GUÍA N° 7: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1) Calcular los valores propios y espacios propios para cada matriz dada:

$$a) A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix} \quad b) B=\begin{pmatrix}-12 & 7\\ -7 & 2\end{pmatrix} \quad c) C=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \quad d) D=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix} \quad e) E=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$f) F=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad g) G=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad h) H=\begin{pmatrix}13 & 3 & 1\\ -56 & -13 & -4\\ -14 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

2) a) A partir del trabajo realizado en el ejercicio anterior, establecer cuáles de las matrices dadas son diagonalizables y cuáles no, explicando por qué en cada caso

b) En caso afirmativo, comprobar que $P^{-1}.A,P = D$

3) Decir si la matriz dada es diagonalizable. Si lo es, encontrar una matriz

C / C^{-1}:A.C =D. Verificar que A C = C D

$$a)\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix}-3 & 10\\ 0 & -5\end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix}-10 & 19 & -3\\ -8 & 17 & -3\\ -24 & 42 & -6\end{pmatrix}$$

4) Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales tales que tengan por valores propios 1 y -1..¿Son diagonalizables estas matrices? Justificar la respuesta

5) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

a) Comprobar que B.C = I y que A = B.D.C
b) Expresar a la matriz D como resultado de operaciones entre A, B y C
c) Calcular los autovalores de A y hallar los autovectores correspondientes

6) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ y\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Hallar una matriz inversible C para que se verifique: A.C=C.D.
b) Comprobar que A y D son semejantes
c) Sin hacer operaciones, indicar cuáles son los autovalores de A
d) La matriz A, ¿es diagonalizable? Justificar la respuesta
e) La matriz A. ¿es diagonalizable ortogonalmente? Justificar la respuesta

7) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de k ∈ ℝ para que la matriz A tenga un autovalor de multiplicidad 2
b) ¿A es diagonalizable para los valores de k hallados en el ítem anterior? Justificar

8) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & k & -2 \end{pmatrix}$. Hallar k ∈ ℝ para (1; -1; 0) es autovector de A. Para los valores de k hallados, determinar si A es diagonalizable.

9) Siendo $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) hallar k ∈ ℝ tal que (1; -6; 1) sea un autovector de A
b) Para los valores hallados de k, determinar si A es diagonalizable
c) En caso afirmativo, hallar la matriz P y comprobar que $P^{-1}.A,P = D$

10) Estudiar para que valores de $\alpha \in R$ la matriz A es diagonalizable. Justificar

$$a)A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad a)A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha - 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

11) Estudiar para que valores de $a, b \in R$ la matriz A es diagonalizable. Justificar

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

12) Si$\boldsymbol{T}$:$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$/ (T)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$

a) Hallar k∈$\mathbb{R}$ para que 2 sea un autovalor de M(T)

b) Para el valor de k hallado, ¿es diagonalizable M(T)? Justificar

13) Los autovalores de una matriz son 3, 2 y -2- Los autovectores correspondientes son (1; 0; 0); (-7; 3; 1) y (1; -5; 5), respectivamente. Hallar la matriz A y la expresión de la transformación lineal asociada a ella.

14) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 3 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de a, b y c para que λ=1 sea autovalor de A, siendo el autovector asociado al mismo (1; 1; 1)

b) Para los valores de a, b y c establecidos, investigar si la matriz A es diagonalizable. Justificar

c) En caso afirmativo, obtener la matriz P que la diagonaliza, y la matriz Diagonal con la que es semejante

15) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ h & k \end{pmatrix}$ determinar los valores reales de h y k para que A no admita inversa, y además, que λ=4 sea autovalor de A. Para los valores de h y k calculados, determinar si A es diagonalizable. Si lo es, hallar la matriz P y la matriz D para que se verifique: $D = P^{-1}.A, P$

17) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

a) Los autovalores de una matriz simétrica real son reales.

b) Toda matriz real es semejante a una matriz diagonal.

c) Los autovalores de una matriz triangular son los números de la diagonal de la matriz.

d) Si la matriz real de 3x3 tiene tres valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes a esos valores propios constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.

e) Si la matriz A de 3x3 tiene dos valores propios distintos, entonces A tiene a lo sumo 2 vectores propios linealmente independientes

f) Si det (A) = 0, entonces 0 es un valor propio de A

g) Si una Matriz de nxn, tiene n valores propios diferentes, se puede diagonalizar

h) Si una matrizde 5x5 tiene 3 valores propios distintos, entonces no puede ser semejante a la matriz diagonal

i) Si dos matrices de orden nxn son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.

j) Si A es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces sus valores propios son 1, 2 y 3

k) Si A es una matriz cuadrada inversible, λ=0 es autovalor de A

l) La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable$\forall k \in \mathbb{R}$