Autovalores y autovectores

Transformaciones Lineales.

Determinar la imagen del cuadrado de vértices:

$$A = (0;0); B = (1;0); C = (1;1); D = (0;1)$$

a través de la transformación representada por la matriz

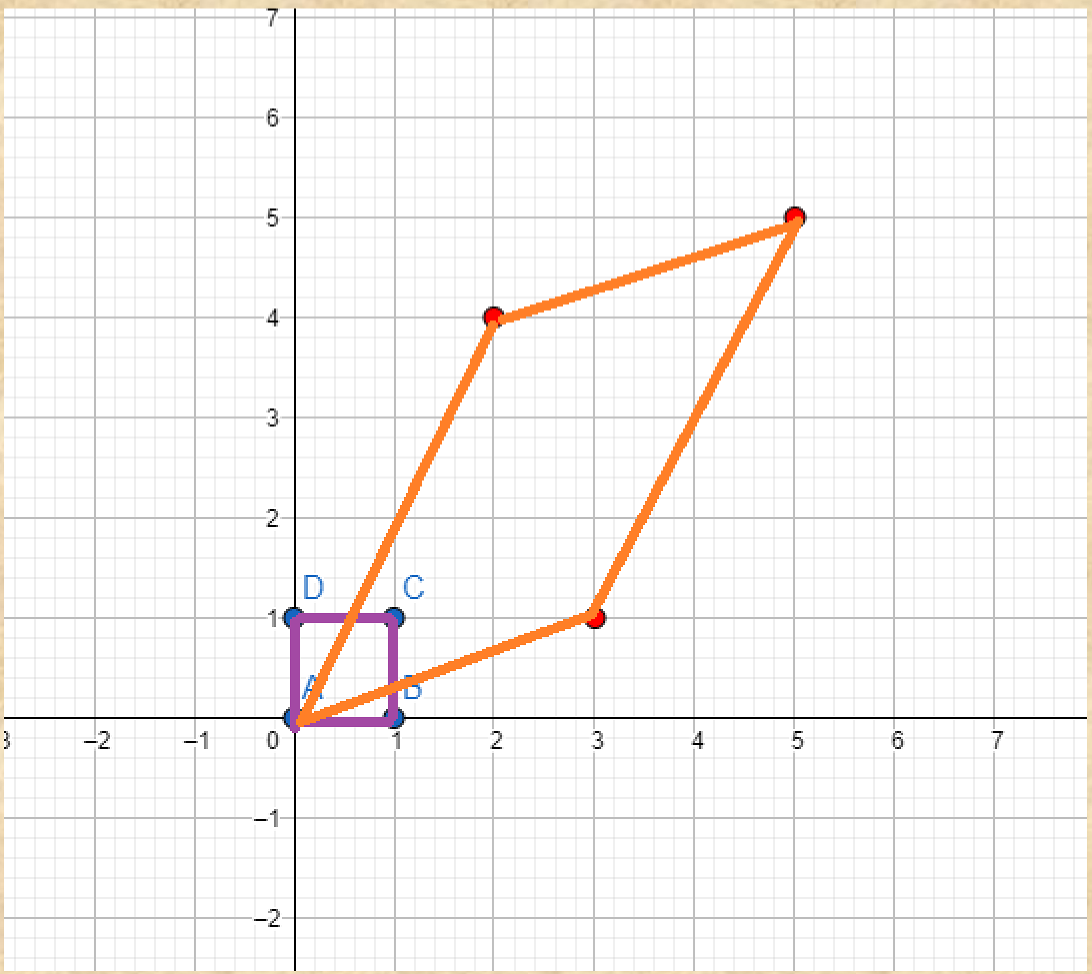
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Buscamos las imágenes de los vectores cuyos extremos son los vértices del cuadrado:

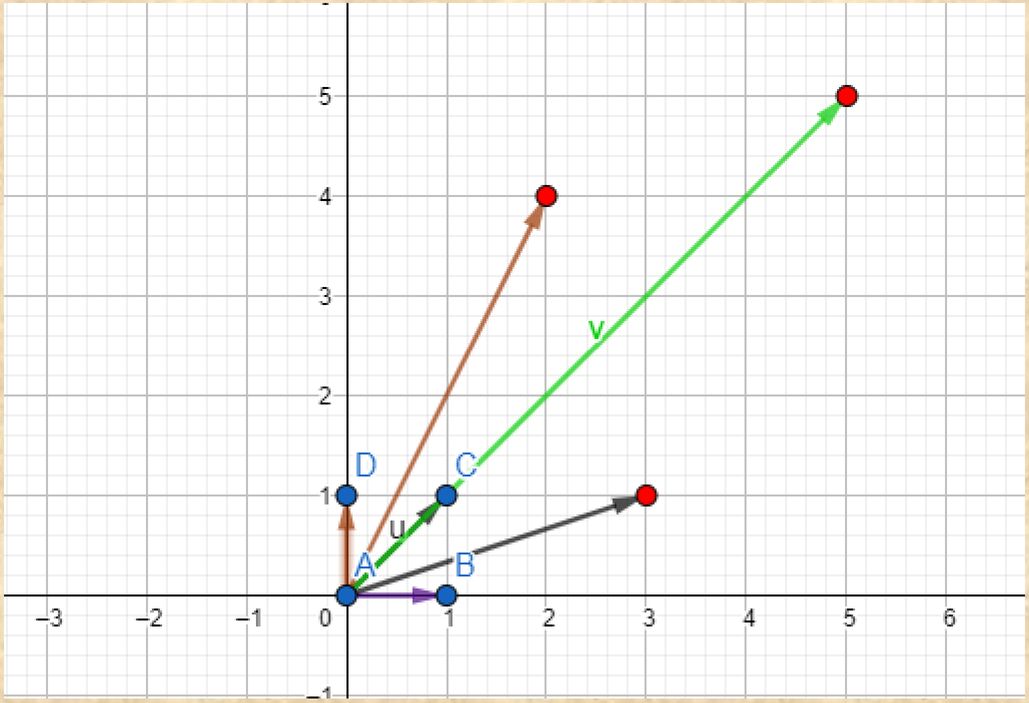
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Lineales.

Aplicando la transformación lineal al cuadrado ABCD, se obtiene el paralelogramo representado en naranja:



Transformaciones Lineales.



Observamos que:

- La imagen del vector nulo es el vector nulo (como corresponde en una transformación lineal)
- La imagen de $(1; 0)$ es $(3; 1)$. Ambos vectores tienen distinta dirección
- La imagen de $(1; 1)$ es $(5; 5)$. Ambos vectores tienen ***la misma dirección***
- La imagen de $(0; 1)$ es $(2; 4)$. Ambos vectores tienen distinta dirección

Autovalor y autovector

Observamos que el transformado de (1,1) es el (5,5). Esto indica que se produjo una dilatación de factor 5, y se conservó la dirección (ambos vectores son “múltiplos”; sus componentes son proporcionales).

El vector que mantuvo su dirección se denomina ***autovector***, y el escalar que indica la dilatación es el ***autovalor*** correspondiente.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{5}_{autovalor} \overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{autovector}$$

Autovalores y autovectores: definición

Sea $T: V \to V; v \in V \,/\, v \parallel T(v)$.

Esto implica que $T(v) = \lambda v$

Si $v \neq 0_v$ y λ satisface la ecuación anterior, entonces se dice que λ es un ***autovalor*** de T y v es un ***autovector*** de T asociado a λ.

Si V tiene dimensión *n*, T se puede representar mediante una matriz; es por ello que se estudian los "Autovalores y Autovectores" de las matrices de *nxn*.

Según la bibliografía que se consulte, los autovalores también se denominan valores propios o eigenvalores, y los autovectores, vectores propios o eigenvectores

Autovalores y autovectores: definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$\lambda \in \mathbb{R}$ es ***autovalor*** de A si y sólo si existe un vector $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ no nulo, tal que:

$$\boxed{A.v = \lambda v \quad \wedge v \neq 0_v}$$

v se llama ***autovector*** asociado a λ.

Autovalores y autovectores: obtención

Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, existe un autovector no nulo, tal que

$$A.v = \lambda v$$

Si premultiplicamos a v por I (matriz identidad de orden n), queda:

$$A.v = \lambda.I\,.v$$

$$A.v - \lambda.I\,.v = 0_v$$

$$\underbrace{(A - \lambda.I)}_{matriz\ de\ orden\ n}\ .v = 0_v$$

Llegamos a la expresión matricial de un sistema homogéneo de *n* ecuaciones con *n* incógnitas.

Autovalores y autovectores: obtención

Recordamos que un sistema homogéneo es siempre compatible.
Si es compatible determinado, la única solución es la trivial y v es el vector nulo.
Pero estamos buscando autovectores, que son vectores no nulos. Por tal motivo, para poder obtenerlos, el sistema debe ser compatible indeterminado.
Siendo

$$\underbrace{(A-\lambda.I)}_{matriz\ de\ orden\ n} .v = 0_v$$

para que el sistema sea compatible indeterminado, es suficiente exigir que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero:

$$\boxed{|A-\lambda I| = 0}$$

que es la ecuación característica de la matriz A

Autovalores y autovectores: obtención

$|A-\lambda I|=0$ es la ***ecuación característica***

Desarrollando el determinante que define a la ecuación característica, obtenemos un polinomio de grado n cuya variable es λ, que se llama ***polinomio característico*** de la matriz A.

Las raíces del polinomio característico son los ***autovalores*** de ***A.***

Para cada uno de los autovalores hallados, resolvemos el sistema

$$(A-\lambda . I).v=0_v$$

y obtenemos los ***autovectores*** correspondientes

Ejemplo:
(actividad guiada)

1) Calcular los valores propios y espacios propios para cada matriz dada:

$$a)A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad e)E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores : propiedad

Los autovectores asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes

Autovalores y autovectores de matrices triangulares

Dada la matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

buscamos sus autovalores::

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(4-\lambda).(6-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = 6$$

Los autovalores obtenidos son los elementos de la diagonal principal

Generalizando lo observado, enunciamos que

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es una matriz triangular (triangular superior, triangular inferior o diagonal), los autovalores de A son los elementos de la diagonal principal

Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

La multiplicidad algebraica de un autovalor λ es la multiplicidad que tiene como raíz del polinomio característico.

La multiplicidad geométrica de un autovalor λ es la dimensión de su autoespacio

Importante:
La multiplicidad geométrica es siempre menor o igual que la multiplicidad algebraica

$$1 \leq dimensión\ autoespacio \leq multiplicidad\ algebraica$$

De aquí se desprende que si λ es un autovalor simple, la dimensión de su autoespacio es 1

Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = -5$$

La multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1, porque

$$-2 \text{ es raíz simple del polinomio característico}$$
$$4 \text{ es raíz simple del polinomio característico}$$
$$-5 \text{ es raíz simple del polinomio característico}$$

Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Para $\lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = 0; z = -y$$

$E_{-2} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}\right\}$; $E_{-2} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} Base\ de\ E_{-2} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$; dim$E_{-2}$ =1

Para $\lambda = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y = 0; z = \mathrm{x}$$

$E_4 = \left\{\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R}\right\}$; $E_4 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} Base\ de\ E_4 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; dim$E_4$ =1

Para $\lambda = -5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = z; y = -3\mathrm{z}$$

$E_{-5} = \left\{\begin{pmatrix} z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R}\right\}$; $E_{-5} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} Base\ de\ E_{-5} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; dim$E_{-5}$ =1

La multiplicidad geométrica de cada autovalor es 1

Ejemplo
(Actividad guiada)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de k $\in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga un autovalor de multiplicidad 2

Matrices semejantes:

Dos matrices A y B de orden n son semejantes si existe una matriz inversible C de igual orden que las dadas, tal que:

$$B = C^{-1}.A.C$$

La función que transforma la matriz A en la matriz B se denomina transformación de semejanza y de puede expresar como

$$T(A) = C^{-1}.A.C = B$$

Definición alternativa de semejanza:

A y B son semejantes si y solo si existe una matriz no singular C tal que

$$C.B = A.C$$

Propiedad:

si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto, los mismos autovalores

Ejemplo:
(Actividad guiada)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Hallar una matriz inversible C para que se verifique: A.C=C.D.

b) Comprobar que A y D son semejantes

c) Sin hacer operaciones, indicar cuáles son los autovalores de A

Matriz diagonalizable:

Una matriz A de orden n es diagonalizable se existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D. (si D es una matriz diagonal entonces los valores propios son los componentes de su diagonal.)

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es diagonalizable si existe $\boldsymbol{P}$ inversible tal que

$P^{-1}.A.P = D$(Des matriz diagonal)

Para armar $\boldsymbol{P}$, necesitamos n autovectores LI (que serán las columnas de P).

Teniendo en cuenta que los *autovectores asociados a autovalores distintos son L.I.,* podemos afirmar que: **Si todos los autovalores son distintos, la matriz es diagonalizable**porque podemos hallar n autovectores LI.

Si hay autovalorescon multiplicidad algebraica mayor que 1, es necesario analizar cada caso por separado para **comparar la multiplicidad algebraica del autovalor con la dimensión del autoespaciocorrespondiente**

Ejemplo:
(Actividad guiada)

(El punto 1 fue realizado en la diapositiva n° 10)

1) Calcular los valores propios y espacios propios para cada matriz dada:

$$a)A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad e)E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) a) A partir del trabajo realizado en el ejercicio anterior, establecer cuáles de las matrices dadas son diagonalizables y cuáles no, explicando por qué en cada caso

b) En caso afirmativo, comprobar que $P^{-1}.A,P = D$

Ejemplo:
Actividad guiada

(El ítem a) fue realizado en la diapositiva n° 16)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de k $\in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga un autovalor de multiplicidad 2

b) ¿A es diagonalizable para los valores de k hallados en el ítem anterior? Justificar

Ejemplo:
Actividad guiada

$$\text{Si}\,\boldsymbol{T}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3/\,(T)=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&5&-6\\3&3&k\end{pmatrix}$$

a) Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que 2 sea un autovalor de M(T)

b) Para el valor de k hallado, ¿es diagonalizableM(T)? Justificar