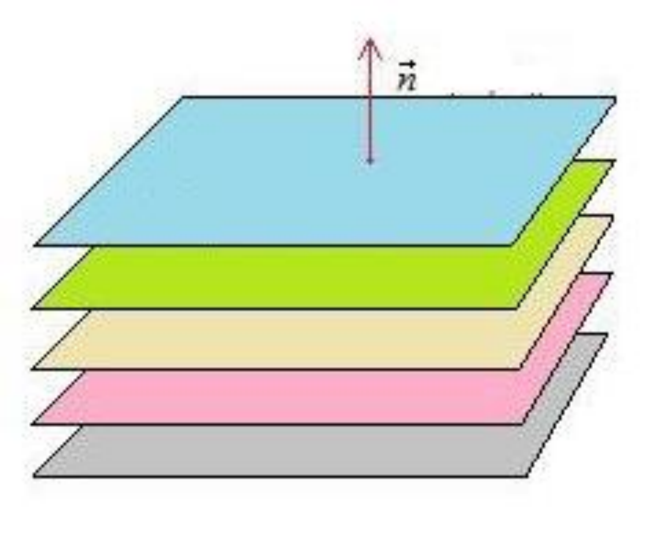
Unidad Nº 4

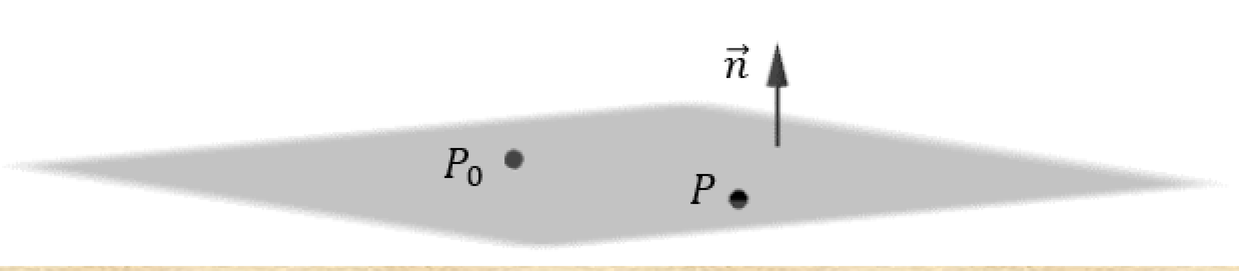
Recta y plano

Ecuación del plano

Dado un vector $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, existen infinitos planos perpendiculares a él:



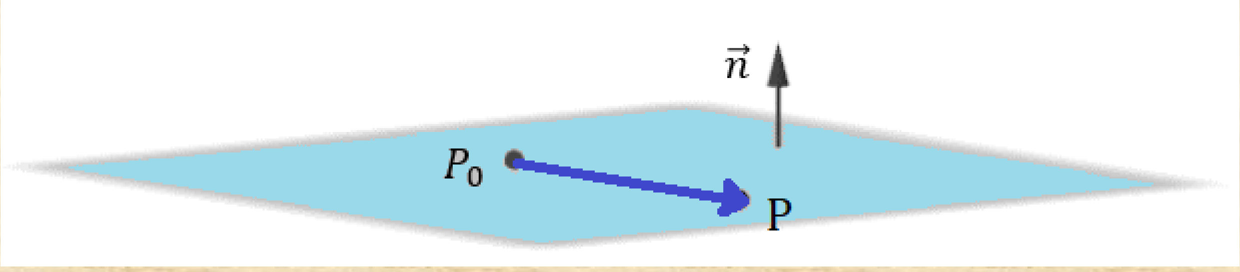
Pero si, además de $\vec{n}$, conocemos un punto P_0 del plano, éste quedará perfectamente identificado, dado que existe un único plano perpendicular a $\vec{n}$ que contiene al punto P_0



Ecuación vectorial del plano

Buscamos la ecuación de un plano π, (los planos se nombran con letras griegas minúsculas) que es perpendicular a $\vec{n} = \left(n_x;\ n_y;\ n_z\right)$ y que contiene al punto $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$
Si un punto $P(x; y; z)$ pertenece al plano, el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al plano, y, por lo tanto, $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\vec{n}$. Si ambos vectores son perpendiculares, el producto escalar entre ellos es nulo. En símbolos:

$$P(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$



Ecuación vectorial del plano: $\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$

Por ser perpendicular al plano, $\vec{n}$ se denomina vector normal

Ecuación general o implícita o cartesiana del plano

Consideramos: $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$; $P(x;y;z)$; $\vec{n} = \left(n_x;\ n_y;\ n_z\right)$

Partimos de la ecuación vectorial del plano,

$$\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$

Reemplazamos a cada vector por sus componentes:

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0).\left(n_x;\ n_y;\ n_z\right) = 0$$

Por definición de producto escalar:

$$n_x\ (x - x_0) + n_y\ (y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$n_x\ x - n_x x_0 + n_y\ y - n_y y_0 + n_z\ z - n_z z_0 = 0$$

Agrupamos los términos numéricos (sin variables):

$$n_x\ x + n_y\ y + n_z\ z + \left(-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0\right) = 0$$

Llamamos: $n_x = A; n_y = B; n_z = C;\ \left(-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0\right) = D$, obtenemos:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Que es la ecuación cartesiana del plano

Ecuación general o implícita o cartesiana del plano

Si conocemos la ecuación general o implícita de un plano,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entonces conocemos las componentes de un vector normal del plano,

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Ejemplo 1: π_1: $3x - 5y + 8z - 16 = 0$
$\vec{n} = (3; -5; 8)$

Ejemplo 2: π_2: $3x - 4z - 1 = 0$
$\vec{n} = (3; 0; -4)$

Ejemplo 3: π_3: $-x - 7y + z = 0$
$\vec{n} = (-1; -7; 1)$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Encontrar la ecuación del plano sabiendo que contiene al punto P y es perpendicular a $\vec{n}$:

A) P=(0;0;0); $\vec{n}=\breve{\imath}$

B) P=(1;2;3); $\vec{n}=\breve{\imath}+\breve{k}$

C) P=(2;-1;6); $\vec{n}=3\,\breve{\imath}-\breve{\jmath}+2\breve{k}$

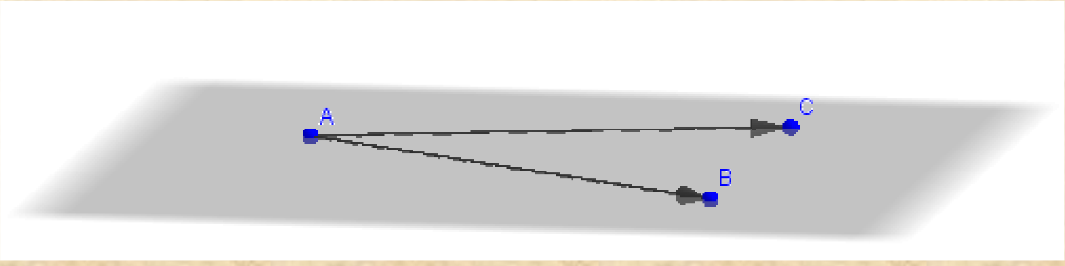
Plano que pasa por tres puntos

Como tres puntos no alineados determinan un plano, es posible averiguar la ecuación del plano que los contiene.
Vamos a obtenerla siguiendo dos procedimientos distintos

Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0;1;2)$; $B(3;0;5)$ y $C(4;0;1)$

Procedimiento 1

Figura de análisis



Para obtener la ecuación del plano, necesitamos un vector normal. Dicho vector deberá ser simultáneamente perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Mediante el producto vectorial, encontraremos el vector que cumple los requisitos establecidos

Plano que pasa por tres puntos

Procedimiento 1 (continuación)

$$\overrightarrow{AB} = (3;0;5) - (0;1;2) = (3;-1;3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4;0;1) - (0;1;2) = (4;-1;-1)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\check{\imath} + 15\check{\jmath} + \check{k}$$

La ecuación implícita del plano será de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$

$$4x + 15y + z + D = 0$$

Como cualquier punto que pertenece al plano verifica su ecuación, para hallar D reemplazamos las variables por las coordenadas de cualquiera de los tres puntos dados. Por ejemplo, $(0;1;2)$. Queda $4.0 + 15.1 + 2 + D = 0$, resultando entonces $D = -17.$ Por lo tanto, una ecuación del plano buscado es:

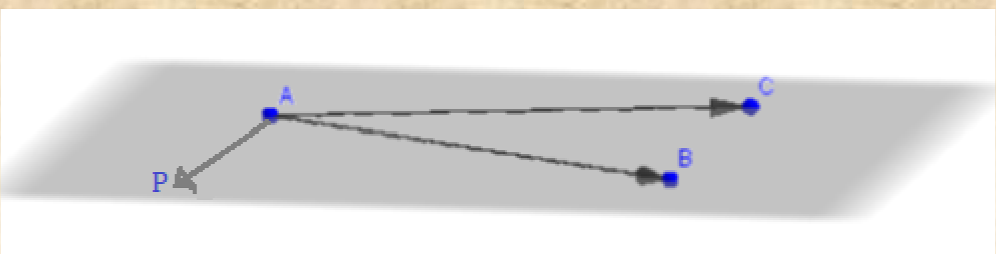
$$4x + 15y + z - 17 = 0$$

Plano que pasa por tres puntos

Procedimiento 2

Si tres vectores son coplanares, su producto mixto se anula
Además de los puntos cuyas coordenadas conocemos por dato, consideramos un punto $P(x; y; z)$, y trabajamos con los vectores $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Figura de análisis



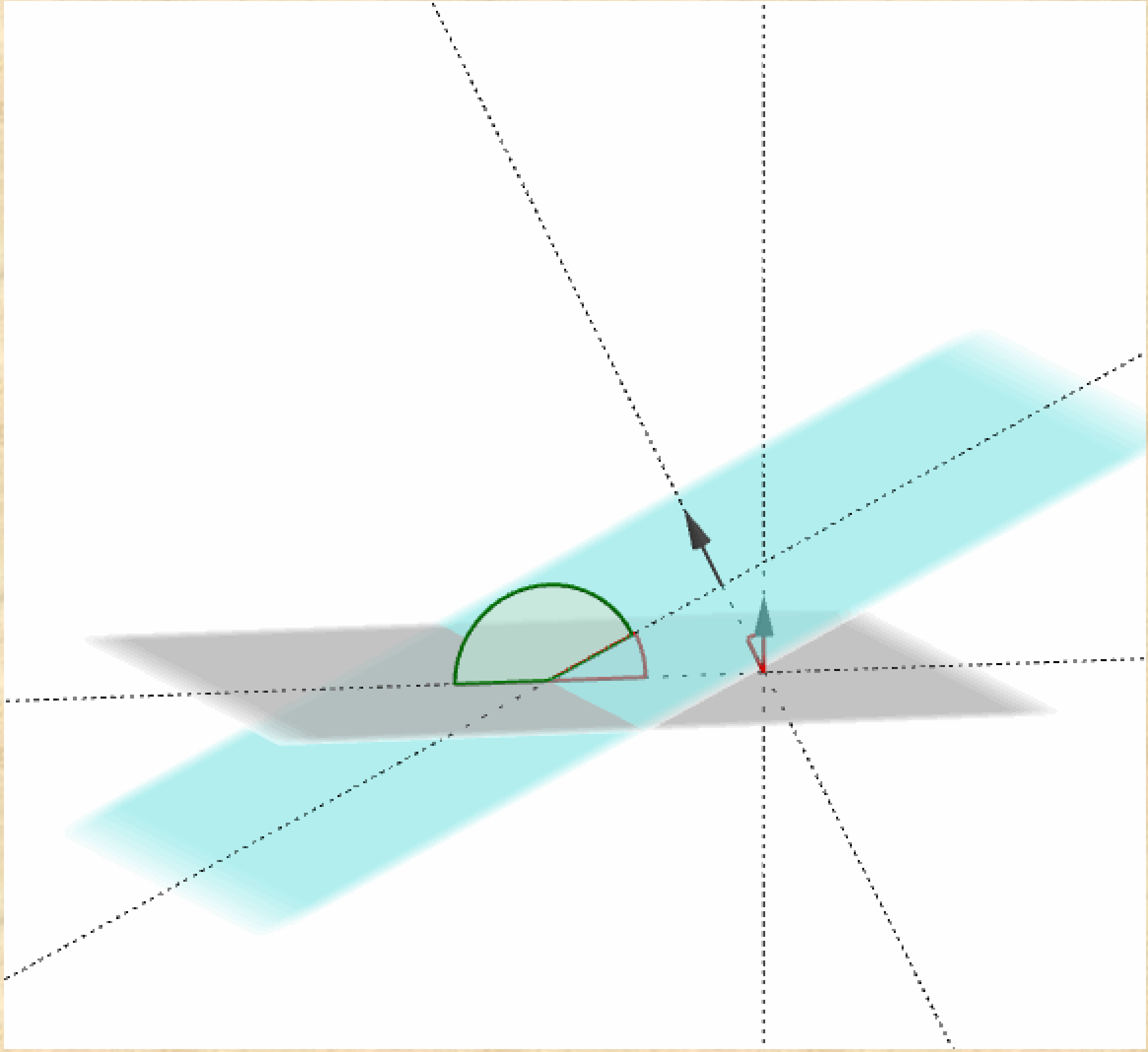
Tenemos $\overrightarrow{AP} = (x; y; z) - (0; 1; 2) = (x; y-1; z-2)$; $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ calculados antes

$$\overrightarrow{AP}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4x - (y-1)(-15) + (z-2).1 = 0$$

Operando, obtenemos:

$$4x + 15y + z - 17 = 0$$

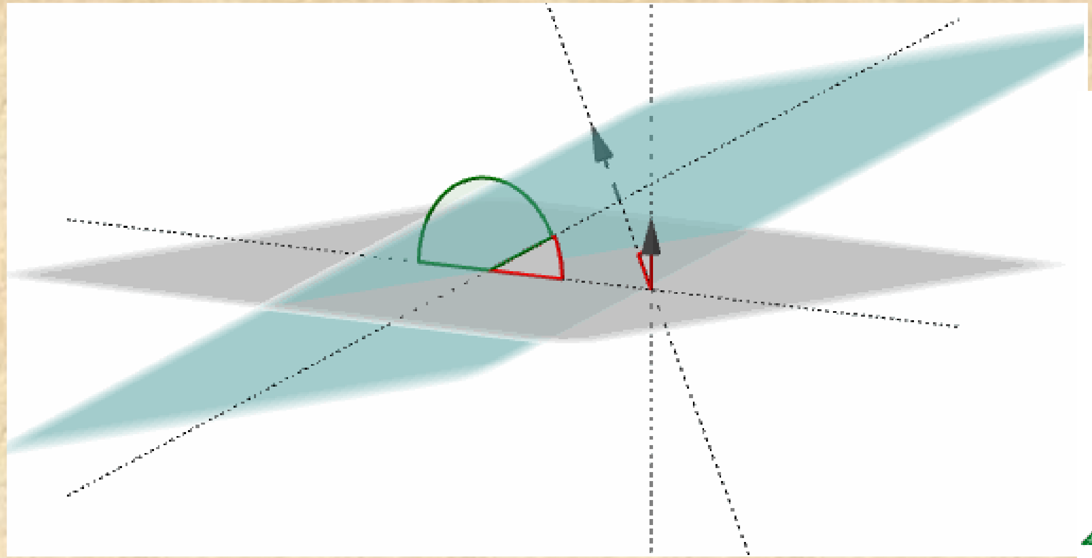
Ángulo entre dos planos

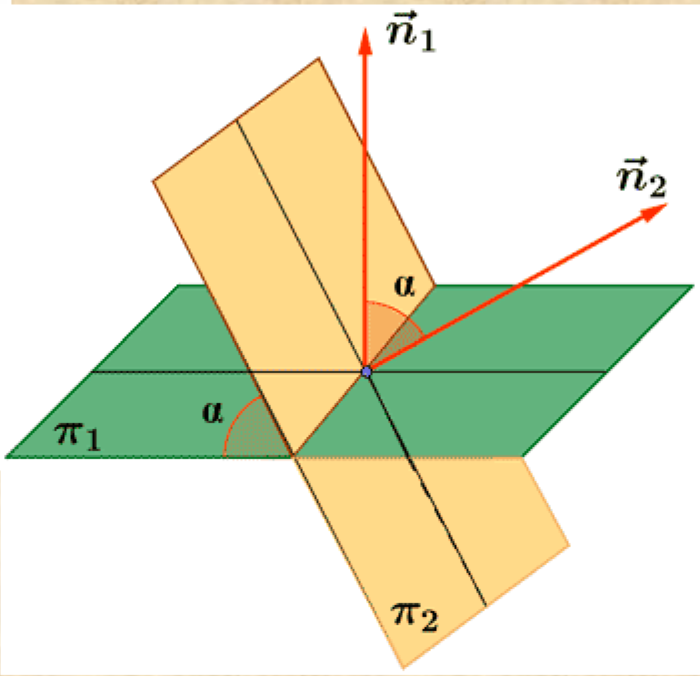


Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales

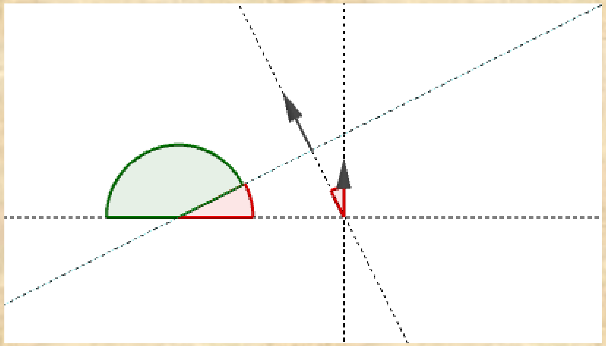
$$\acute{a}ng\ (\pi_1, \pi_2) = \acute{a}ng\ (\overrightarrow{n_1};\ \overrightarrow{n_2})$$





Recordamos que $cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$, donde θ es alguno de los dos ángulos suplementarios que determinan los planos. Para considerar el menor de los dos ángulos posibles, conviene agregar valor absoluto en la fórmula anterior. Entonces:

$$cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.\,|\overrightarrow{n_2}|}$$



Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Encontrar el ángulo entre cada par de planos:

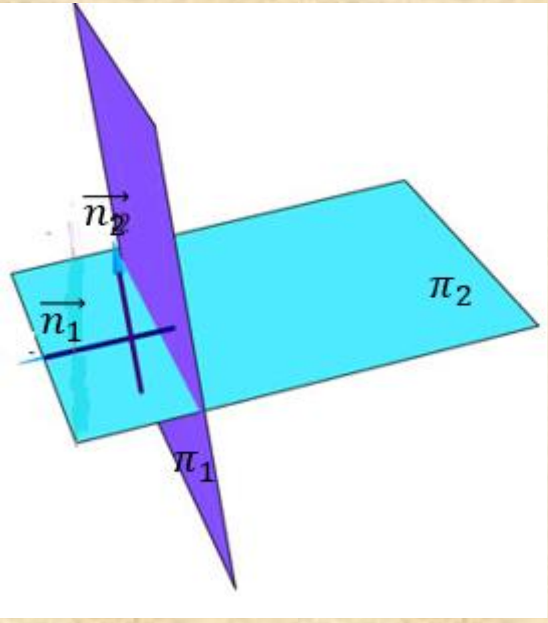
A) π_1: $-x+y+z=3$ y π_2: $-4x+2y=0$ B) α_1: $-4x+6y+8z=12$ y α_2: $2x-3y-4z=5$

Posiciones relativas de dos planos

Consideramos π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y π_2 : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cuyos vectores normales son, respectivamente, $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$

Condición de perpendicularidad:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 0$$

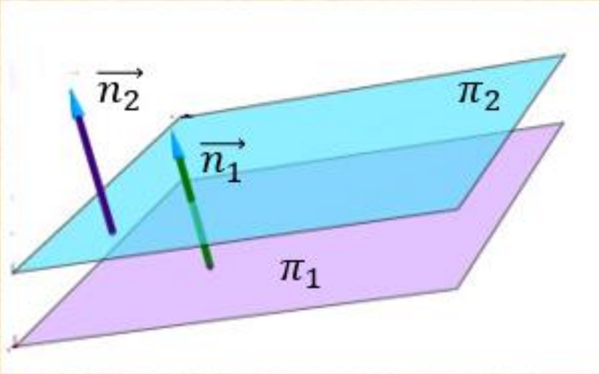


Posiciones relativas de dos planos

Consideramos π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y π_2 : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cuyos vectores normales son, respectivamente, $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$

Condición de paralelismo:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$$



Recordamos que dos vectores son paralelos si la razón entre sus componentes da un valor constante, es decir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k$$

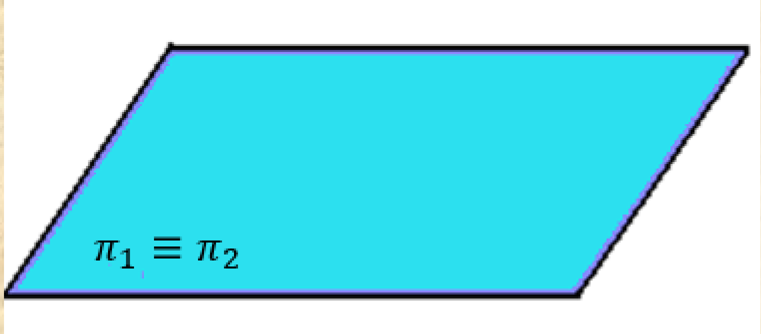
Posiciones relativas de dos planos

Consideramos $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cuyos vectores normales son, respectivamente, $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$

Condición de coincidencia

Los planos son coicidentes si se verifica que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = k$$



Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Decir si los siguientes planos son paralelos, ortogonales o coincidentes:

A) $\pi_1: x+y+z=2$; $\pi_2: 2x+2y+2z=4$

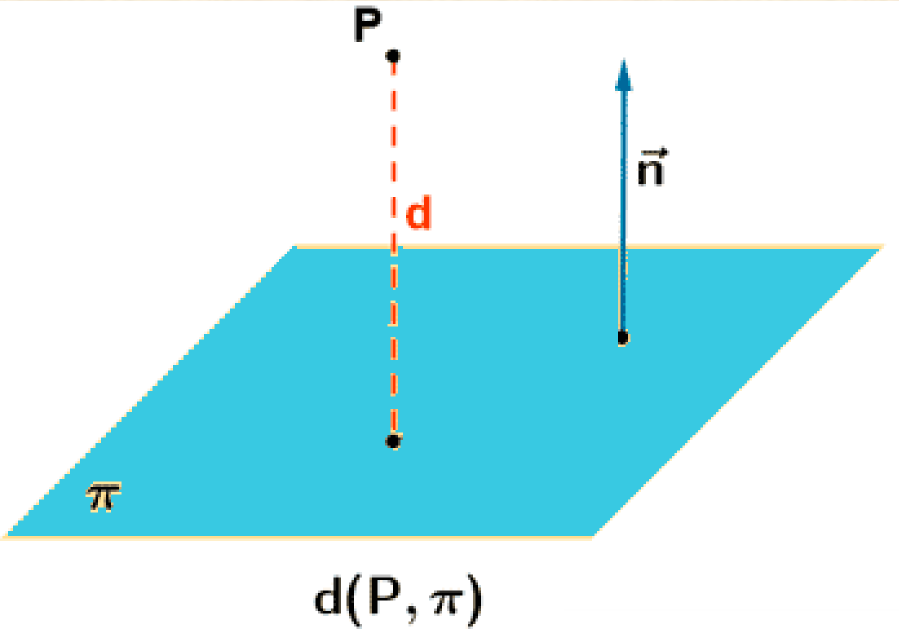
B) $\pi_3: x-y+z=3$; $\pi_4: -3x+3y-3z=-9$

C) $\pi_5: 2x-y+z=3$; $\pi_6: x+y-z=7$

Distancia de punto a plano

La distancia de *P* a π es la longitud del segmento *d*
Si $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$ y $P(x_0;\ y_0\colon\ z_0)$

$$dist\ (P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Distancia de punto a plano: ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(2; -3; 2)$ al plano $\pi = x + 2y + 2z - 4 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

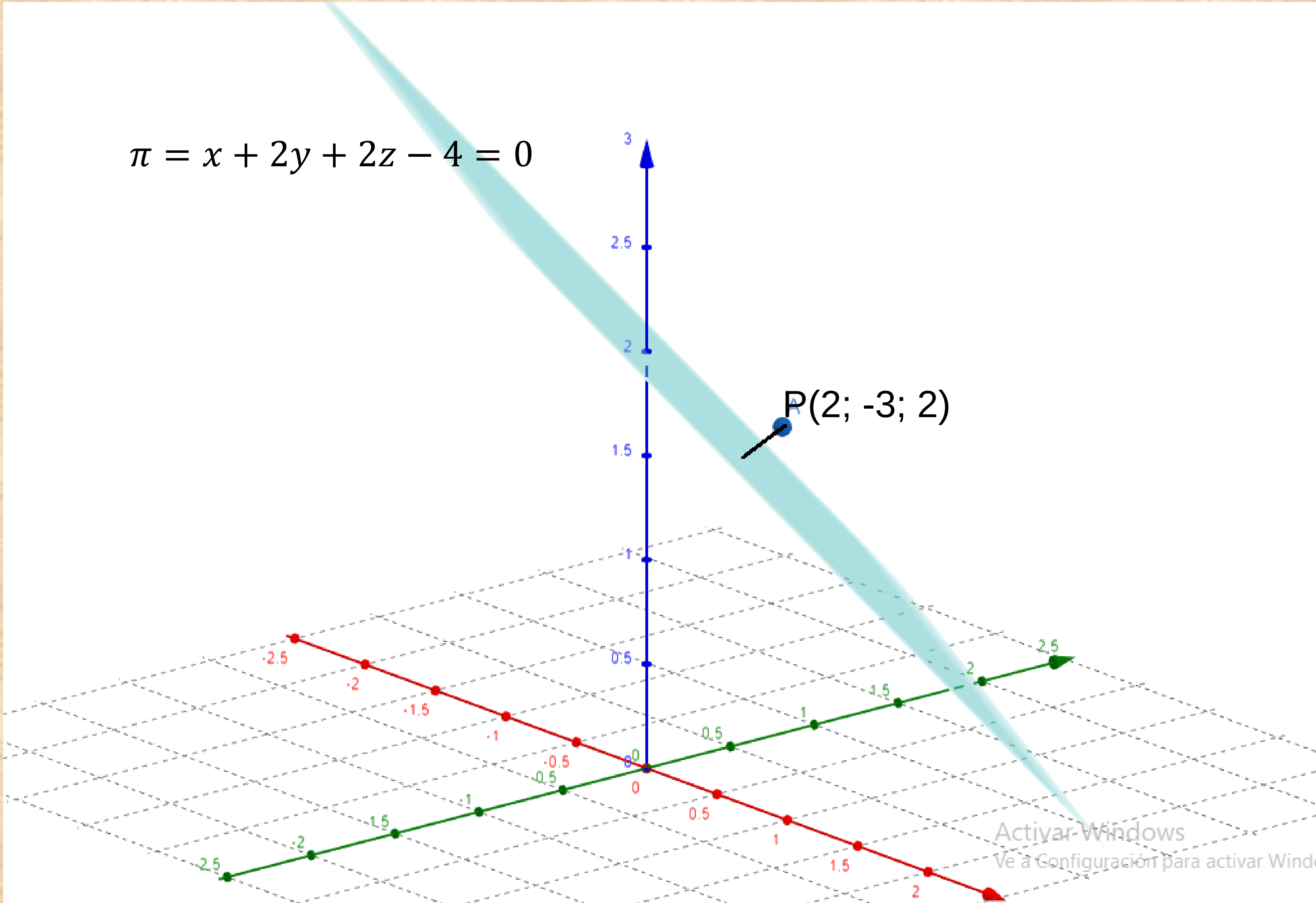
$$dist\ (P, \pi) = \frac{|1.2 + 2.(-3) + 2.2 + (-4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|-4|}{\sqrt{9}}$$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{4}{3}$$

Distancia de punto a plano: ejemplo

$$\pi = x + 2y + 2z - 4 = 0$$



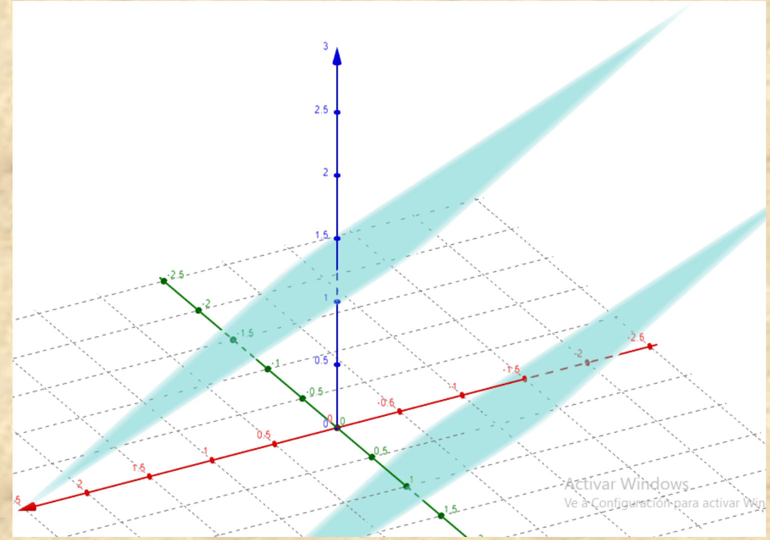
Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Determinar la distancia entre el punto P y el plano π

A)$P=(4;0;1)$; $\pi: 2x-y+8z=2$

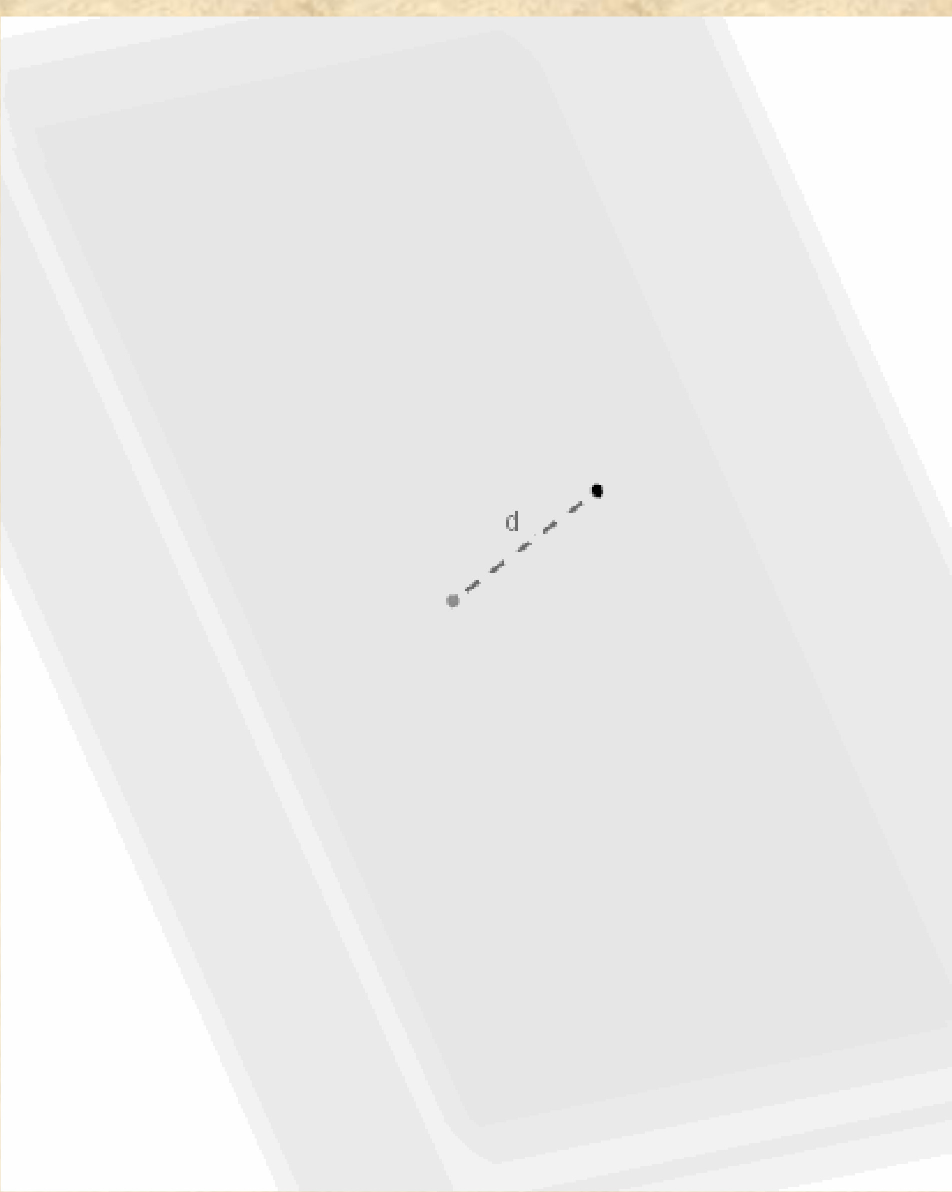
Distancia entre planos paralelos

Todos los puntos de π_1 están a la misma distancia de π_2 , por lo tanto, podemos elegir un punto cualquiera de π_1 y calcular su distancia a π_2



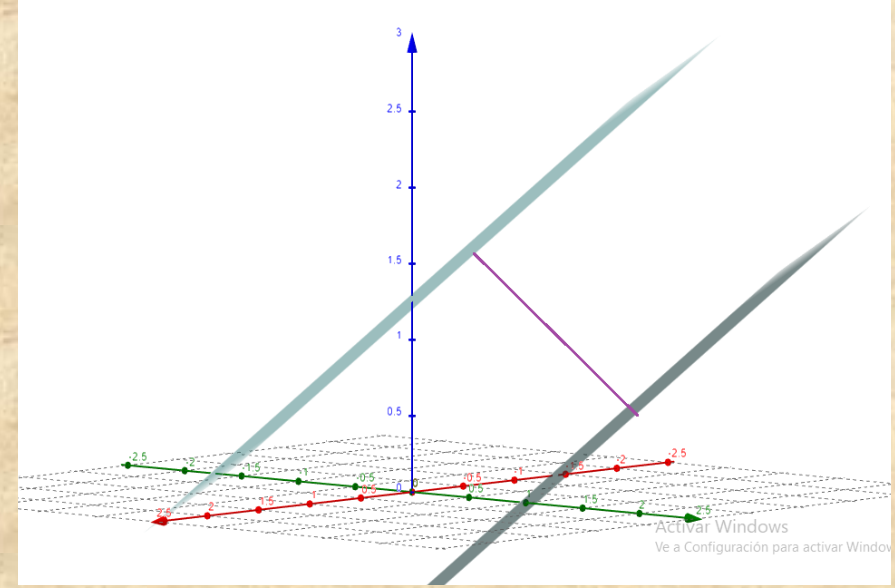
Vista de los planos $\pi_1: 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ y $\pi_2: 2x - 3y + 4z + 3 = 0$

Distancia entre planos paralelos



Distancia de entre planos paralelos

Trabajamos con los planos $\pi_1: 2x - 3y + 4z - 5 = 0 \ \ y \ \ \pi_2: 2x - 3y + 4z + 3 = 0$
Para calcular la distancia, elegimos un punto cualquiera de π_1. Por ejemplo, $P_0 = (1; -1; 0) \in \pi_1$, porque verifica su ecuación: $2.1 - 3(-1) + 4.0 - 5 = 0$



$$dist\ (\pi_1; \pi_2) = dist\ (P_0; \pi_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$dist\ (\pi_1; \pi_2) = \frac{|2.1 - 3.(-1) + 4.0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}} = \frac{8\sqrt{29}}{29}$$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Dados los planos: $\pi_1 = x + 2y - 2z - 5 = 0$; $\pi_2 = 3x - 6y + 3z - 2 = 0$;$\pi_3 = 2x + y + +2z + 1 = 0$ y $\pi_4 = x - 2y + z - 7 = 0$

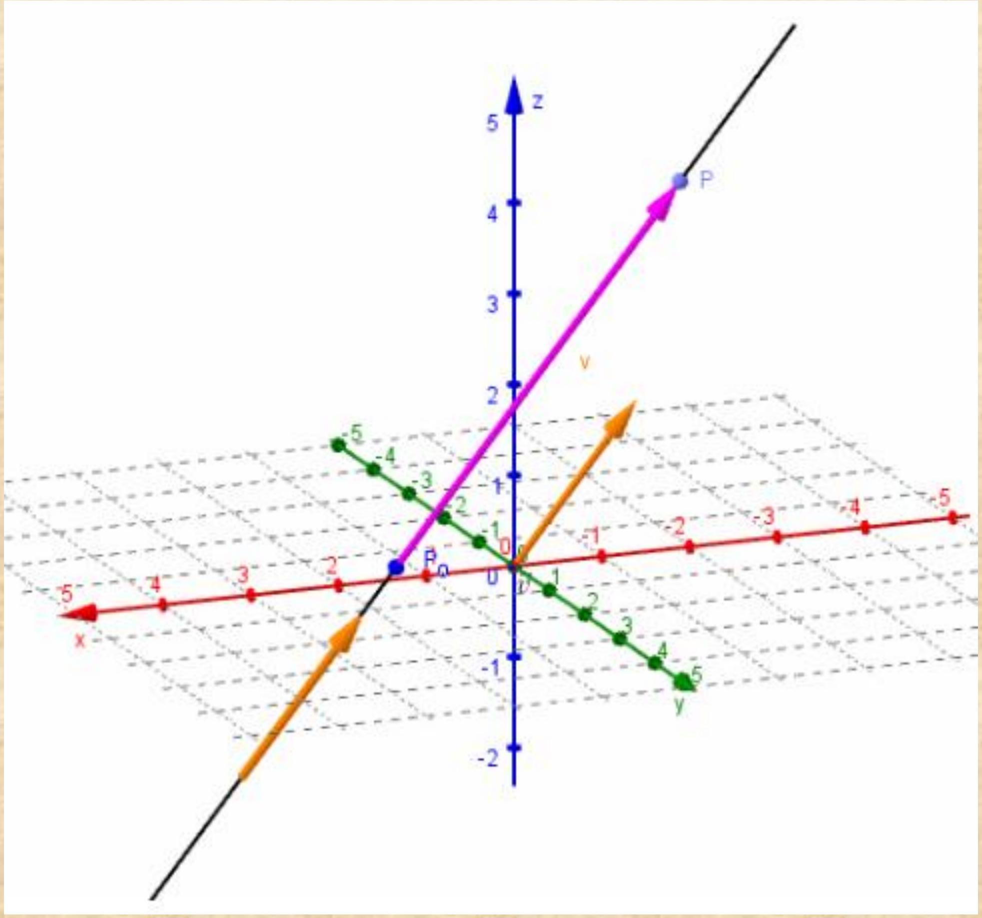
A) probar que dos de ellos son paralelos y los otros dos son perpendiculares

B) hallar la distancia entre los dos planos paralelos

C) determinar el ángulo que forman π_2 y π_3

La recta en el espacio

Una recta en $\mathbb{R}^3$, queda determinada por un punto y una dirección. La dirección se define mediante un vector libre, llamado *vector director* que es un vector paralelo a la recta.



Dados $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y un punto P_0 (x_0,y_0,z_0), buscamos la ecuación de la recta r que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\vec{v}$.

Consideramos un punto $P(x,y,z)$ perteneciente a la recta *r*. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a l vector director $\vec{v}$; por lo tanto, podemos afirmar que

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}$$

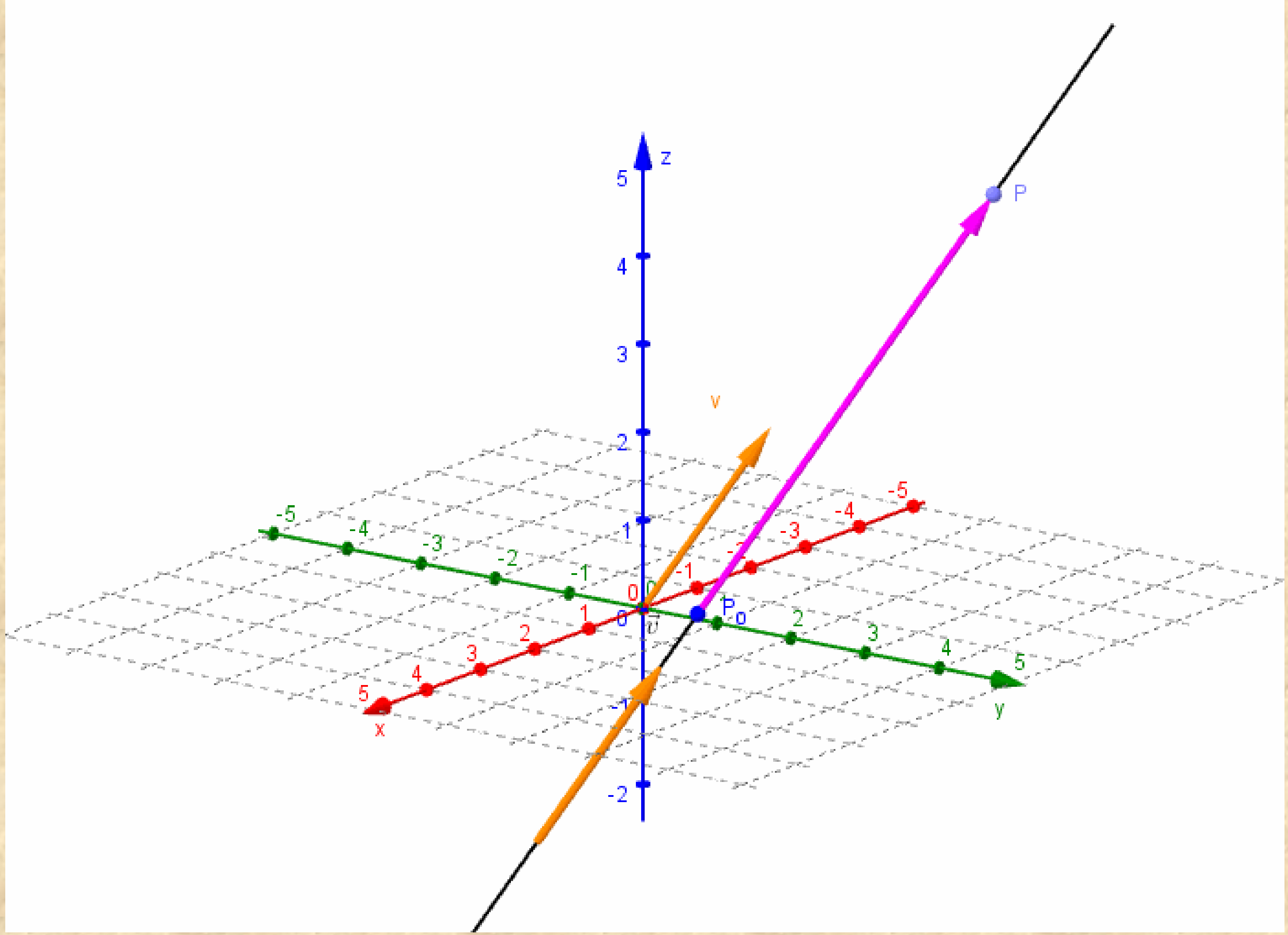
(x-x_0,y-y_0,z-z_0) = λ (v_1,v_2,v_3)

(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) = λ (v_1,v_2,v_3)

(x,y,z)= (x_0,y_0,z_0) + λ (v_1,v_2,v_3)

es la ecuación vectorial de la recta

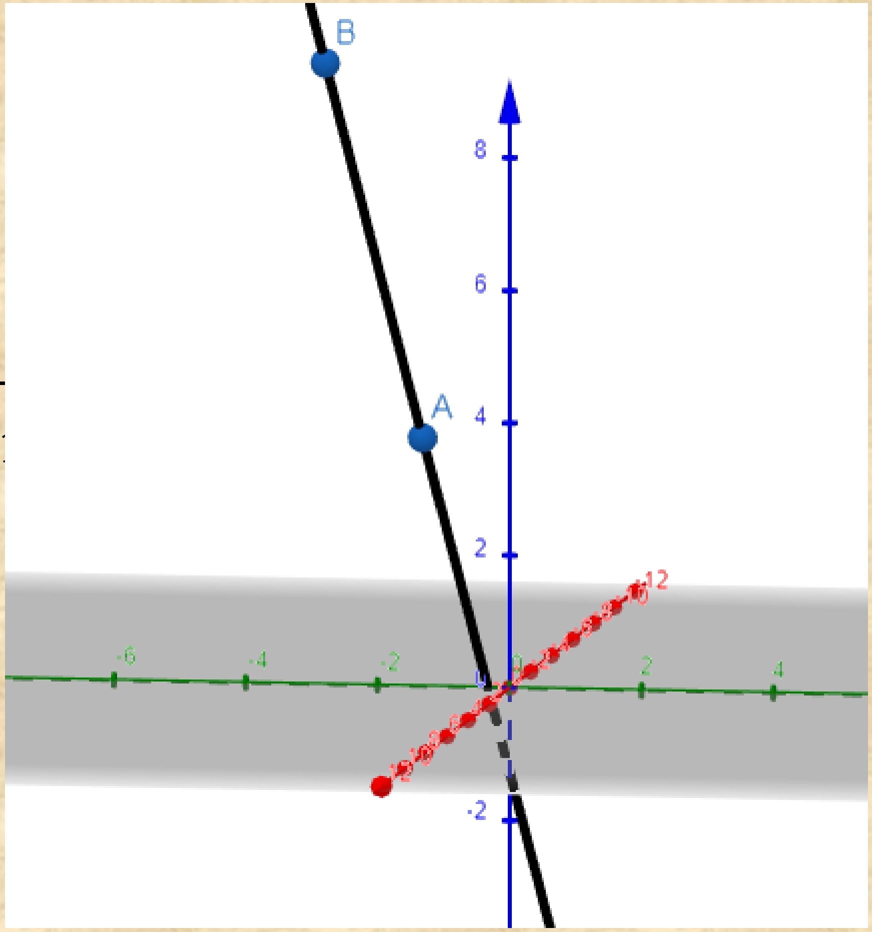
La recta en el espacio



La recta en el espacio: ejemplo

Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $A(2,-1;4\ )$ y $B(5;-2;10)$

Según vimos en la diapositiva anterior, necesitamos un vector director paralelo a la recta. El vector $\overrightarrow{AB}$ cumple con esa condición. Lo calculamos:



$$\overrightarrow{AB} = (5;-2;10) -$$

$$\overrightarrow{AB} = (3;-$$

Además, para escribir la ecuación, necesitamos un punto que pertenezca a la recta. Como dato, nos dan dos puntos; podemos elegir cualquiera de los dos para completar la ecuación de la recta:

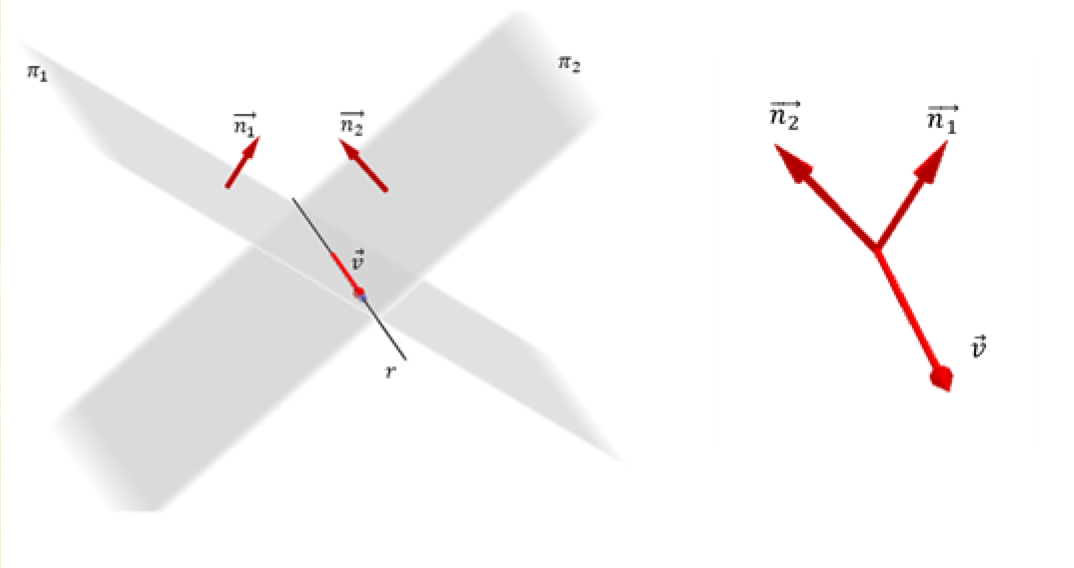
$$r\colon\ (x;y;z) = (2,-1;4) + \lambda(3;-1;6)$$

La recta como intersección de planos

Dos planos no paralelos π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y π_2 : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ determinan al cortarse una recta en $\mathbb{R}^3$ que queda expresada mediante un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Para encontrar la ecuación de la recta, necesitamos un vector paralelo a ella y un punto que pertenezca a la recta

El vector director de la recta debe ser simultáneamente perpendicular a los vectores normales a π_1 y π_2.



Para encontrarlo, calculamos el producto vectorial entre los vectores normales a los planos dados

El punto, lo obtenemos a partir del sistema planteado

En la próxima diapositiva, el ejemplo

La recta como intersección de planos: ejemplo

Hallar la ecuación de la recta determinada por la intersección de los planos π_1: $2x + 3y - 3z - 4 = 0$ y π_2 : $x - 3y + 5z - 2 = 0$

- Buscamos el vector director de la recta:

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 6\check{\imath} - 13\check{\jmath} - 9\check{k}$$

- Buscamos un punto que pertenece a la recta.
  Ese punto debe verificar las ecuaciones de ambos planos.
  Por eso, planteamos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

Resolvemos (en este caso, por Gauss Jordan) el sistema: $\begin{cases} 2x+3y-3z=4 \\ x-3y+5z=2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -13 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -13/9 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y-\dfrac{13}{9}z=0 \\ x+\dfrac{2}{3}z=2 \end{cases}$$

Despejando

x de la segunda ecuación: $x=2-\frac{2}{3}z$;

y de la primera ecuación: $\boldsymbol{y=\frac{13}{9}z}$

Obtenemos como solución, puntos de la forma $\left(2-\frac{2}{3}z;\boldsymbol{\frac{13}{9}z};z\right)$ donde *z* es cualquier número real. Para encontrar las coordenadas de un punto en particular, le asignamos un valor a z (cualquier valor real).

Por ejemplo, si *z* = 0, el punto que se obtiene es (2; 0; 0).

- La ecuación de la recta queda:

$$r\colon (x;y;z)=(2;0;0)+\lambda(6;-13;-9)$$

Donde $\vec{v}=(6;-13;-9)$ es el vector director y *P*=$(2;0;0)$ un punto de la recta

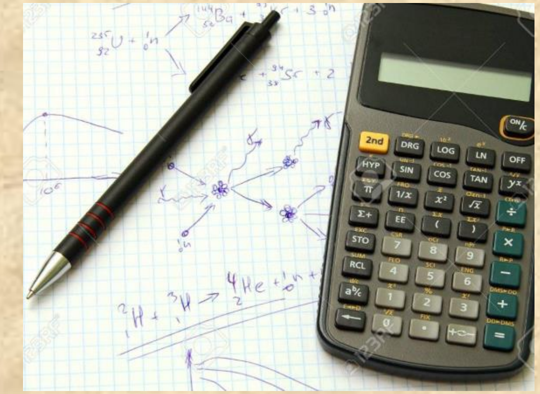
Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Hallar la ecuación que corresponde a todos los puntos de intersección de los planos:

A) $\pi_1: x - y + z = 2; \quad \pi_2: 2x - 3y + 4z = 7$

B) $\pi_1: 3x - y + 4z = 3; \quad \pi_2: 4x - 2y + 7z = 8$

Guía Nº 4



Completar la Segunda Parte

De la Guía Nº 4