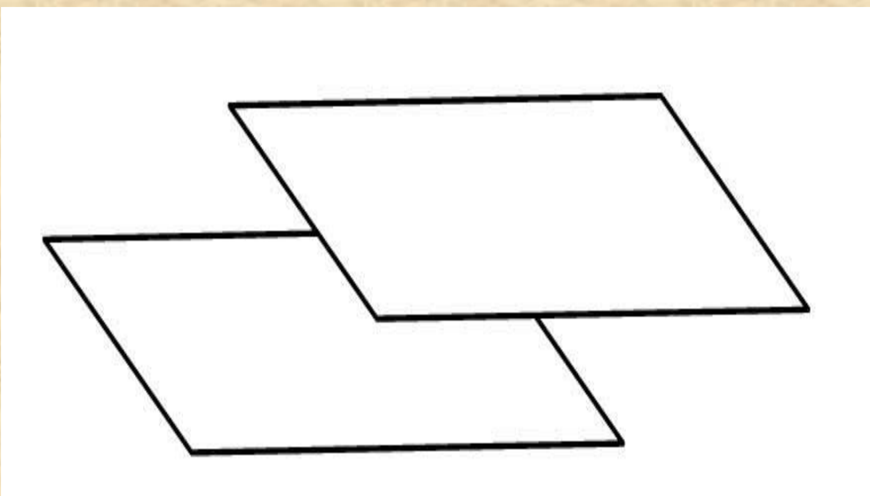
Los planos son paralelos.

Ambos sistemas no tienen solución, es decir el conjunto de solución es vacío. Sol = { }

Sistema incompatible SI.



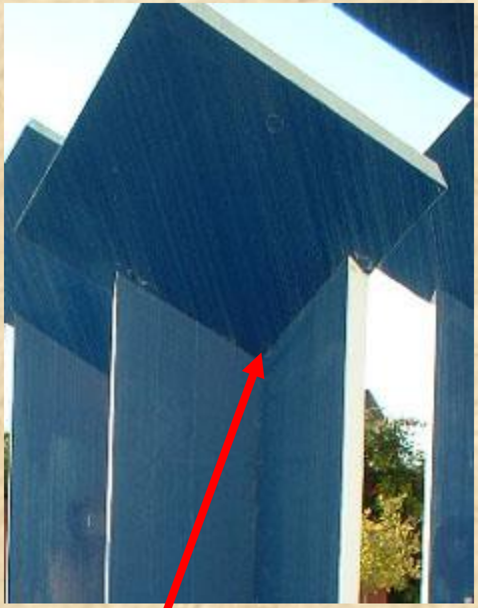
Plano paralelo a la línea de intersección de los otros dos planos



Dos planos coincidentes y el tercer Plano Paralelo a ellos

Ambos sistemas no tienen solución, es decir el conjunto de solución es vacío. Sol = { }

En el espacio físico… tres planos que se cortan en un punto



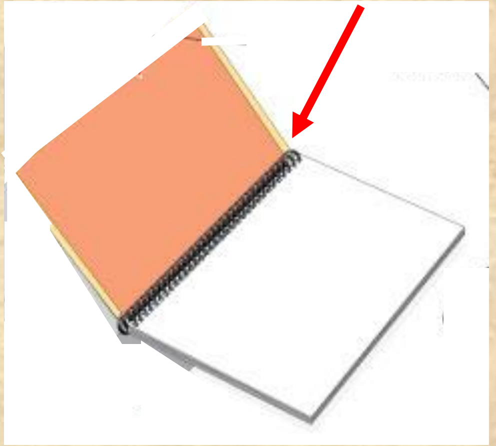
Dos paredes y el piso, se cortan en un punto

Dos paredes y el techo, se cortan en un punto

En el espacio físico… tres planos que se cortan en una recta
y dos planos coincidentes cortados por otro

Puerta giratoria: los tres planos que constituyen las hojas, se cortan según una recta, que es el eje sobre el cual giran

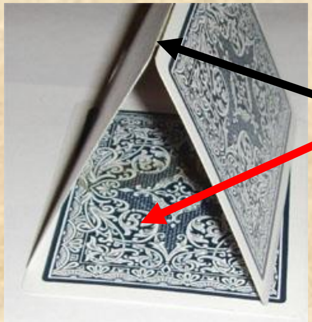
En este cuaderno, el plano de las hojas “coincide” con la contratapa, y se cortan con el plano de la tapa según la recta que constituye el espiral



En el espacio físico…

Dos planos paralelos cortados por otro plano

Los estantes representan tres planos paralelos



Plano paralelo a la línea de intersección de los otros dos

Dos planos coincidentes (piso y alfombra) y otro paralelo (techo)

Ejercicios

Resolver
ejercicios
2 y 3 del
Trabajo
Práctico
Nº 3

Teorema de Rouché – Frobenius:

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones sea compatible, que los rangos de las matrices A y A´ (matriz ampliada) sean iguales.

Se pueden presentar los siguientes casos:

$$- \text{Si } \rho(\text{A}) = \rho(\text{A´}) = \text{n}(\text{n}^\circ \text{ de incógnitas}) \Rightarrow \text{SCD}$$

$$- \text{Si } \rho(\text{A}) = \rho(\text{A´}) \prec \text{n}(\text{n}^\circ \text{ de incógnitas}) \Rightarrow \text{SCI}$$

$$- \text{Si } \rho(\text{A}) \neq \rho(\text{A´}) \Rightarrow \text{SI}$$

Resolvemos el ej. 4 b) de la guía

Resolución de sistemas de ecuaciones

Resolver un sistema consiste en encontrar todas sus soluciones, o indicar que no posee ninguna.

Métodos de resolución:

- Método de la matriz inversa.
- Método de Cramer.
- Método de Gauss - Jordan.

Resolución de sistemas: método de la matriz inversa

El sistema $\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}}$ tiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \cdot \quad X \quad = \quad B$$

Si $|A| \neq 0$ la matriz A es inversible.
Multiplicamos por la izquierda a ambos miembros por A^{-1}.

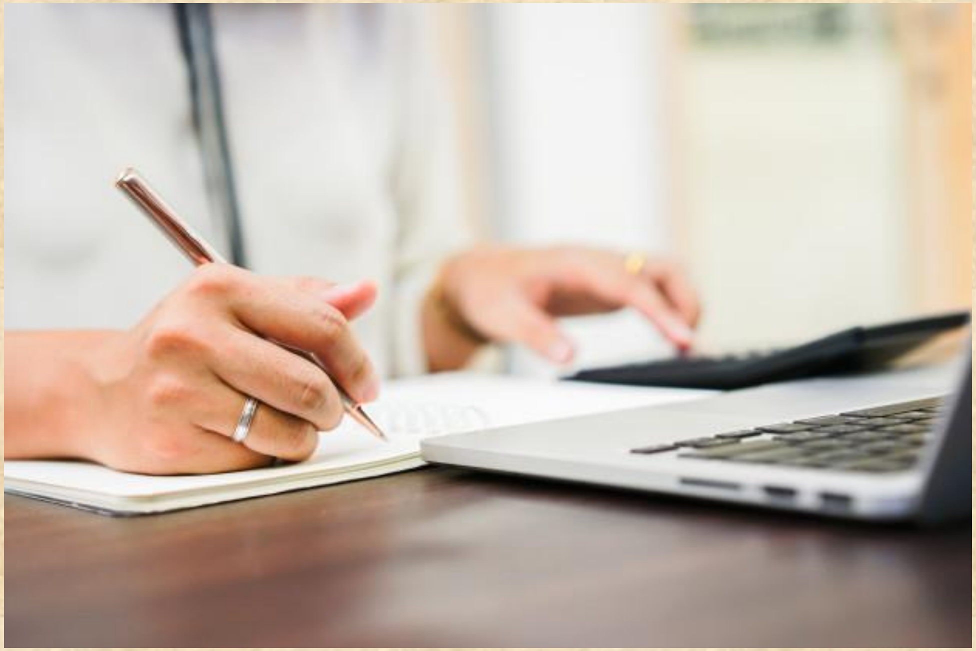
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Y esta última igualdad nos resuelve el sistema.
Este Método solo sirve para resolver SCD.

Ejercicios



Resolver ejercicios Nº 5 b) del Trabajo Práctico Nº 3

Resolución de sistemas: Regla o método de Cramer

Sea un sistema de ecuaciones lineales A.X=B y A una matriz no singular. El valor de cada una de las incógnitas es igual al cociente entre dos determinantes.

El determinante del numerador es el determinante de los coeficientes, pero donde los coeficientes de la variable en cuestión fueron sustituidos por los coeficientes de los términos independientes, y el determinante del denominador (determinante general) es el determinante de la matriz A. Es decir: la incógnita x_i del sistema AX=B es

$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ donde A_i es la matriz A, pero cambiando la columna i de A por la columna de términos independientes, B.

En símbolos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Resolver ejercicios Nº 11 del Trabajo Práctico Nº 3

Resolución de sistemas: método de Gauss-Jordan

Ejemplo: $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Elijo pivote; en este caso, 1, que está en la posición a_{12}
Divido la primera fila por el pivote 1, y anulo los restantes elementos de la primera columna
Aplicando la regla del rectángulo, calculo los restantes elementos (posiciones a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{33}, a_{34})

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -13 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Elijo nuevo pivote, que no debe estar ni en primera fila ni en la segunda columna. Selecciono el -1, que está en la posición a_{23}
Divido la segunda fila por el pivote, -1, y anulo los restantes elementos de la tercera columna.
Aplicando la regla del rectángulo, averiguo los restantes elementos (posiciones a_{11}, a_{14}, a_{31}, a_{34})

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -10 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Elijo el último pivote posible, el -10, que está en la posición a_{31}- Divido la tercera fila por el pivote -10, y anulo los restantes elementos de la primera columna
Por regla del rectángulo, averiguo los elementos a_{14} y a_{24}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{10} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{10}; \frac{3}{2}; \frac{17}{10}\right)\right\}$$

Escribo el conjunto solución. Para encontrar x, busco el 1 en la primera columna; le corresponde $\frac{1}{10}$. Para encontrar y, busco el 1 en la segunda columna: le corresponde $\frac{3}{2}$- Para hallar z, busco el 1 en la tercera columna, y le corresponde $\frac{17}{10}$
En el conjunto solución aparece, ordenadamente, la terna (x, y, z)

Resolución de sistemas: método de Gauss-Jordan
Otro ejemplo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -3x - 2y - z = 7 \\ 4x + 4y + 4z = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & -4 & -8 & -23 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$S = \emptyset$$

Ejercicios

Resolver ejercicios 7 a) y b) del Trabajo Práctico Nº 3

Relación entre rango, conjunto solución y grados de libertad

Si resolvemos por el método de Gauss-Jordan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Según el trabajo realizado en la diapositiva anterior, llegamos a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De aquí se desprende que $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \quad \Rightarrow x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$$S = \{(2 - x_3; 1; x_3) \wedge x_3 \in R\}$$

➢ La diferencia entre el número de incógnitas y el rango indica los grados de libertad del sistema (variables a las que se puede asignar cualquier valor real). En este caso; n=3; $\rho = 2$; n- ρ=1 (el conjunto solución queda expresado en función de una variable, en este caso, x_3

Ejercicios

Resolvemos el ejercicio
1 b) y 4g)
del Trabajo
Práctico
Nº 3

Sistemas homogéneosc

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$|A| \neq 0 \implies \text{SCD} \quad \text{solución trivial}$$

$$|A| = 0 \implies \text{SCI} \quad \infty \ \text{soluciones}$$

Compatibles

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

es siempre solución del sistema

Ej. Ejercicio 6b) 6 c)

Ejercicios

Resolver ejercicios Nº 8, a) b) f) del Trabajo Práctico Nº 3

Problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones

Resolvemos el ejercicio

14 a) de la guía de actividades