Espacios vectoriales

Un ***espacio vectorial*** es un conjunto no vacío V, cuyos elementos se llaman ***vectores***, en el que se definen dos operaciones: la suma y el producto por un escalar. Dichas operaciones deben cumplir con los diez axiomas que se enuncian a continuación.

Pese a que genéricamente los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores, esto no es obstáculo para que en algunos casos particulares (polinomios, matrices, funciones,...) se utilice la notación propia en cada caso.

Los axiomas deben ser válidos para **todos** los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en V y **todos** los escalares α y β reales.

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es la suma de vectores en V.

- $\alpha\, \boldsymbol{v}$ es el producto de un número real α por un vector $\boldsymbol{v}$ que pertenece a V

Axiomas de Espacios vectoriales

1. La suma es ley de composición interna en V: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$

2. La suma es asociativa en V: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

3. La suma es conmutativa en V : $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

4. Existe un neutro para la suma en V: $\mathbf{0}_{v} \in V \,/ \boldsymbol{v}+\mathbf{0}_{v} = \boldsymbol{v}$

5. Todo elemento $\boldsymbol{v}$ de V, admite inverso aditivo u opuesto en V: $(-\boldsymbol{v}) \in V \; t/ \; \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{v}$

6. El producto de un escalar por un vector, es un vector: $\alpha \, \boldsymbol{v} \in V$

7. El producto es distributivo respecto de la suma de vectores: $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$

8. El producto es distributivo respecto de la suma en $\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} =\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$

9. El producto satisface la asociatividad mixta: $\alpha(\beta\boldsymbol{v})=(\alpha\beta)\boldsymbol{v}$

10. La unidad de $\mathbb{R}$ es neutro para el producto: $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

Axiomas de Espacios vectoriales

- Los axiomas 1 a 5 caracterizan a $(V, +)$ como grupo conmutativo o abeliano

- Los axiomas 6 a 10 son relativos al producto de un escalar por un vector

- Los elementos de V se llaman vectores. En particular, el elemento neutro para la suma recibe el nombre de vector nulo

- $(V;\ +;\ \mathbb{R};.)$ es un espacio vectorial, si se cumplen los 10 axiomas anteriormente enunciados

- Como los escalares que utilizamos para multiplicar un número por un vector son números reales, decimos que V es un espacio vectorial real

Espacios vectoriales: ejemplos

Cuando trabajamos con operaciones con vectores geométricos (clase 5), enunciamos las propiedades de la adición de vectores geométricos y las propiedades del producto de un escalar (número) por un vector geométrico. Dichas propiedades son:
Sean $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ tres vectores geométricos $\in \mathbb{R}^3$

1. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
2. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \exists \vec{0} \in \mathbb{R}^3 / \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \exists (-\vec{u}) \in \mathbb{R}^3 / \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
6. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha . \vec{u} \in \mathbb{R}^3$
7. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 , \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
8. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \forall \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta) . \vec{u} = \alpha . \vec{u} + \beta . \vec{u}$
9. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 ; \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \forall \beta \in \mathbb{R} : (\alpha . \beta) . \vec{u} = \alpha . (\beta . \vec{u})$
10. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \ \exists 1 \in \mathbb{R} / 1 . \vec{u} = \vec{u}$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^3 ; + ; \mathbb{R} ; .)$ tiene estructura de espacio vectorial

Espacios vectoriales: ejemplos

-El conjunto de los números enteros no tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar real.

El conjunto de números enteros con las operaciones de suma y producto por un escalar no tiene estructura de espacio vectorial, porque el producto de un número real por un entero no da como resultado un número entero, como lo exige el axioma.

$$\underbrace{0.5}_{\text{Escalar real}}\cdot\underbrace{1}_{\text{entero}} = \underbrace{0.5}_{\text{no entero}}$$

Subespacios vectoriales

Si V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V, decimos que W es un ***subespacio*** de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) definidas en V.

Ejemplos

1) Determinar si $T = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x + 4\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$

Para decidir si T es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ habría que analizar si se cumplen los axiomas del 1 al 10.

Axioma 1

$(2; 6) \in T$; $(0; 4) \in T$ pero $(2; 6) + (0; 4) = (2; 10) \notin T$ porque el par $(2; 10)$ no verifica la condición $y = x + 4$ ya que $10 \neq 2 + 4$

Por lo tanto, T no es subespacio de $\mathbb{R}^2$

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de subespacios vectoriales

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V ($W \subseteq V$).

W es ***subespacio*** de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. 0_v está en W.

b. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ están en W, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ está en W.

c. Si $\boldsymbol{u}$ está en W y k es un escalar, $k\boldsymbol{u}$ está en W.

Subespacios triviales

- Si V es un espacio vectorial, entonces V es un subespacio de sí mismo.

- El conjunto $\{0_v\}$, que contiene sólo al vector nulo del espacio, también es subespacio de V porque:

$$0_v+0_v=0_v \text{ y } k0_v=0_v \text{para cualquier número real } k$$

Los subespacios $\{0_v\}$ y V se denominan ***subespacios triviales*** de V.

4) Decidir en cada caso si W es subespacio de $\mathbb{R}^n$:

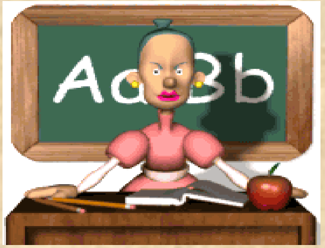
c) n = 3; W = {(x; y; z) ε$\mathbb{R}^3$/3x-y+4z-8=0}

d) n = 2; W = {(x;y) ε$\mathbb{R}^2$/ x.y=1}

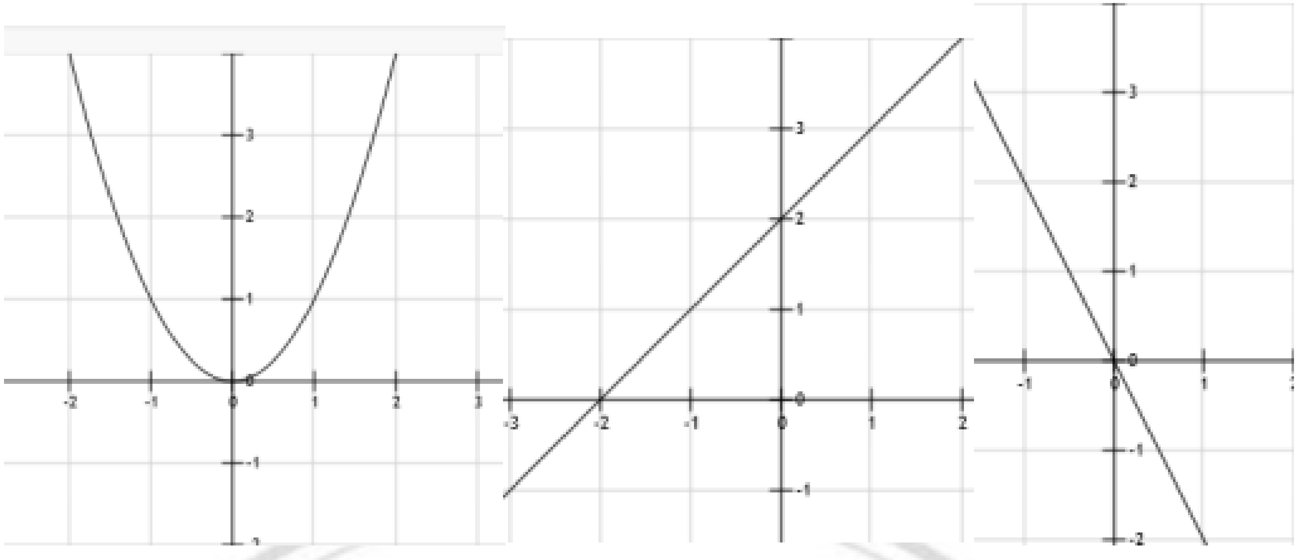
e) n = 3; W = {(x; y; z))εIR^3/x+y+z<0}

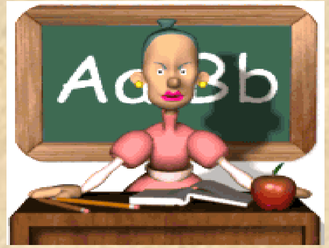
f) n = 2x2; $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ / \ a = b; c + d = 0 \right\}$

g) n = 2x2; $W = \left\{ A \in R^{2x2} \ / \ |A| = 0 \right\}$



5) Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Justificar





Combinación lineal

Consideramos los vectores v_1, v_2,…,v_n, w de un espacio vectorial V.

El vector w es una combinación lineal de los vectores v_1,v_2,…,v_n si lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \cdots + \varphi v_n$$

donde α, β, γ,…,φ son números reales.

Ejemplos

1) w = $(0; 4; 7)$es combinación lineal de los vectores $(0; 1; 0)$ y $(0; 0; 1)$, ya que

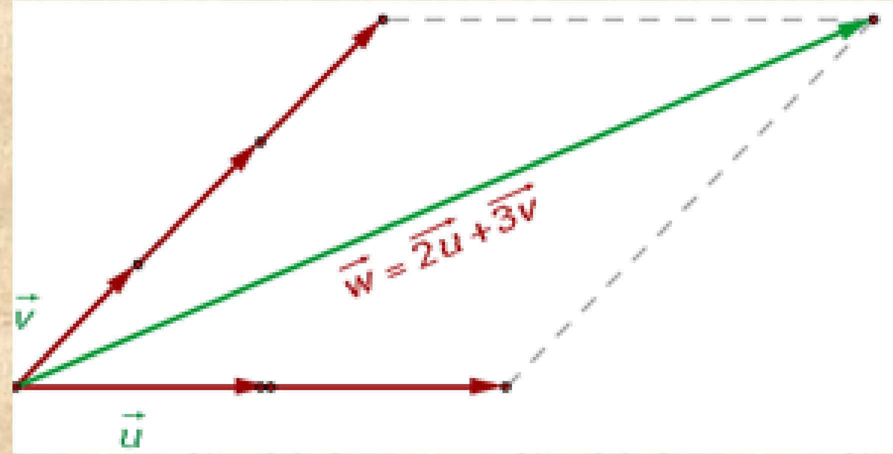
$$(0; 4; 7) = 4(0; 1; 0) + 7(0; 0; 1)$$

2) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$porque

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Combinación lineal

3)



$\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

Combinación lineal

Para analizar si un vector w de un espacio vectorial *V* es combinación lineal de *n* vectores v_1, v_2,…,v_n, de *V,* planteamos la ecuación vectorial:

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \cdots + \varphi v_n$$

Utilizando las definiciones y propiedades de la suma en *V* y del producto de un vector por un escalar, realizamos la operación $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \cdots + \varphi v_n$

Aplicando el concepto de igualdad de vectores, escribimos un sistema de ecuaciones lineales

Si el sistema es compatible determinado, entonces w ***es combinación lineal de los vectores*** v_1, v_2,…,v_n

Si el sistema es incompatible, entonces w ***<u>NO</u> es combinación lineal de los vectores*** v_1, v_2,…,v_n

Ejercicios

6) a) Determinar si $\vec{v}(1;\,2;\,3)$ es combinación lineal de $\vec{u}(1;\,5;6)$ y $\vec{w}\,(7;8;\,4)$

b) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que

$\vec{v} = (1;2;3)$ sea combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}=(2;1;\,-1);\overrightarrow{v_2}=(\,2;\,1+k;\,k)$ y $\overrightarrow{v_3}=(2;2;\,1)$

$\vec{v} = (k;\,k^2)$) sea combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}=(1;-1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1;1)$

Conjunto generador

Consideramos el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ del espacio vectorial V.

Si ***todo*** vector de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, decimos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un ***conjunto generador de $\boldsymbol{V}$***, o, lo que es lo mismo, que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generan V

Ejercicio

8) Demostrar que los conjuntos de vectores V y W generan el mismo subespacio, siendo $V = \{(3;0;1);\ (1;\ -1;2)\}$ y $W = \{(3;3;-4);\ (-1;\ -2;3)\}$. Indicar cuál es dicho subespacio e interpretarlo geométricamente.

Conjunto generador: síntesis

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$del espacio vectorial V

- es un ***conjunto generador de*** $\boldsymbol{V}$si el sistema que resuelve la ecuación vectorial planteada es COMPATIBLE

- no es un ***conjunto generador de*** $\boldsymbol{V}$ si el sistema que resuelve la ecuación vectorial planteada es INCOMPATIBLE

Subespacio generado

Todos los vectores que se obtienen mediante la combinación lineal de *n* vectores es el ***subespacio generado*** por esos *n* vectores

Es decir:

Considerando los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ de un espacio vectorial V, llamamos ***subespacio generado*** por $v_1,v_2,\ldots,v_n$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores.

Lo simbolizamos: $\boldsymbol{gen}\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$

Siendo

$gen\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=\{v\in V/v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \cdots + \varphi v_n con\ \alpha, \beta, \ldots \varphi \in R\}$ subespacio de V

Subespacio generado

11) Determinar el espacio generado por cada uno de los conjuntos de vectores. En el plano y en el espacio, interpretar geométricamente

En $\mathbb{R}^2$ a) $\{(-2; 1);\ (0; 0)\}$

En $\mathbb{R}^3$

c) $\{(2; 2; 2) ; (4; 4; 4); (-1;-1;-1)\}$

En $\mathbb{R}^{2x2}$ a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

Dependencia e independencia lineal

A ={v_1,v_2,…,v_n}es un conjunto de vectores de un espacio vectorial

La ecuación vectorial

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \cdots + \varphi v_n = 0_v$$

conduce a un sistema homogéneo, y, por lo tanto, admite al menos la solución trivial: $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varphi = 0$

Si ésta es la única solución, entonces se dice que A es un ***conjunto linealmente independiente***. (L.I.)

Si hay otras soluciones (además de la trivial) entonces A es un ***conjunto linealmente dependiente***. (L.D.)

Dependencia e independencia lineal

13) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes. Si fueran linealmente dependientes, expresar a uno de ellos como combinación lineal de los restantes

En $\mathbb{R}^2$ a) $\{(-2;1);\ (1;0)\}$

En $\mathbb{R}^3$ a) $\{(1; -2; 0)\ ;(0; 1;1)\ ;\ (3;0;1)\ \}$

14) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto $\{(1; 1; k)\ ;(k; 0; 0); (0; k; 4)\ \}$. Determinar para qué valores reales de k el conjunto resulta linealmente independiente y para qué valores linealmente dependiente. Interpretar geométricamente cada situación

Base y dimensión de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial V se denomina ***base*** de V si y sólo si:

- B es linealmente independiente;
- B genera a V.

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, cualquier otra base de V tiene n vectores. Esto permite definir el concepto de dimensión:

La ***dimensión*** de un espacio vectorial V es la cantidad de vectores que componen una base de V.

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, la dimensión de V es n y lo indicamos como $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{n}$.

Base y dimensión de un espacio vectorial

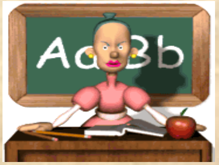
17) Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

b) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + 2z = 0\}$

20) Hallar una base y la dimensión del espacio solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$c)\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$$



Podemos completar el trabajo práctico Nº 5…