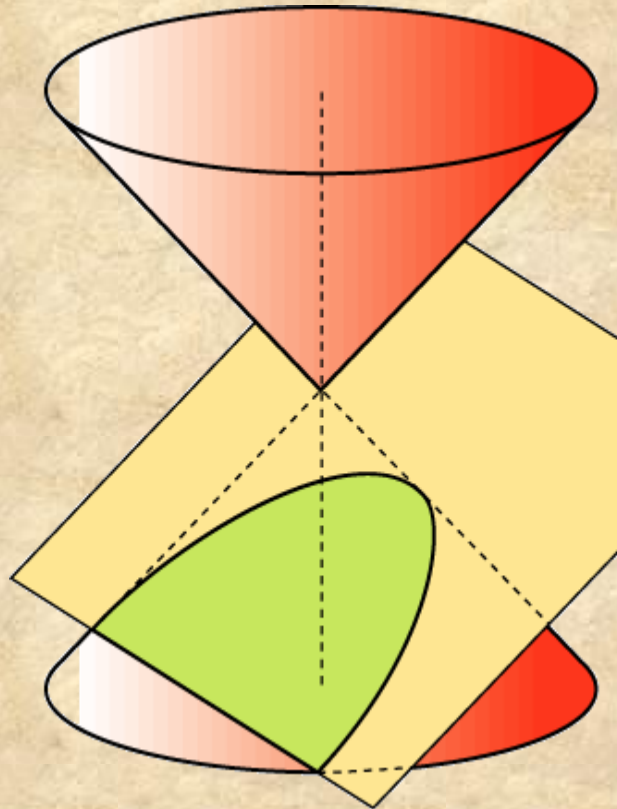


SECCIONES CÓNICAS

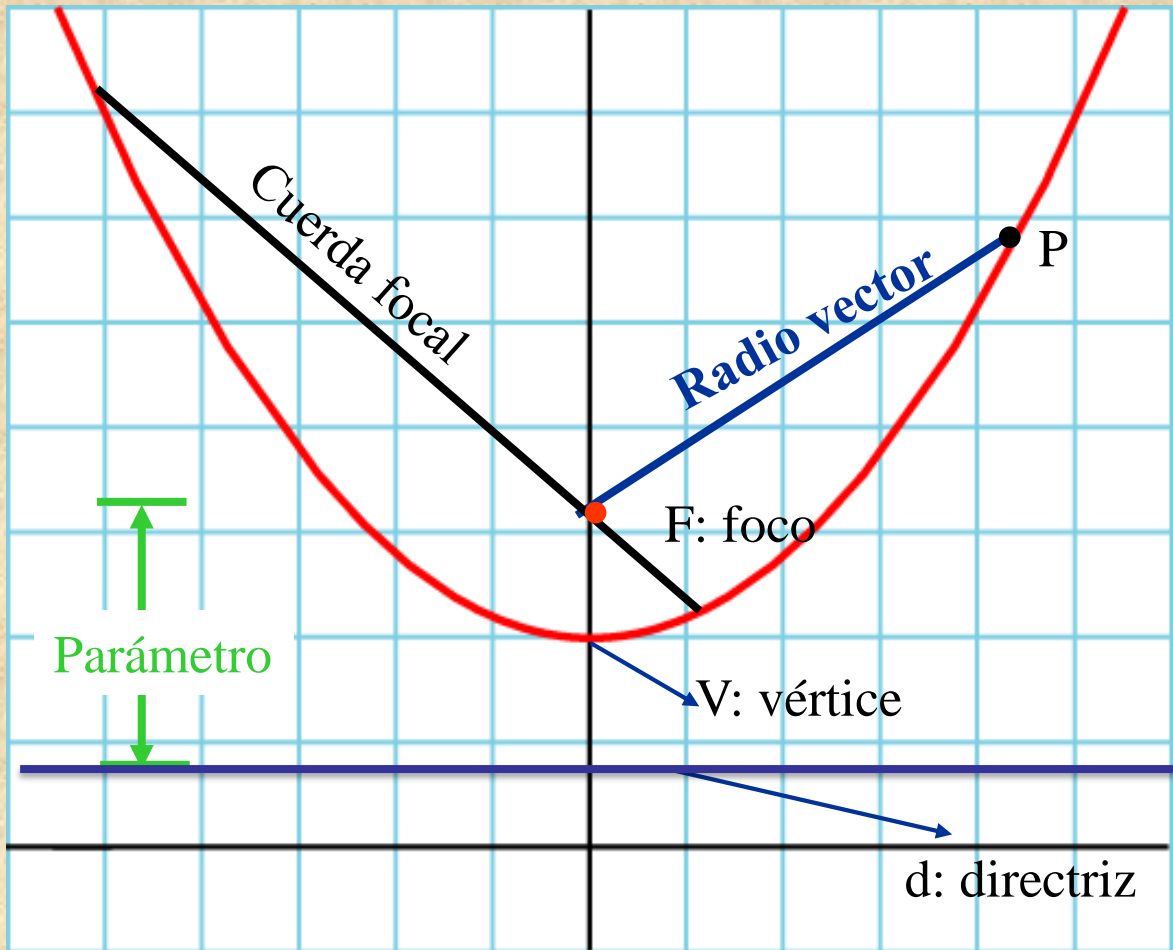
La Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada Directriz, y un punto interior a la parábola llamado foco.



SECCIONES CÓNICAS

La Parábola



$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = 1$$

La excentricidad de la parábola es 1.

SECCIONES CÓNICAS

Elementos de una parábola:

Foco: es un punto fijo " $F = (0;p)$ "

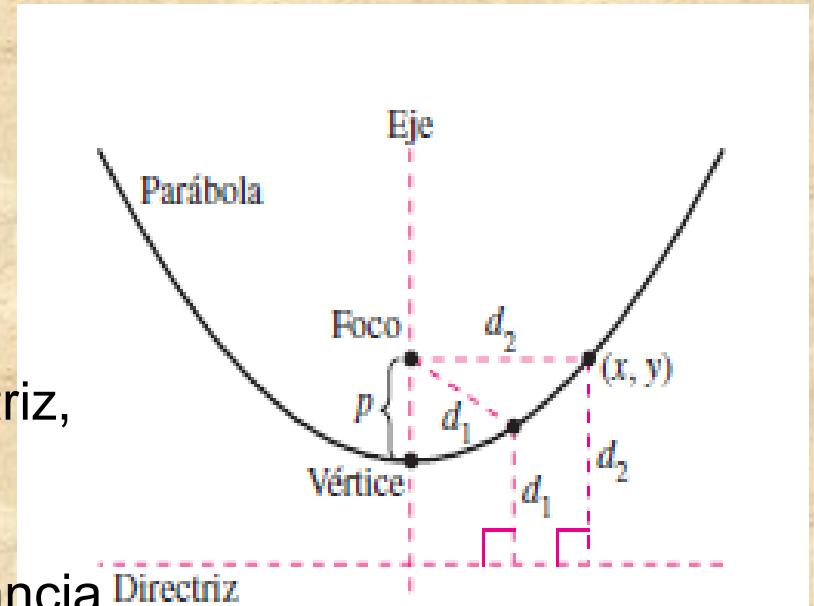
Directriz: es la recta fija " d " $y = -p$

Eje: es la recta Perpendicular a la directriz, que pasa por el foco

Vértice: " v " es el punto medio de la distancia entre el foco y la directriz

Radio vector: distancia de cualquier punto $(x;y)$ al Foco

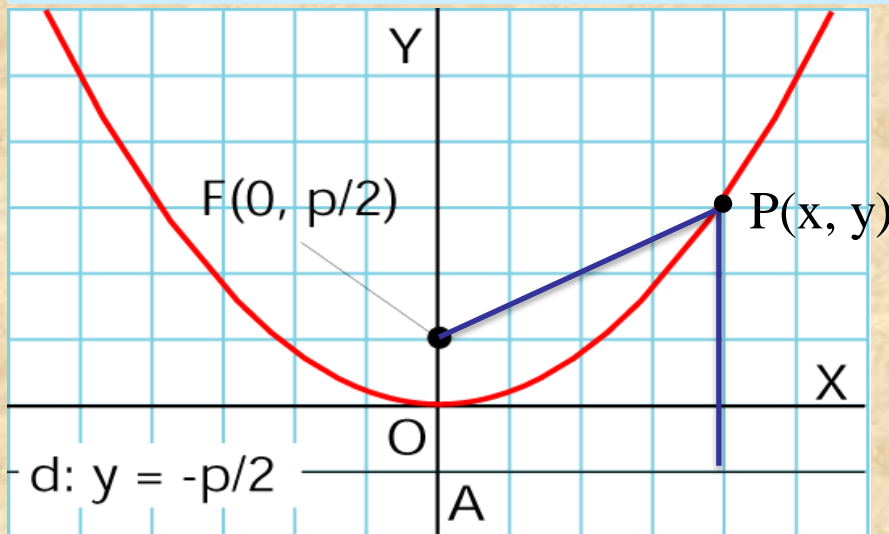
Radio director: distancia de cualquier punto $(x;y)$ a la directriz



SECCIONES CÓNICAS

Ecuación de la parábola: eje en OY y ramas hacia arriba

Para obtener una ecuación de la parábola, se puede situar el foco, F , en el eje de ordenadas simétrico respecto al origen de coordenadas de la directriz, d , que se sitúa paralela al eje de abscisas. La distancia desde el foco a la directriz se llama parámetro. Podemos entonces tomar (por ejemplo): $F(0, p/2)$ y $d: y = -p/2$



$$P(x, y) \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left| \frac{y + \frac{p}{2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right|$$

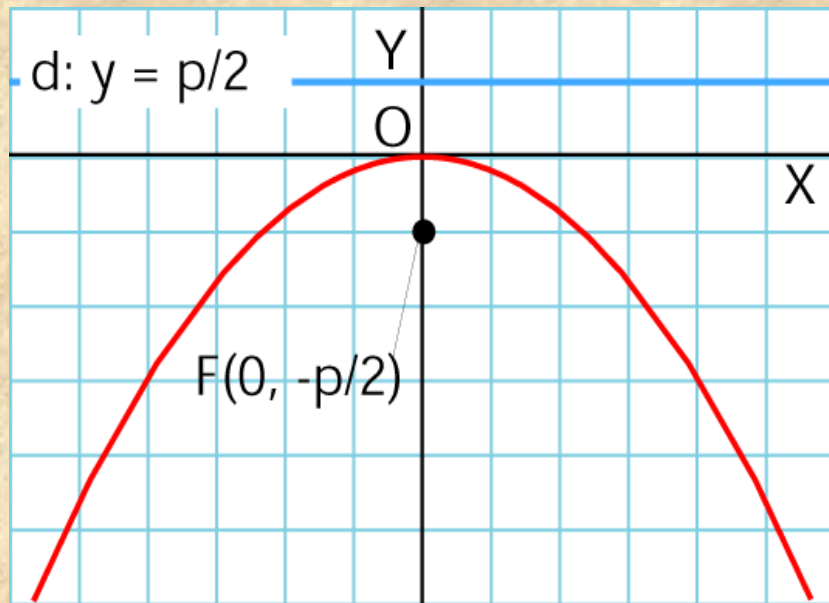
Elevando miembro a miembro al cuadrado y operando, se obtiene $x^2 = 2py$

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación de la parábola: eje en OY y ramas hacia abajo

Para obtener una ecuación sencilla de la parábola se puede situar el foco, F , en el eje de ordenadas simétrico respecto al origen de coordenadas de la directriz, d , que se sitúa paralela al eje de abscisas. La distancia desde el foco a la directriz se llama parámetro.

Podemos entonces tomar (por ejemplo): $F(0, -p/2)$ y $d: y = p/2$



$$P(x, y) \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \left| \frac{y - \frac{p}{2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right|$$

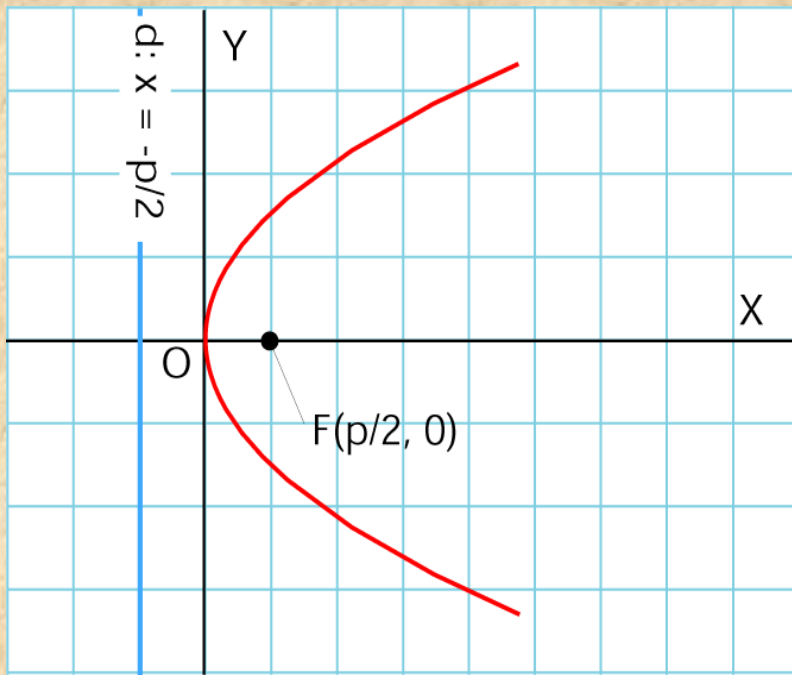
Eliminando radicales: $x^2 = -2py$

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación de la parábola: eje en OX y ramas hacia la derecha

Se puede situar el foco, F, en el eje de abscisas simétrico respecto al origen de coordenadas de la directriz, d, que se sitúa paralela al eje de abscisas. La distancia desde el foco a la directriz se llama parámetro.

Podemos entonces tomar (por ejemplo): $F(p/2, 0)$ y $d: x = -p/2$



$$P(x, y) \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left| \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right|$$

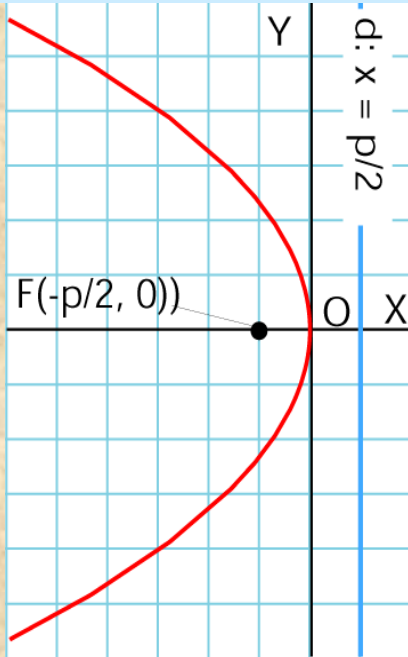
$$\text{Eliminando radicales: } y^2 = 2px$$

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación de la parábola: eje en OX y ramas hacia la izquierda

Para obtener una ecuación sencilla de la parábola se puede situar el foco, F , en el eje de abscisas simétrico respecto al origen de coordenadas de la directriz, d , que se sitúa paralela al eje de abscisas. La distancia desde el foco a la directriz se llama parámetro.

Podemos entonces tomar (por ejemplo): $F(-p/2, 0)$ y $d: x = p/2$



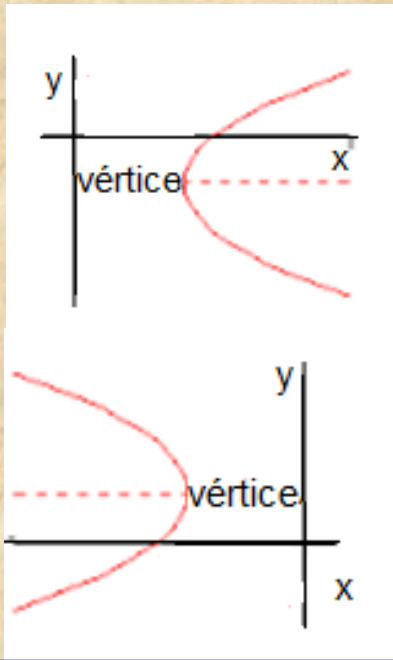
$$P(x, y) \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left| \frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right|$$

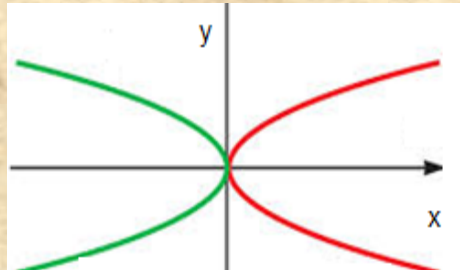
$$\text{Eliminando radicales: } y^2 = -2px$$

SECCIONES CÓNICAS

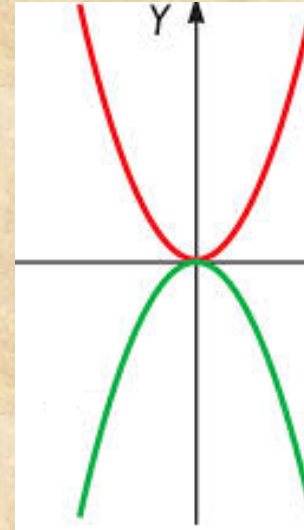
Ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola



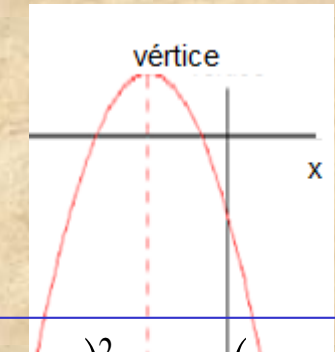
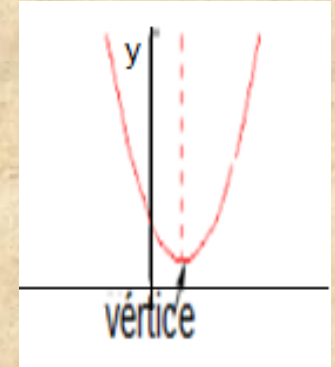
$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$$
$$(y - \beta)^2 = -2p(x - \alpha)$$



$$y^2 = 2px$$
$$y^2 = -2px$$



$$x^2 = 2py$$
$$x^2 = -2py$$



$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$$
$$(x - \alpha)^2 = -2p(y - \beta)$$

Eje Focal paralelo al eje x

Eje Focal paralelo al eje y

SECCIONES CÓNICAS

Ecuaciones General de la Parábola

$$A x^2 + B y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Característica:

- Los coeficientes cuadráticos y los términos lineales no deben ser nulos simultáneamente

$$A = 0 \quad \text{ó} \quad B = 0$$

- El coeficiente cuadrático no nulo, es 1

Actividad guiada

Completar el siguiente cuadro:

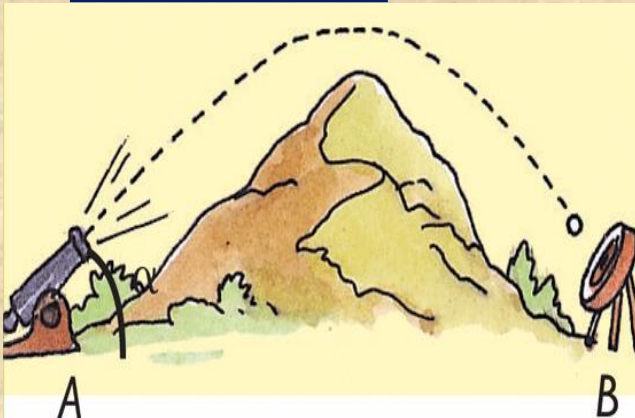
Ecuación	Vértice	Foco	Ecuación de la Directriz	Ecuación del Eje	Medida del lado recto
$24 - x^2 - 8y$					
$4x^2 + 4x + 16y - 31 = 0$					
$4y^2 - 40y - x + 98 = 0$					
$Y^2 - 2y + 2x - 9 = 0$					

APLICACIONES

LOGO DE MARCA COMERCIAL



TRAYECTORIAS DE PROYECTILES:



NAVES ESPACIALES



PUENTES:



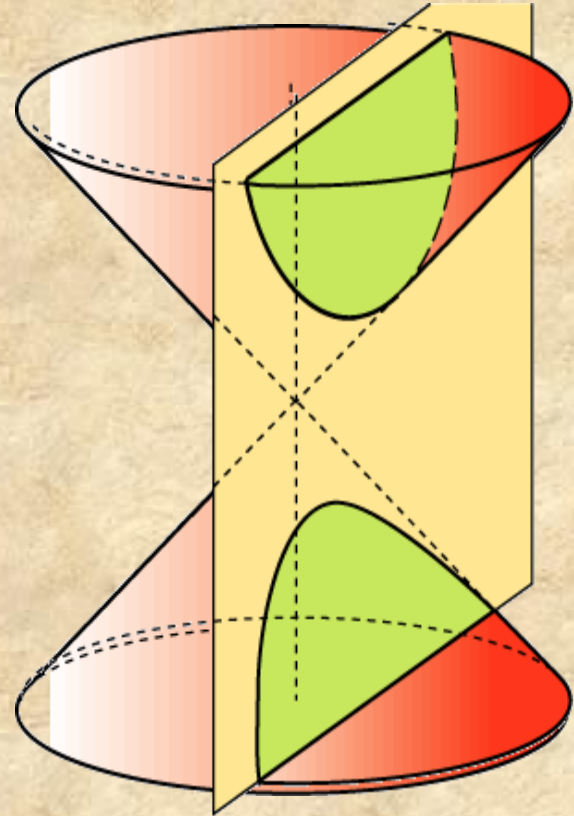
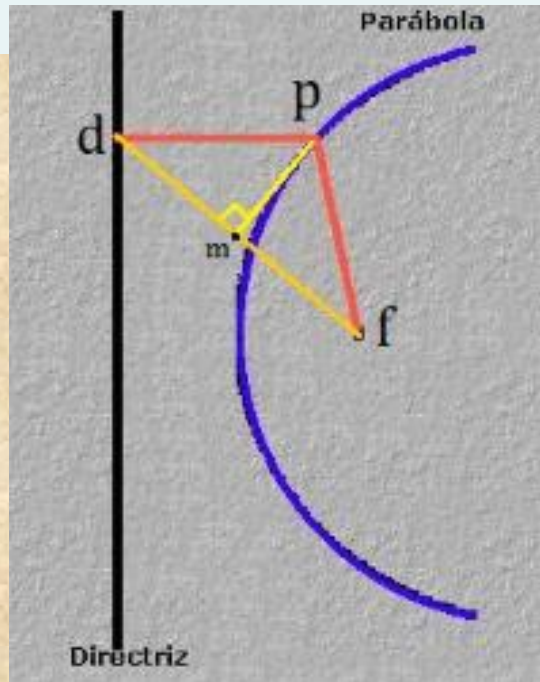
PISTAS DE SKATE



SECCIONES CÓNICAS

Hipérbola

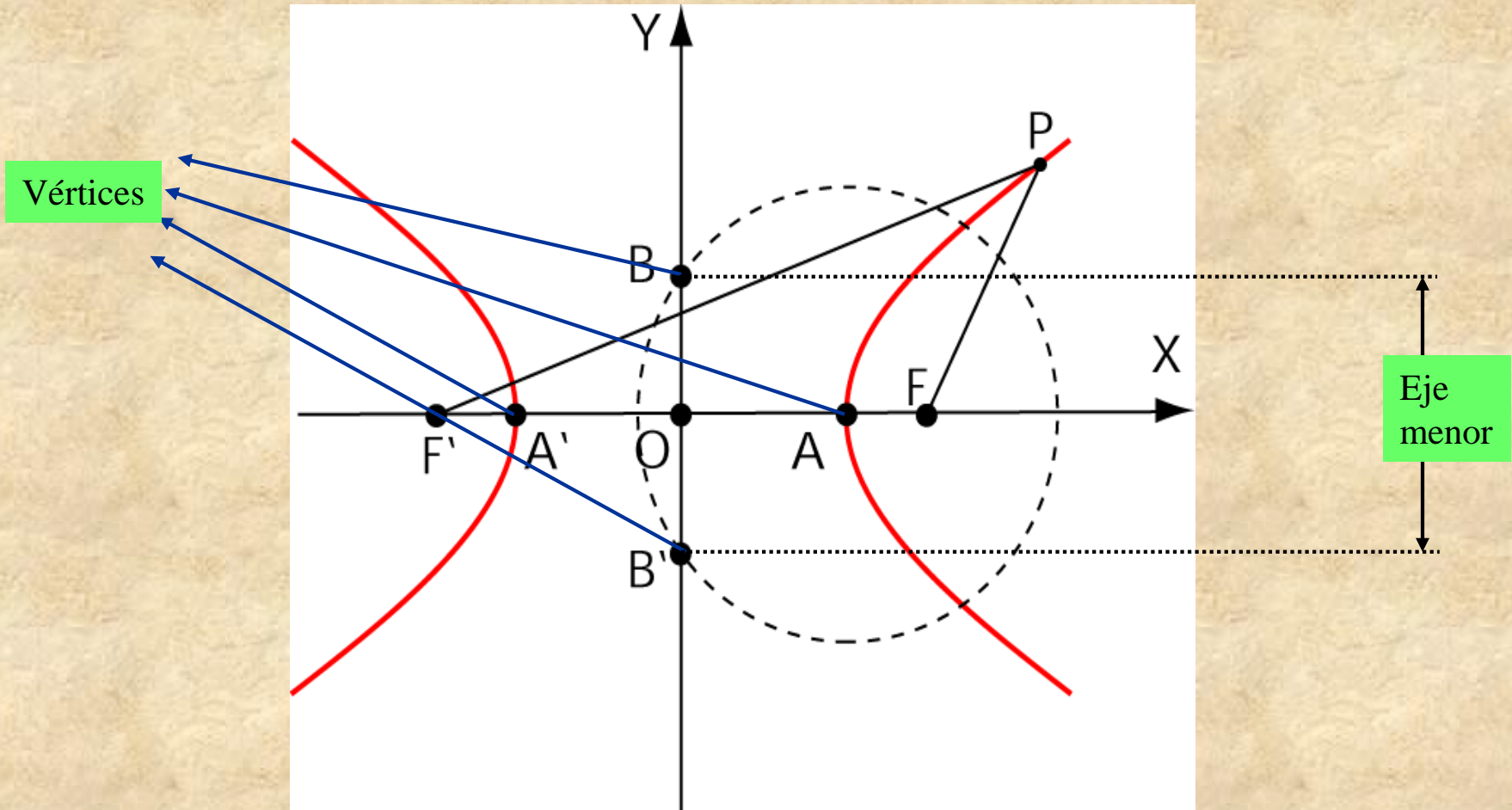
Es la cónica no degenerada que se obtiene cuando el plano es paralelo al eje del cono y no pasa por el vértice.



SECCIONES CÓNICAS

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano, P, cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, llamados focos (F y F'), es constante, $2a$.

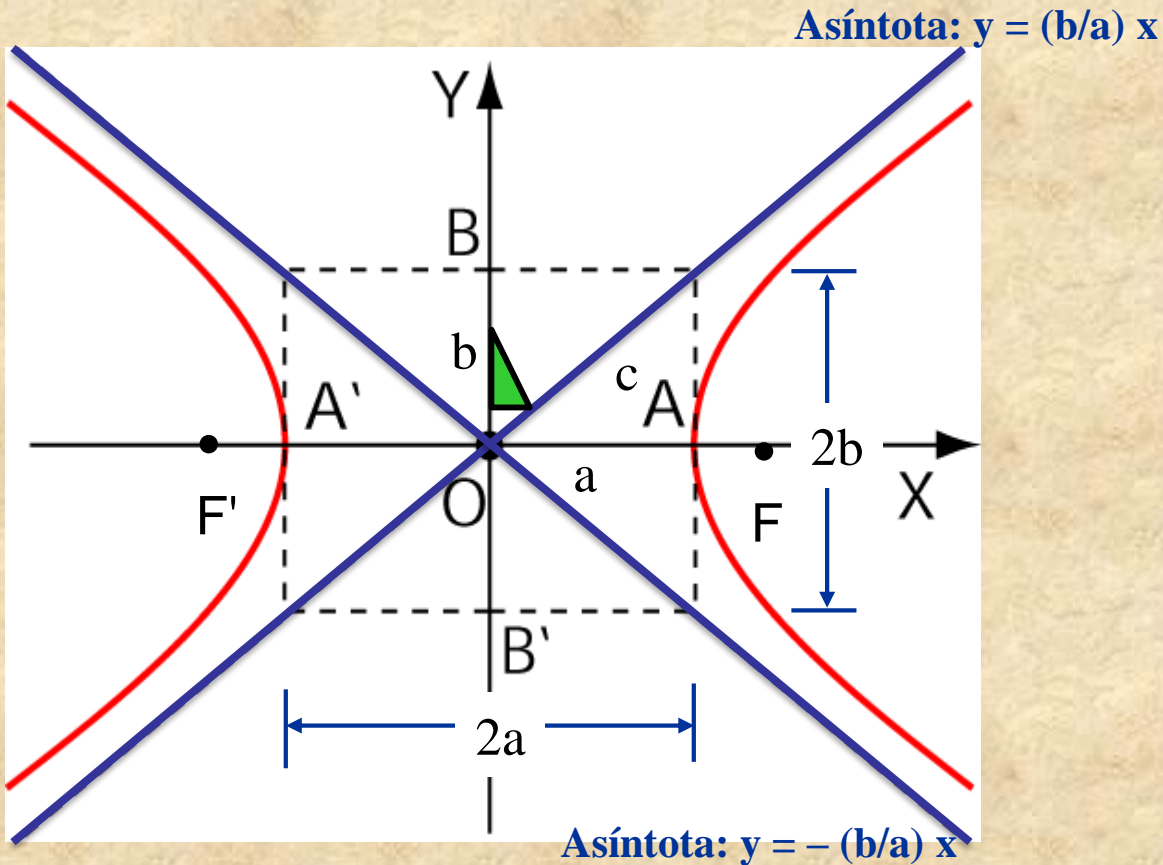
Por tanto: $|\mathbf{PF} - \mathbf{PF'}| = 2a$



SECCIONES CÓNICAS

Asíntotas de la hipérbola. Relación fundamental

- $A'A = AF' - A'F' = AF' - AF = 2a \Rightarrow OA = OA' = a$
- $BB' = 2b \Rightarrow OB = OB' = b$
- $FF' = 2c \Rightarrow OF = OF' = c$

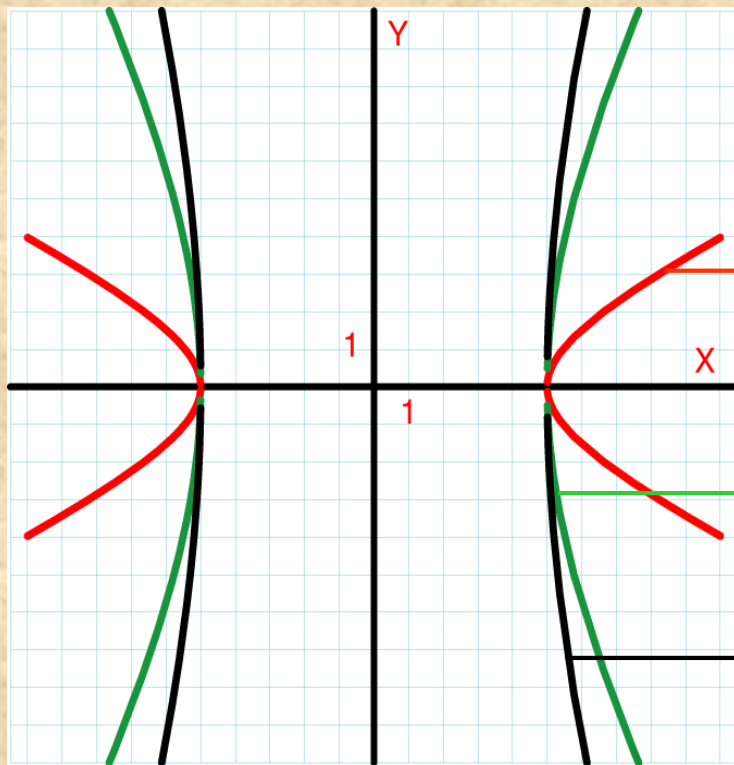


$$c^2 = a^2 + b^2$$

SECCIONES CÓNICAS

Excentricidad de la hipérbola

- $e = c/a$
- $e > 1$ ya que $c > a$
- En la medida en que e se hace muy grande las ramas de la hipérbola se abren cada vez más.
- En la medida en que e se aproxima a 1 las ramas se cierran sobre el eje OX.



Sucesivas hipérbolas en las que $a = 5$.
Los focos, al crecer e , se van alejando del centro.

$e = 1.1$

$e = 2$

$e = 3$

Elementos de la Hipérbola:

Focos: son los puntos fijos F y F'

Eje focal: es la recta que pasa por los focos.

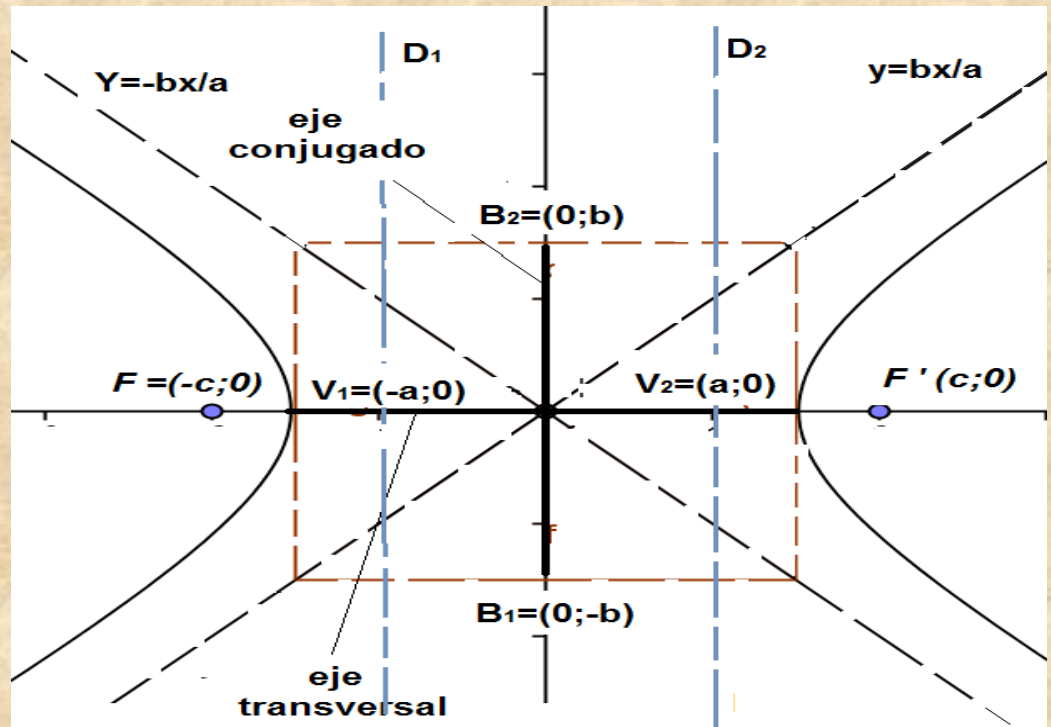
Vértices: son los puntos de intersección entre los ejes y la hipérbola V_1 y V_2

Eje Transverso: es el segmento determinado por los vértices.
 $|V_1 V_2| = 2.a$

Eje Conjugado: segmento determinado por B_1 y B_2 .
 $|B_1 B_2| = 2.b$

Excentricidad: cociente entre la semidistancia focal y su semieje Transverso

$$e = c/a \quad \text{como } c > a \rightarrow e > 1$$



Asíntotas: son rectas cuyas ecuaciones son
 $y = \pm bx/a$

Directrices: son rectas Perpendiculares al eje focal . Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = \pm a / e & \text{con foco en el eje } x \\ y = \pm a / e & \text{con foco en el eje } y \end{cases}$$

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación de la hipérbola

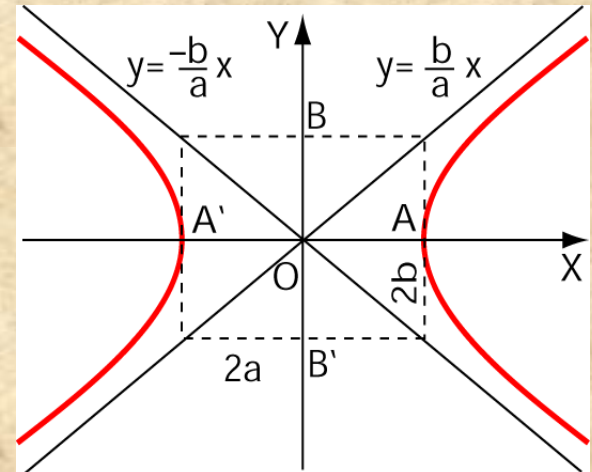
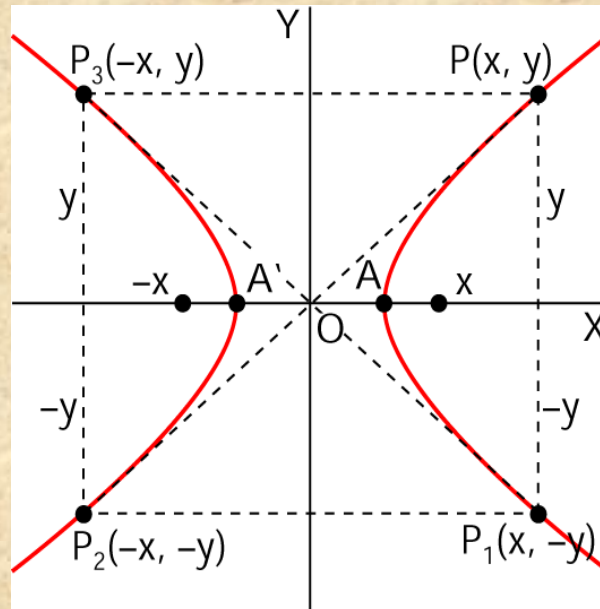
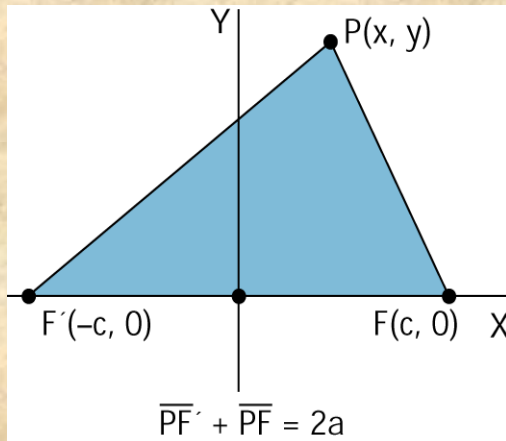
Para obtener una ecuación de la hipérbola se sitúan los focos en el eje de abscisas simétricos respecto al origen de coordenadas, por lo que el centro de la hipérbola quedará en (0,0). Las coordenadas de los focos serán entonces $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

$$P(x, y) \in \text{hipérbola} \Leftrightarrow |PF - PF'| = 2a \Leftrightarrow |\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

• Eliminando radicales: $(c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$.

• Como $a^2 + b^2 = c^2$. Obtenemos: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, y dividiendo por $a^2 b^2$:

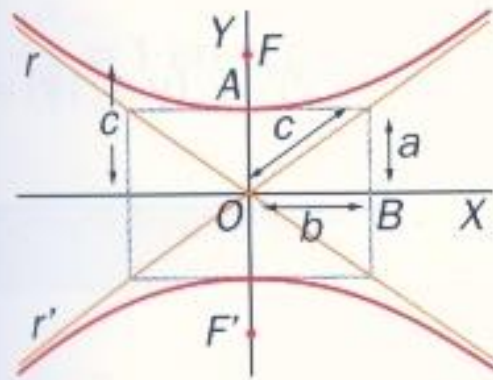
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



SECCIONES CÓNICAS

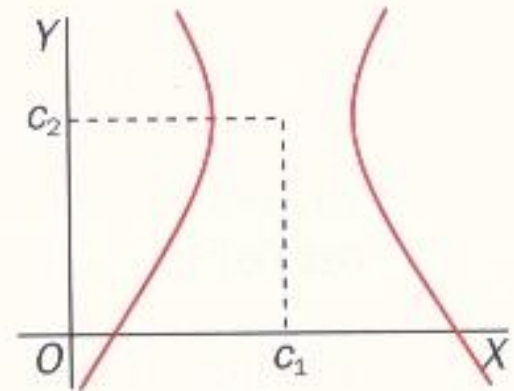
La hipérbola en otros casos:

Ecuación de la hipérbola en otros casos



Hipérbola con los focos en el eje de ordenadas

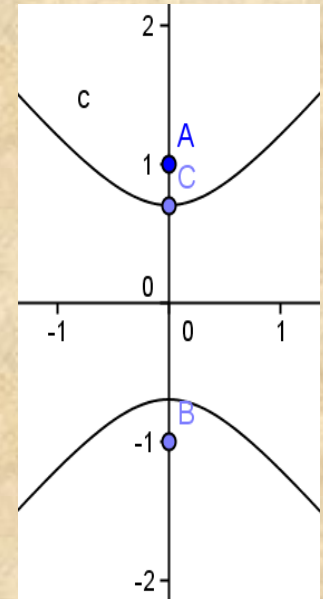
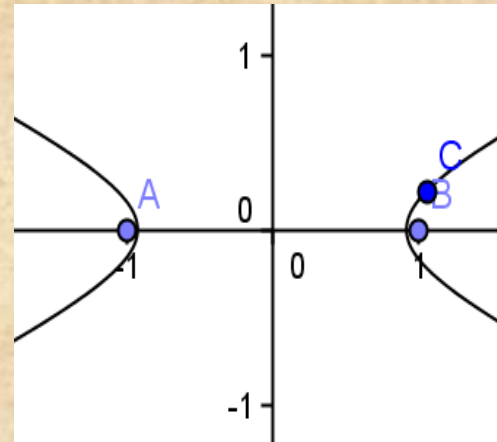
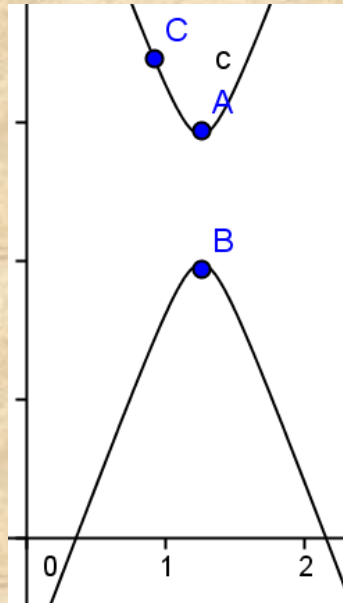
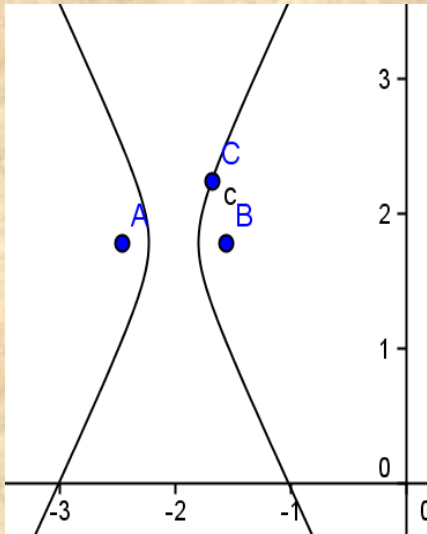
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Hipérbola centrada fuera del origen

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

SECCIONES CÓNICAS



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Focos sobre el
eje transverso
eje x

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

Focos sobre el
eje conjugado
eje y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Focos sobre el
eje transverso
eje x

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Focos sobre el
eje conjugado
el eje y

**Ecuación cartesiana u
ordinaria de la hipérbola**

**Ecuación canónica de la
hipérbola C=(0;0)**

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación General de la hipérbola:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x\alpha + \alpha^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2y\beta + \beta^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2(x^2 - 2x\alpha + \alpha^2) - a^2(y^2 - 2y\beta + \beta^2)}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - 2b^2x\alpha + b^2\alpha^2 - a^2y^2 + 2a^2y\beta - a^2\beta^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + (-a^2)y^2 + (-2b^2\alpha)x + (2a^2\beta)y + (b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = b^2 \\ B = -a^2 \\ D = -2b^2\alpha \\ E = 2a^2\beta \\ F = b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2 \end{array} \right.$$



$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$



Los términos cuadráticos tienen distintos signos

Actividad guiada

Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones representan hipérbolas. En caso afirmativo, obtener la ecuación ordinaria, coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, excentricidad, lado recto y graficar

a) $16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$

b) $16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y - 144 = 0$

c) $4y^2 - 9x^2 + 32y + 36x - 36 = 0$

APLICACIONES

TORRE DE AERPUERTO



***Aeropuerto de
Barcelona.***

CHIMENEAS EN CENTRALES TÉRMICAS



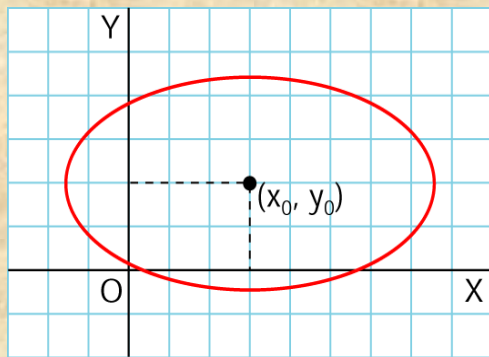
Clasificación de las cónicas

La gráfica de cualquier cónica irreducible de ecuación

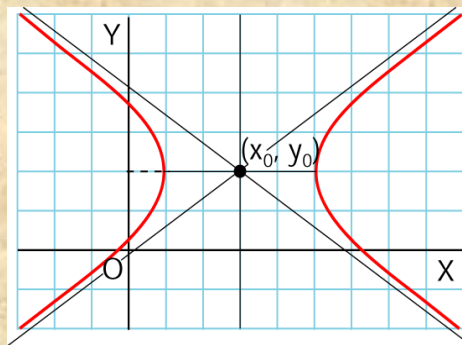
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- es una **elipse** si: $B^2 - 4AC < 0$
- es una **parábola** si: $B^2 - 4AC = 0$
- es una **hipérbola** si: $B^2 - 4AC > 0$

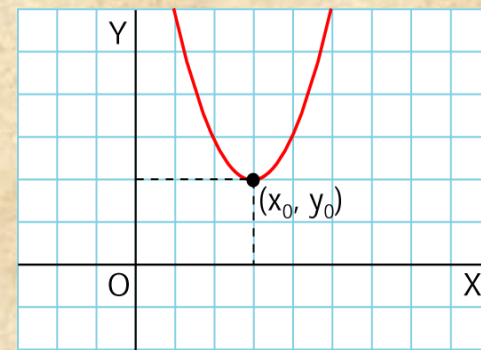
Además si $B = 0$ los ejes de la cónica son paralelos a los ejes coordenados, y si $B \neq 0$ la cónica tiene los ejes girados respecto a los ejes cartesianos.



La ecuación general de esta cónica es
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $B = 0$ y $B^2 - 4AC < 0$



La ecuación general de esta cónica es
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $B \neq 0$ y $B^2 - 4AC > 0$



La ecuación general de esta cónica es
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $B = 0$ y $B^2 - 4AC = 0$

Otra clasificación de las cónicas

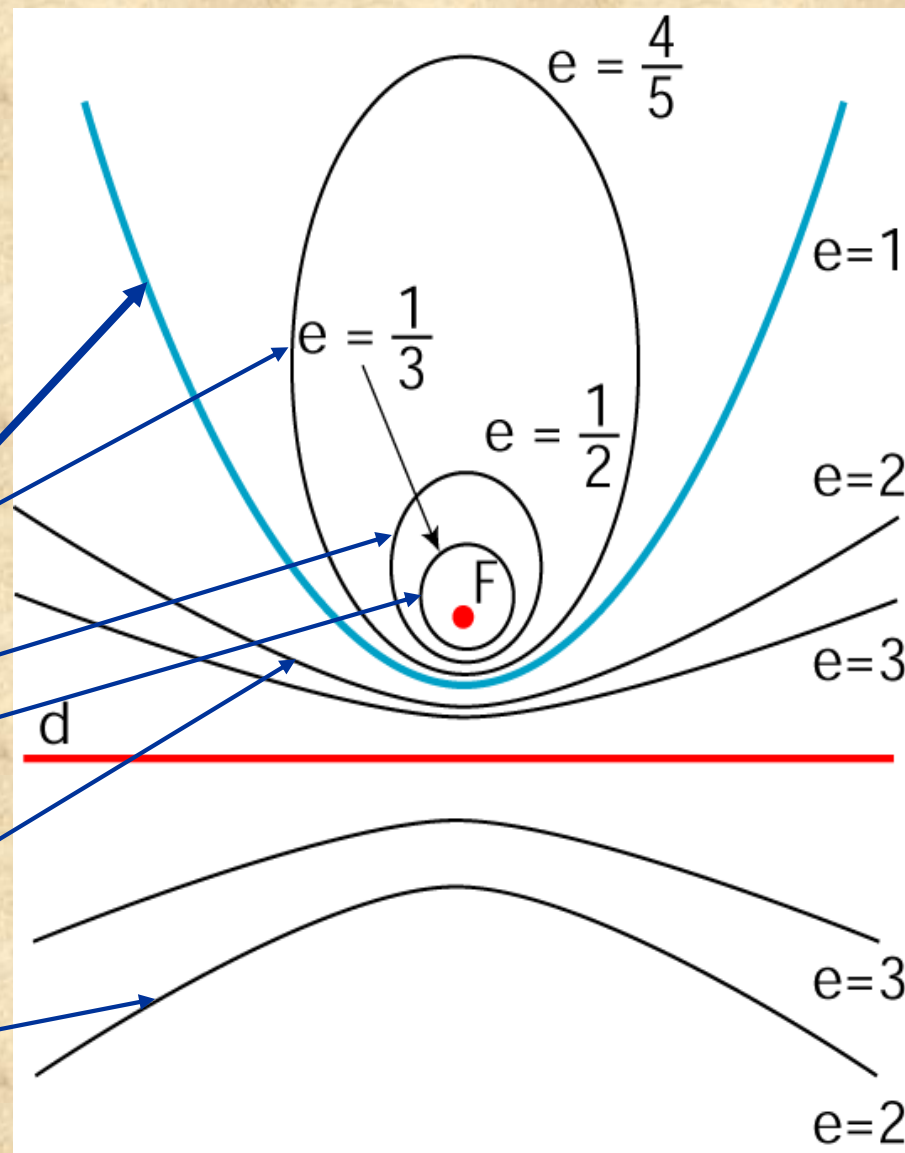
Dado un punto F llamado foco, una recta fija d (que no pase por F) llamada directriz y un número $e > 0$, el conjunto de los puntos P del plano tal que $d(P, F) = e \cdot d(P, d)$ es una cónica de excentricidad e .

- Si $e < 1$ es una elipse
- Si $e = 1$ es una parábola
- Si $e > 1$ es una hipérbola

Elipses

Parábola

Hipérbola



Trabajo práctico



Podemos comenzar con la
primera parte del Trabajo práctico
de Secciones Cónicas