Repaso Parcial

sábado, 15 de junio de 2024

UNO UNIVERSIDAD NACIONAL DEL OESTE

Carrera Licenciatura en Informática

Recuperatorio del 2º Parcial de Análisis Matemático I

Alumno:

Fecha: 22-11-2023

Nota:

Para obtener un 7 es necesario: tener TRES integrales del punto 1 y del resto de los ejercicios DOS más correctamente resueltos.
Para obtener un 4 es necesario: tener 2 del punto 1 y del resto de los ejercicios DOS más correctamente resueltos.

- El **procedimiento** de cada ejercicio debe estar **JUNTO al ejercicio** (no en hoja aparte).
- Cada ejercicio debe ser realizado **paso a paso**.
- **No se considerarán resultados que no estén justificados.**

1) Resolver las siguientes integrales indefinidas: O ya realizadas.

a) $\int e^x \cdot \cos(x)\, dx =$

d) $\int \frac{\ln x}{x} \cdot \cos(\ln x)\, dx =$

✓ b) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx =$

✓ e) $\int \frac{x+3}{x-2\sqrt{x+1}}\, dx =$

✓ c) $\int \frac{2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)-6}\, dx =$

✓ f) $\int x \cdot \arctan(x)\, dx =$

2) Hallar el área encerrada por $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = -x^2 - x + 2$. Graficar dicha área y sombrearla.

3) a) Determinar si es posible aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$ en el intervalo $[-10\,; -2]$.

b) De ser posible encuentre el punto c que verifica la tesis.

c) Realice el gráfico correspondiente, mostrando a través de él la conclusión de dicho teorema.

4) Hallar el valor del siguiente límite utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$$

5) Realizar el estudio completo de la siguiente función **Justificando cada paso**.
Realizar el gráfico a partir de los resultados obtenidos.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

c) $\int \frac{2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)-6}\, dx =$

$\operatorname{sen}(x) = T$ $\quad dT = \cos(x)\, dx$

$\operatorname{sen}^2(x) = T^2$

$$2\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 6}\, dx = 2\int \frac{dT}{\underbrace{T^2 - T - 6}_{x_1 = 3 \quad x_2 = -2}}$$

Raíces Reales Simples.

¡No olvidarlo!

$$2\int \frac{dT}{\ldots}$$

Aplico F.S.

2) $\int \frac{dT}{(T-3)(T+2)}$ Aplico F.S.

$$\frac{1}{(T-3)(T+2)} = \frac{A}{T-3} + \frac{B}{T+2} = \frac{A(T+2)+B(T-3)}{(T-3)(T+2)}$$

$1 = A(T+2) + B(T-3)$

• Si $T=-2$

$1 = A(\cancel{-2+2}) + B(-2-3)$

$1 = B.(-5)$

$-1/5 = B$

Si $T=3$.

$1 = A(3+2) + B(\cancel{3-3})$

$1 = A.5$

$1/5 = A$.

$$2.\int\left(\frac{1/5}{T-3} + \frac{-1/5}{T+2}\right) dT = 2.\left[1/5\int \frac{1}{T-3}\,dT - 1/5\int\frac{1}{T+2}\,dT\right]$$

$$2.\left[\frac{1}{5}\ln|T-3| - \frac{1}{5}\ln|T+2|\right] + c$$

$$\frac{2}{5}\ln|T-3| - \frac{2}{5}\ln|T+2| + c$$

$$\boxed{\text{Rta: } \frac{2}{5}\ln|\operatorname{sen}(x)-3| - \frac{2}{5}\ln|\operatorname{sen}(x)+2| + c}$$

(b) $\int \underbrace{\operatorname{sen}(\ln(x))}\,\underbrace{dx}$. SUSTITUCIÓN

$H = \ln_e(x) \rightsquigarrow e^H = x$

$dH = \frac{1}{x}\,dx$

$x\,dH = dx$

$\int \operatorname{sen} H . x\,dH$

$\int \operatorname{sen} H . e^H . dH$ PARTES

$\ln_e(x) = a$ elevado

$\log_{10}(x) = a \qquad 10^a = x$

deriVo
$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^H & dV = \operatorname{sen} H \\ du = e^H . dH & V = -\cos H \end{array}}$$
integro

$\int \operatorname{sen} H . e^H . dH = -e^H \cos H + \int \cos H . e^H . dH$

esto es la integral del ítem a.

PARTES

$u = e^H \qquad dV = \cos H\,dH$

$du = e^H\,dH \qquad V = \operatorname{sen} H$

$$\int \operatorname{sen} H \cdot e^{H} \cdot dH = -e^{H}\cos H + \int \cos H \cdot e^{H} \cdot dH$$

integral del ítem a.

$du = e^{H}\, dH \qquad V = \operatorname{sen} H$

PARTES

$$\int \operatorname{sen} H \cdot e^{H} dH = -e^{H}\cdot \cos(H) + e^{H}\cdot \operatorname{sen}(H) - \int \operatorname{sen} H \cdot e^{H}\, dH.$$

$$2 \cdot \int \operatorname{sen} H \cdot e^{H} dH = -e^{H}\cdot \cos(H) + e^{H}\cdot \operatorname{sen}(H)$$

$$\int \operatorname{sen} H \cdot e^{H} dH = \frac{-e^{H}\cdot \cos(H) + e^{H}\cdot \operatorname{sen}(H)}{2} + C.$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x)) \cdot \underset{1}{e^{\ln(x)}} \cdot dx = \frac{-\overset{-1}{e^{\ln(x)}} \cos(\ln(x)) + \overset{1}{e^{\ln(x)}} \cdot \operatorname{sen}(\ln(x))}{2} + C.$$

Recordar prop. de logaritmo

e) $\int \frac{x+3}{x-2\sqrt{x}+1} dx =$

$T = \sqrt{x}$ $\qquad dT = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$ $\qquad 2T \cdot dT = dx$

$T^2 = x$ $\qquad dT = \frac{1}{2T} \cdot dx$

SUSTITUCIÓN

$$\int \frac{T^2+3}{T^2-2T+1} \cdot 2T \cdot dT$$

$$2\int \frac{T^3+3T}{T^2-2T+1}\, dT$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & T^3 + & & +3T & T^2-2T+1 \\
- & T^3 & -2T^2 & +T & T+2 \\
\hline
 & & 2T^2 & +2T & \\
- & & 2T^2 & -4T & +2 \\
\hline
 & & & 6T & -2
\end{array}$$

$$2 \cdot \int \left(T+2 + \frac{6T-2}{T^2-2T+1}\right) dT$$

$$2\left[\int T\, dT + 2\int dT + \int \left(\frac{6T-2}{T^2-2T+1}\right) dT\right]$$

$$2\left[\frac{T^2}{2} + 2T + \int \frac{6T-2}{T^2-2T+1} \cdot dT\right]$$

F. S.

$$\frac{\cancel{2}T^2}{\cancel{2}} + 4T + 2\int \frac{6T-2}{T^2-2T+1}\, dT.$$

$(T-1)^2$ Raíces doble.

$$\int T^2-2T+1$$

$(T-1)^2$ Raíces doble.

$$\int \frac{6T-2}{T^2-2T+1}\,dT = \frac{A}{(T-1)^2} + \frac{B}{T-1} = \frac{A+B(T-1)}{(T-1)^2}$$

$$6T-2 = A+B(T-1)$$

- Si $T=1$

$$6.1-2 = A+B\cancel{(1-1)}$$

$$\boxed{4=A}$$

- Si $T=0$.

$$6.0-2 = 4+B(0-1)$$

$$-2-4 = -B$$

$$\cancel{-}6 = \cancel{-}B$$

$$\boxed{6=B}$$

$$\int \frac{6T-2}{T^2-2T+1}\,dT = \int\left(\frac{4}{(T-1)^2} + \frac{6}{T-1}\right)dT$$

$$4\int \underbrace{\frac{1}{(T-1)^2}}_{\text{SUSTITUCIÓN}}\,dT + 6\int \frac{1}{T-1}\,dT.$$

$T-1=B$.
$dT=dB$.

$$4\int \frac{1}{B^2}\cdot dB. \quad +6\ln|T-1| + C$$

$$4\int B^{-2}\,dB \quad +6\ln|T-1| + C.$$

$$4\,\frac{B^{-1}}{-1} + 6\ln|T-1| + C.$$

$$\frac{-4}{B} + 6\ln|T-1| + C.$$

$$\frac{-4}{T-1} + 6\ln|T-1| + C.$$

$$\frac{-4}{\sqrt{X}-1} + 6\ln|\sqrt{X}-1| + C.$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}T^2 + 4T + 2\int \frac{6T-2}{\underbrace{T^2-2T+1}_{(T-1)^2}}\, dT$$

F.S.

Raíces doble.

$$T^2 + 4T + 2\cdot\left(\frac{-4}{\sqrt{x}-1} + 6\ln|\sqrt{x}-1|\right) + c.$$

$$(\sqrt{x})^{\cancel{2}} + 4\sqrt{x} - \frac{8}{\sqrt{x}-1} + 12\ln|\sqrt{x}-1| + c.$$

Rta.: $\boxed{x + 4\sqrt{x} - \frac{8}{\sqrt{x}-1} + 12\ln|\sqrt{x}-1| + c}$

f) $\int \underbrace{x}_{dv}\cdot\underbrace{\arctan(x)}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} =$

PARTES.

$u = \text{arctg}(x)$ $\qquad dv = x\,.dx$

$du = \frac{1}{x^2+1}\,dx$ $\qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}}^{\,1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int x.\arctan(x)\,dx = \text{arctg}(x).\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg}(x) + c.$$

$$\boxed{\int x.\,\text{arctg}(x)\,dx = \frac{\text{arctg}(x).x^2 - x + \text{arctg}(x)}{2} + c.}$$

$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$

2) Hallar el área encerrada por $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = -x^2 - x + 2$. Graficar dicha área y sombrearla.

Igualo $\underset{P}{f}(x) = \underset{T}{g}(x)$ para calcular ptos de intersección.

$$x^2 - x = -x^2 - x + 2.$$

$$x^2 \cancel{-x} + x^2 \cancel{+x} - 2 = 0.$$

$$2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = -1$ $\quad [-1; 1]$

evalúo en $x=0$

$f(0) = 0$ piso.

$g(0) = 2$. TECHO

$$\int_{-1}^{1} \left[(-x^2 - x + 2) - (x^2 - x)\right] dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 \cancel{-x} + 2 - x^2 \cancel{+x})\, dx = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx$$

$$= -2\int_{-1}^{1} x^2 dx + 2\int_{-1}^{1} dx = -\frac{2}{3}x^3 + 2x \Big]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(1)^3 + 2(1)\right] - \left[-\frac{2}{3}(-1)^3 + 2(-1)\right] = \left(-\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) =$$

$$-\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}\, u^2$$

- $f(x) = x^2 - x$

or-or $= \underbrace{(0;0)}_{\text{RAIZ}}$

$$x^2 - x = x(x-1)$$

$\quad 0 \quad 1$

Raíces $(0;0)$ y $(1;0)$

Vértice $x_v = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$$y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$y_v = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$y_v = -\frac{1}{4}$$

$$V = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

- $g(x) = -x^2 - x + 2.$

or-or $= (0;2)$

Raíces $(-2;0)$ y $(1;0)$

Vértice $x_v = \frac{-2+1}{2} = -1/2$

$$y_v = -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2.$$

$$y_v = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2.$$

$$y_v = \frac{1}{4} + 2.$$

$$y_v = \frac{9}{4}$$

$$V = \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

$V = \left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$

$a(+)$ ∪

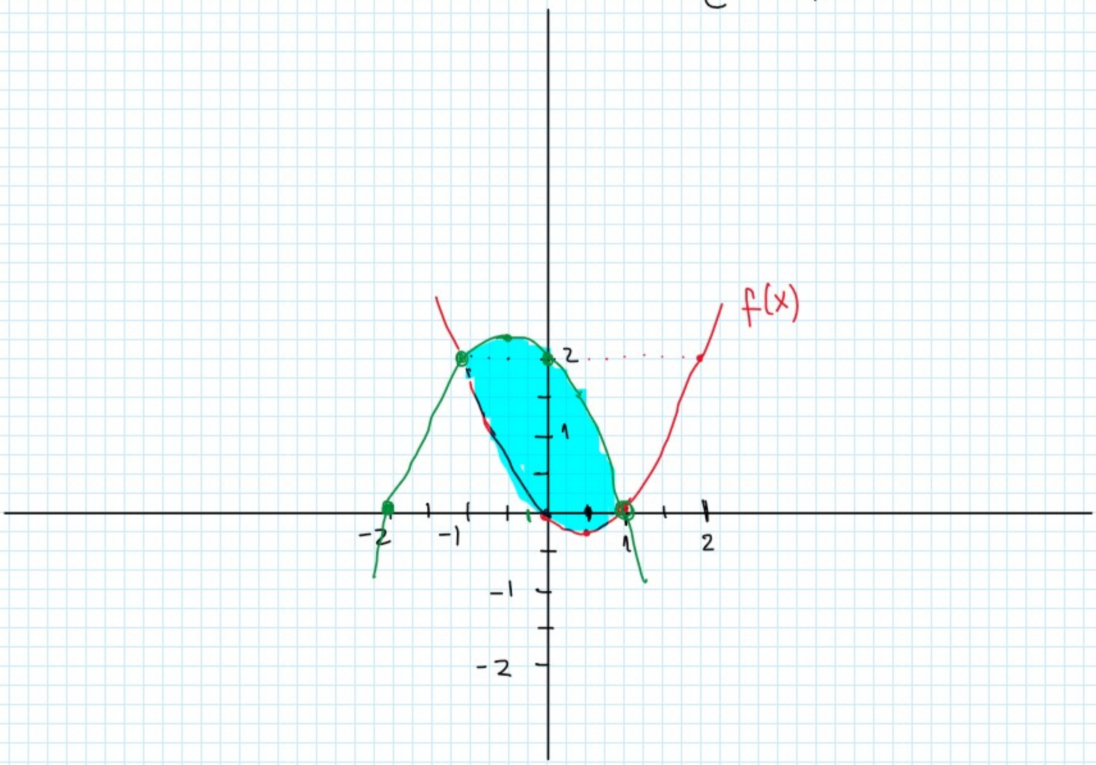
Además puedo ubicar los ptos de intersección.

$f(1) = 1^2 - 1$ $\qquad$ $f(-1) = (-1)^2 - (-1)$

$f(1) = 0$ $\qquad$ $f(-1) = 1 + 1$

$(1 ; 0)$ $\qquad$ $f(-1) = 2.$

$(-1 ; 2)$



3) a) Determinar si es posible aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$ en el intervalo $[-10 ; -2]$.

b) De ser posible encuentre el punto c que verifica la tesis.

c) Realice el gráfico correspondiente, mostrando a través de él la conclusión de dicho teorema.

$f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$ $\qquad$ $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x)$ es continua en todo su dominio, por lo tanto también en $[-10 ; -2]$.

$f(x)$ es derivable en todo su dominio, por lo tanto también en $(-10 ; -2)$

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-6)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{3x} + 3 \cancel{-3x} + 6}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$$

Entonces $\exists c \in (-10 ; -2) \ / \ f'(c) = f(-2) - f(-10)$

Entonces $\exists c \in (-10; -2) \,/\, f'(c) = \dfrac{f(-2) - f(-10)}{-2-(-10)}$

C.AUX.

Rs $\begin{cases} f(-2) = \dfrac{3(-2)-6}{-2+1} = 12 \\ f(-10) = \dfrac{3(-10)-6}{-10+1} = 4 \end{cases}$

$f(-4) = \dfrac{3.(-4)-6}{-4+1} = 6$

$$\frac{9}{(c+1)^2} = \frac{12-4}{8}$$

$$\frac{9}{(c+1)^2} = 1 \quad \text{mT y ms}$$

$$9 = (c+1)^2$$

$$\sqrt{9} = |c+1|$$

$3 = c+1$
$2 = c \notin (-2; -10)$

$-3 = c+1$
$-4 = c \in (-2; -10)$

R secante.

$y_s = mx + b$
$y = 1.x + b$
$12 = 1.(-2) + b$
$14 = b$.

$\boxed{y_s = x + 14}$

R Tangente.

$y_T = 1.x + b$.
$6 = 1(-4) + b$.
$10 = b$.

$\boxed{y_T = x + 10}$

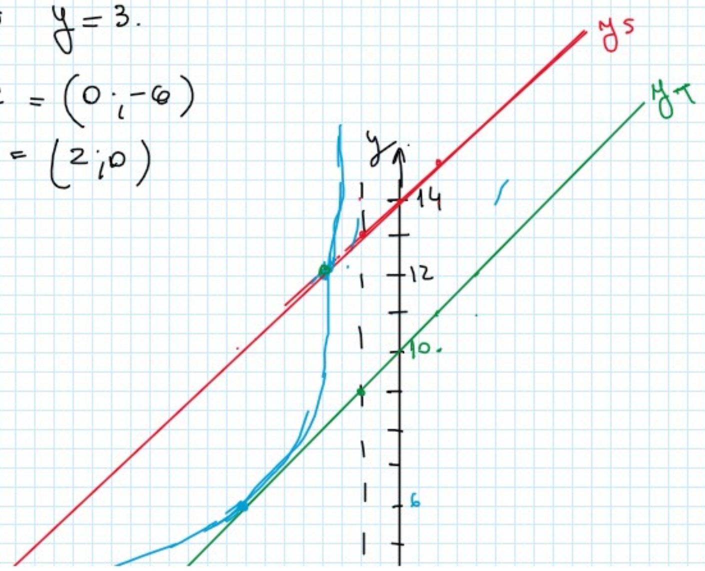
$f(x) = \dfrac{3x-6}{x+1}$ $\quad$ Dom $= \mathbb{R} - \{-1\}$.

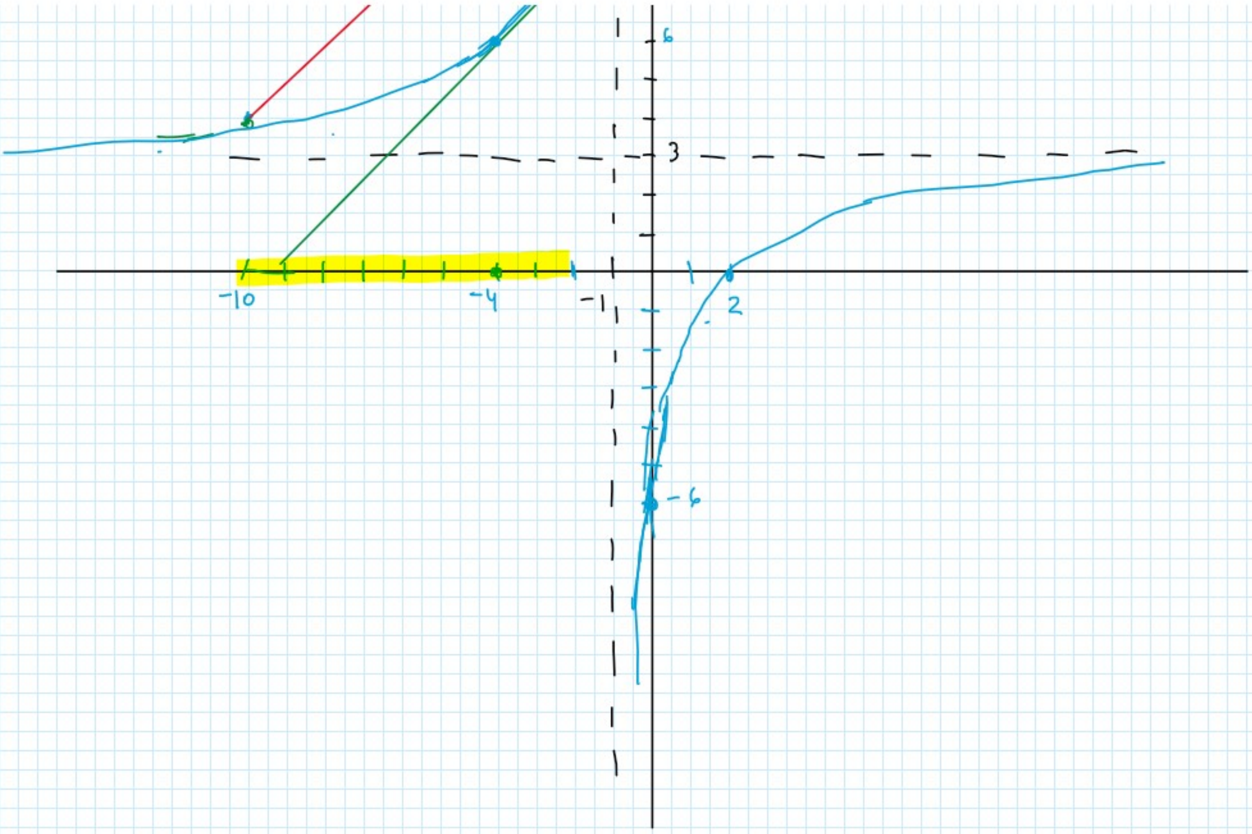
AV $\Rightarrow$ $x = -1$

AH $\Rightarrow$ $y = 3$.

OR-OR $= (0; -6)$

RAIZ $= (2; 0)$





4) **Hallar el valor del siguiente límite utilizando la regla de L'Hopital**

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$\lim_{x \to 1} \left[\underbrace{\frac{\overset{1}{x}}{\underset{\to 0}{x-1}}}_{\infty} - \underbrace{\frac{1}{\underset{\to 0}{\ln x}}}_{\to\infty} \right] = \text{"}\infty - \infty\text{" ind.}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overset{\to 0}{x.\ln(x)} - \overset{\to 0}{(x-1)}}{(x-1).\underset{\to 0}{\ln(x)}} = \text{"}\frac{\to 0}{\to 0}\text{" ind.}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x.\ln(x) - x + 1}{(x-1)\cdot\ln(x)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - 1}{\ln(x) + (x-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overset{0}{\ln(x)} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\underset{0}{\ln(x)} + 1 - \underset{1}{\frac{1}{x}}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{" ind.}$$

$$-1x^{-1} = -1.(-1).x^{-1-1}$$
$$= 1.x^{-2}$$

$$\lim \frac{\overset{1}{1/x}}{\quad} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1/x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$-1x = -1 \cdot (-1) \cdot x$
$= 1 \cdot x^{-2}$
$= \frac{1}{x^2}$

5) Realizar el estudio completo de la siguiente función **justificando cada paso**.
Realizar el gráfico a partir de los resultados obtenidos.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

• AV $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$ Posee AV en $x = 1$

AH $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{2(x-1)} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{6x}{2} = \infty$ no posee A.H, por lo tanto, puede tener A.O.

A.O. $m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{x} \right]$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2}$

$\boxed{m = 1}$

$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right]$

$b = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$

$b = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2}$

$$b = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{b = 2.}$$ Posee AO en $\boxed{y = x + 2.}$

CORTE CON LOS EJES

- Con eje x $(y=0)$

$$0 = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$0 = x^3$$

$$\boxed{0 = x}$$

$$\cap x = (0;0)$$

- Con eje y $(x=0)$

$$f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2}$$

$$f(0) = 0$$

$$\cap y = (0;0)$$

EXTREMOS / CREC - DEC.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 (x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \cancel{(x-1)} \cdot [3(x-1) - 2x]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (3x - 3 - 2x)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x-3)}{(x-1)^3} =$$

$$f'(x) = 0$$

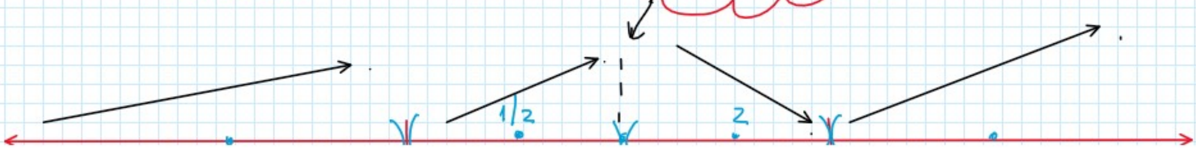
$$x^2 \cdot (x-3) = 0$$

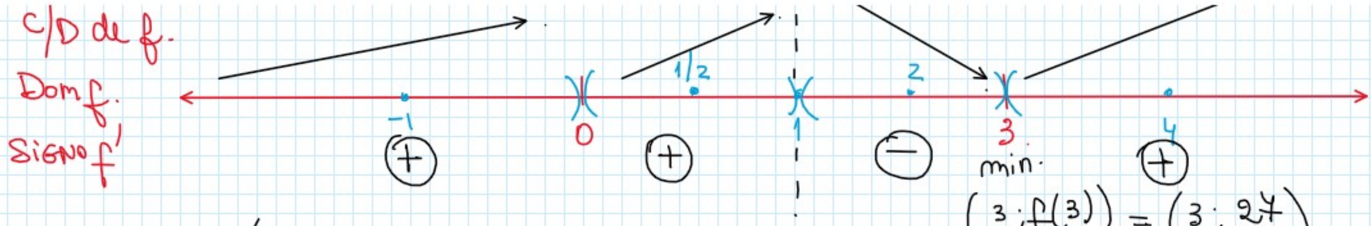
$$\underbrace{x = 0 \qquad x = 3}_{\text{candidatos}}$$

Recordá la ASINTOTA

C/D de f.

Dom f..





$(3; f(3)) = \left(3; \frac{27}{4}\right)$

SIGNO $f'(-1) = +$

$$f(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2}$$

$$f(3) = \frac{27}{4}$$

CONCAVIDAD / PI.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$f''(x) = \frac{3(x^2 - 2x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

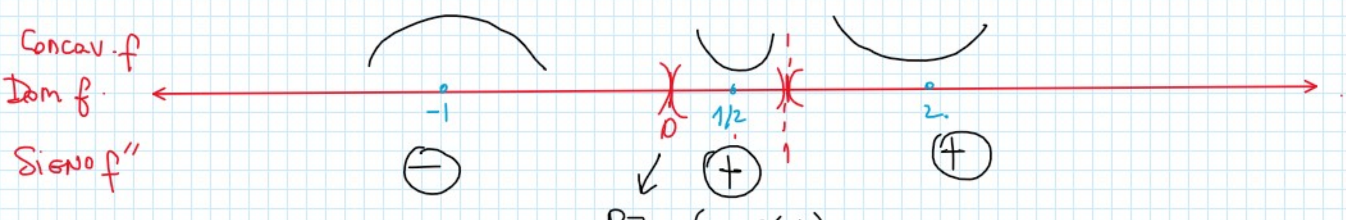
$$f''(x) = \frac{3\cancel{(x-1)^2} \cdot \left[(x^2 - 2x)(x-1) - (x^3 - 3x^2)\right]}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$f''(x) = \frac{3\left[\cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{2x^2} + 2x - \cancel{x^3} + \cancel{3x^2}\right]}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2x}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$0 = 6x$

$0 = x$. cand a PI.



$PI = (0; f(0))$

$PI = (0; 0)$

CONC. $(+) = (0, 1) \cup (1; +\infty)$

CONC. $(-) = (-\infty ; 0)$