INTEGRAL DEFINIDA

sábado, 8 de junio de 2024

INTEGRAL DEFINIDA

$4 \mid 3$
$1 \quad 1$
$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1}$

Si $f(x)$ es continua en $[a;b]$ entonces $f(x)$ es integrable en $[a;b]$.

La integral definida es un número.

Este número se calcula encontrando primero la primitiva (para Constante igual a 0) y luego aplicando la Regla de BARROW

La Regla de Barrow dice que

EXTREMO SUPERIOR

$$\int_a^b f(x).dx = F(x)\Big|_a^b = \boxed{F(b) - F(a)}$$

EXT. INFERIOR.

Siendo $F'(x) = f(x)$

a y b que son los extremos del intervalo, se llaman LÍMITES DE INTEGRACIÓN

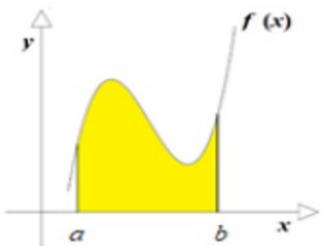
$$\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 8} = \sqrt[3]{8^3}\cdot\sqrt[3]{8} = 8 \cdot \sqrt[3]{8} = 8 \cdot \sqrt[3]{2^3} = 8 \cdot 2 = 16$$

EJEMPLO 1: $[\overset{a}{1} ; \overset{b}{8}]$

$$\int_1^8 4\sqrt[3]{x}.dx = 4.\int_1^8 x^{1/3}dx = 4 . \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_1^8 = \underbrace{3.\sqrt[3]{x^4}}_{F(x)}\Big|_{1\,(a)}^{8\,(b)} = 3.\sqrt[3]{8^4} - 3.\sqrt[3]{1^4} = 48 - 3 = 45$$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

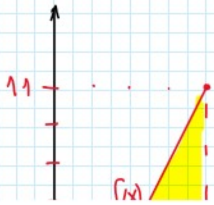
Cuando la función $f(x)$ (continua en el intervalo cerrado) se encuentre por **encima del eje x** en el **intervalo** $[a;b]$, el área encerrada por la curva y el eje x en el intervalo $[a;b]$ COINCIDE con el valor de la integral definida $\int_a^b f(x).dx$



$$A = \int_a^b f(x).dx$$

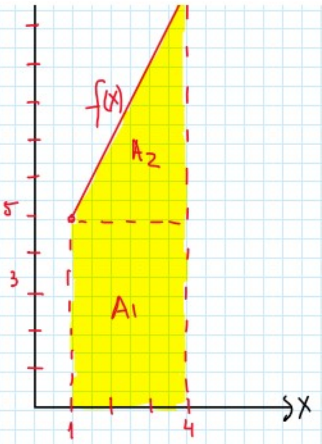
EJERCICIO 1

Hallemos el área bajo la curva de $f(x) = 2x + 3$ en el intervalo $[1;4]$



A_1 = área rectángulo = $b.h$
A_2 = área Triángulo = $\frac{b.h}{2}$
$A_T = A_1 + A_2$

$A_1 = 3.5 = 15\,u^2$
$A_2 = 3.6 = 9\,u^2$
$A_T = 15+9 = 24\,u^2$



$A_1 = 3.5 = 15\,u^2$

$A_2 = \frac{3.6}{2} = 9\,u^2$

$\Big\}\ A_T = 15+9 = 24\,u^2$

$$\int_1^4 (2x+3)\cdot dx = \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^2 + 3x}_{F(x)}\Big|_1^4 = \underbrace{(4^2+3.4)}_{F(4)} - \underbrace{(1^2+3.1)}_{F(1)}$$

$$= 28 - 4$$

$$= 24$$

EJEMPLO 2:

or-or $= (0;4)$

Hallemos el área bajo la curva de $f(x) = -x^2 + 4$ y el eje x

$\cap$

$[a;b]$

$[-2;2]$

RAÍCES = $f(x)=0$

$-x^2+4=0$

$4 = x^2$

$\sqrt{4} = |x|$

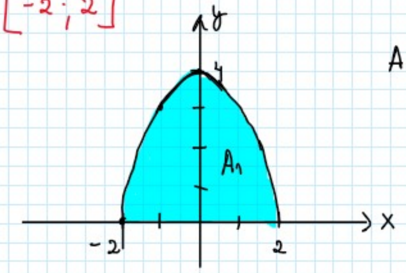
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$(2;0)$ y $(-2;0)$ = RAÍCES

VÉRTICE $= \frac{2-2}{2} = 0$ Eje de simetría $\underbrace{x=0}_{\text{eje } y}$

$f(0)=4$

$V = (0;4)$



$A = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx$

$A_1 = \int_0^2 (-x^2+4)\,dx$

$2.A_1 = A_T$

• CAMINO 1

$$\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(2)^3 + 4(2)\right] - \left[-\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right]$$

$$\left(-\frac{8}{3}+8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{16}{3} - \left(\frac{-16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

• CAMINO 2

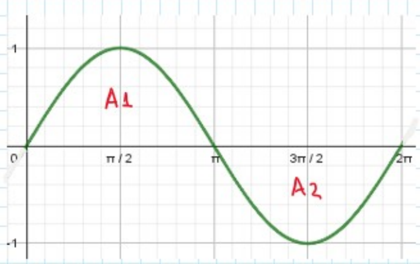
$$A_1 = \int_0^2 (-x^2+4)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + 4x\Big|_0^2$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(2)^3 + 4(2)\right] - \left[\cancel{-\frac{1}{3}0^3 + 4.0}\right] = \frac{16}{3}$$

$$2.A_1 = 2.\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \quad 10,\overline{6}$$

EJERCICIO 3:

Hallemos el área entre la gráfica de $f(x) = sen\ x$ y el eje x en el intervalo $[0; 2\pi]$



$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

$A_2 = \int_{2\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

$A_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,.\,dx$

$A_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx\right|$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - [-\cos 0] = -1-(-1) = 0$$

MAL

$\int_0 \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0 = -\cos(2\pi) - [-\cos 0] = -1-(-1) = 0$ MAL

$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 1+1 = 2$

ABAJO DEL EJE X

$A_2 = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = \left| -\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) \right| = |-2| = 2$

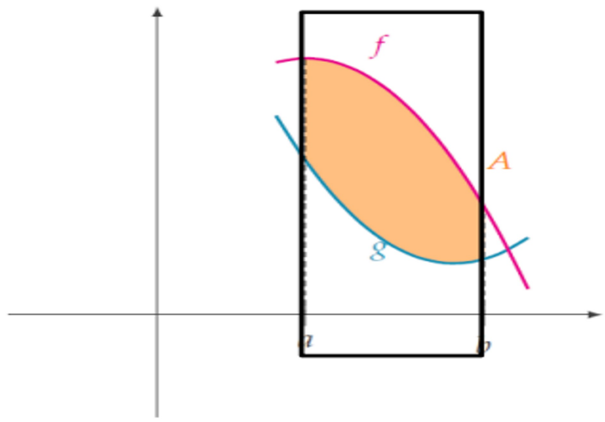
$A_T = A_1 + A_2 = 2+2 = 4\,u^2$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Área de una región encerrada entre dos funciones

Queremos calcular el área de una región A, comprendida entre los gráficos de dos funciones integrables en el intervalo $[a;b]$.

Siendo $f(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ y $g(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ continuas y $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$.



En el grafico vemos que el área A, es la diferencia entre dos áreas:

El área A_1 de la región comprendida entre el grafico de $f(x)$ y el eje x en $[a;b]$ y el área A_2 de la región comprendida entre el grafico de $g(x)$ y el eje x en $[a;b]$.

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$\boxed{A = \int_a^b [\underbrace{f(x)}_{\text{TECHO}} - \underbrace{g(x)}_{\text{PISO}}]dx}$$

EJEMPLO 1

Encontrar el área limitada por:

- $f(x) = x^2 - 2x$ $\cup$
- $g(x) = 6x - x^2$ $\cap$

Pto de intersección

OR-OR $= (0;0) =$ RAÍZ

$f(x) = x^2 - 2x$

$f(x) = x(x-2)$ → 0, 2

$\left.\begin{array}{l} x_v = 1 \\ y_v = -1 \end{array}\right\} V = (1;-1)$

$g(x) = 6x - x^2$

$g(x) = x(6-x)$ → 0, 6

$\left.\begin{array}{l} x_v = 3 \\ y_v = 9 \end{array}\right\} V = (3;9)$

Calculo pto de intersección

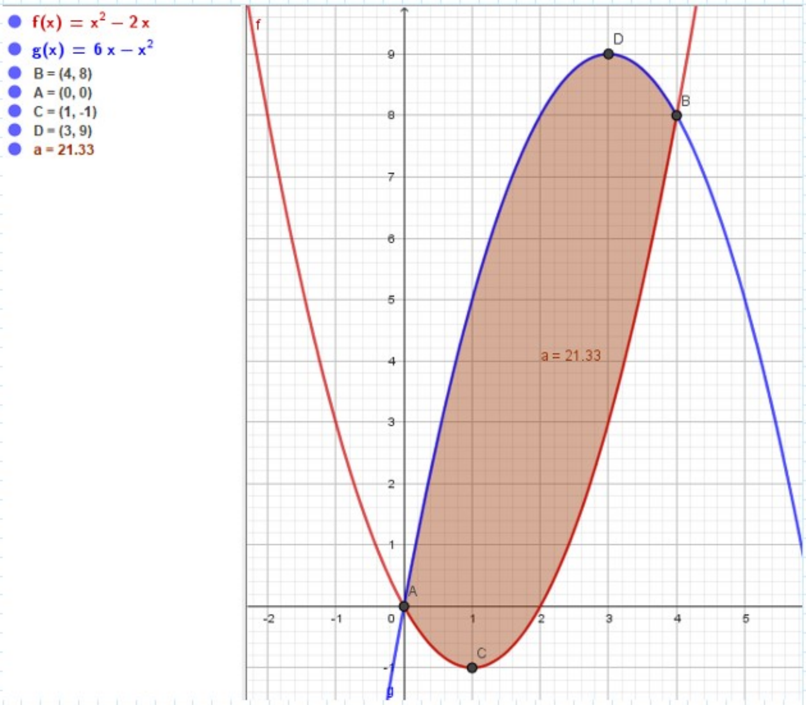
$\overbrace{x^2 - 2x}^{P} = \overbrace{6x - x^2}^{T}$

$x^2 - 2x - 6x + x^2 = 0$

$2x^2 - 8x = 0$

$2x(x-4) = 0$

$x = 0 \qquad x = 4$



$$\int_0^4 \left[\underbrace{(6x - x^2)}_{\text{Techo}} - \underbrace{(x^2 - 2x)}_{\text{Piso}}\right] dx$$

$$\int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)\, dx$$

$$\int_0^4 (-2x^2 + 8x)\, dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}x^2 \Big]_0^4$$

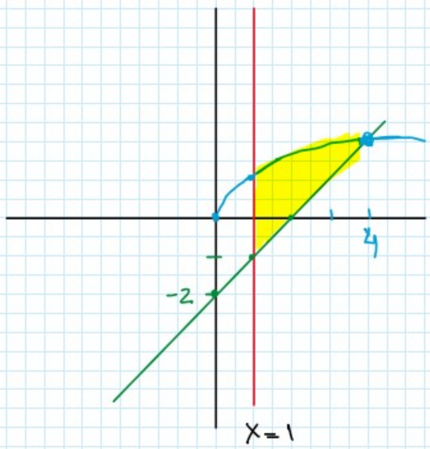
$$= \left(-\frac{2}{3}(4)^3 + 4(4)^2\right) - \cancel{\left(-\frac{2}{3}\cdot 0^3 + 4\cdot 0^2\right)}$$

$$= \frac{64}{3}\ (21,\hat{3})\ u^2$$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x - y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$x - y = 2$ ⤳ $x - 2 = y$ Recta creciente

$x = 1$ ⤳ Recta Vertical



$\begin{cases} x = 1 \\ x - 2 = y \end{cases}$ $(1;-1)$

$\begin{cases} y = \sqrt{x} \end{cases}$

$x=1$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ x-2=y \end{cases}$$

$\sqrt{x} = x-2$

$x = (x-2)^2$

$x = x^2-4x+4$

$0 = x^2-4x+4-x$

$0 = x^2-5x+4$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$

$a(x-x_1)(x-x_2)$

$1\cdot(x-4)(x-1)$

$4^3 = 4^2\cdot 4$

$= \sqrt{4^2}\cdot\sqrt{4}$

$3 \,\underline{|2}$
$1 \quad 1$

$4^1\sqrt{4^1}$

$$A = \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx$$

$$A = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right) dx$$

$$A = \int_1^4 \left(x^{1/2} - x + 2\right) dx$$

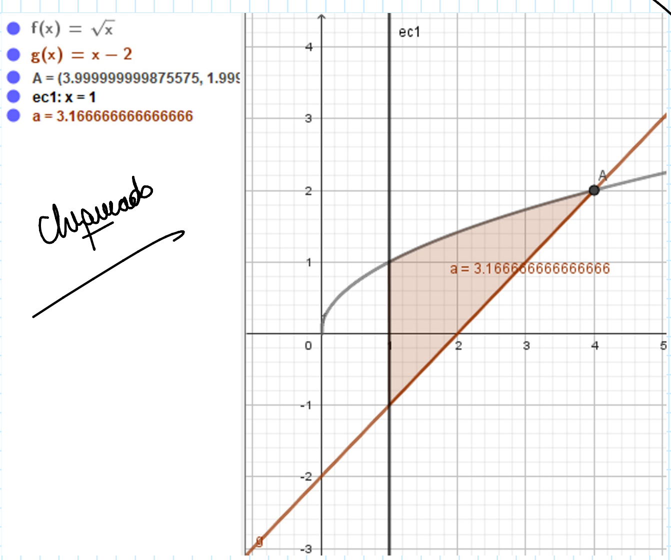
$$A = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big]_1^4$$

$$A = \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{1}{2}(4)^2 + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right)$$

$$A = \left(\frac{2}{3}\cdot 4^1\cdot\sqrt{4^1} - \frac{1}{2}\cdot 16 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$A = \left(\frac{16}{3} \cancel{-8} \cancel{+8}\right) - \left(\frac{13}{6}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6}\ u^2}$$



Chequeado

10) Hallar el área encerrada por $f(x) = x^3 + x^2 - x$ y la recta tangente que pasa por el máximo de $f(x)$.

Calculo de derivada de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

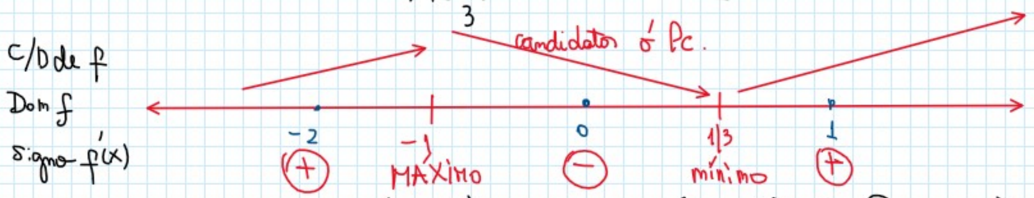
$0 = 3x^2 + 2x - 1$

$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$

candidatos ó Pc.

C/D de f

$x_1 = \frac{1}{3}$ $\quad$ $x_2 = -1$



$\operatorname{sig} f'(-2) = +$

$\operatorname{sig} f'(0) = -$

$\operatorname{sig} f'(1) = +$

la recta tangente que pasa por el $\underbrace{\text{máximo}}_{}$ de $f(x)$. $\quad$ Es $x = -1$

$f'(-1) = 0$) mT

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = 1$ Pto Tg.

$y = 0 \cdot x + b$

$1 = 0 \cdot -1 + b$

$\boxed{1 = b}$

Ec. Recta tg $\boxed{y = 1}$ (recta horizontal)

Analizo $f(x)$ OR-OR $= (0;0)$ = RAIZ

$f(x) = x^3 + x^2 - x$

$0 = x(x^2 + x - 1)$

$x = 0$ $\quad$ $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(0{,}62)$ $\quad$ $x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $(-1{,}62)$

Calculo Pto intersección

$x^3 + x^2 - x = 1$

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$x^2(x+1) - 1 \cdot (x+1) = 0$

$(x+1)(x^2-1) = 0$

$(x+1)(x-1)(x+1) = 0$

$x = -1$ $\quad$ $x = 1$

$[-1;1]$ $\quad$ $0 \in$ al int.

$f(0) = 0$ chico (P)

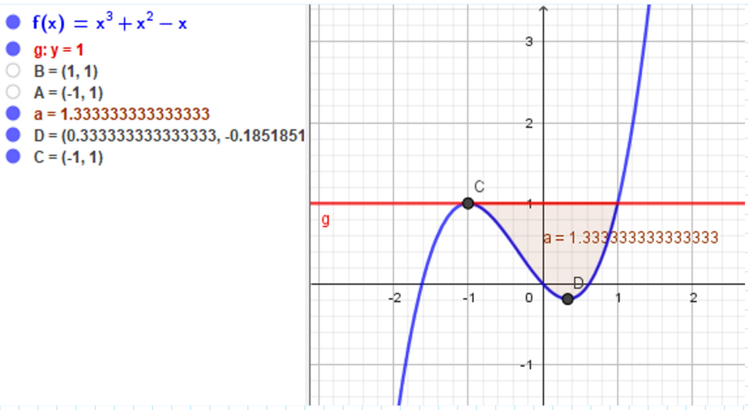
$y = 1$ GRANDE (T)

$$\int_{-1}^{1} \left[1 - (x^3 + x^2 - x)\right] dx = \int_{-1}^{1} \left[1 - x^3 - x^2 + x\right] dx = x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 \cancel{- \frac{1}{4}} - \frac{1}{3} \cancel{+ \frac{1}{2}} + 1 \cancel{+ \frac{1}{4}} - \frac{1}{3} \cancel{- \frac{1}{2}}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} u^2$$


f(x) = x^3 + x^2 − x
g: y = 1
B = (1, 1)
A = (-1, 1)
a = 1.333333333333333
D = (0.333333333333333, -0.1851851
C = (-1, 1)
C
D
g
a = 1.333333333333333
3
2
1
0
-1
-2
1
2