

Unidad N° 2

Determinantes

Determinantes

Definición: Se llama determinante de la matriz A de orden n **al número** que se obtiene al realizar ciertas operaciones predeterminadas con los elementos que la forman.

“Determinante” es una función que asigna a cada matriz cuadrada. un número real.

Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El **determinante** de A , se representa por $|A|$ ó $\det(A)$

En síntesis, un determinante es un valor numérico κ , que está relacionado con una matriz cuadrada y que sigue ciertas reglas para su cálculo .

Cálculo de determinantes de orden 1 y 2

- Si A es una matriz formada por un solo elemento ($A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$; tiene una sola fila y una sola columna) el determinante de la matriz es igual a ese elemento.

Ejemplo: Si $A = (4)$, su determinante es: $\text{Det}(A) = 4$

Generalizando: Si $A = (a_{11})$, $\text{Det}(A) = a_{11}$

- Si B es una matriz cuadrada de segundo orden: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$, será

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}$$

Resolvemos los ejercicios del cuadernillo

3) a, b

6) b



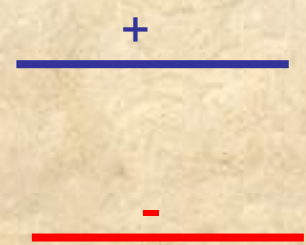
Cálculo de determinantes de orden 3

Regla de Sarrus

El determinante de orden 3 es la suma de los productos de la diagonal principal y sus dos paralelas, menos la suma de los productos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas. Una forma de calcularlo, consiste en la aplicación de la Regla de Sarrus, que sólo es válida para calcular determinantes de orden 3

Procedimiento:

Se repiten las dos primeras filas del determinante debajo de la tercer fila (así se visualizan claramente las diagonales y sus paralelas) y se realiza la sumatoria del producto de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas, menos la sumatoria del producto de los elementos de la contra-diagonal y sus paralelas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$


$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

Realizamos la actividad del cuadernillo

4) a

4) b

8) b



Menor complementario de un elemento

Se llama **menor** M_{ij} de la matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$, al determinante de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir en A la fila i -ésima y la columna j -ésima (es decir, la fila y la columna que contiene al elemento cuyo menor queremos calcular).

Ejemplo

Calculamos el menor complementario de la matriz correspondiente al ejercicio 4 de la guía

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \text{ (calculo el determinante que surge de suprimir la fila 1 y columna 1)}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \text{ (calculo el determinante que surge de suprimir la fila 1 y columna 2)}$$

$$M_{13} =$$

$$M_{21} =$$

$$M_{22} =$$

$$M_{23} =$$

$$M_{31} =$$

$$M_{32} =$$

$$M_{33} =$$

Adjunto de un elemento

Se llama **adjunto** A_{ij} del elemento a_{ij} de la matriz A al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Considerando $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y los menores complementarios calculados en la diapositiva anterior obtenemos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} =$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} =$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} =$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} =$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} =$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} =$$

Matriz adjunta

Llamamos matriz adjunta de una matriz A y la representamos por $Adj(A)$ a la matriz formada por los adjuntos A_{ij} de todos los elementos.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ será } Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Considerando $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y los adjuntos calculados en la diapositiva anterior obtenemos:

$$AdjA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

Desarrollo de un determinante de orden 3 por Laplace (matriz genérica)

Desarrollo por primera columna de un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Desarrollo por tercera fila de un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Regla de Laplace

El **determinante de una matriz** $A = (a_{ij})$ de orden n , es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos adjuntos:

$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$ es el desarrollo por la i -ésima fila

$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ es el desarrollo por la j -ésima columna

Ejemplo

Calculamos el determinante de la Matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos la actividad del cuadernillo

5) b

5) c



Determinante de cualquier orden por Laplace

El determinante de la matriz A de orden n se puede obtener multiplicando los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos:

$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$ es el desarrollo por la i-ésima fila

$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{mj} \cdot A_{mj}$ es el desarrollo por la j-ésima columna

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + 6 \cdot (-1)^{2+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_5 + \\
 + 1 \cdot (-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} = \\
 = 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 6 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot (-1) = 34$$

Propiedades de los determinantes (I)

I. El determinante de una matriz con dos filas o columnas proporcionales es cero.

Ejemplos:

- El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ es igual a cero porque la tercera y primera columnas son iguales.
- El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ es igual a cero porque la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por 3.

II. El determinante de una matriz con una fila o una columna nula es cero.

Ejemplo:

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es igual a cero porque la segunda columna es nula.

Propiedades de los determinantes (II)

III. El determinante de una matriz en que una fila o columna depende linealmente de otras filas o columnas es cero.

Ejemplo:

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es igual a cero porque la tercera columna es igual al doble de la primera menos la segunda.

IV. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo:

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es igual -4 .

Propiedades de los determinantes (III)

V. El determinante de la matriz identidad es 1

Ejemplos:

- El determinante de la matriz $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es igual a 1.

- El determinante de la matriz $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es igual a 1.

Propiedades: operaciones con filas y columnas (I)

- I. Si se multiplican los elementos de una fila o columna de una matriz por un número el determinante de la matriz se multiplica por ese número.**

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1.4 & 5.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 28 = 4 \cdot 7 = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

La segunda fila se multiplicó por 4; el determinante es 28, que es 4 veces el determinante de la matriz original

- II. Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.**

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Propiedades: operaciones con filas y columnas (II)

III. Al sumar a una fila o columna una combinación lineal de las otras filas o columnas, respectivamente, el valor del determinante no varía.

Ejemplo: Si en $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 13 & 4 \end{vmatrix}$ sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por -1 más la segunda multiplicada por -2 , obtenemos:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 + 2(-1) + 1(-2) & 13 + 3(-1) + 5(-2) & 4 + (-1)(-1) + 2(-2) \end{vmatrix}$$

y se cumple que ambos determinantes son iguales: $|A| = |B|$

Determinantes de operaciones con matrices (I)

I. El determinante del producto de dos matrices cuadradas y multiplicables es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas.

Ejemplo:

- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Se tiene que $|A| = -2$ y $|B| = 5$.
- Como $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $|A \cdot B| = -10$ se observa que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

II. El producto de los determinantes de dos matrices inversas es 1.

Ejemplo:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$
- Como $|A| = 3$ y $|A^{-1}| = 1/3$, se observa que $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

Determinantes de operaciones con matrices (II)

III. Al transponer una matriz su determinante no varía.

Ejemplo:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- Se cumple que $|A| = |A^t|$

VI. Si se multiplica una matriz cuadrada de orden n por un número, el nuevo determinante es igual al anterior multiplicado por la potencia n -ésima del número.

Ejemplo:

$$\text{Se cumple que: } \left| 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right| = 2^3 \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right|$$

Determinantes de operaciones con matrices (III)

V.- Si una fila o columna es suma de varios sumandos, se descompone en tantos determinantes como sumandos haya

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 13 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces se cumple que $|A| = 7$

- Y se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 13 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 3 & -1 \\ 3-2 & 5 & 2 \\ 1+3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 13 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = (-70) + 77 = 7$$

Determinantes de operaciones con matrices (IV)

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Calculamos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 7 = -23$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 10 = -10$$

Como $-7 + (-10) \neq -23$, se cumple que $|A + B| \neq |A| + |B|$

Realizamos la actividad del cuadernillo

Punto 1

Punto 2



Matriz inversa y determinantes

- El cálculo de determinantes nos brinda otra herramienta para establecer si una matriz admite inversa o no

Importante:

Una matriz $A \in R^{n \times n}$ admite inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

FIN