GUÍA Nº 6: TRANSFORMACIONES LINEALES

1) Determinar si la función dada es una transformación lineal:

a) F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$/F(x; y)= (x-2y; x)

b) F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$/F(x; y) = ($x^2$; 0)

c) F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$/F(x; y; z) =(x. y; y. z; z. x)

d) F: $\mathbb{R}^3 \to$: $\mathbb{R}^2$ /F(x; y; z)= (y; x.+ z)

$e)\ \mathrm{F}:\mathrm{R}^{2x1} \to R^{2x1} / F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f)\ \mathrm{F}:\mathrm{R}^{2x1} \to R^{3x1} / F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) Hallar la expresión de las transformaciones lineales definidas por f(x)=A.X

a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Hallar la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = (x - 2z; y + z; x + 4y - 6z)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5; f(x,y,z) = (0; 3x + 5y - 4z; x - z;\ 2y + z; -2x + 4y - 6z)$

c) $f: \mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^3; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \ (a + c; 4b; c + d)$

4) Dada la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 f(x,y,z) = (x - y: x + z;\ \ y + z)$

a) Indicar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de la transformación

(0; 0; 0) (1, 1, -1) (-2; -2; 2) (3; 3; 3) (-4; 4; -4)

b) Indicar cuáles de los siguientes vectores pertenecen a la imagen de la transformación

(0; 0; 0) (1; 2; 2) (0; 4; 4) (1; 1; 0) (1; 2; 3)

5) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar núcleo (T) e Im (T). Indicar la dimensión de los mencionados subespacios, y, si es posible, una base para cada uno de ellos:

a) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x; y; z)=(x + z; y - z)$

b) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x; y) = (x - y; x + 2y; 4x - y)$

c) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow: \mathbb{R}^2 / T(x; y) =(2x;x - y)$

$$d)\, T: M_{2x2} \rightarrow M_{2x2} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c+d & -a+2c+2d \\ a-2b+5c+4d & 2a-b+c-d \end{pmatrix}$$

$$e)\, T: M_{2x2} \rightarrow M_{2x2} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & a+d \end{pmatrix}$$

6) Determinar el rango y la nulidad para las siguientes transformaciones:

a) $T:IR^2 \rightarrow IR^3 / T(x;y)=(x-y;3x;2y)$

b) $T:IR^2 \rightarrow IR^2 / T(x;y)=(5x- y; x+2y)$

c) $T:IR^2 \rightarrow IR^4 / T(x;y)=(2x+3y;x-y;2x;5x-4y)$

7) Indicar si las siguientes transformaciones lineales son inversibles. En caso afirmativo, hallar la expresión de la transformación lineal inversa

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x. y) = (2x-y; -x+y)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x+2y-z; y+3z; 3z)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

8) Obtener la matriz de transformación St que representa cada una de las transformaciones dadas:

a) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x; y)= (x + y; y)$

b) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x; y)= (2x + y; y)$

c) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x; y; z)= (x + y ;y + z)$

9) Hallar el transformado del vector indicado en cada caso, considerando la matriz S_T

a) $S_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ para T(2;3)

b) $S_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ para T(-1;2)

c) $S_t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ para T(4;1;0)

10) Encontrar la matriz de transición de B a B´ encada caso:

a) B= {(5; 4) ;(2;1)} ; B´={(1;0) ; (0;1)}

b) B= {(3;-2) ;(6;8)} ; B´={(1;0) ; (0;1)}

c) B= {(12; 6); (24; 0)} B´={(6;6); (6;0)}

d) B= {(2;2;10); (6; -2;14); (10; -22;50)} B´={(2;-2;10) ; (2;2;2) ; (0;-4;0)}

11) Encontrar la dimensión del espacio solución de cada uno de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales indicados en cada caso:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \\ 5x-2y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 4x+y+5z=0 \\ 2x+y+6z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-3y+4z=0 \end{cases}$

12) a) Determinar los vértices del triángulo que forman las rectas r: $y = 2x$: s: $y = -x + 1$; t: $y = \frac{1}{2}x$ al intersectarse

b) encontrar la imagen del triángulo obtenido en el ítem anterior, mediante la transformación lineal $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) Representar en un mismo sistema de ejes las rectas r, s y t; el triángulo que ellas determinan, y su transformado

13) Determinar la imagen del triángulo de vértices A (0;0); B (1; 2); C (3; 1) a través de la transformación representada por la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Graficar el triángulo dado y su imagen en un mismo sistema de ejes

14) Determinar la imagen del cuadrado de vértices A (0;0); B (1; 0); C (1; 1); D (0 ;1)a través de la transformación representada por la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Graficar el cuadrado dado y su transformado en un mismo sistema de ejes

15) Dada la transformación lineal $T\,(x, y) = (x + 2y, y)$

a) escribirla matricialmente

b) hallar el transformado del rectángulo de vértices A (-1;-1); B (3; -1); C (3; 2); D (-1 ;2)

c) graficar el rectángulo dado y su transformado en un mismo sistema de ejes