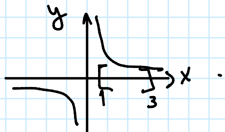
Teorema de Rolle y Lagrange

sábado, 4 de mayo de 2024 10:22 a. m.



Sea $f(x)$ una función CONTINUA en un intervalo cerrado y derivable en todo punto interior a dicho intervalo, tal que toma valores iguales en los extremos del mismo. Si esto ocurre existe al menos, un valor c perteneciente al intervalo abierto de manera tal que se verifica la derivada se anula. $f'(c)=0$

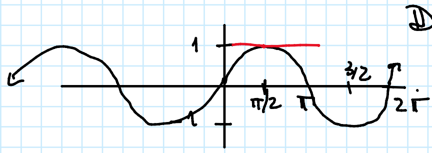
pendiente de la recta tg a f en c es CERO.

Simbolicamente: HIPOTESIS

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es CONTINUA en } [a;b] \\ f(x) \text{ es DERIVABLE en } (a;b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) \,/\, f'(c)=0$$

TESIS

Dom = $\mathbb{R}$



Ejemplo 1 $\quad f(x)=\operatorname{sen}(x) \quad [0;\pi]$

✓ $f(x)$ es CONTINUA en todos los reales, por lo tanto también lo es en intervalo $[0;\pi]$

✓ $f'(x)=\cos(x) \qquad \operatorname{Dom} f'=\mathbb{R}$.

$f(x)$ es DERIVABLE en todos los reales, por lo tanto también lo es en intervalo $(0;\pi)$

✓ $f(0)=f(\pi)$

$\operatorname{sen}(0)=\operatorname{sen}(\pi)$

$0=0$

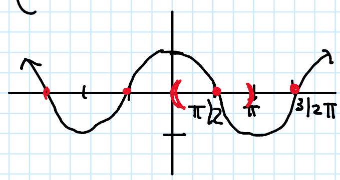
$\Rightarrow \exists c \in (0;\pi) \,/\, f'(c)=0$

$\cos(c)=0 \qquad$ EC. TRIGONOMETRICA.

$c=\cos^{-1}(0) \qquad$ (calculadora en RADIANES)

$c=\pi/2 \in (0;\pi)$ ✓

$c=\frac{3}{2}\pi \notin (0;\pi)$



Ejemplo 2 $\quad f(x)=\operatorname{sen}^2(x) \quad$ en $[0;\pi]$. $\quad [\operatorname{sen}(x)]^2$

✓ $f(x)$ es CONTINUA en todos los reales, por lo tanto, lo es en $[0;\pi]$

✓ $f'(x)=2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$

$f(x)$ es DERIVABLE en todos los reales, por lo tanto, lo es en $(0;\pi)$

✓ $f(0)=f(\pi)$

en $(0;\pi)$

✓ $f(0) = f(\pi)$

$sen^2(0) = sen^2(\pi)$

$0 = 0$ ✓

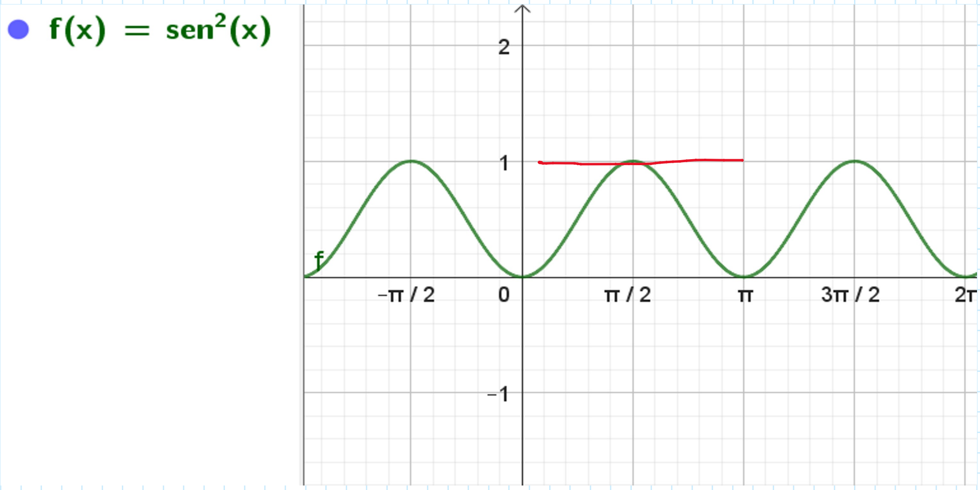
$\Rightarrow \exists\, c \in (0;\pi) \;/\; f'(c) = 0$

$$\underbrace{2}_{\neq 0} \cdot \underbrace{sen(c)}_{\bullet} \cdot \overbrace{cos(c)}^{*} = 0$$

• $sen\, c = 0$ $\vee$ $*\; cos\, c = 0$

$c = 0 \notin (0;\pi)$ $\boxed{c = \pi/2 \in (0;\pi)}$

$c = \pi \notin (0;\pi)$ $c = 3/2\,\pi \notin (0;\pi)$



• EJEMPLO 3 $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^4}$ $[-1;1]$ $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$ $[-1;1]$

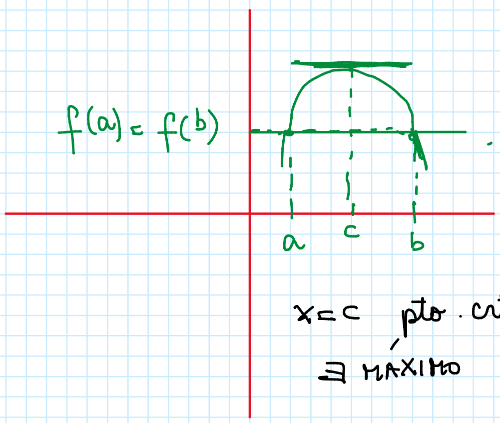
$\therefore$ no se puede aplicar el Teorema.

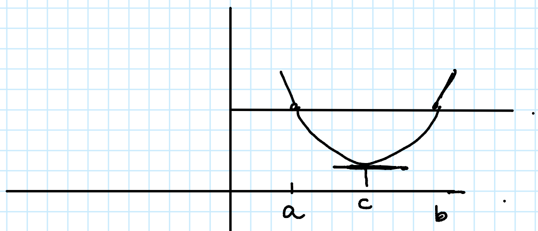
Interpretación Geométrica

Si $f(x)$ es CONTINUA en $[a;b]$ y es diferenciable en $(a;b)$ si $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a;b) \;/\; f'(c) = 0$

Recta tg es HORIZONTAL $m_t = 0$





$x = c$ pto. crítico $f'(c) = 0$

$\exists$ MÁXIMO ABSOLUTO

si $f'(c) = 0 \Rightarrow \exists\; x = c \in (a;b)$

$\exists$ MÍNIMO ABSOLUTO.

Lo RETOMAMOS EN ESTUDIO FUNCIÓN

No se cumple al revés (si $x = c$ la función tiene M ó m $\Rightarrow f'(x) = 0$

Lo retomamos en estudio función { No se cumple de [illegible]
Si $x=c$ la función tiene M ó m $\exists\, f'(x)=0$

Este Teorema por lo qual NO SE CUMPLE si existe AV o la función tiene ptos angulosos o picos.

a) $f(x)=x^2-3x+2$ en $[1;2]$

✓ $f(x)$ es CONTINUA en $\mathbb{R}$, por lo tanto, lo es en $(1;2)$

✓ $f'(x)=2x-3$ es DERIVABLE en $(1;2)$

$Df'=\mathbb{R}$.

✓ $f(1)=f(2)$

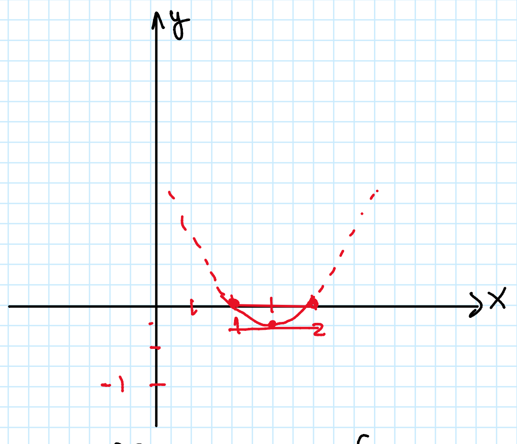
$(1)^2-3(1)+2 = 2^2-3(2)+2$

$0 = 0$ ✓

$\Rightarrow \exists\, c \in (1;2) \,/\, f'(c)=0$

$2c-3=0$

$$\boxed{c = 3/2 \in (1;2)}$$



$X_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{3}{2.1} = \frac{3}{2}$

$Y_v = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$Y_v = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)+2$

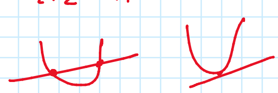
$Y_v = -\frac{1}{4}$

Teorema de Lagrange. (o del valor medio para derivadas)

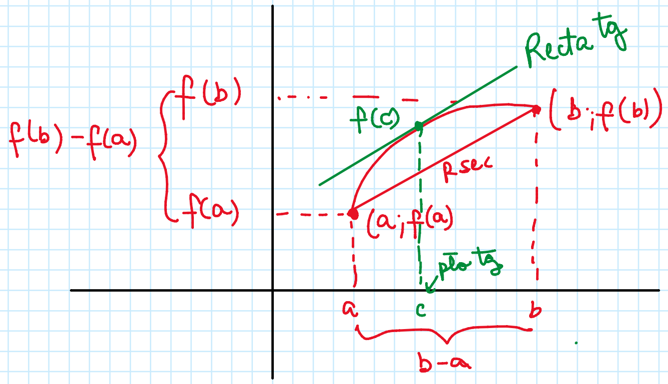
Si una función f es CONTINUA en el intervalo cerrado $[a;b]$ y diferenciable en su interior $(a;b)$ entonces existe al menos un valor c en $(a;b)$ que cumple

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pend. de la recta secante.}} = \underbrace{f'(c)}_{\text{pend. de la recta Tg}}$$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m.$



Geométricamente el Teorema nos dice que si la gráfica de una función continua tiene una tg NO vertical en todo pto comprendido entre a y b, entonces hay por lo menos un pto c de la gráfica en el que la tangente es PARALELA a la recta secante ab.



Ejemplo 4

$$f(x) = 2x - x^2 \quad \text{en } [0;1]$$

✓ $f(x)$ es CONTINUA en $[0;1]$ (lo es en todos los reales por ser función polinómica)

✓ $f(x)$ es DERIVABLE en $(0;1)$

$$f'(x) = 2 - 2x \qquad \text{Dom} f' \ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c \in (0;1) \ / \ \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$$

$$\frac{1 - 0}{1 - 0} = 2 - 2c$$

$$\frac{1}{1} = 2 - 2c$$

SON PARALELAS $\begin{cases} m \sec \\ m \cdot tg \end{cases}$ $\quad 1 = 2 - 2c$.

$$\frac{1 - 2}{-2} = c$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = c} \in (0;1) \ ✓$$

C.AUX

$f(1) = 2.1 - 1^2 = 1$

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Ec. de la recta secante

$m = 1$

$(0;0)$ DATO

$y = mx + b$.

$0 = 1.0 + b$.

$0 = b$.

$\boxed{y_s = x}$

Ec de la recta tangente.

$$y = \overset{f'}{m}(x - \overset{c}{x_0}) + y_0 \rightarrow f(c)$$

$$y = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

$$y = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y_T = x + \frac{1}{4}}$$

a = -1 b = 2 c = 0

$$\left[y_T = x + \frac{1}{4} \right]$$

$$\left[y_s = x \right]$$

$a=-1 \quad b=2 \quad c=0$

$f(x) = 2x - x^2 \quad a(-) \cap$

OR-OR. $(0;0)$

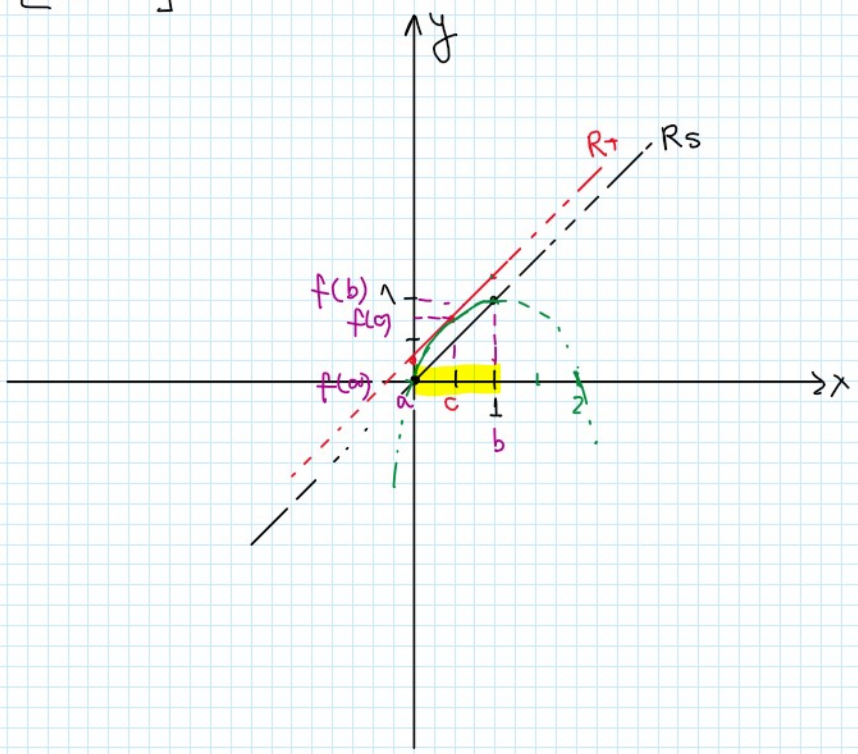
Vertice $X_V = \frac{-2}{2.(-1)} = 1$

$y_V = 1$

$V = (1;1)$

RAICES $(0;0)$

$(2;0)$



7) Determinar si es posible aplicar el Teorema de Lagrange en la función $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ en el intervalo $[-1; 4]$. De ser posible encuentre el punto c que verifica la tesis y realice el gráfico correspondiente.

$f(x) = \frac{x+3}{x-3} \qquad Dom = \mathbb{R} - \{3\}$

?

$-\infty \quad -1 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$

6) Determinar si es posible aplicar el Teorema de Lagrange en la función $f(x) = \frac{x^3}{3}$ en el intervalo $[-2; 2]$. De ser posible encuentre el punto c que verifica la tesis y realice el gráfico correspondiente.

$f(x) = \frac{1}{3} x^3 \qquad Dom = \mathbb{R}$.

✓ $f(x)$ es CONTINUA en $[\underset{a}{-2}; \underset{b}{2}]$ por ser función polinómica...

✓ $f(x)$ es DERIVABLE en $(-2;2)$

$f'(x) = x^2 \qquad Dom f' = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists\, c \in (-2;2) \,/\, \frac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)} = \overbrace{c^2}^{f'(c)}$

C. AUXILIAR

$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 = \frac{8}{}$

$\Rightarrow \exists\, c \in (-2;2) \;/\; \dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = c^2$

$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 = \frac{8}{3}$

$f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 = \frac{-8}{3}$

$$\frac{\frac{8}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right)}{4} = c^2$$

$$\frac{\frac{16}{3}}{4} = c^2$$

$$m_s \text{ y } m_t \leftarrow \frac{4}{3} = c^2$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = |c|$$

$C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $C_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (1,15) $\qquad$ $C_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (-1,15)

$\in (-2;2)$ $\qquad$ $\in (-2;2)$

Calculo Ec. de la recta secante

$m = \frac{4}{3}$

$\left(2 ; \frac{8}{3}\right)$

$y = \frac{4}{3}x + b$

$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \cdot 2 + b$

$\frac{8}{3} - \frac{8}{3} = b$

$0 = b$

$y_s = \frac{4}{3}x$

$\frac{4}{3} = 1,\hat{3}$

Recta tg (TENGO 2)

$C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (1,15)

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27} = 0,51$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} ; \frac{8\sqrt{3}}{27}\right)$

$m = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{8\sqrt{3}}{27}$ $\quad$ Para hacerlo exacto.

$y = \frac{4}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{9}{}^{\cdot 3}_{\cdot 3} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{27}$ (-1,02)

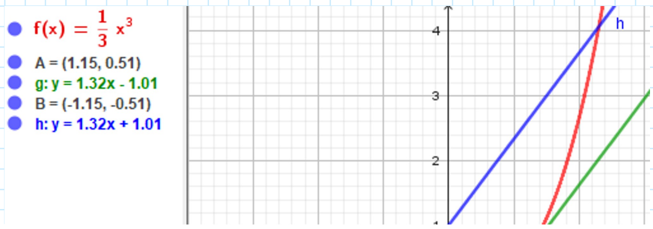
$\frac{4}{3} = 1,\hat{3}$

Calculo la otra RT

$m = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $(-1,15 ; f(-1,15))$ Pto tg.

$(-1,15 ; -0,51)$

$y = \frac{4}{3}(x + 1,15) - 0,51$

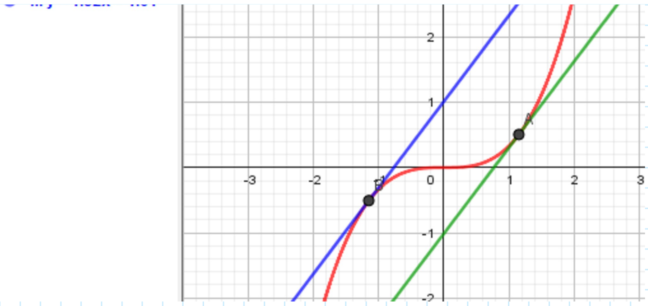


$y = \frac{4}{3}(x + 1{,}15) - 0{,}51$

$y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{15} - 0{,}51$

$y = \frac{4}{3}x + 1{,}26\hat{3}$

$y = 1{,}\hat{3}x + 1{,}02$



4) Determinar si es posible aplicar el Teorema de Lagrange en la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[-1; 3]$. De ser posible encuentre el punto c que verifica la tesis y realice el gráfico correspondiente.

✓ $f(x)$ es CONTINUA en $[-1;3]$ por ser función polinómica.

✓ $f(x)$ es DERIVABLE en $(-1;3)$

$f'(x) = 2x - 3 \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists\, c \in (-1;3) \,/\, \frac{f(3) - f(-1)}{3+1} = 2c - 3$

$f(3) = 3^2 - 3.3 + 2 = 2 \quad (3;2)$

$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6 \quad (-1;6)$

$\frac{2 - (6)}{4} = 2c - 3$.

$\frac{-4}{4} = 2c - 3$

mT y mS $\quad -1 = 2c - 3$.

$\frac{-1+3}{2} = c$

$\boxed{1 = c \in (-1;3)}$

Ec. Recta Sec.

$m = -1$

Pto $= (3;2)$

$y = mx + b$.

$y = -x + b$.

$2 = -3 + b$

$\boxed{5 = b}$

$y_S = -x + 5$

Rta. tg

$m = -1$.

$(1; f(1))$ Pto Tg. $\Rightarrow (1;0)$

$f(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 0$

$y = -1(x - 1) + 0$

$y_T = -x + 1$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$ OR-OR $= (0;2)$

$X_V = \frac{3}{2}$

$Y_V = -\frac{1}{4}$

$V = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

RAICES $(1;0)$ y $(2;0)$