Guía N° 7

Autovalores Autovectores

1)

a) $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = -4$ $E_3 gen\left\{\begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_{-4} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\lambda = -5$ $E_{-5} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\lambda = -3$ $E_{-3} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

d) $\lambda = -3$ $E_{-3} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

e) $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 3$ $E_0 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_1 gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_3 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

f) $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 2$ $E_{-1} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_1 gen\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_2 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

g) $\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -1$ $E_8 gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ $E_{-1} gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

h) $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1$ $E_0 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $E_{-1} gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}\right\}$

2) PARTE A

Una matriz A$\in R^{nxn}$ es diagonizabnlesi y solo si tiene n atovectores linealmente independientes.

A) Autovalores: $\lambda = 3$ $\lambda = -4$ linealmente independientes $\therefore Aesdiagonizable$

B) Se obtiene un solo autovector y se necesitan dos, por lo tanto B no es diagonizable

C) Autovalor: $\lambda = -3$, autovectores asociados : (1;0) (0;1) , que son linealmente independientes $\therefore Cesdiagonizable$

D) Se obtiene un solo autovector y se necesitan dos, por lo tanto D no es diagonizable

E) Tiene 3 autovectores linealmente independientes $\therefore Eesdiagonizable$

F) Tiene 3 autovectores linealmente independientes $\therefore Fesdiagonizable$

G) Tiene 3 autovectores linealmente independientes $\therefore Gesdiagonizable$

H) Se obtienen 3 autovectores, H es diagonalizable.

.

PARTE B

En caso afirmativo, comprobar que $P^{-1}.A.P = D$

Se desarrolla A que es diagonalizable.

Siendo:

P es la matriz de autovectores,

P^{-1}inversa de P.

A matriz diagonalizable.

D: Matriz diagonal (cuya diagonal está compuesta por autovalores)

$$\therefore P^{-1}.A.P = D$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3) Se brinda como respuesta UNA posible matriz C, si encuentran otra, deben realizar la comprobación pertinente

a) si $C = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) si $C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Si $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) Si $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales tales que tengan por valores propios 1 y -1. ¿Son diagonalizables estas matrices? Justificar la respuesta

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

Son diagonalizables

5)

a) Comprobación a cargo del alumno

b) D=C.A.B

c) $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$

$$E_2 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_4 gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

6)

a) $C = \begin{pmatrix} -a_{31} & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{pmatrix} \forall a_{31}; a_{32}; a_{23} \in R - \{0\}$ .Matriz genérica; cualquiera que cumpla con esa condición responde a lo pedido.

$Ejemplo: \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sean A y B $\in R^{nxn}$ decimos que A y B son semejantes $<=> \exists P \in R^{nxn}\, inversible / B = P^{-1}.A.P$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego se verifica que $B = P^{-1}.A.P$

c) $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = 3$

d) Si, los 3 autovectores son L.I

e) Una matriz $A \in R^{nxn}$ es diagonalizable ortogonalmente si y solo si $\exists\, P\, ortogonal\, (P^{-1} = P^T)/P^T.A.P = D$. Porque no es simétrica

A no es diagonalizable ortogonalmente pues $P^{-1} \neq P^T$

7) a) k= 1 y k=2

b) Es diagonalizable si k = 2. No es diagonalizable si k = 1

8) K=3. Si K=3, A es una matriz diagonalizable.

9) a) k= -3

b) Es diagonalizable

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10)

a) Es diagonalizable $\forall\ \alpha \in R - \{5\}$

b) Es diagonalizable $\forall\ \alpha \in R - \{1\}$

11) Se analizan las distintas situaciones:

$$Si\ a \in R - \{-1; 5\} \wedge \forall b \in R, A\ es\ diagonalizable$$
$$Si\ a = 5\ no\ es\ diagonalizable, cualquiera\ sea\ b$$
$$Si\ a = -1 \wedge b = 0, A\ es\ diagonalizable$$
$$Si\ a = -1 \wedge b \neq 0, A\ no\ es\ diagonalizable$$

12) a) K= (-4)

b) Si K= (-4) la matriz es diagonalizable porque tendrá 3 autovectores distintos.

13)$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Expresión de la transformación lineal asociada a ella:

$\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}} / \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{3x} + \boldsymbol{2y} + \boldsymbol{z}; \boldsymbol{y} + \boldsymbol{3z}; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})$

14) a) a= (-1) b=(-3) c=0

b) La matriz dada no tiene autovalores reales para los valores de a, b y c hallados.

15) h = 1 ; k = 2. Es diagonalizable

$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

16) a) VERDADERO: Como una matriz simétrica, es un caso particular de una matriz cuadrada que tiene la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada, todos sus autovalores son reales.

b) FALSO una matriz es diagonalizable cuando es semejante a una matriz diagonal real.

c) Los autovalores de una matriz triangular son los números de la diagonal de la matriz. VERDADERO

d) Si la matriz real de 3x3 tiene tres valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes a esos valores propios constituyen una base para $\mathbb{R}^3$. VERDADERO

e) Si la matriz A de 3x3 tiene dos valores propios distintos, entonces A tiene a lo sumo 2 vectores propios linealmente independientes FALSO

f) Si det (A) = 0, entonces 0 es un valor propio de A VERDADERO

g) Si una Matriz de nxn, tiene n valores propios diferentes, se puede diagonalizar

VERDADERO :Si una matriz $A \in R^{nxn}$ tiene n autovalores distintos, entonces tiene n autovectores LI y en consecuencia es diagonalizable.

h) Si una matriz de 5x5 tiene 3 valores propios distintos, entonces no puede ser semejante a la matriz diagonal. FALSO

i) Si dos matrices de orden nxn son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.VERDADERO, A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos autovalores con las misas multiplicidades algebraicas. Si V es un autovector de A asociado a un autovalor de λ, entonces $P^{-1}v$ es un autovector de B, asociado al mismo autovalor de λ.

j) Si A es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces sus valores propios son 1, 2 y 3 VERDADERO

k) Si A es una matriz cuadrada inversible, λ=0 es autovalor de A FALSO si 0 es autovalor de A no se cumple $|A - o.I| = 0$

l) La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable$\forall k \in \mathbb{R}$, FALSO es diagonalizable$\forall k \in \mathbb{R} - \{4\}$

<u>Importante:</u>

Las respuestas pueden variar, en función del orden en que se consideren los autovectores, por un lado, y por otro, en función de las variables libres que cada uno haya considerado.
Es necesario hacer las comprobaciones con las matrices obtenidas, antes de considerar que el resultado obtenido es erróneo