TRABAJO PRÁCTICO Nº5: ESPACIOS VECTORIALES

1) Responder las siguientes preguntas. Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.

A) Números enteros ($\mathbb{Z}$)
a) Si sumamos dos números enteros, ¿es cierto que el resultado es un número entero?
b) Si multiplicamos un número entero por un número real, ¿es cierto que el resultado es un número entero?
c) El 0, ¿es un número entero?
d) Sumar dos enteros, ¿es una operación conmutativa?
e) ¿Es cierto que $(a+b)+c=a+(b+c)\ \forall a,b,c\in\mathbb{Z}?$
f) ¿es cierto que $(\mathbb{Z},+,\mathbb{R}..)$es un espacio vectorial?

B) Números complejos ($\mathbb{C}$)
a) Si sumamos dos números complejos, ¿es cierto que el resultado es un número complejo?
b) Si multiplicamos un número complejo por un número real, ¿es cierto que el resultado es un número complejo?
c) El 0, ¿es un número complejo?
d) Sumar dos complejos, ¿es una operación conmutativa?
e) ¿Es cierto que $(a+b)+c=a+(b+c)\ \forall a,b,c\in\mathbb{C}$?
f) ¿es cierto que $(\mathbb{C},+,\mathbb{R}..)$es un espacio vectorial?

C) Matrices de orden mxn
a) Si sumamos dos matrices, ¿es cierto que el resultado es una matriz?
b) Si multiplicamos un número real por una matriz, ¿es cierto que el resultado es una matriz?
c) ¿Existe elemento neutro para la suma de matrices?
d) Sumar dos matrices, ¿es una operación conmutativa?
e) ¿Es cierto que $(A+B)+C=A+(B+C)\ \forall A,B,C\in\mathbb{R}^{mxn}?$
f) ¿es cierto que $(\mathbb{R}^{mxn},+,\mathbb{R}..)$es un espacio vectorial?

D) Polinomios con coeficientes reales de grado 2 (A)
a) Si sumamos dos polinomios de grado 2, ¿es cierto que el resultado es un polinomio de grado 2?
b) Si multiplicamos un número real por un polinomio de grado 2, ¿es cierto que el resultado es un polinomio de grado 2?
c) ¿Existe elemento neutro para la suma de polinomios de grado 2?
d) Sumar dos polinomios de grado 2, ¿es una operación conmutativa?
e) ¿Es cierto que $(P+Q)+R=P+(Q+R)\ \forall P,Q,R\in A$?
f) ¿es cierto que $(A,+,\mathbb{R}..)$es un espacio vectorial?

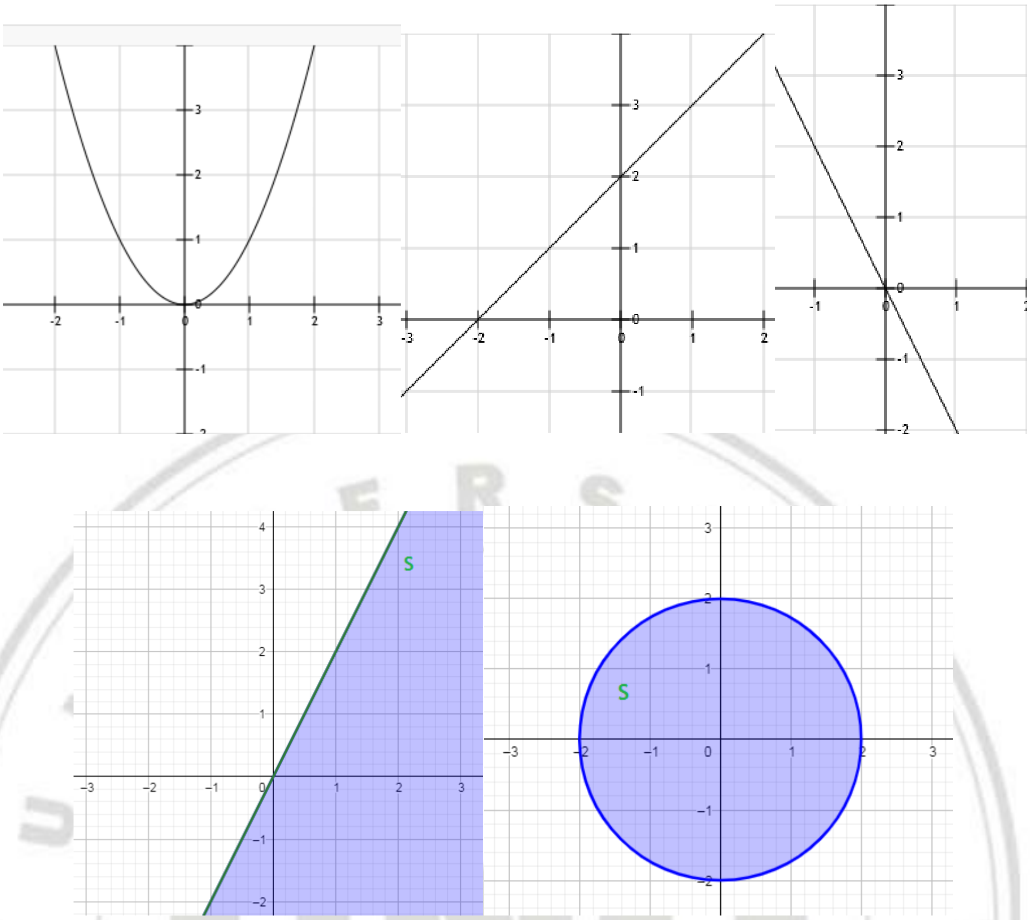
2) El conjunto de puntos en R^2 que se encuentra sobre una recta que no pasa por el origen ¿constituye un espacio vectorial? Justificar la respuesta.

3) Sea A el conjunto de colores primarios y la operación "combinación de colores", definida en él, que consiste en mezclar los colores de a dos, analizar si es una ley interna en A.

4) Decidir en cada caso si W es subespacio de$\mathbb{R}^n$:

a) n = 2; W = {(x;y) ε$\mathbb{R}^2$/x = 0}
b) n = 2; W = {(x;y) ε$\mathbb{R}^2$/x+2y=0}
c) n = 3; W = {(x; y; z) ε$\mathbb{R}^3$/3x-y+4z-8=0}
d) n = 2; W = {(x;y) ε$\mathbb{R}^2$/ x.y=1}
e) n = 3; W = {(x; y; z))εIR^3/x+y+z<0}
f) n = 2x2; $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in R^{2x2}\ /\ a=b; c+d=0\right\}$
g) n = 2x2; $W=\left\{A\in R^{2x2}\ /\ |A|=0\right\}$
h) n = 2; W = {(x;y) ε$\mathbb{R}^2$/$x^2+y^2\leq 1$}
i) n = 2; W = {(x;y) ε $\mathbb{R}^2$/$x^2+y^2=1$}

5) Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Justificar



6) a) Determinar si $\vec{v}$(1; 2; 3) es combinación lineal de $\vec{u}$(1; 5;6) y $\vec{w}$ (7;8; 4)

b) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que

$\vec{v}$ = (1;2;3) sea combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}$=(2;1; -1);$\overrightarrow{v_2}$= (2; 1+k; k) y $\overrightarrow{v_3}$= (2;2; 1)

$\vec{v}$ = (k; k^2)) sea combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}$= (1;-1) y $\overrightarrow{v_2}$= (1;1)

7) Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al subespacio generado por

a) (1, 2, 1) y (2, 3, 4)

I) $(2; 9; 4)$ II) $(4; 7; -2)$ III) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ IV) $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ V) (1; 1; 1)

b) (0; 0; 0; 1); (0; 1: 1; 0) y (4; 4; 4; 4)

I) (0; 1; 1; 1) II) (1; -1; -1; 1) III) (1; 2; 3; 4)

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ II) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8) Demostrar que los conjuntos de vectores V y W generan el mismo subespacio, siendo $V = \{(3; 0; 1);\ (1;\ -1; 2)\}$ y $W = \{(3; 3; -4);\ (-1;\ -2; 3)\}$. Indicar cuál es dicho subespacio e interpretarlo geométricamente.

9) Obtener en cada caso el conjunto solución del sistema dado, y determinar si constituye un subespacio

de $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y b) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x-z=4 \end{cases}$

10) En las siguientes situaciones, decidir si los vectores V_i, son combinación lineal de V. En caso de serlo, estudiar la unicidad de los coeficientes:

a) $\vec{v}$ = (1;-3) $\vec{v_1}$= (1; 1) $\vec{v_2}$ = (1; 2)

b) $\vec{v}$ = (1; -3) $\vec{v_1}$ = (1; 0) $\vec{v_2}$ = (-1; 0)
c) $\vec{v}$ = (1; 2; 3) $\vec{v_1}$= (1; 5; 6) $\vec{v_2}$ = (7; 8; 4)
d) $\vec{v}$ = (1; 2; 2; 1) $\vec{v_1}$ = (2; 1; 1; 2) $\vec{v_2}$= (1; 2;3; 0)
e) $V=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $V_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $V_2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $V_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

11) Determinar el espacio generado por cada uno de los conjuntos de vectores. En el plano y en el espacio, interpretar geométricamente

En $\mathbb{R}^2$ a) $\{(-2;1);\ (0;0)\}$ b) $\left\{(-4;3);\ \left(2;\ -\frac{3}{2}\right)\right\}$ c) $\{(-1;0);\ (2;2);\ (0;\ -1)\}$

En $\mathbb{R}^3$ a) {(0; 0; 0) ;(-1; 1;3); (3;0;1) }
b) {(1; 2; 0); (3; 6; 0) ; (0;0;1); (1; 2; 1)}
c) {(2; 2; 2) ;(4; 4; 4); (-1;-1;-1)}

En $\mathbb{R}^{2x2}$ a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

12) Determinar los valores reales de k, para los cuales los siguientes vectores son linealmente independientes:

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -k & 1 \end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^{2x2}$
b) {(1+k; 1+k); (1; 1)} en IR^2
c) {(1; 2; k) ; (1;1;1); (0;1;k-1) } en IR^3

13) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes. Si fueran linealmente dependientes, expresar a uno de ellos como combinación lineal de los restantes

En $\mathbb{R}^2$ a) $\{(-2;1);\ (1;0)\}$ b) $\{(-2;1);\ (1;3)(1;1)\}$ c) $\{(-2;1);\ (4;-2)\}$
En $\mathbb{R}^3$ a) {(1; -2; 0) ;(0; 1;1) ; (3;0;1) } b) {(0; 2; -1) ; (0;$\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$) ; (0;$\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$) }

14) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto {(1; 1; k) ;(k; 0; 0); (0; k; 4) }. Determinar para qué valores reales de k el conjunto resulta linealmente independiente y para qué valores linealmente dependiente. Interpretar geométricamente cada situación

15) Por observación directa, establecer si el conjunto de vectores es o no base del espacio vectorial indicado. En caso afirmativo, escribir SI en la columna correspondiente; en caso negativo, escribir NO, explicando por qué

Conjunto de vectores	Espacio vectorial	Es /no es base del espacio vectorial considerado
$\{(-2;4);\ (1;0);\ (3;1)\}$	$\mathbb{R}^2$	
{(1; 0; 0) ; (0; -1; 0) }	$\mathbb{R}^3$	
$\{(0;2;\ 0)\ ;\ (0;\ 0;7)\ ;\ (0;\ 0;0)\ \}$	$\mathbb{R}^3$	
$\{(2;2);\ (1;1))\}$	$\mathbb{R}^2$	
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	$\mathbb{R}^{2x2}$	

16) a) Expresar al vector $\vec{v}$= (-4;-7) como combinación lineal de los vectores de la base canónica. Representar en el plano coordenado

b) En el mismo sistema de ejes, representar $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base B= $\{(-2;1);\ (1;2)\}$. Obtener analíticamente las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B

17) Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + 2z = 0\}$

c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0; x - y = 0\}$

18) determinar la dimensión del subespacio generado por los vectores:
a) (2: 1; -1): (3; 2: 1); (1; 0; -3)
b) (1: -1; 2); (0; 2; 1); (-1; 0; 1)
c) (-1; 1; 6; -2); (2; 0; 4; -2); (1; 1; 10; -4)

19) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar
a) Para k = 6, el vector (1; -2; k) es combinación lineal de (3; 0; 2) y (2; -1; -5)
b) El conjunto A=$\{(0;0;0)\}$es linealmente independiente
c) Todos los conjuntos que generan $\mathbb{R}^3$ tienen la misma cantidad de elementos
d) El conjunto A= $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ genera el espacio vectorial V. Entonces, el conjunto B= $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ no genera a V
e) Cualquier base de $\mathbb{R}^3$ contiene la misma cantidad de vectores

20) Hallar una base y la dimensión del espacio solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$a)\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + 4z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$$