GUÍA Nº 1: MATRICES

PRIMERA PARTE

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \\ -5 & 6 & -9 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 11 & -10 & 14 \\ -22 & 20 & -28 \end{pmatrix}$

A) Indicar el orden de cada una

B) Identificar en cada matriz, si existe, el elemento pedido: $a_{12};\ b_{31}; c_{22}; d_{13}$

2) Construir las siguientes matrices:

$$A = (a_{ij}) \wedge A \in \Re^{3x3} / a_{ij} = \begin{cases} 1; & si|i-j|<1 \\ 0; & si|i-j| \geq 1 \end{cases}$$

$$B = (b_{ij}) \wedge B \in \Re^{3x1} / b_{ij} = i^2 - 2j - 1$$

$$C = (c_{ij}) \wedge C \in \Re^{1x5} / c_{ij} = \begin{cases} j; & i < j \\ i; & i \geq j \end{cases}$$

$$D = (d_{ij}) \wedge D \in \Re^{2x3} / d_{ij} = \begin{cases} 1-j-i; & i < j \\ (i+j)!; & i \geq j \end{cases}$$

3) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular: a) –A+ 3B -2C b) A -B-C c) A.(B-3.C) d) A+ B.C e) $A^2 - B^2$

f)(A+B).(A-B) g) $(A+B)^t$ h)$A^t + B^t$ $A(B-C)$ i) $A.B - A.C$

4) Siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Hallar, siempre que sea posible, las matrices que se obtienen como resultado de la operación propuesta en cada ítem. Si no es posible, indicar las razones por las cuales no es posible realizarla

a) A.B b) B.A c) D. (E+C) d) (E+G).D e) B.(C.D) f) D^2

g) E^2 h) G^2 i) E.F j) E.(F.D) k) (E.F).D l) G. E^2

5) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ de orden 2 x 3, hallar la matriz X que cumple con:

a) 2X -3A=B b) 2A – B = 4X

6) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 3 & 2 \\ b-1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ c+4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & c+2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar, si existen, los números reales no nulos, a, b, c, d para que se cumpla que:

A) A = B B) B = C C) A = C

7) Considerar las siguientes matrices e indicar cuales son simétricas, triangulares superiores, triangulares inferiores o diagonales.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

8) Si es posible, escribir un ejemplo de una matriz que cumpla con las condiciones pedidas; si no fuera posible, explicar por qué:

A) Triangular superior de orden 2x3

B) Simétrica de orden 4x4

C) Diagonal de orden 3x3

D) Identidad de orden 4x2

E) Escalar de orden 3, cuya traza es 5

F) Antisimétrica. de orden 2, cuya traza es 4

9) A) Hallar los valores de x e y para que la matriz: $C = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ sea idempotente

B) Probar que cualesquiera sean los valores de c y d, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ es idempotente.

C) Analizar si la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva

10) Siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, encontrar $A \in \Re^{2x2} / A.B = I$ (matriz identidad)

11) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas para $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & -9 \\ 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$?

a) Es una matriz cuadrada
b) Es una matriz simétrica
c) Es una matriz de idempotente

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -5 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & -13 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

12) Comprobar que $A.B \neq B.A,$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

13) Si $A \in \Re^{2x4}$ y $B \in \Re^{4x3}$, ¿Cuál es el tamaño de la matriz A.B?

14) Una Matriz de **Probabilidad**, es una Matriz cuadrada que cumple con las siguientes propiedades:

- ✓ Cada componente es **no** negativo.
- ✓ La suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Dadas las matrices: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decir si las matrices P y Q son de probabilidad:

b) ¿Es P.Q una matriz de probabilidad?

15) Encontrar los números α y β tales que

A) $M = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sea simétrica

B) $A^2 + \alpha A + \beta I = N$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; I\ matriz\ Identidad; N\ matriz\ nula$

16) Encontrar una matriz cuadrada de orden 3, diferente a la matriz nula que cumpla las siguientes condiciones:

a) $A^T = A$ b) $A^T = -A$

17) Decir cuáles de los siguientes enunciados referidos a multiplicación de matrices son Verdaderos, y cuáles son Falsos. Justificar:

a) A y B se pueden multiplicar sólo si A y B son cuadradas

b) Al multiplicar, cada $c_{i\,j}$ es el producto de $a_{i\,j}$ y $b_{i\,j}$

c) Se puede hallar A. B sólo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B

d) Si A es una matriz cuadrada, $A.A^t$ y A^tA son matrices simétricas

f) Sean $A, B \in \Re^{m\,x\,m} \Rightarrow A.B = B.A$.

g) Sean $A, B \in \Re^{m\,x\,m} \Rightarrow Tr(A.B) = Tr(B.A)$

h) Sean $A,B \in \Re^{m x m} \Rightarrow Tr(A.B) = Tr(A).Tr(B)$

i) Sean $A,B \in \Re^{m x m} \Rightarrow Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

j) Sean $A,B \in \Re^{m x m} \Rightarrow (A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

18) Calcular la traza de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE

19) Hallar todos los valores reales de k para los cuales la matriz A resulta inversible, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

20) Hallar, si es posible, las matrices inversas a las dadas por el método de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

21) a) Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices

b) Indicar si son o no inversibles. Justificar la respuesta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

22) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$, hallar, si es posible,

a) $(-2A^t)^{-1}$

b) $(A^2)^{-1}$

23) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$,

a) Hhallar, si es posible, $A^{-1}.B^{-1}, (A.B)^{-1} y \quad B^{-1}.A^{-1}$

b) Comparar los resultados de $(A.B)^{-1} y \quad B^{-1}.A^{-1}$

c) Generalizar lo observado y enunciar una conclusión

24) Utilizar la información dada, para encontrar la matriz A:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $7.A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\left(5.A^{T}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $(I + 2.A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

25) Decir cuáles de los siguientes enunciados son Verdaderos, y cuáles son Falsos. Justificar:

a) Sean $A, B \in \Re^{m x m}\, y\, A es inversible \Rightarrow Tr\left(A.B.A^{-1}\right) = Tr(B)$

b) Si A y B son inversibles, A+B es inversible

c) la suma de matrices diagonales inversibles es inversible

d) Si A es una matriz simétrica inversible, su inversa también es una matriz simétrica