Derivar la siguiente función y llevar el resultado a su mínima expresión

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

Resolución y video

video

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

$$[F[g(x)]]' = F'[g(x)].g'(x)$$

$$(e^{-x})' = e^{-x}.(-x)' = e^{-x}.(-1) = -e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}} \cdot \frac{(e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}} \cdot \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$e^x.e^x = (e^x)^2 = e^{x.2} = e^{2x}$$

$$e^x.e^x = e^{x+x} = e^{2x}$$

$$e^x.e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$$

$$= \frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}\right)^2} \cdot \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - [e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x}]}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} \cdot \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} \; - \; e^{2x} - 1 - 1 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{-1 - 1 - 1 - 1}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{-4}{e^x - e^{-x}} =$$

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{-2}{(e^x + e^{-x}).(e^x - e^{-x})} = -\frac{2}{(e^x)^2 - (e^{-x})^2} = \boxed{-\frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}}$$