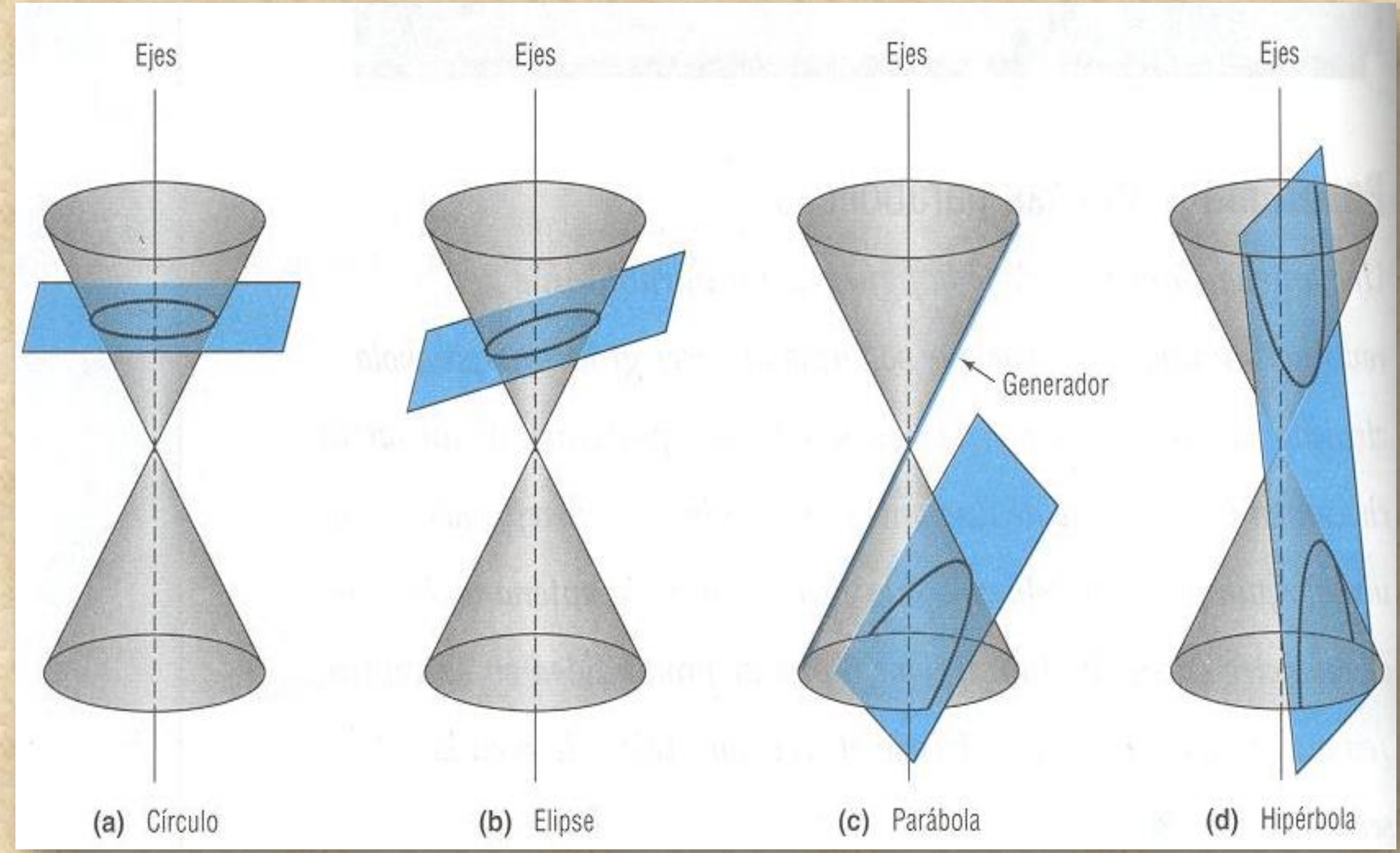
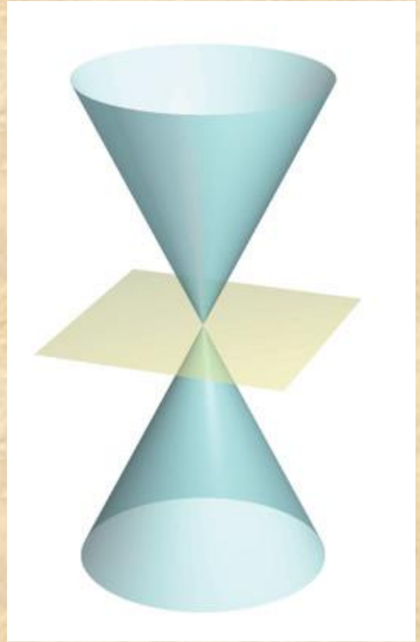
SECCIONES CÓNICAS

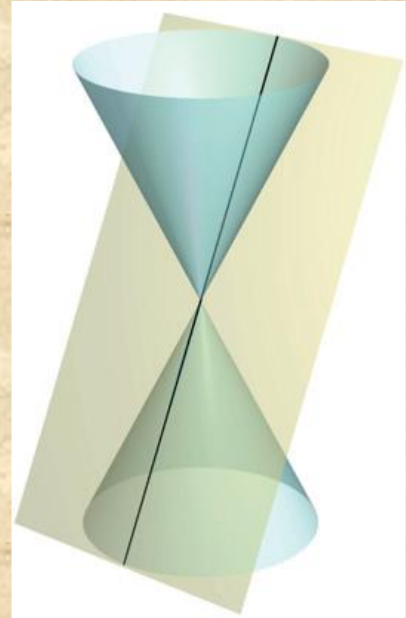


SECCIONES CÓNICAS

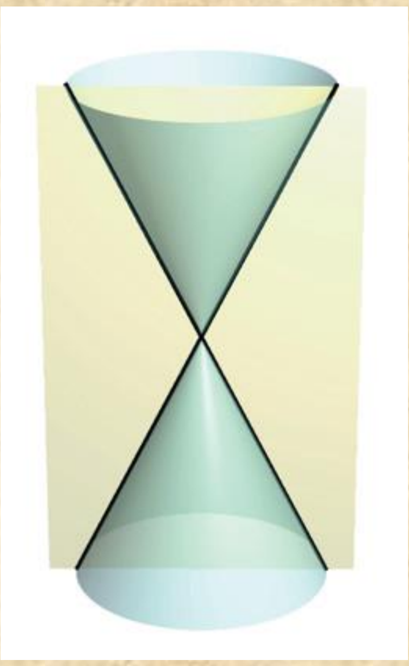
Cónicas Degeneradas



Punto



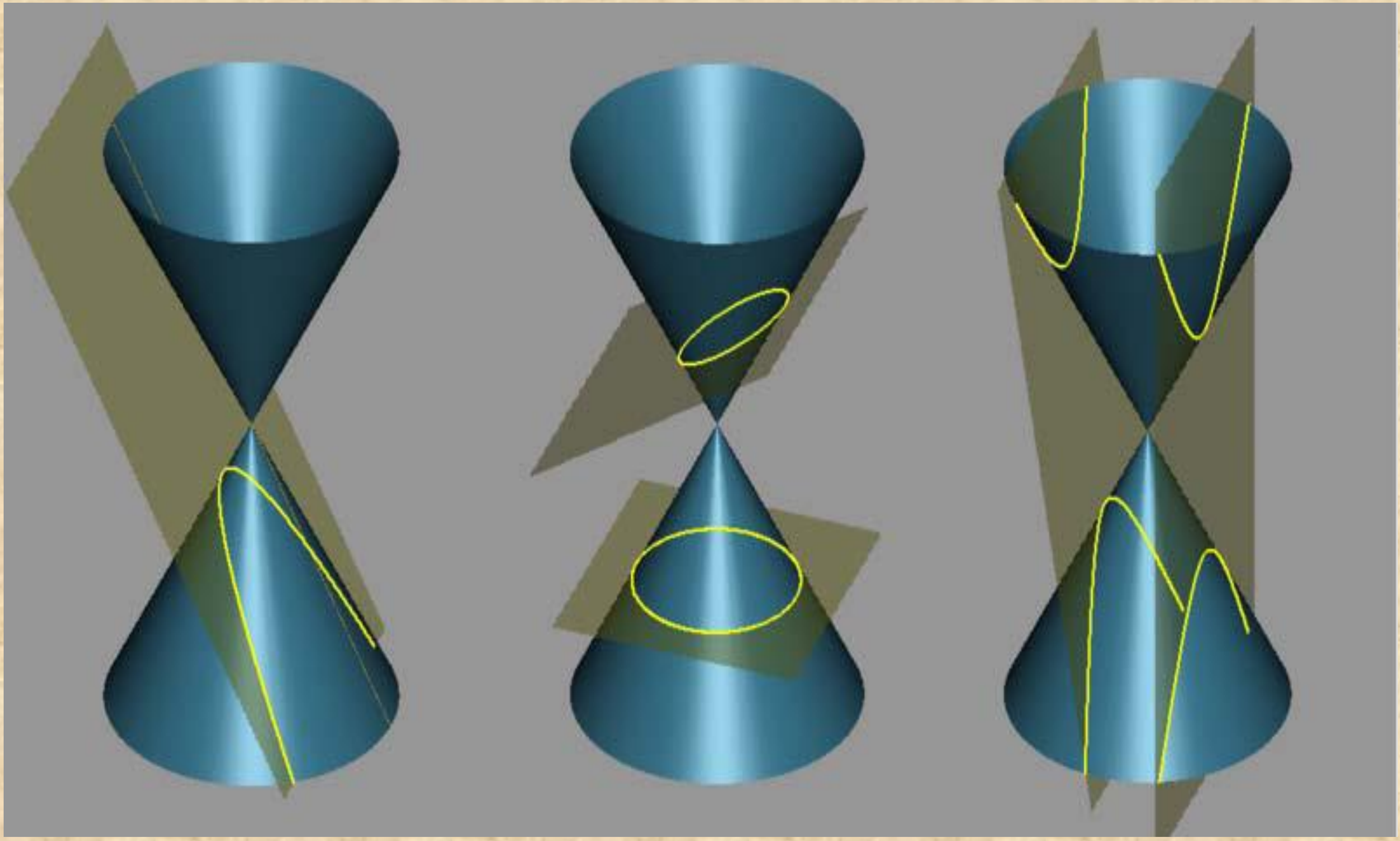
Recta



Dos rectas que secantes

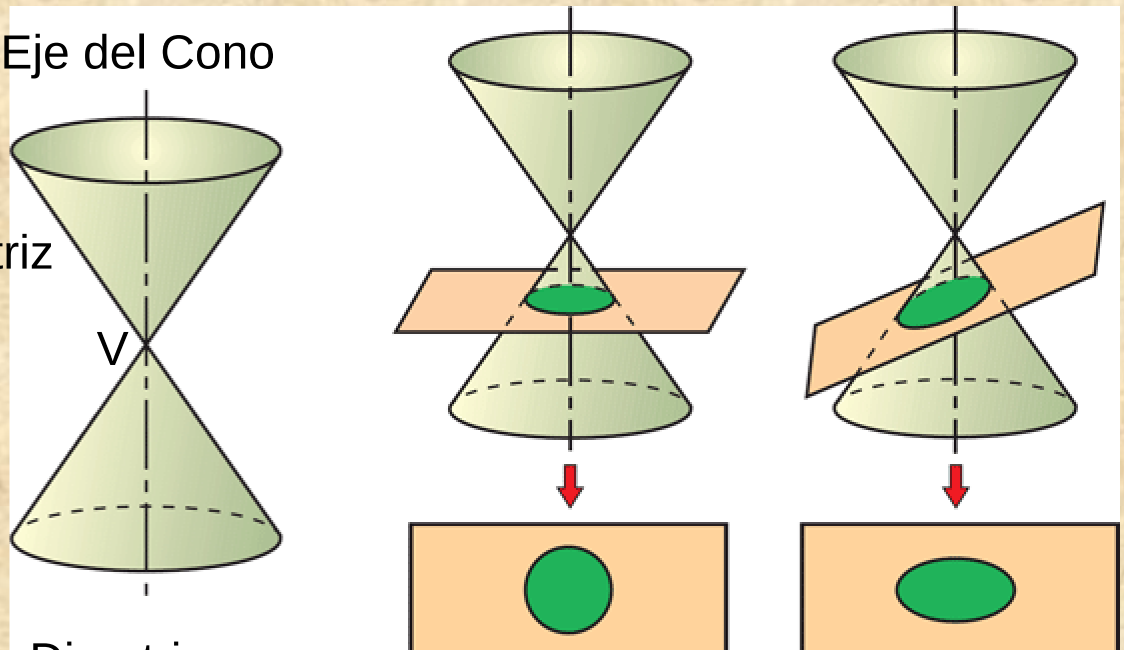
SECCIONES CÓNICAS

Cónicas Irreducibles



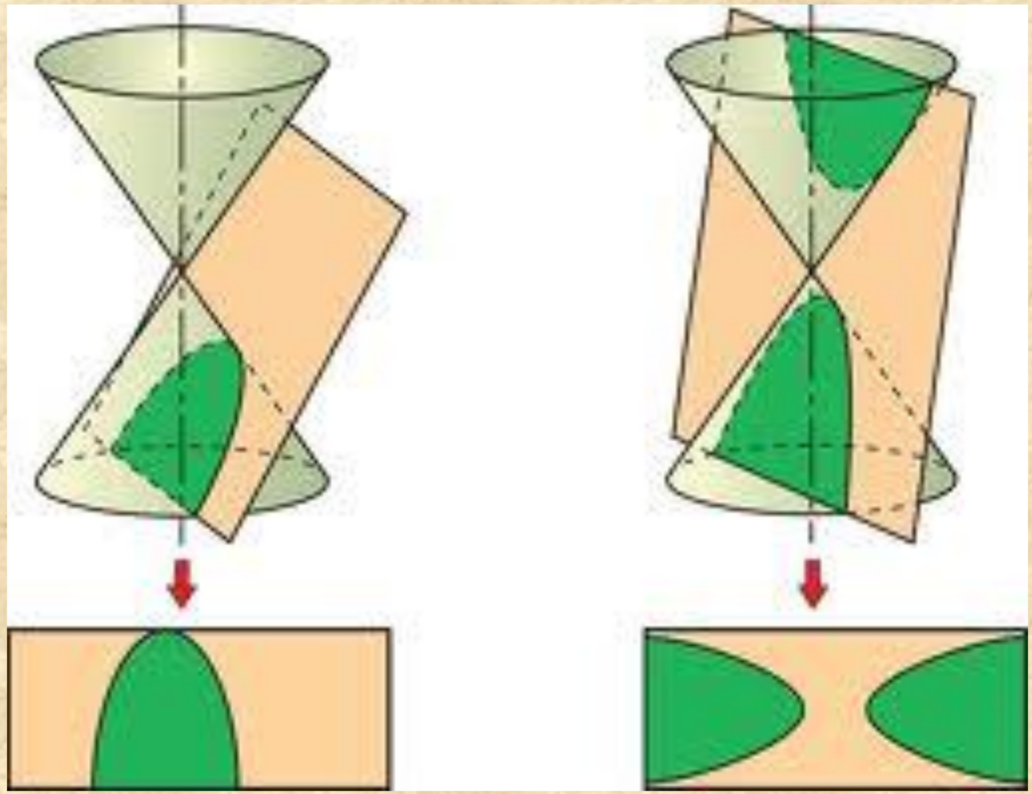
SECCIONES CÓNICAS

Circunferencia - Elipse



SECCIONES CÓNICAS

Parábola - Hipérbola



SECCIONES CÓNICAS

Excentricidad

Grado de **Desviación** de una Sección Cónica con respecto a una Circunferencia. Su grado de **Curvatura.**

Definición General de Cónica:

Cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el cociente entre las distancias a un punto fijo(FOCO) y a una Recta Fija (GENERATRIZ) es un valor constante llamado ***Excentricidad (e)***.

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación General de Segundo Grado

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,xy + Dx + Ey + F = 0$$

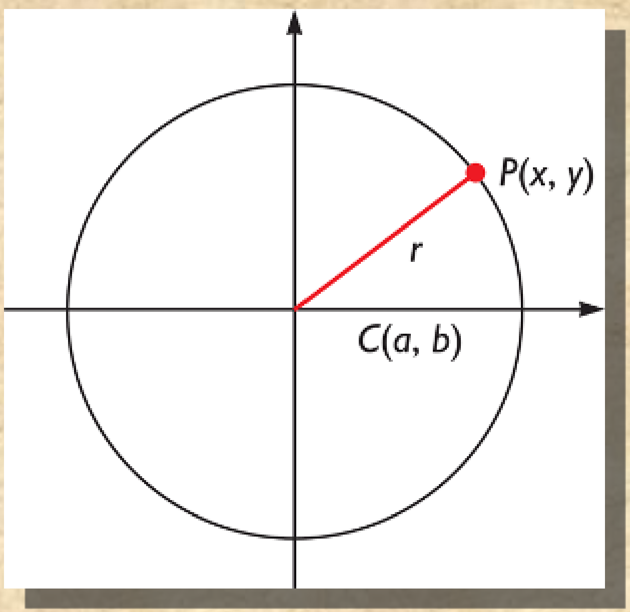
Con A , B y C no simultáneamente Nulos

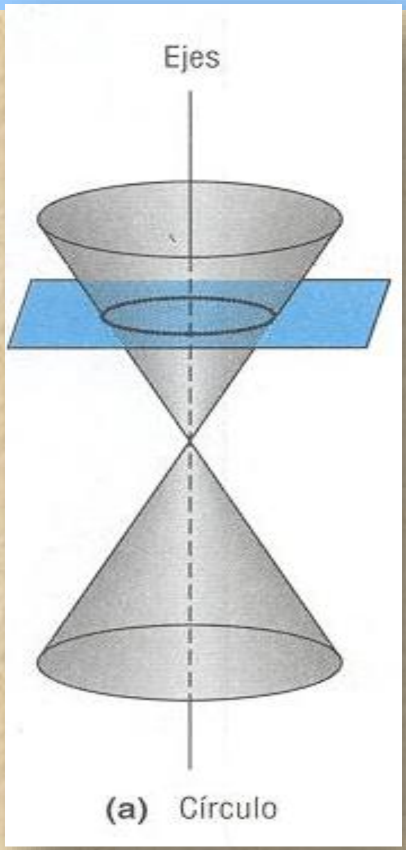
Existen varias formas de estudiar las cónicas:

1) Como lo hicieron los griegos: en términos de intersección de planos con conos.
2) Como casos particulares de la ecuación de segundo grado con dos variables.
3) Como lugares geométricos de puntos que cumplen cierta propiedad geométrica.

SECCIONES CÓNICAS

Circunferencia: Conjunto de Puntos del plano que equidistan de otro punto fijo, llamado **CENTRO** de la Circunferencia.
La distancia de cualquier punto de la Circunferencia al centro de la misma se denomina **RADIO**.

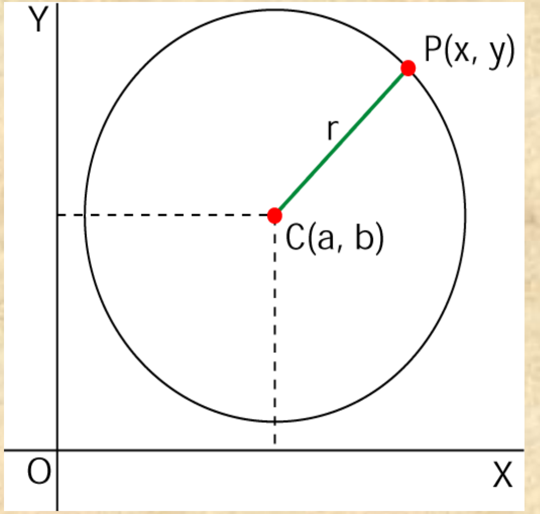




SECCIONES CÓNICAS

ECUACIÓN GENERAL de la Circunferencia

$$P(x, y) \in \text{Circunferencia} \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$



Ecuación analítica de la circunferencia

$(x – a)^2+(y – b)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + D x + E y + F = 0$$

$$\begin{cases} -2a = D \\ -2b = E \\ a^2+b^2-r^2 = F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{D}{2} \\ b = -\dfrac{E}{2} \\ r = \sqrt{a^2+b^2-F} = \dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \end{cases}$$

SECCIONES CÓNICAS

Ecuación reducida.

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

$$Centro=(a,b)=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$$

$$Radio=r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$$

Ecuación desarrollada

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Actividad Guiada

Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones representan circunferencias. En caso afirmativo, obtener coordenadas del centro y radio

a) $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

b) $5x^2 + 5y^2 - 35x - 10y - 24 = 0$

c) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177$

Hallar el área del círculo cuya ecuación es $9x^2 + 9y^2 + 72x - 36y - 144 = 0$ y la longitud de la circunferencia de ecuación $25x^2 + 25y^2 + 50x - 100y - 500 = 0$

APLICACIONES

LA RUEDA:

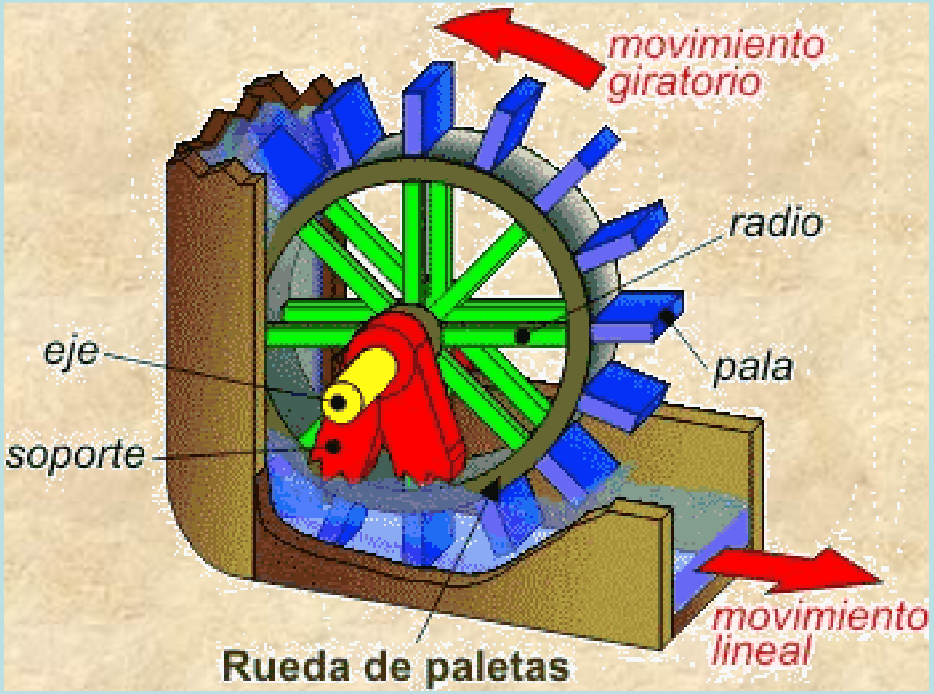
APLICACIONES

EL ANILLO:

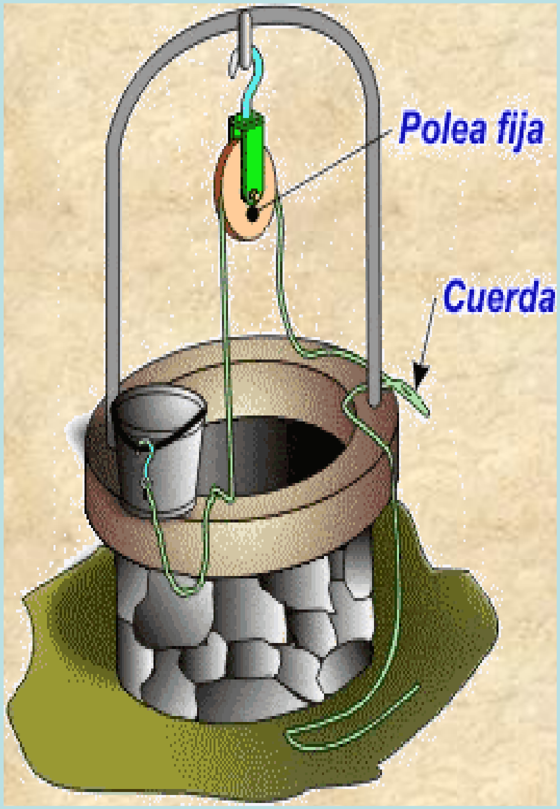
DISCO DURO:

APLICACIONES

RUEDA DE PALETAS:



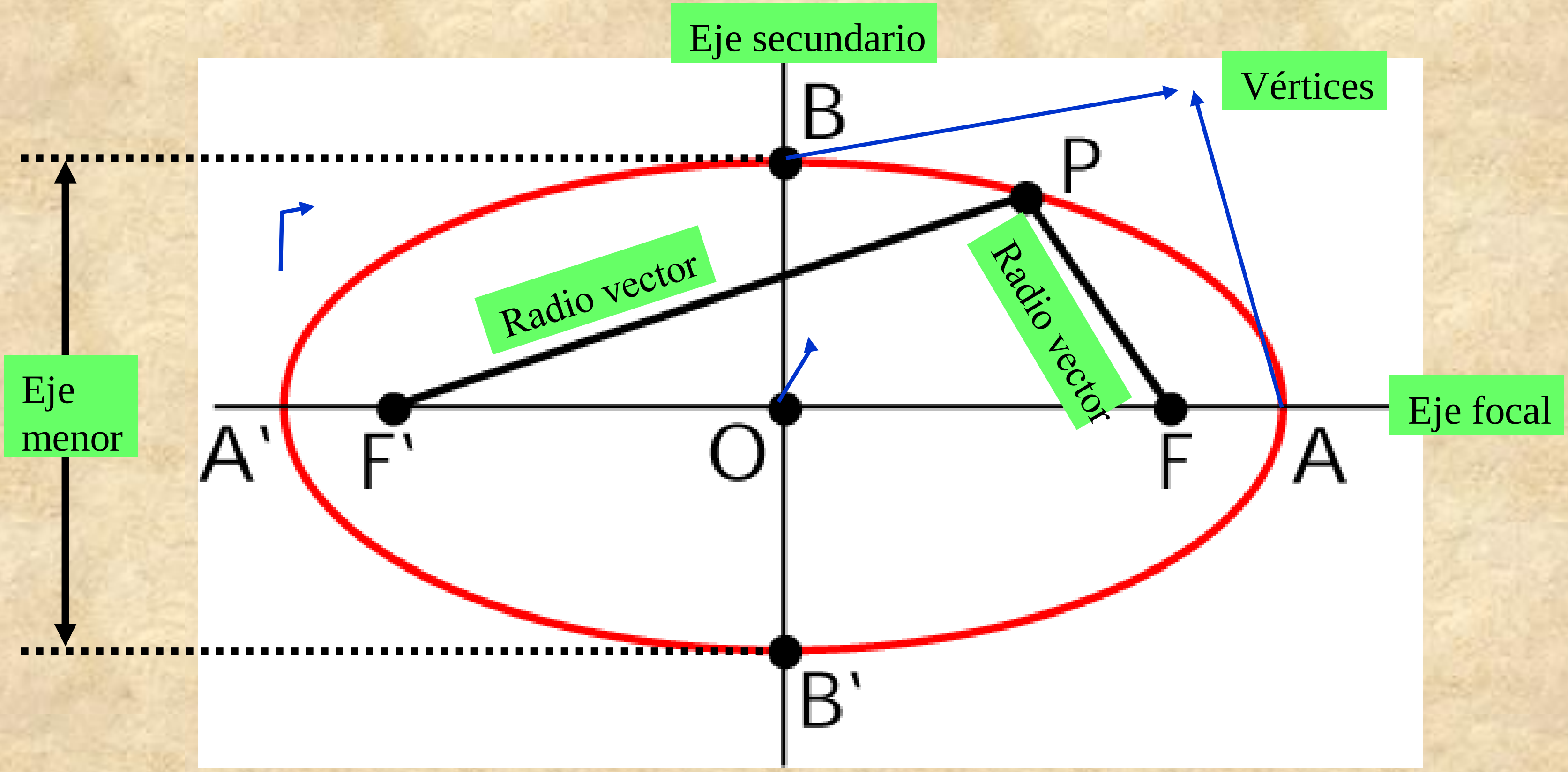
LA POLEA:



SECCIONES CÓNICAS

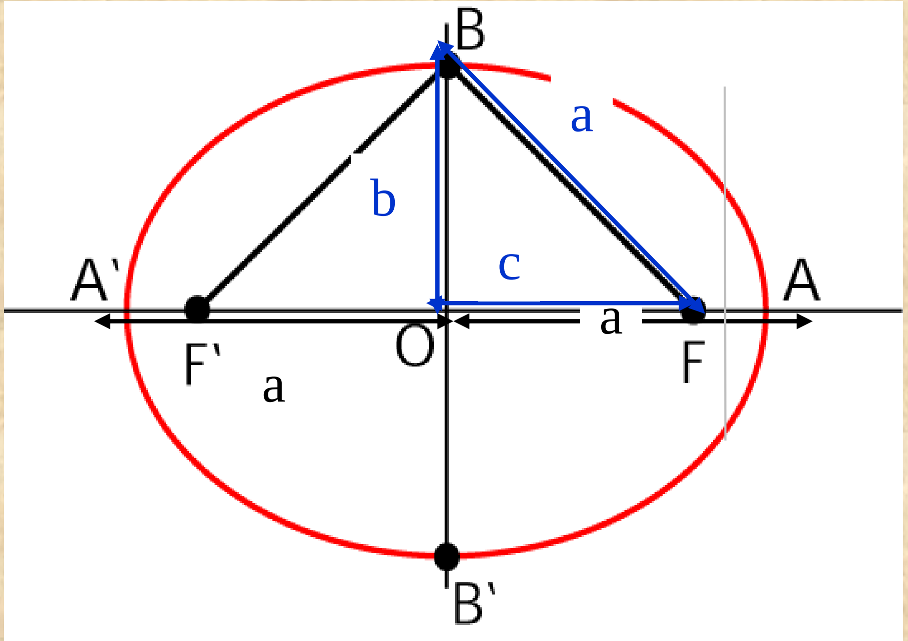
LA ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo, es constante. A esta constante se la simboliza **“2a“** y a los puntos fijos se los denomina **Focos**.



Elementos de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Relación fundamental

- A'A = A'F + FA = A'F + A'F' = 2a $\Rightarrow$ OA = OA' = a (2 a: longitud eje focal)
- BB' = 2b $\Rightarrow$ OB = OB' = b (2 b: longitud eje transverso o secundario)
- FF' = 2c $\Rightarrow$ OF = OF' = c (2 c: distancia interfocal)
- BF + BF' = 2a $\Rightarrow$ (BF = BF') $\Rightarrow$ 2 BF = 2a $\Rightarrow$ BF = a



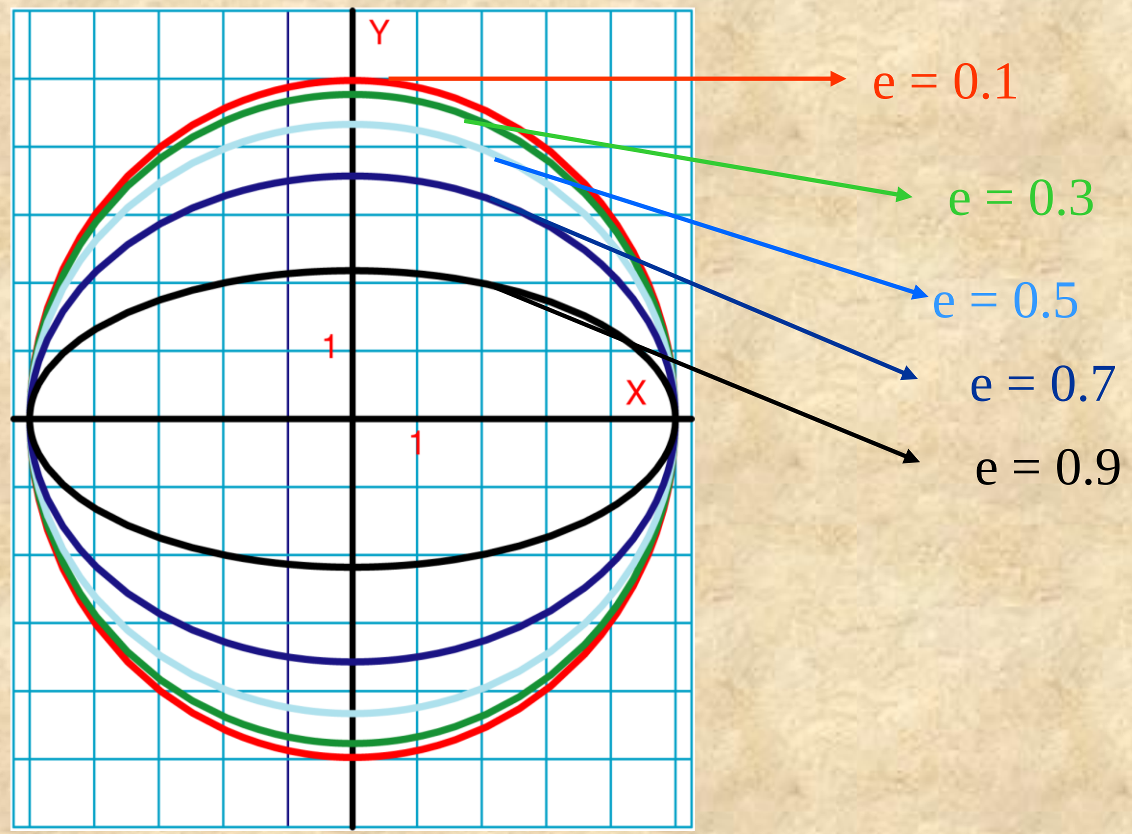
$a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidad de la elipse

- $e = c/a$
- $0 < e < 1$ ya que $0 < c < a$
- En la medida en que e se aproxima a 0 la elipse se parece más a una circunferencia.
- En la medida en que e se aproxima a 1 la elipse se parece más a un segmento.

Sucesivas elipses en las que a = 5.

Los focos, cuando **e** pasa de 1 a 0, van acercándose cada vez más al centro.



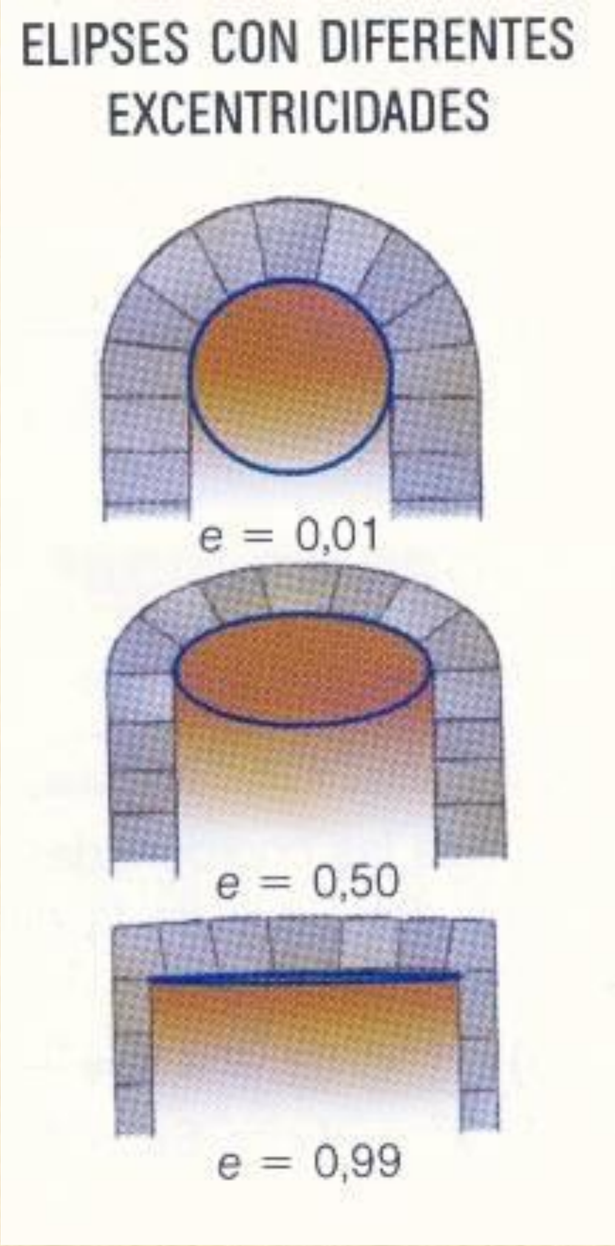
Excentricidad de la elipse

Los focos, cuando **e** pasa de 1 a 0, van acercándose cada vez más al centro.

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Si e=0 es una circunferencia
Si e= 1 es una recta
e SIEMPRE ESTÁ ENTRE 0 Y 1

Excentricidad de la elipse



La excentricidad mide lo "achatada" que está la elipse, cuanto más cerca de uno está su valor, más achatada está.

RESUMIENDO

- **Excentricidad:** es el grado de curvatura de la elipse.

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{como} \quad 0 < c < a \qquad 0 < e < 1$$

- **Directrices:** Son las rectas perpendiculares al Eje Focal, a una distancia **a/e** del centro.

Sus ecuaciones son

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{e}, & \text{si } F \in \text{eje de abscisas} \\ y = \pm \dfrac{a}{e}, & \text{si } F \in \text{eje de ordenadas} \end{cases}$$

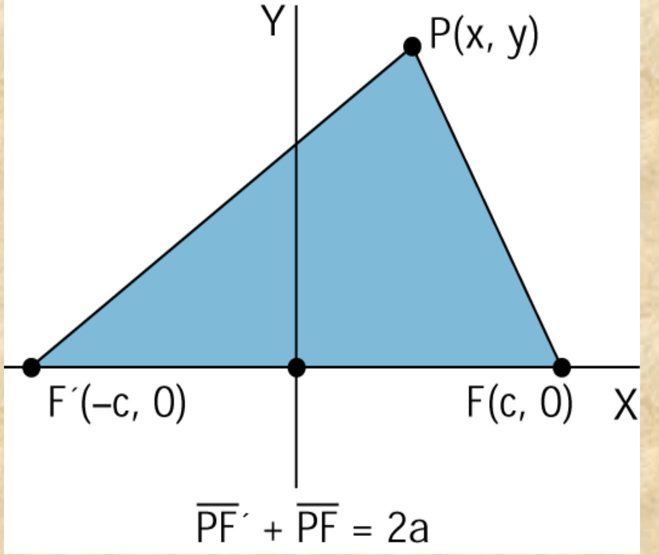
Ecuación cartesiana de la elipse

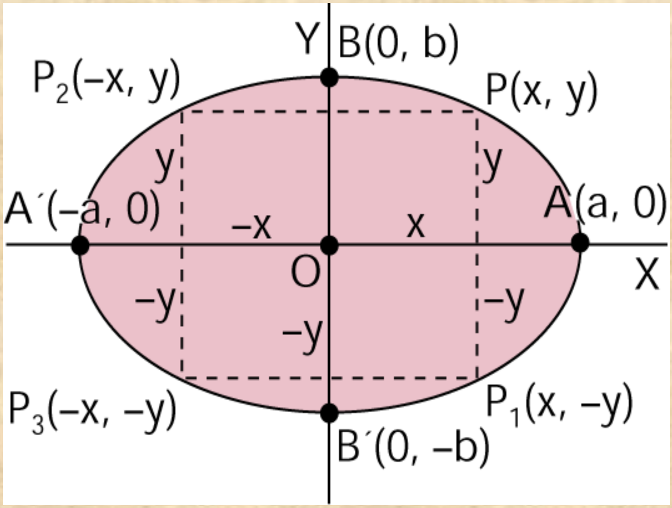
Para obtener una ecuación de la elipse se sitúan los focos en el eje de abscisas simétricos respecto al origen de coordenadas, por lo que el centro de la elipse quedará en (0,0). Las coordenadas de los focos serán entonces F(c, 0) y F'(–c, 0).

$$P(x, y) \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF + PF' = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

- Eliminando radicales: $(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$.
- Como $a^2 - c^2 = b^2$. Obtenemos: $b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2$, y dividiendo por $a^2\, b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





Ecuación General de la Elipse:

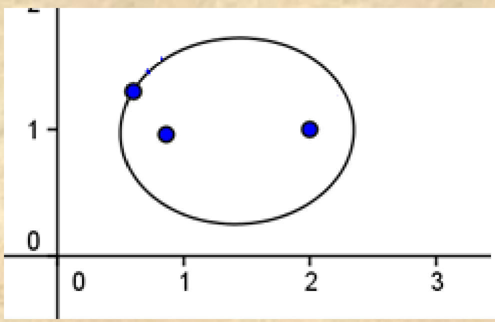
- $A x^2 + B y^2 + Dx + E y + F = 0$

Características:

-El término rectangular se anula (C = 0)

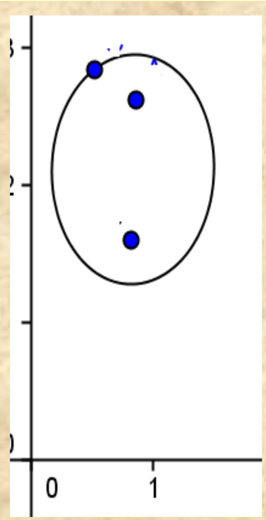
-Los coeficientes de los términos cuadráticos tienen igual signo   signo (A) = signo (B)

Ecuaciones de la elipse:



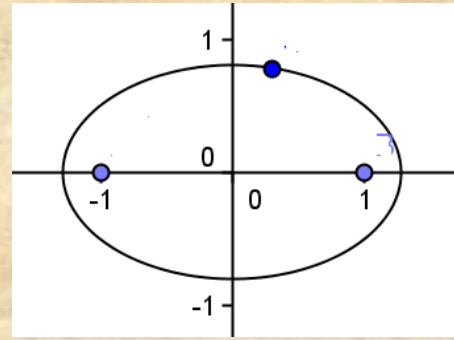
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Diámetro mayor sobre el eje x



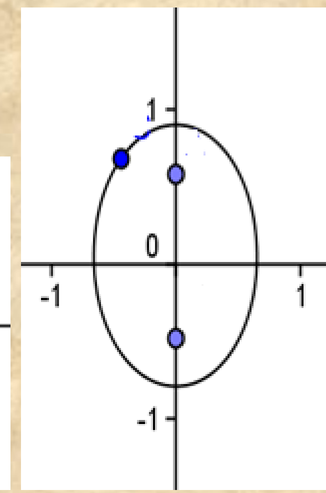
$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

Diámetro mayor sobre el eje y



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Diámetro mayor sobre el eje x



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Diámetro mayor sobre el eje y

Ecuación cartesiana u ordinaria de la elipse

Ecuación canónica de la elipse C=(0;0)

Actividad guiada

Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones representan elipses. En caso afirmativo, obtener la ecuación ordinaria, coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, excentricidad y lado recto y graficar

a) $4x^2 + 16y^2 - 16x + 20y - 227 = 0$

b) $4x^2 + 16y^2 - 16x + 20y + 285 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0$

APLICACIONES

ANFITEATROS:

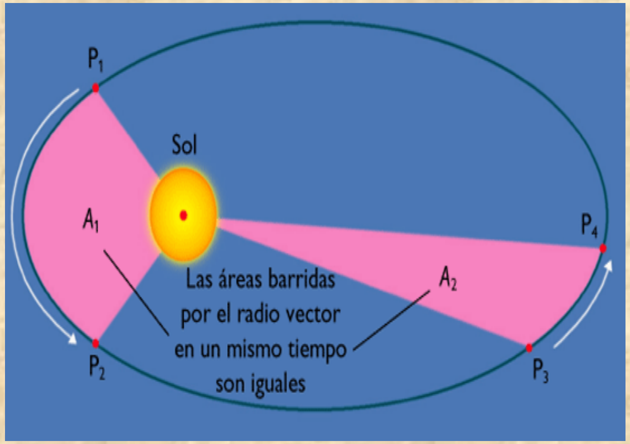
El anfiteatro de Pompeya.

LA CASA BLANCA:

Plaza elíptica.

APLICACIONES

LEY DE KEPLER:



Determina la velocidad de los planetas.

CLOUD GATE ELIPSE

(Chicago)