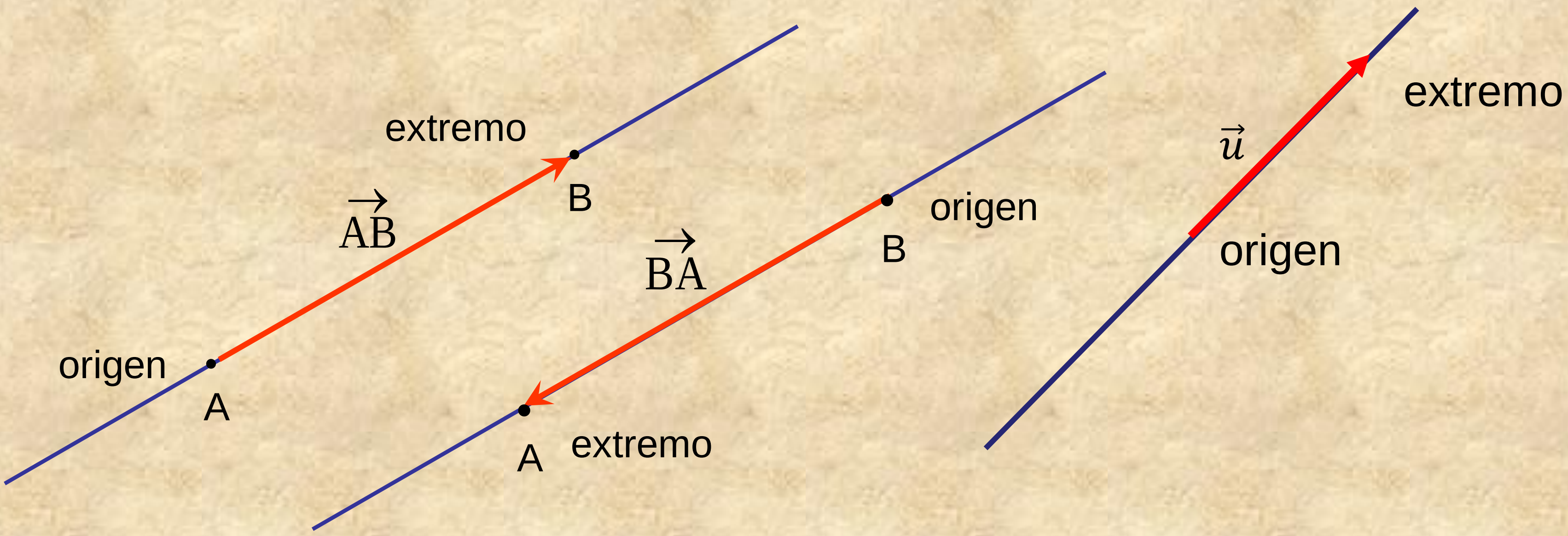
Algebra Vectorial.

Vectores geométricos

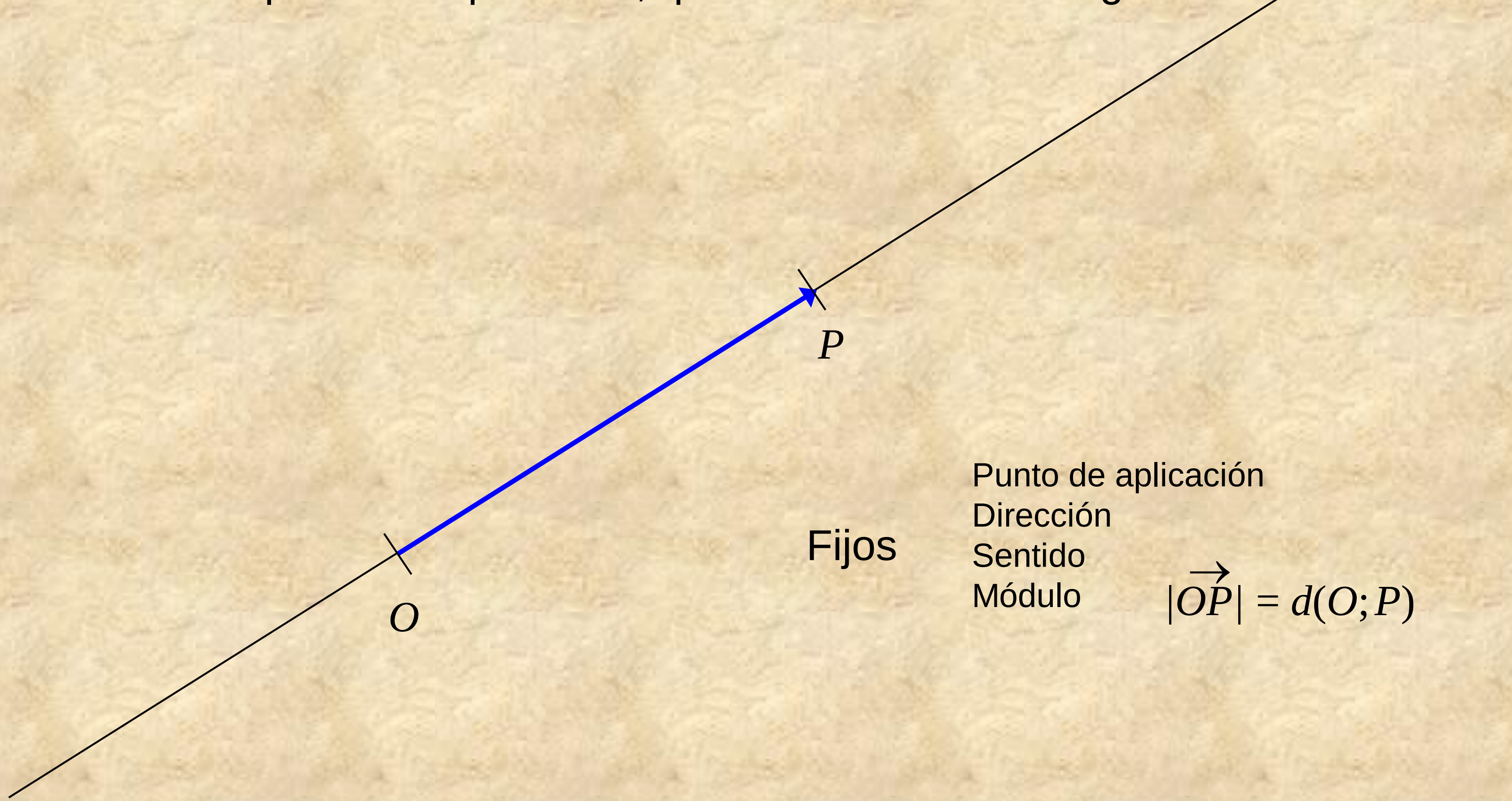
Un vector es un par ordenado de puntos (A,B) .
A es el origen del vector y B es el extremo
Los vectores se representan por medio de un segmento orientado.

Pueden nombrarse utilizando su origen y extremo (por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$) o por medio de una letra minúscula (por ejemplo, $\vec{u}$)



Vectores fijos

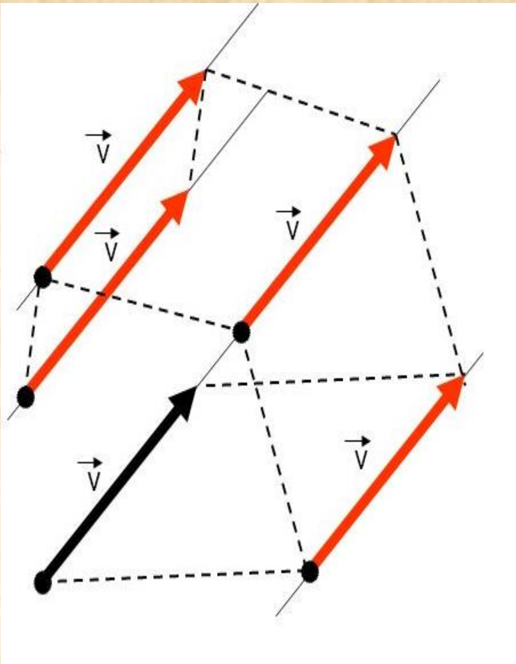
Los vectores fijos se utilizan ampliamente en física, para representar fuerzas, por ejemplo. Además de dirección, módulo y sentido, en todo vector fijo reconocemos un punto de aplicación, que coincide con su origen.



Fijos

- Punto de aplicación
- Dirección
- Sentido
- Módulo $|\overrightarrow{OP}| = d(O;P)$

Vector libre



Si a un vector fijo lo liberamos de su punto de aplicación, permitiéndole moverse sobre la recta que lo contiene

Si, además, le permitimos desplazarse paralelamente a su dirección, podrá ocupar todo el plano…

Vamos obteniendo infinitos vectores a partir de uno dado. Bajo las condiciones anteriores, todos tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido

Entonces:
Dado un vector, existen infinitos vectores equipolentes a él.
Cuando queremos hacer uso de un vector, podemos elegir uno de esos infinitos vectores y utilizarlo como **representante** del vector.
Al conjunto de todos los vectores equipolentes a uno dado lo llamamos **vector libre**

En esta materia trabajaremos con vectores libres

Igualdad de vectores

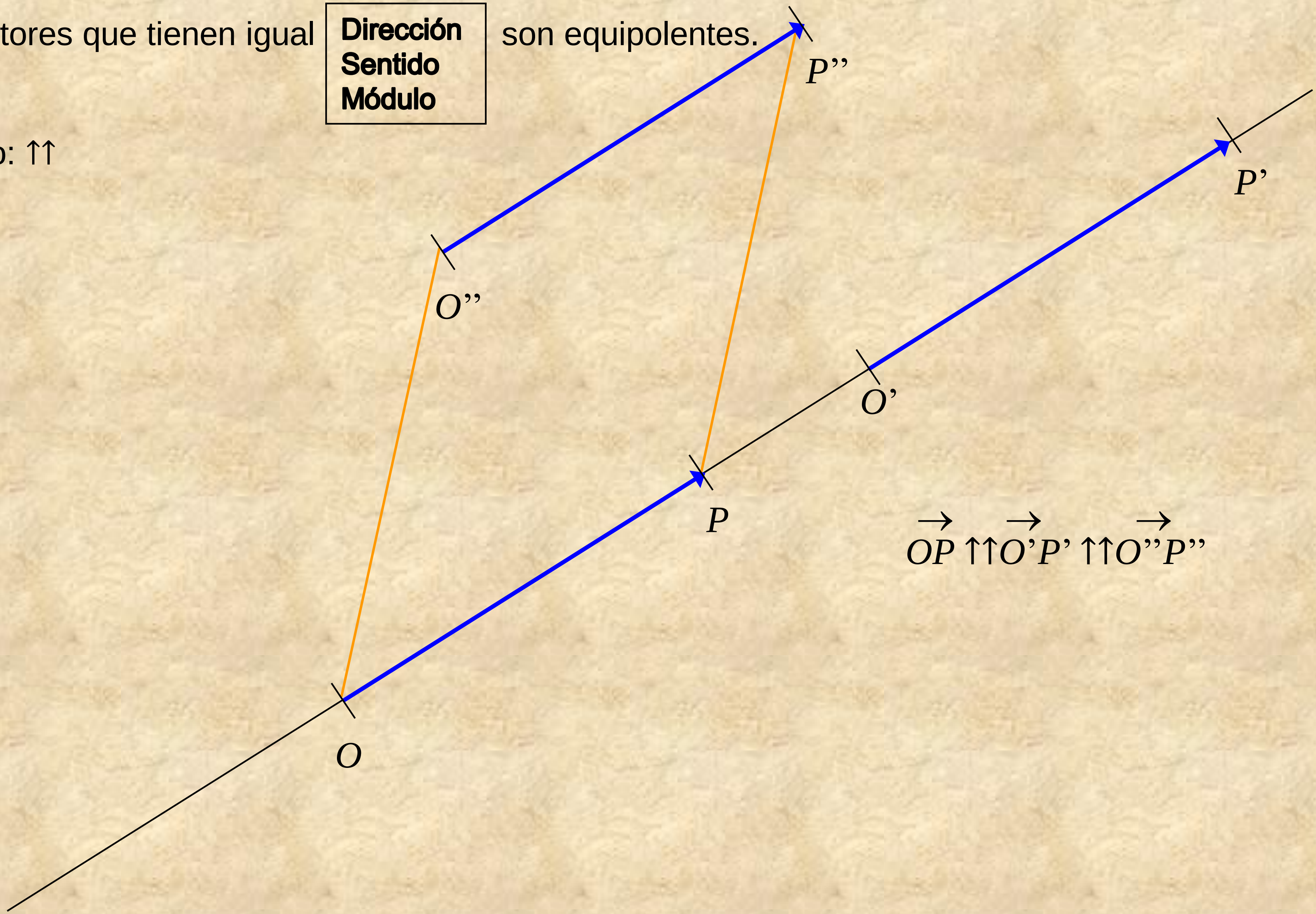
Dos vectores no nulos son iguales (o equipolentes) si tienen igual dirección, igual sentido e igual módulo

$$\vec{u} = \vec{v} \begin{cases} \textit{dirección } \vec{\mathrm{u}} = \textit{dirección } \vec{\mathrm{v}} \\ \text{sentido de } \vec{\mathrm{u}} = \textit{sentido} \text{ de } \vec{\mathrm{v}} \\ \left|\vec{\mathrm{u}}\right| = \left|\vec{v}\right| \end{cases}$$

Vectores equipolentes

Los vectores que tienen igual **Dirección** **Sentido** **Módulo** son equipolentes.

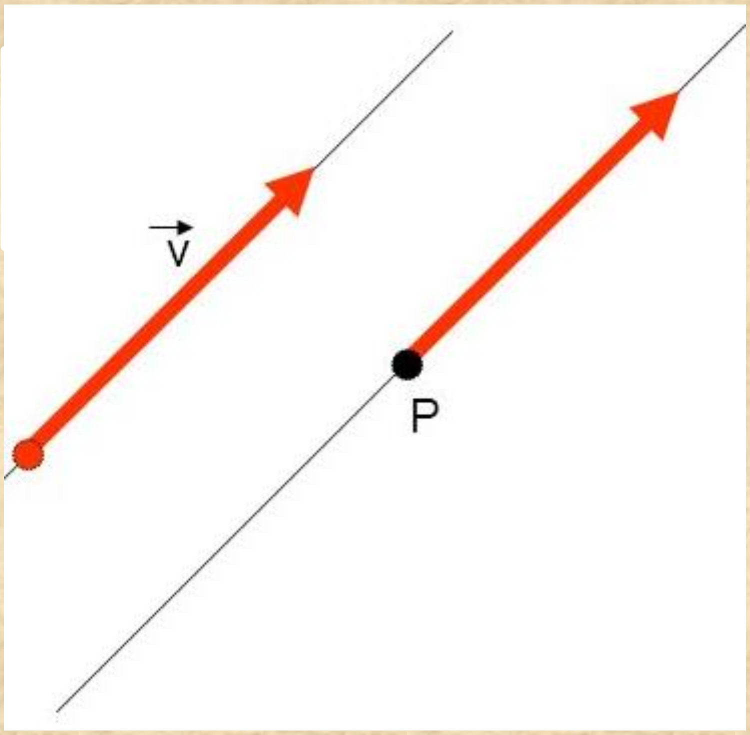
Símbolo: ↿↿



$$\overrightarrow{OP} \upharpoonleft\upharpoonleft \overrightarrow{O'P'} \upharpoonleft\upharpoonleft \overrightarrow{O''P''}$$

Ingresa en https://www.geogebra.org/m/YF5N7HbP para ver un conjunto de vectores equipolentes

Vector libre: propiedad



Si $\vec{v}$ es un vector libre del plano, y P un punto cualquiera de dicho plano, existe un único vector equipolente a $\vec{v}$, con origen en P

Vector nulo

Es un vector cuyo origen y extremo coinciden

Su módulo es 0

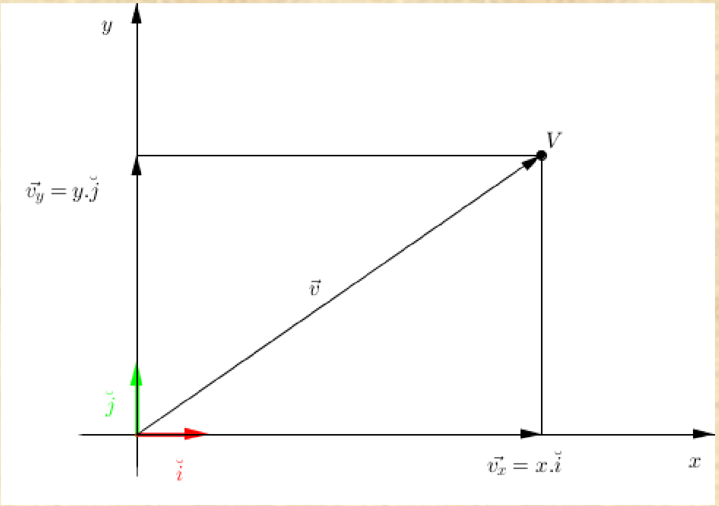
Por convención, carece de dirección

Se simboliza: $\vec{0}$

Por convención, se acepta que todos los vectores nulos son equipolentes entre sí

Expresión canónica de un vector en el plano

Todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como *combinación lineal* de los versores canónicos ˘ = (1,0) y ˘ = (0,1).



$$\vec{v} = (x, y)$$
$$\vec{v} = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\vec{v} = x.\breve{\ } + y.\breve{\ }\ (expresión\ canónica)$$

Versor asociado a un vector

Resumiendo el trabajo de la diapositiva anterior, podemos establecer que:

Dado un vector no nulo $\vec{v}$, se denomina *versor*asociado, y se simboliza ˘, al vector unitario que tiene igual dirección y sentido que $\vec{v}$.

Dado $\vec{v}$,distinto de $\vec{0}$, su versor asociado se expresa así:

$$\check{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Resolvemos el ejercicio

Versor asociado a un vector: ejemplo

Si $\vec{a} = (-4; 3)$

- Un vector unitario de igual dirección y sentido que $\vec{a}$ se obtiene usando la relación: $\breve{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Buscamos el módulo del vector dado, y luego reemplazamos

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\breve{a} = \frac{(-4,3)}{5} = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

- Un vector unitario de igual dirección y sentido contrario al de $\vec{a}$.

En este caso, se pide el opuesto del vector hallado anteriormente, es decir,

$$-\breve{a} = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

- Un vector de módulo 3, que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{a}$

Sabemos que $\breve{a}$ tiene módulo 1, la misma dirección y sentido que el vector dado.
Para que se cumpla lo pedido, basta triplicar su módulo:

$$3 \,.\, \breve{a} = 3.\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{12}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

Propiedades de los versores

- Ninguno de ellos es múltiplo de otro.

- Todo vector del plano se puede expresar como:
  $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$,
  es decir, es combinación lineal de los versores i, j

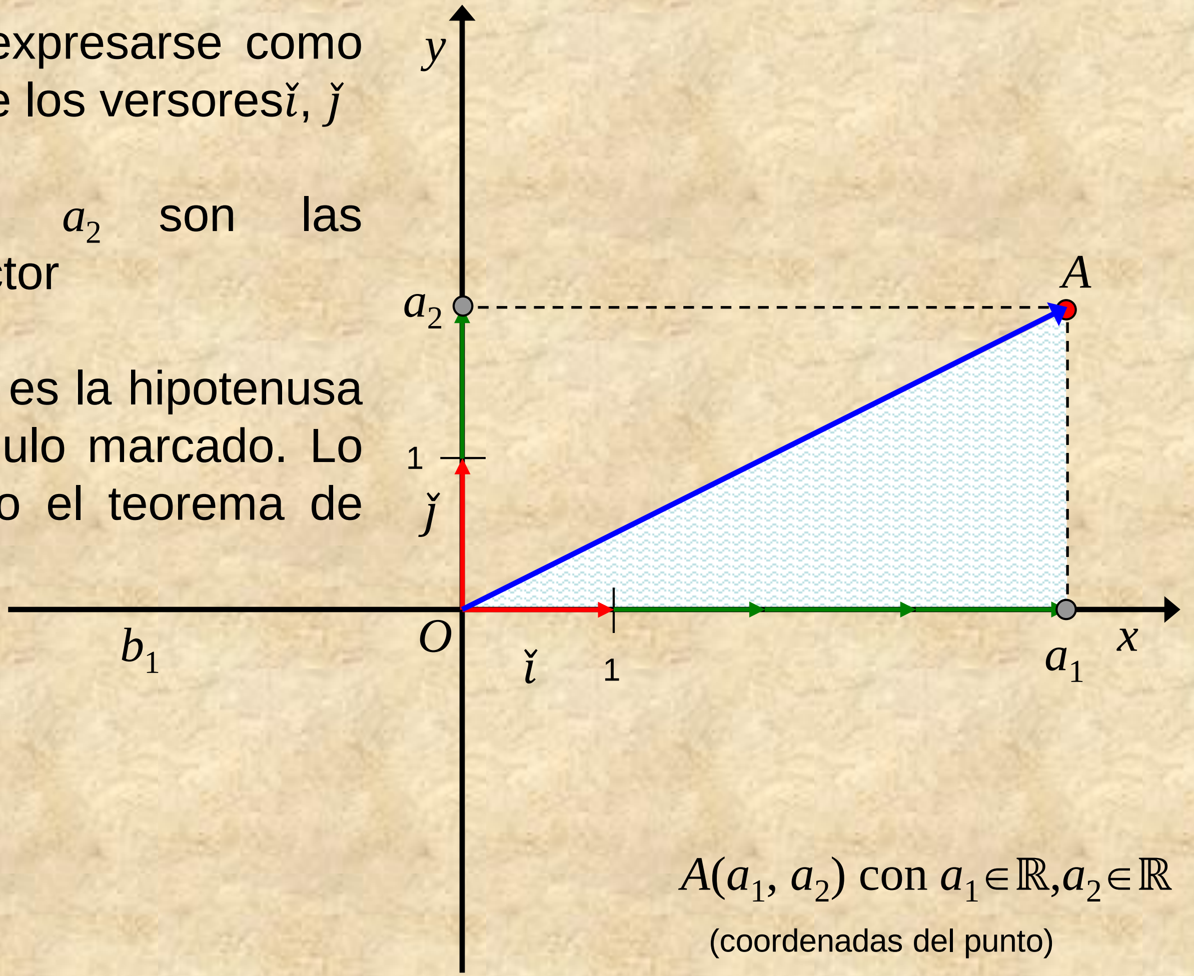
- Todo vector del espacio se puede expresar como:
  $(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$,
  es decir, es combinación lineal de los versores i, j, k

Sistema de referencia cartesiano ortogonal en el plano ($\mathbb{R}^2$)

Todo vector puede expresarse como combinación lineal de los versores $\check{\imath}$, $\check{\jmath}$

Los números a_1, a_2 son las componentes del vector

El módulo del vector es la hipotenusa del triángulo rectángulo marcado. Lo calculamos aplicando el teorema de Pitágoras



$A(a_1, a_2)$ con $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}$

(coordenadas del punto)

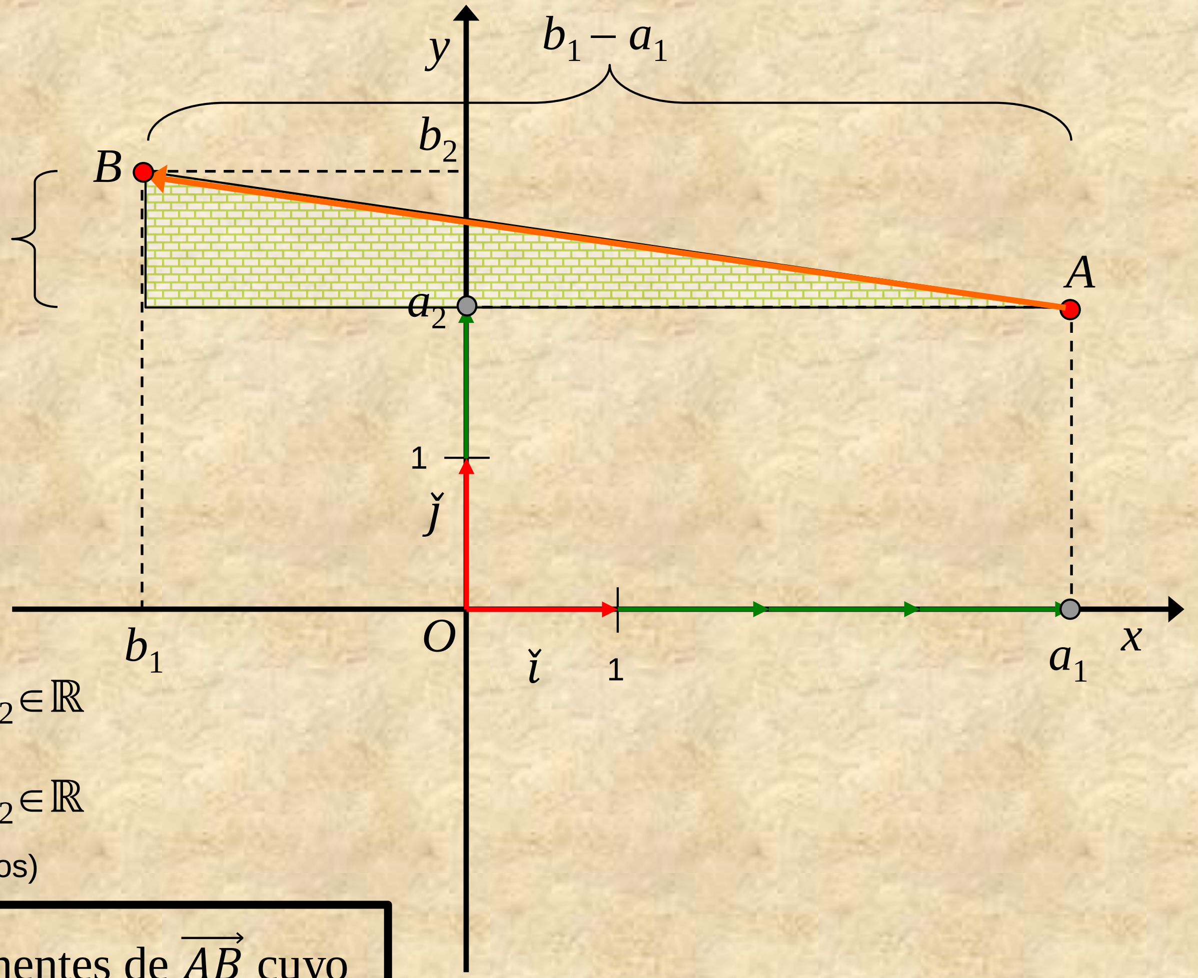
$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2) = a_1\check{\imath} + a_2\check{\jmath}$

(componentes del vector)

Módulo del vector:

$|\overrightarrow{OA}| = +\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Sistema de referencia cartesiano ortogonal en el plano ($\mathbb{R}^2$)



$A(a_1, a_2)$ con $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}$

$B(b_1, b_2)$ con $b_1 \in \mathbb{R}, b_2 \in \mathbb{R}$

(coordenadas de los puntos)

Para hallar las componentes de $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen no está en (0,0), hacemos:

Coordenadas del extremo (B)

menos

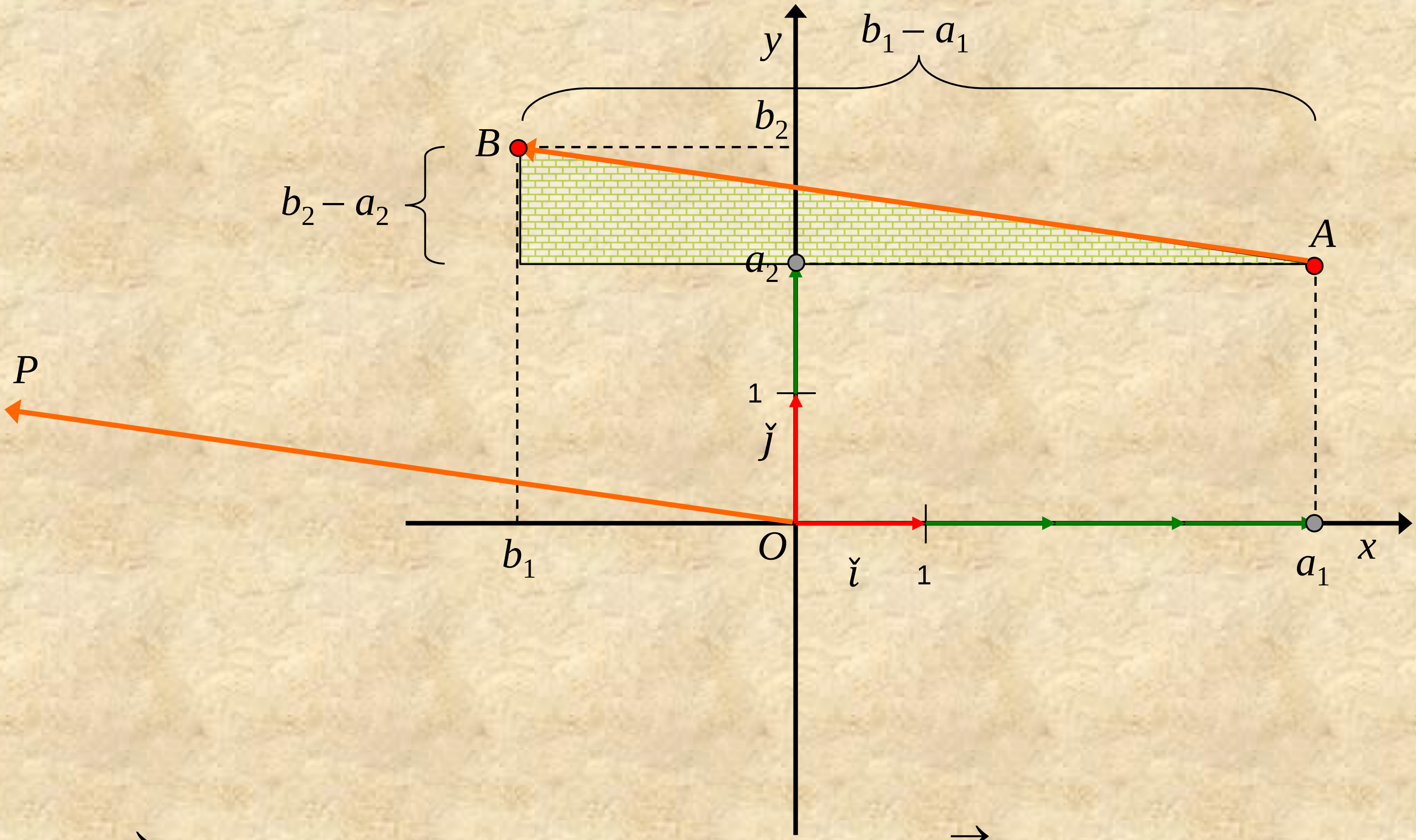
coordenadas del origen (A)

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\check{\imath} + (b_2 - a_2)\,\check{\jmath}$$

(componentes del vector conocido el extremo y el origen)

$$|\overrightarrow{AB}| = d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Sistema de referencia cartesiano ortogonal en el plano ($\mathbb{R}^2$)



$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\check{\imath} + (b_2 - a_2)\,\check{\jmath}$

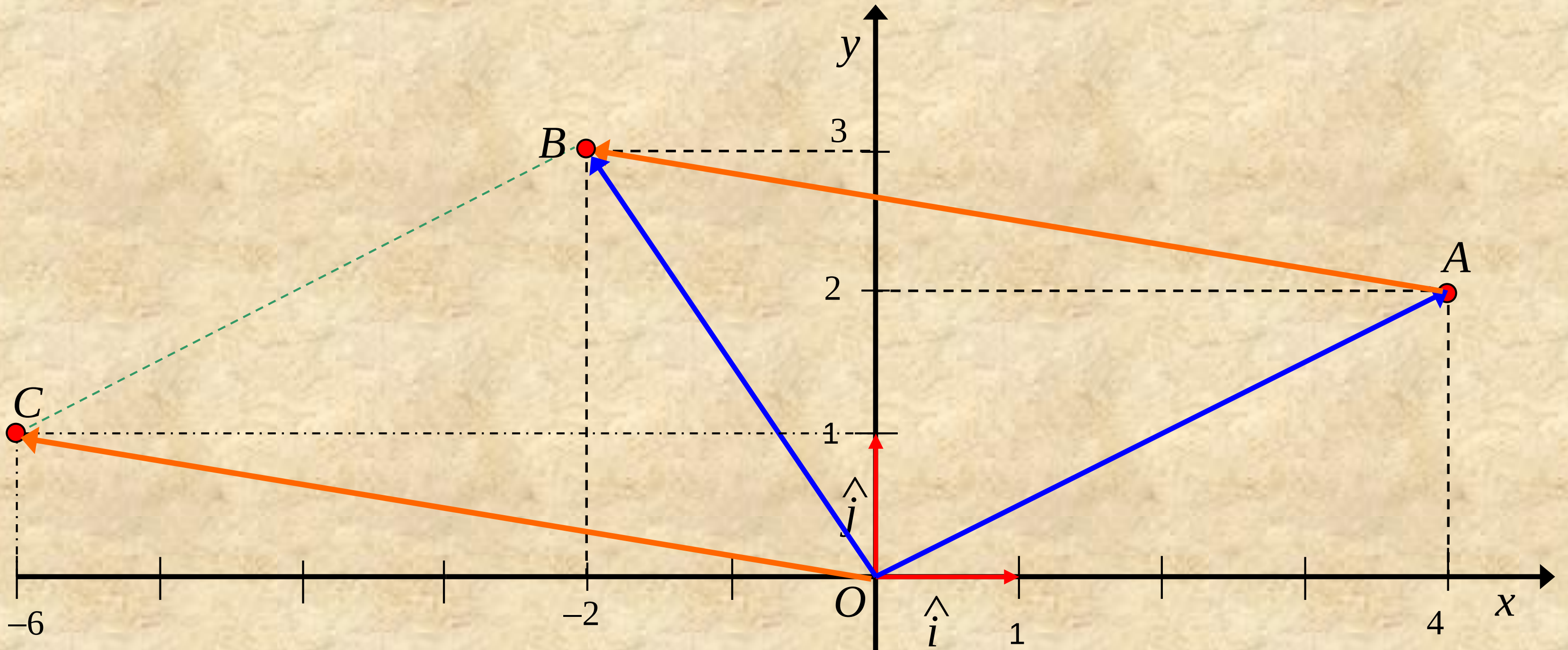
(componentes del vector conocido el extremo y el origen)

$|\overrightarrow{AB}| = d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\overrightarrow{OP} = (b_1 - a_1)\check{\imath} + (b_2 - a_2)\,\check{\jmath}$

(componentes del vector equipolente al vector AB, con origen en el origen)

Ejemplo



$A(4,\ 2)$

$\overrightarrow{OA} = 4\check{\imath} + 2\check{\jmath}$

$|\overrightarrow{OA}| = +\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$B(-2,\ 3)$

$\overrightarrow{OB} = -2\check{\imath} + 3\check{\jmath}$

$|\overrightarrow{OB}| = +\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\overrightarrow{AB} = (-2-4)\check{\imath} + (3-2)\check{\jmath} = -6\,\check{\imath} + \check{\jmath}$

$\overrightarrow{OC} = -6\,\check{\imath} + \check{\jmath}$

$\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Calcular las componentes de un vector de origen $P(-2; 5)$
y cuyo extremo sea:
$M(-3; 1)$
$Q(4; 7)$
$R\ (-2; 3/2\ )$

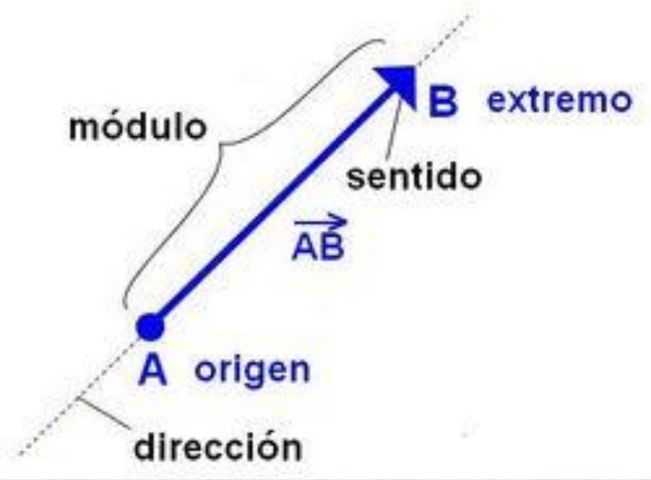
Analiza si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son equipolentes en los siguientes casos:
A= (-3;1/3) B=(1;13/3) P= (0;-6) Q= (4;-2)

Determinar los valores de x,y para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ resulten equipolentes
A=(x;y) B(-12;4) P=(0;-3) Q=(-1;5)

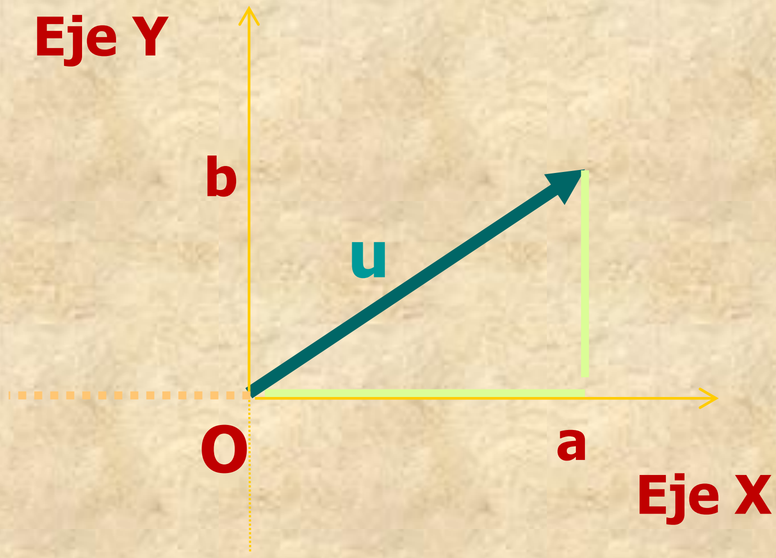
Vectores geométricos

En todo vector reconocemos:

- **Módulo o Norma** es la distancia entre el origen y el extremo
- **Dirección**: determinada por la recta sostén que lo contiene y todas sus paralelas.
- **Sentido**: determinado por el extremo o la segunda componente.

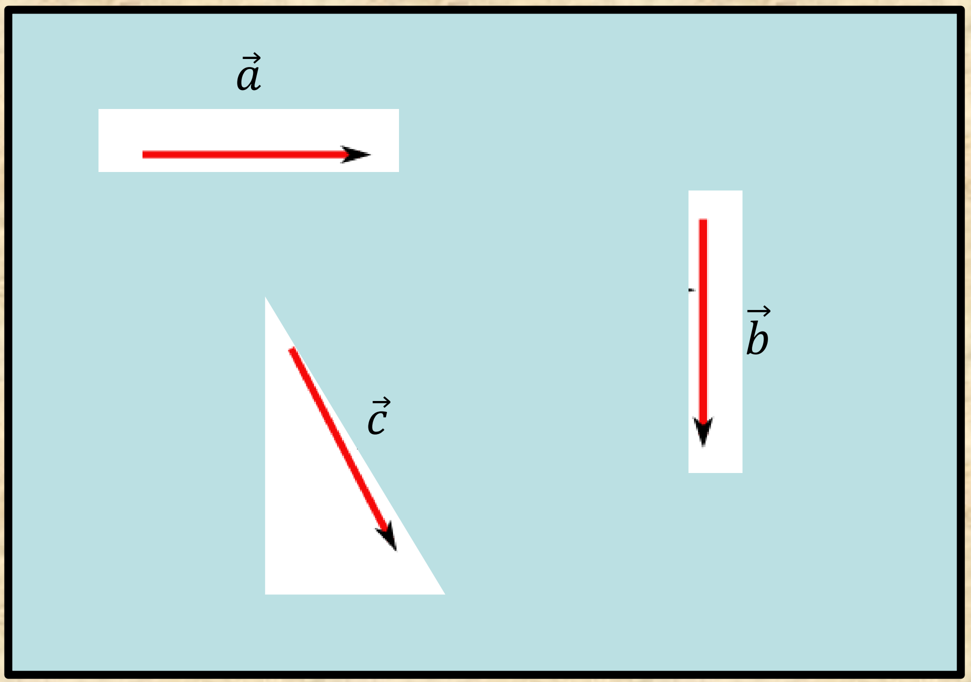


Módulo o Norma de un vector $|\vec{u}|$



$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vectores de igual módulo



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Calcular las componentes y el módulo de un vector de origen $P(-2; 5)$ y cuyo extremo sea:

$M(-3; 1)$

$Q(4; 7)$

$R\ (-2; 3/2\ )$

(las componentes fueron obtenidas en la actividad anterior)

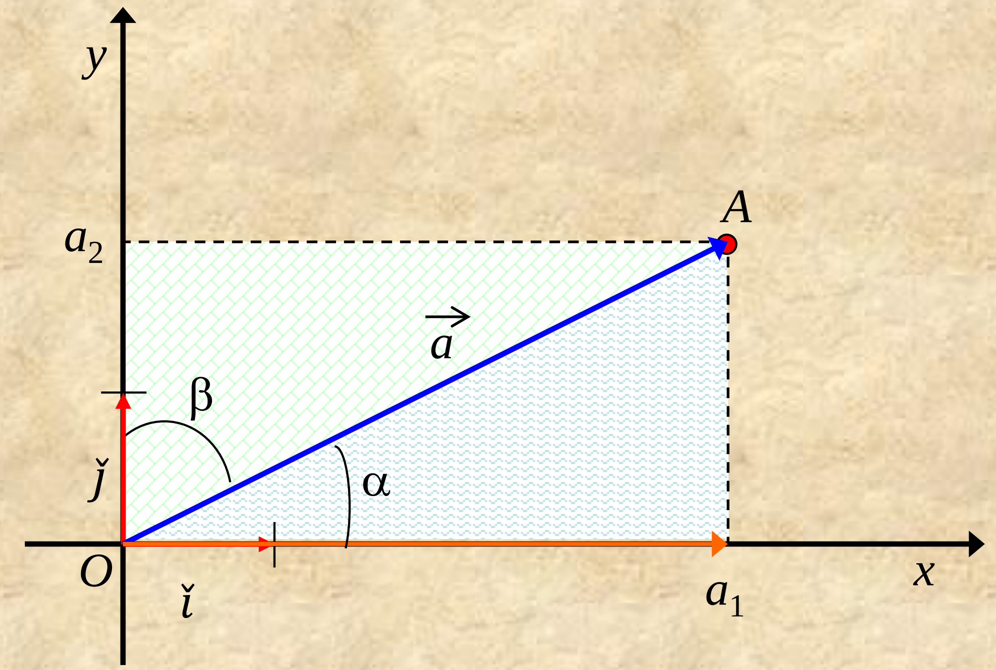
Ángulos directores de un vector en R^2

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_1\check{\imath} + a_2\check{\jmath}$$

$$\left|\vec{a}\right| = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

$a_1\check{\imath}$= proyección $_{\text{eje } x}\vec{a}$

$a_2\check{\jmath}$= proyección $_{\text{eje } y}\vec{a}$



Primer ángulo director: $\angle(\vec{a}\,;\check{\imath})$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$ Relación pitagórica

Segundo ángulo director: $\angle(\vec{a}\,;\check{\jmath})$

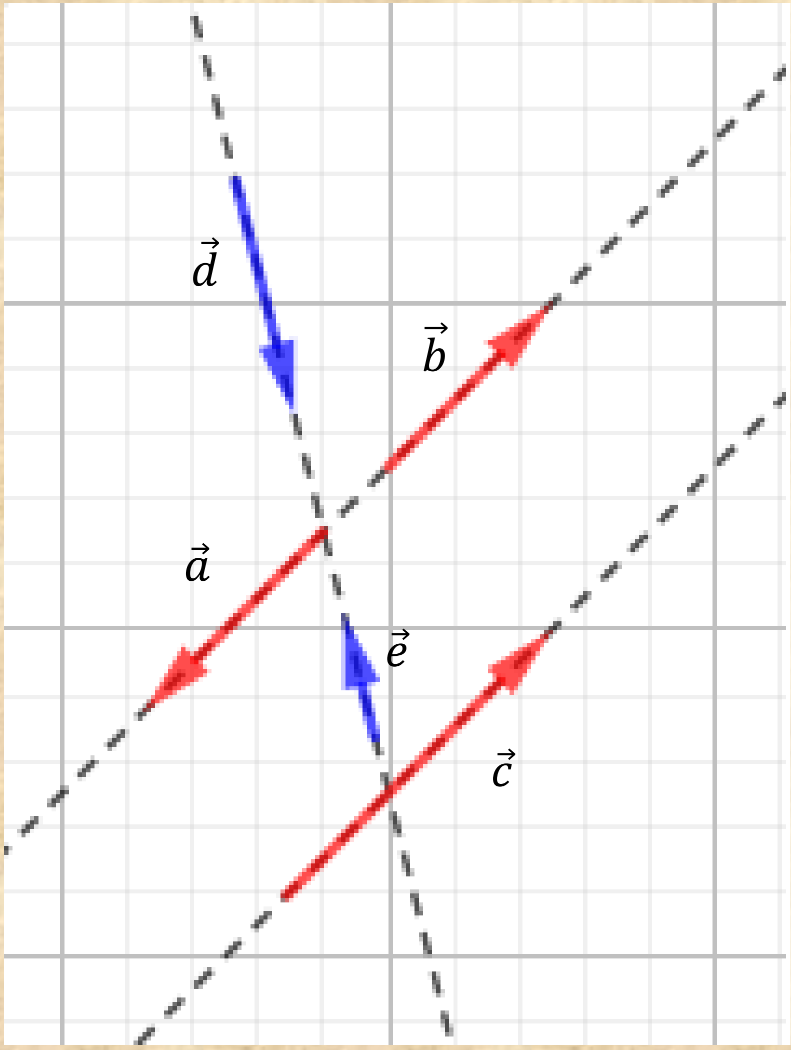
$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = (|\vec{a}|\cos\alpha,\ |\vec{a}|\cos\beta)$$

Expresión de un vector en función de sus cosenos directores

Vectores de igual dirección



$\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen la misma dirección, porque están incluidos en rectas paralelas

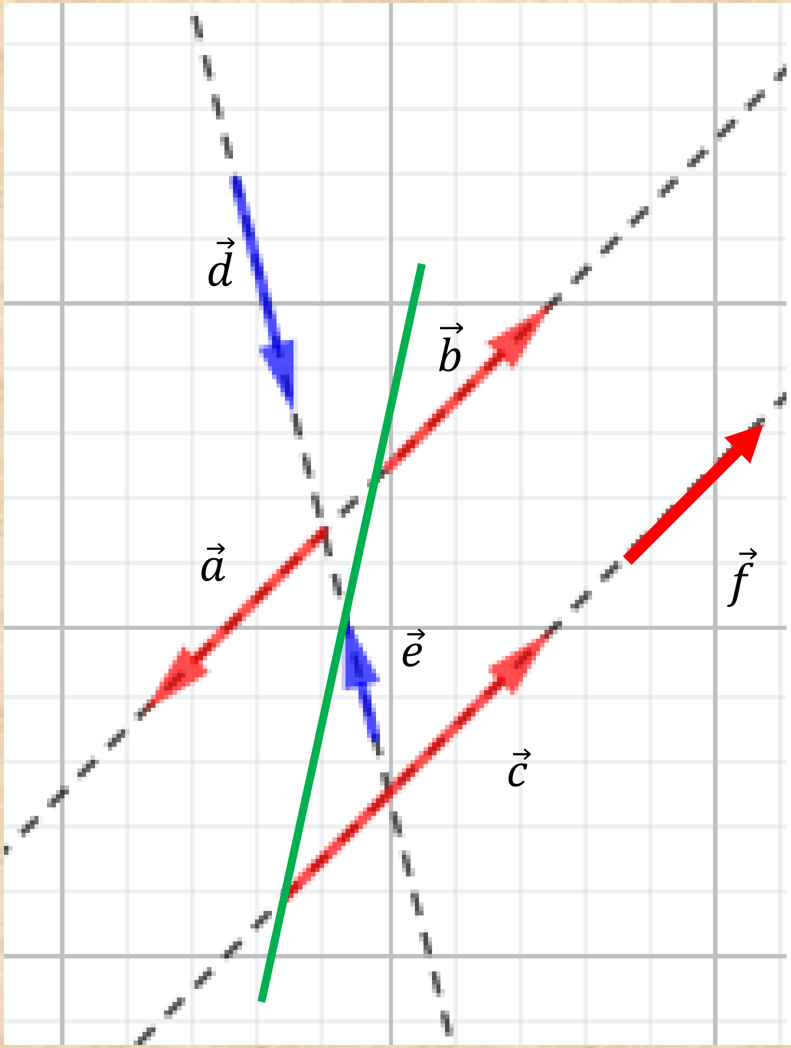
$\vec{d}$ y $\vec{e}$ tienen la misma dirección

$\vec{b}$ y $\vec{d}$ tienen distinta dirección

Aclaración: toda recta es paralela a sí misma. Por eso, decir que los vectores tienen la misma dirección porque están incluidos en rectas paralelas, también contempla el caso de vectores incluidos en la misma recta

Dos vectores tienen la misma dirección si están incluidos en rectas paralelas.
Si esto no ocurre, decimos que los vectores tienen distinta dirección

Vectores de igual sentido

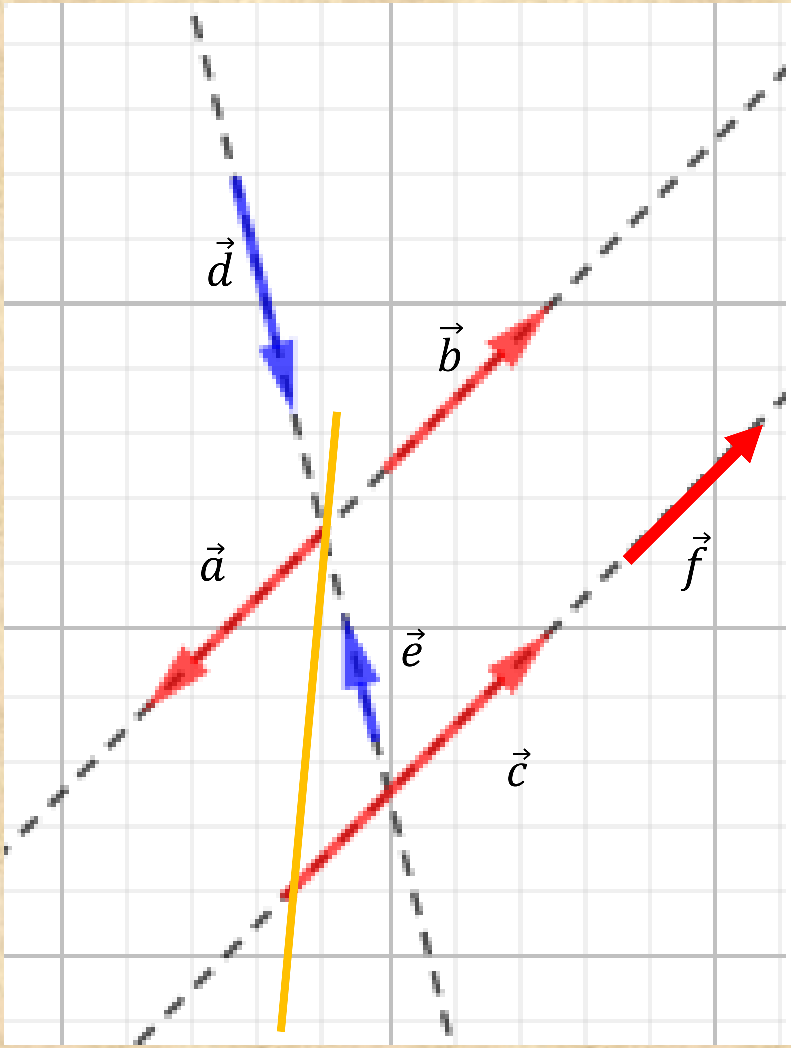


$\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen el mismo sentido,porque la recta que une ambos orígenes (dibujada en verde) deja a los extremos en un mismo semiplano

Dos vectores incluidos en la misma recta tienen igual sentido, si al recorrer la recta, ambos orígenes preceden a ambos extremos. Por lo tanto, $\vec{f}$ y $\vec{c}$ tienen el mismo sentido

Como $\vec{d}$ y $\vec{c}$ tienen distinta dirección, NADA podemos decir de sus sentidos

Vectores de distinto sentido



$\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen distinto sentido, porque la recta que une ambos orígenes (dibujada en amarillo) deja a los extremos en distintos semiplanos

$\vec{e}$ y $\vec{d}$ tienen distinto sentido, porque al recorrer la recta, por ejemplo, de abajo hacia arriba, encontramos el origen y extremo de $\vec{e}$, y el extremo y origen de $\vec{d}$, es decir, que no se verifica el hecho de que ambos orígenes preceden a ambos extremos

Como $\vec{e}$ y $\vec{f}$ tienen distinta dirección, NADA podemos decir de sus sentidos

Vectores: sentido

Sólo podemos establecer si dos vectores tienen igual o distinto sentido, si ambos vectores tienen la misma dirección

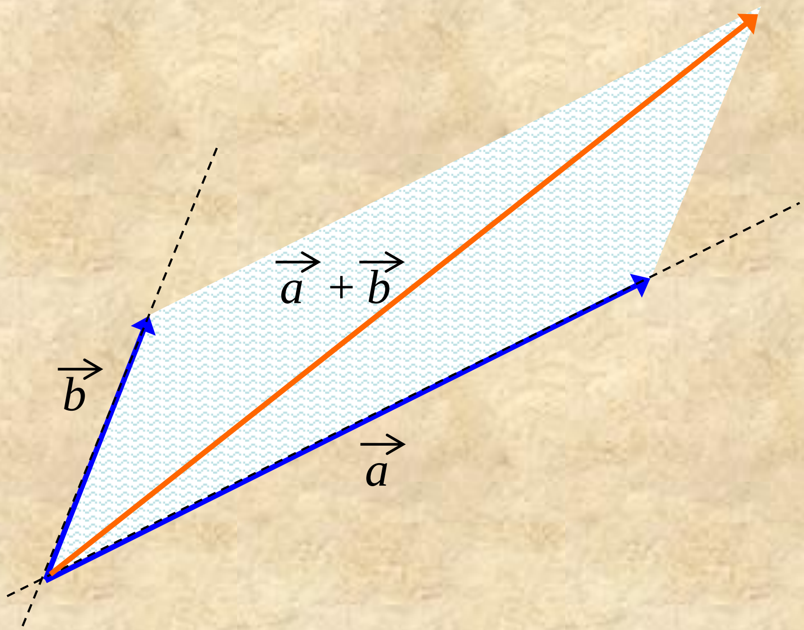
Operaciones

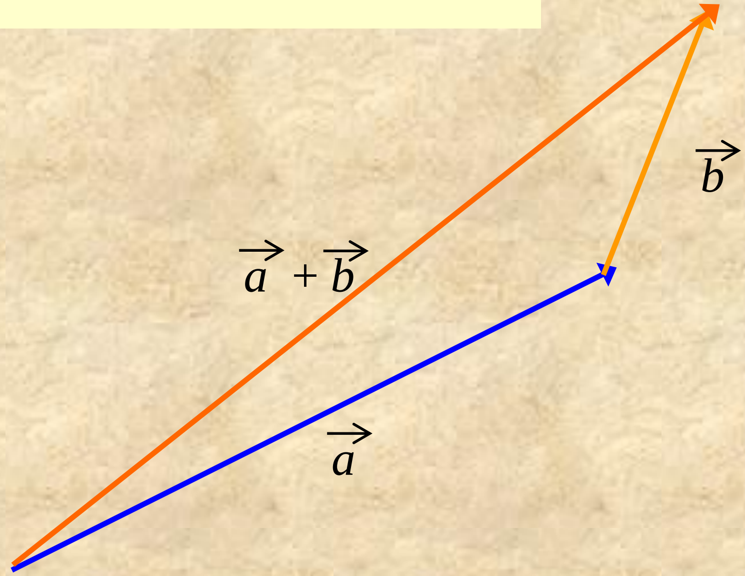
con

Vectores en el plano

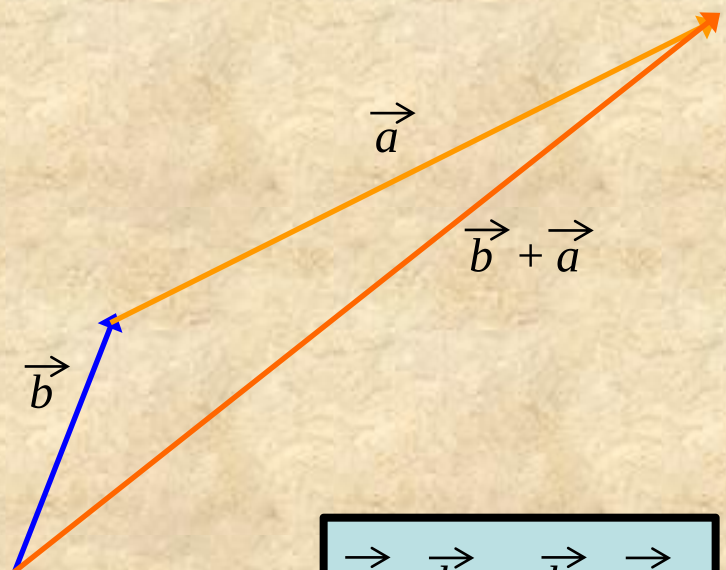
Suma de vectores

Método del paralelogramo





Método de la poligonal



si u=(x,y), v=(a,b),
u+v=(x+a,y+b)

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Dados $\vec{u}$ (1 ; 2) ; $\vec{v}$ (-6;3) y $\vec{w}$ (-2;-1)
efectuar analíticamente

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Propiedades de la suma de vectores

Consideramos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Vimos que:

$$\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

La suma de vectores verifica las siguientes propiedades

1. Es asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

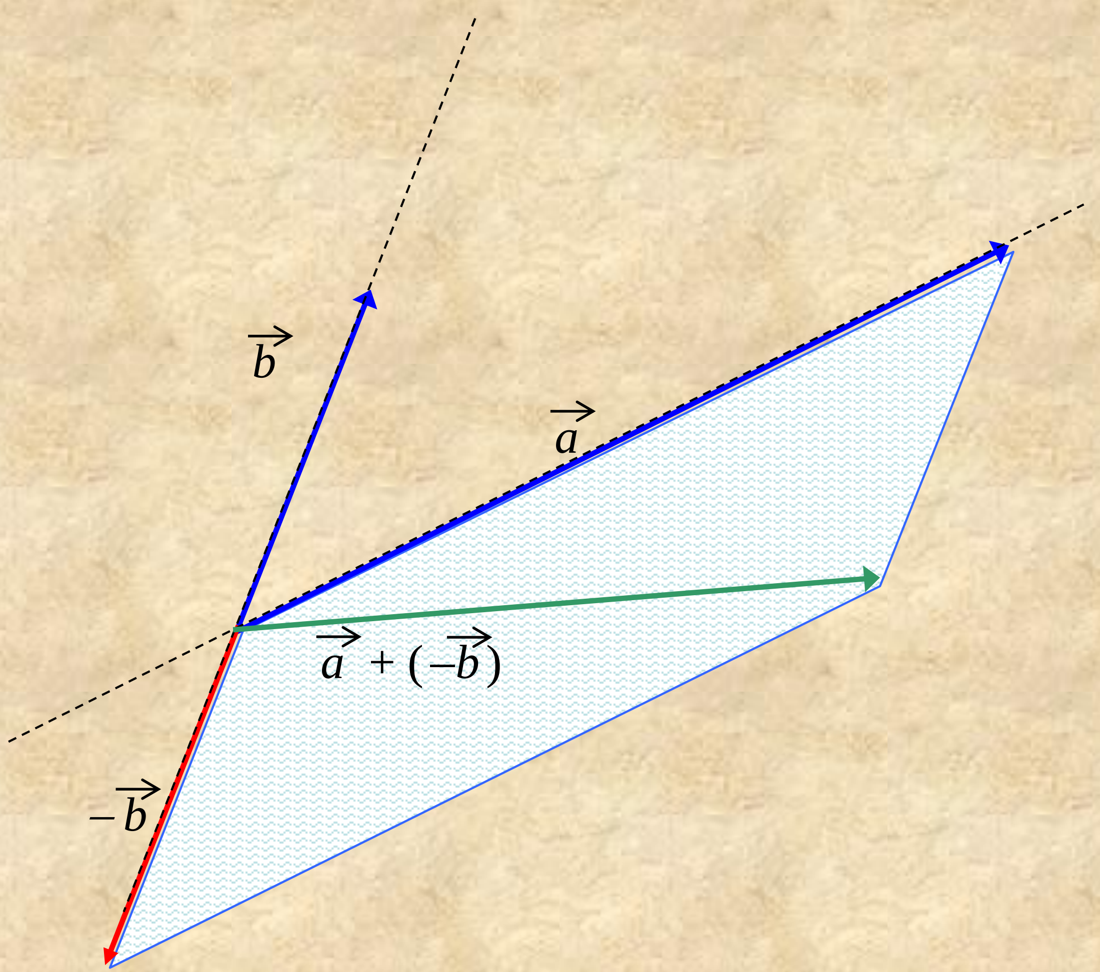
2. Es conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

3. Existe elemento neutro : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

4. Existe el opuesto de cada vector: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

No restamos vectores… Sumamos el opuesto

$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



si u=(x,y), v=(a,b), u+(-v)=(x+(-a),y+(-b))

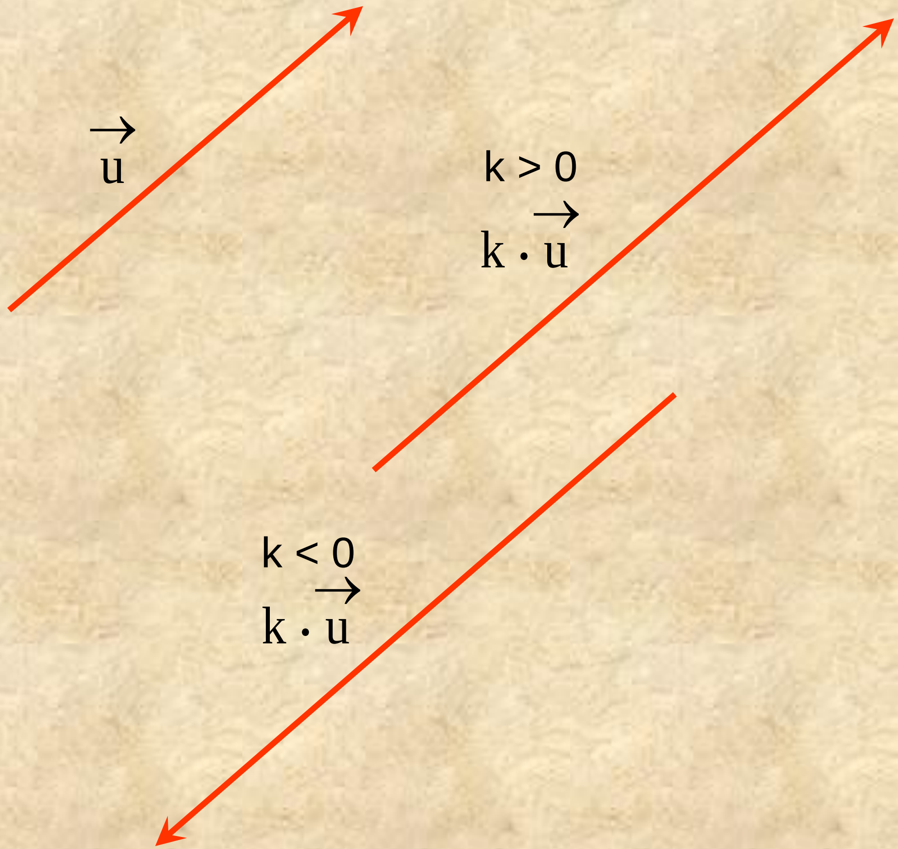
Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Dados $\vec{u}$ (1 ; 2) ; $\vec{v}$ (-6;3) y $\vec{w}$ (-2;-1)
efectuar analíticamente

$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

Producto de un vector por un escalar

Es un vector cuyas componentes se obtienen multiplicándolas por el escalar k ; tendrá la misma dirección, su módulo queda multiplicado por k y el sentido depende del signo de k



- k > 0: el módulo del vector queda multiplicado por k
- El sentido permanece

- k < 0: el módulo del vector queda multiplicado por – k
- El sentido cambia

Si $k = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Dados $\vec{u}$ (1 ; 2) ; $\vec{v}$ (-6;3) y $\vec{w}$ (-2;-1)
efectuar analíticamente

$2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

Producto de un vector por un escalar

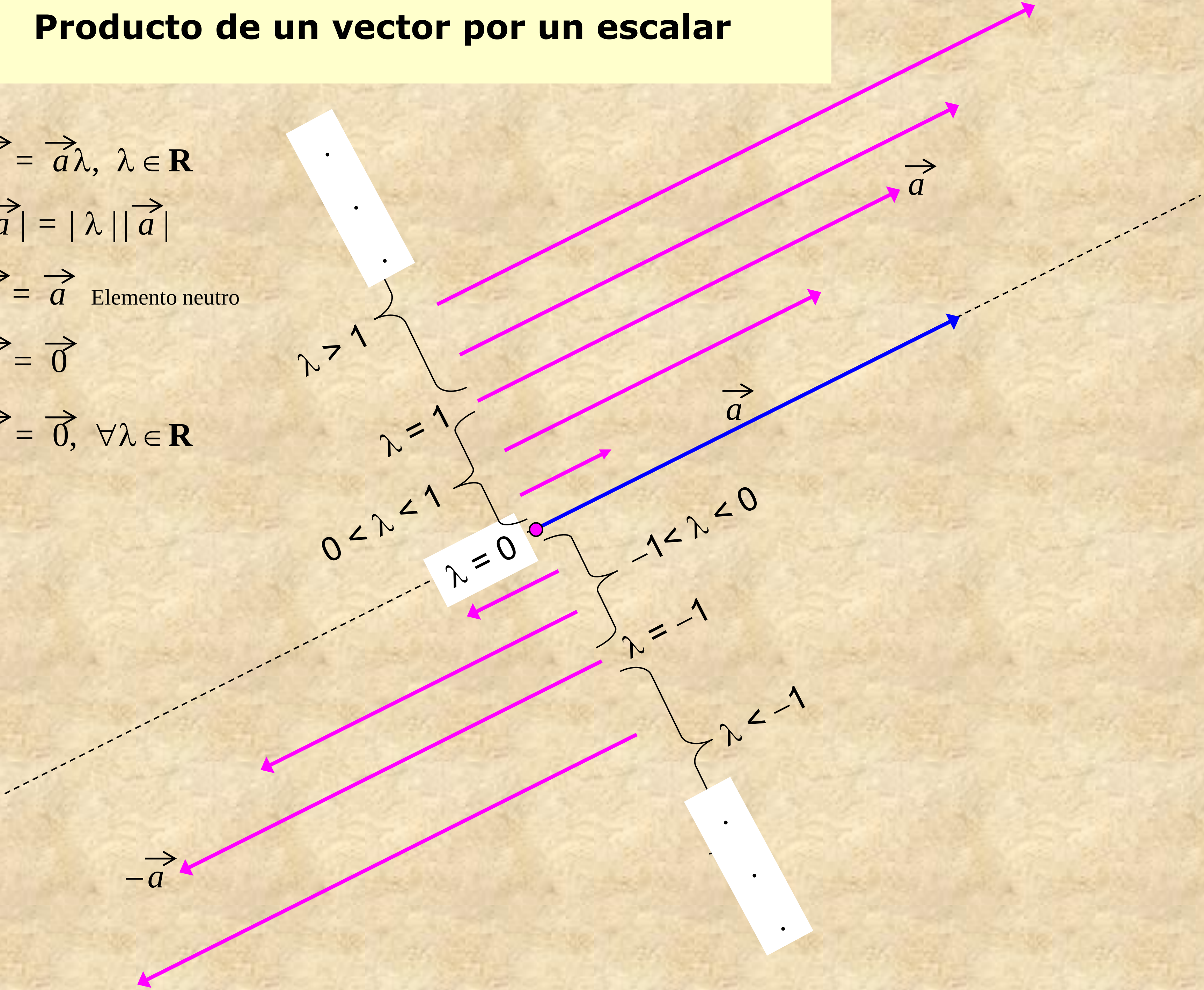
$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

$1\vec{a} = \vec{a}$ Elemento neutro

$0\vec{a} = \vec{0}$

$\lambda\vec{0} = \vec{0},\ \forall\lambda \in \mathbf{R}$



Producto de un vector por un escalar
Conclusiones

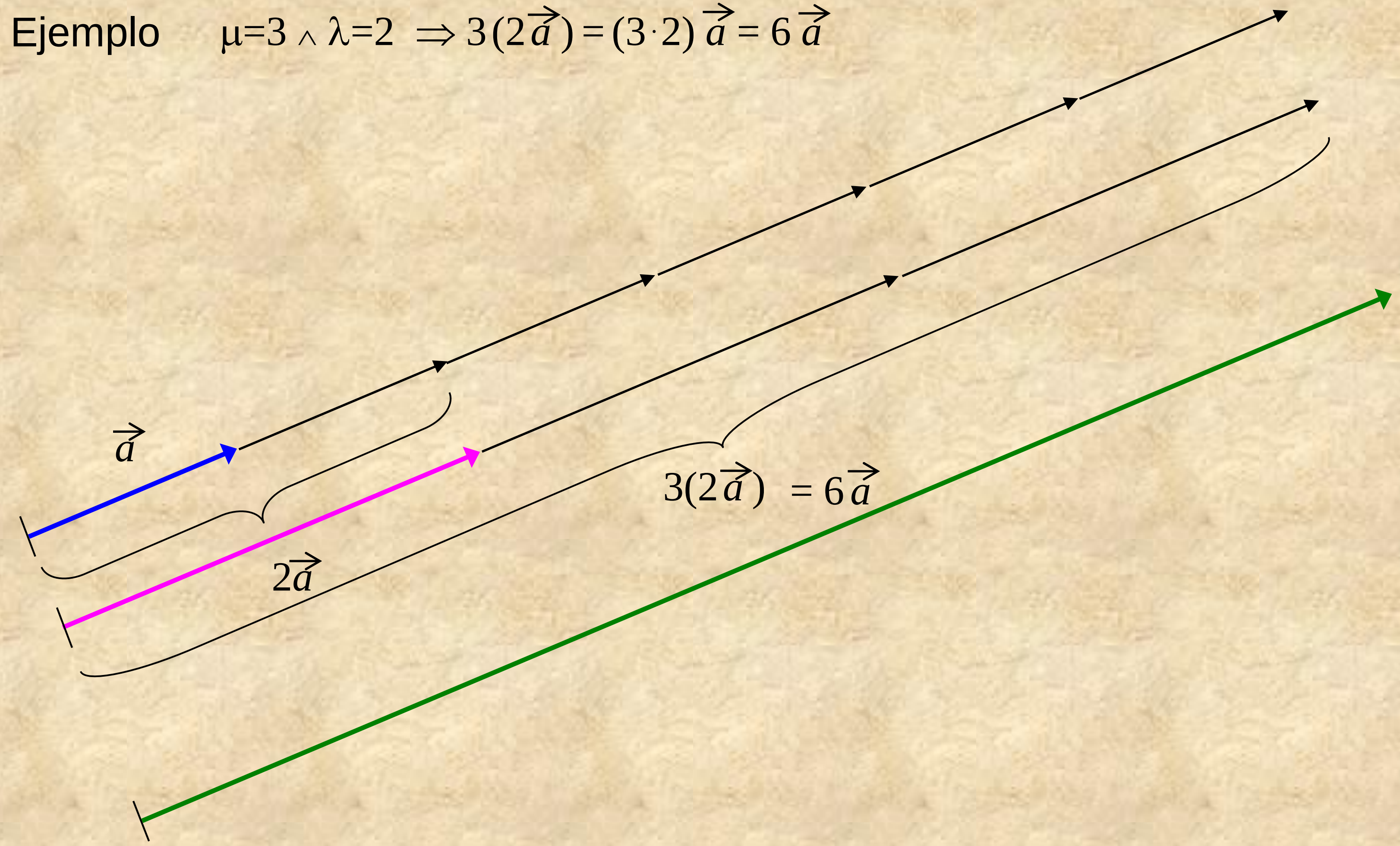
El producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar λ es un vector $(\lambda\vec{v})$ tal que:

- $\vec{v}$ y $(\lambda\vec{v})$ tienen la misma dirección
- Si $\lambda > 0, \vec{v}$ y $(\lambda\vec{v})$ tienen el mismo sentido
- Si $\lambda < 0, \vec{v}$ y $(\lambda\vec{v})$ tienen sentido contrario
- Si $\lambda = 0, (\lambda\vec{v})= \vec{0}$
- $|\lambda\vec{v}| = |\lambda|.|\vec{v}|$ (El módulo del vector $\lambda.\vec{v}$ es $|\lambda|$veces el módulo del vector $\vec{v}$.

Producto de un vector por un escalar

$\mu\,(\lambda\vec{a}) = (\mu\,\lambda)\,\vec{a}\,,\ \mu \in \mathbf{R},\ \lambda \in \mathbf{R}$ Propiedad asociativa mixta

Ejemplo $\mu=3 \wedge \lambda=2 \Rightarrow 3(2\vec{a}) = (3\cdot 2)\,\vec{a} = 6\,\vec{a}$



Producto escalar

Se define el producto escalar como la sumatoria del producto de las componentes correspondientes. (es un n° real)

$$\vec{u} = (x; y) \quad \vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{a}; \mathrm{b}) \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = x.a + y.b$$

Teoremas:

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores y k un escalar

a) $\vec{a}.\vec{0}$=0.

b) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$conmutativa

c) $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ley distributiva del producto escalar

d) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ asociatividad mixta

Condición de anulación del producto escalar:

$$\vec{a} \, . \, \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, si el producto escalar de dos vectores no nulos es 0, dichos vectores SON PERPENDICULARES

Resolvemos los ejercicios de la guía de actividades

Calcular el producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

A) $\vec{a}$ = (3;0) y $\vec{b}$ =(1;1)

B) $\vec{a}$ = (-5;0)y$\vec{b}$ =(0;18)

Sean $\vec{u}$ = 3ˇ+ 4ˇ y $\vec{v}$ = ˇ+ αj, determinar α tal que:
A) sean ortogonales

Ángulo entre dos vectores:

Dados dos vectores no nulos u y v; el ángulo α entre ellos es el ángulo no-negativo mas pequeño entre las representaciones de u y v que tienen el origen como punto inicial.

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u|.|v|}$$

Si u y v $\neq 0$

Resolvemos los ejercicios de la guía de actividades

Calcular el ángulo que determinan, en los siguientes casos $\vec{a}$ y $\vec{b}$

A) $\vec{a}$ = (3;0) y $\vec{b}$ =(1;1)

B) $\vec{a}$ = (-5;0)y$\vec{b}$ =(0;18)

Encontrar $\vec{v}$ que tenga la norma y dirección dadas:

A) $|\vec{v}| = 3;\ \theta = \pi/6$ B) $|\vec{v}| = 1;\ \theta = \pi/4$

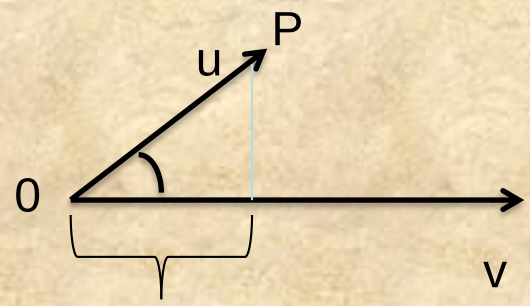
Sean $\vec{u} = 3\breve{\imath} + 4\breve{\jmath}$ y $\vec{v} = \breve{\imath} + \alpha\breve{\jmath}$, determinar α tal que:

el ángulo entre ellos sea $\theta = \pi/4$

Proyección entre dos vectores

Sean u y v vectores no-nulos, la proyección de u sobre v, es un vector cuyo origen es 0 y cuyo extremo es el pie de la perpendicular trazada desde p a la recta v

$$proy_v u = \frac{u \bullet v}{|v|^2}.v$$



$$proy_v u$$

Propiedades:

Tienen la misma dirección si u.v > 0

Tienen sentidos opuestos si u.v < 0

Si u y v son ortogonales entonces u.v=0

$$proy_v u = o$$ vector nulo

Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Calcular $proy_v u$, en los siguientes casos:

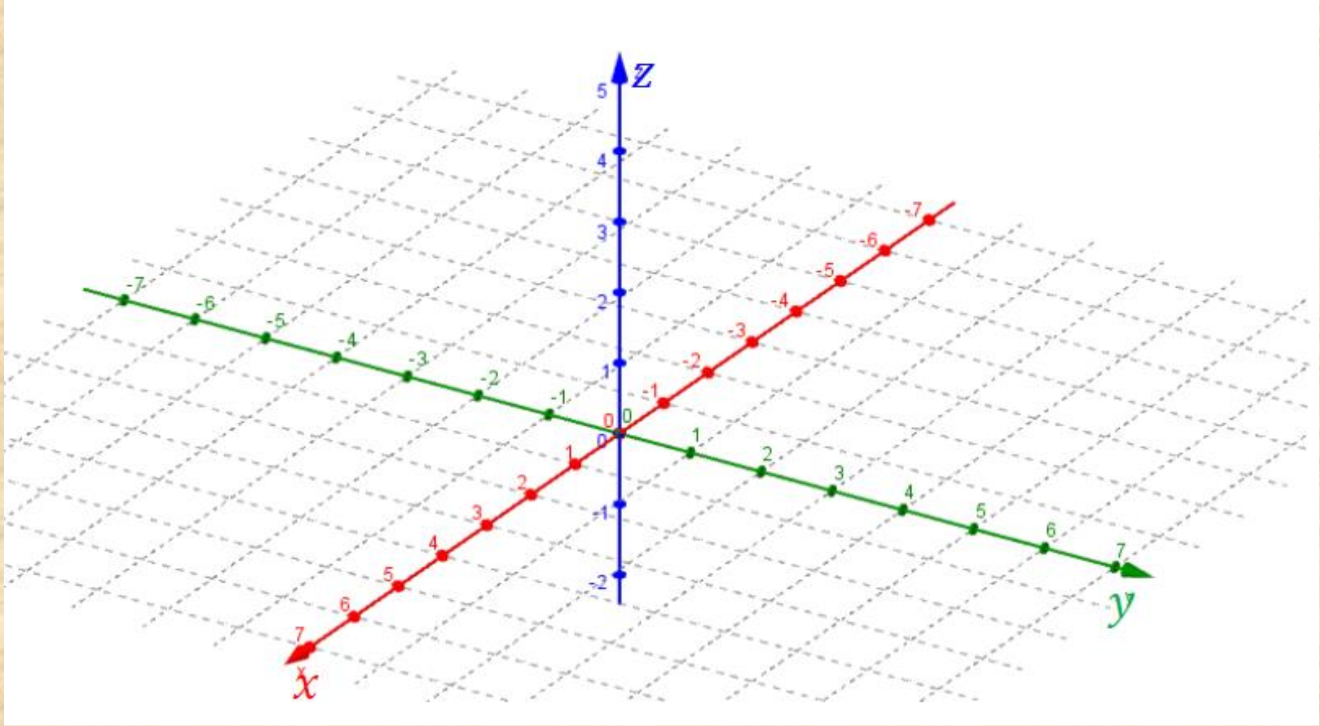
$\vec{u} = 3\hat{\imath}$; $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$

$\vec{u} = -5\hat{\jmath}$; $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Sistema de referencia en el espacio $(\mathbb{R}^3)$

Para ubicar un punto en $\mathbb{R}^3$ usamos como sistema de referencia una terna de ejes perpendiculares entre sí, que se cortan mutuamente en el punto O, que es el origen de coordenadas:

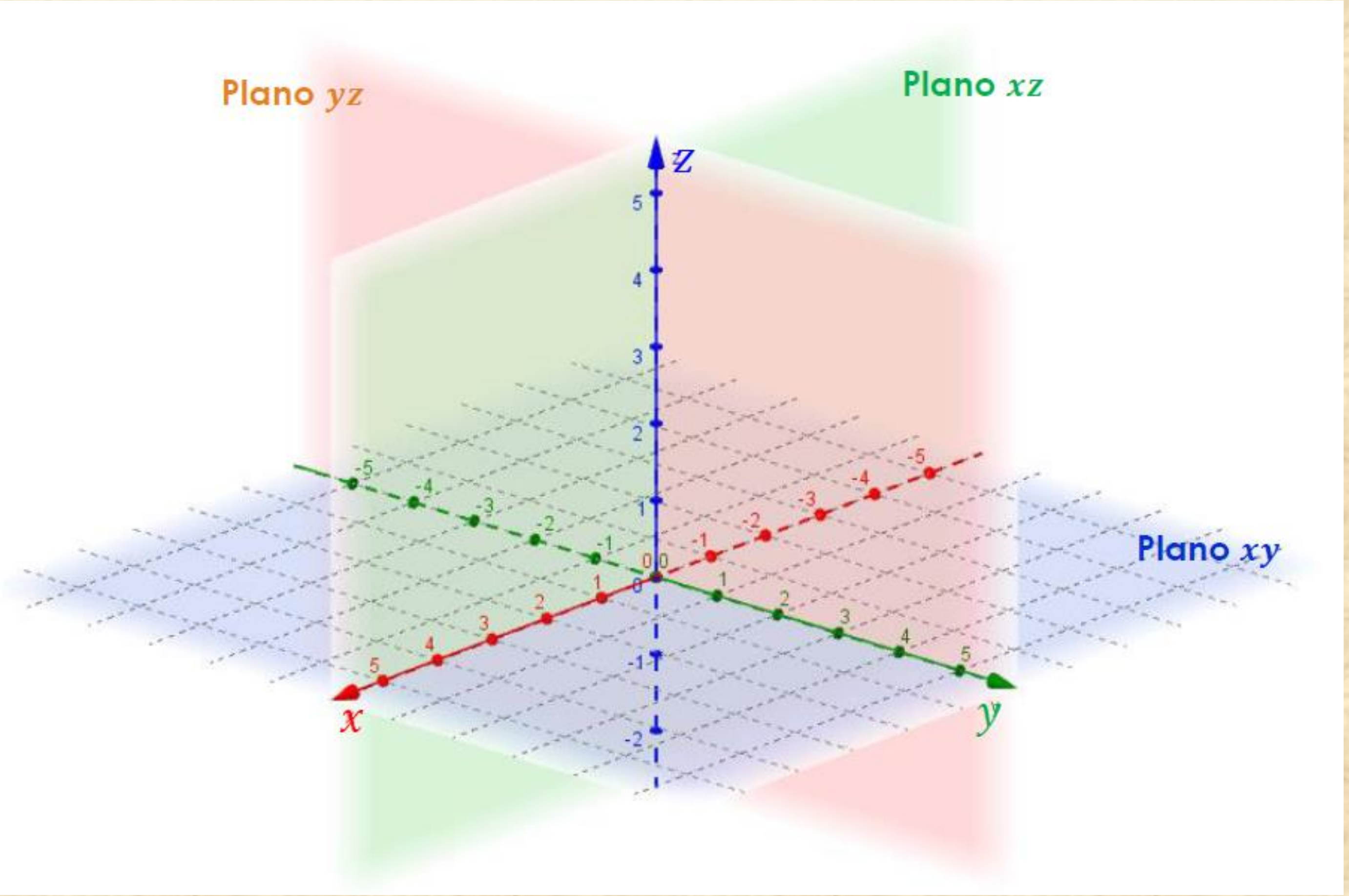
- eje *x* (eje de abscisas, en rojo)
- eje *y* (eje de ordenadas, en verde)
- eje *z* (eje de cotas, en azul)



Planos coordenados

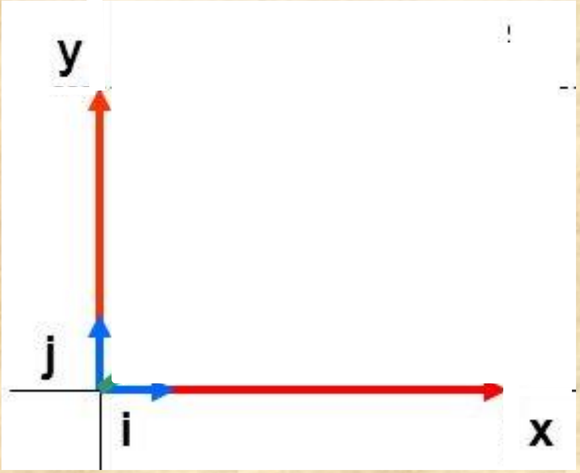
Quedan determinados tres planos:

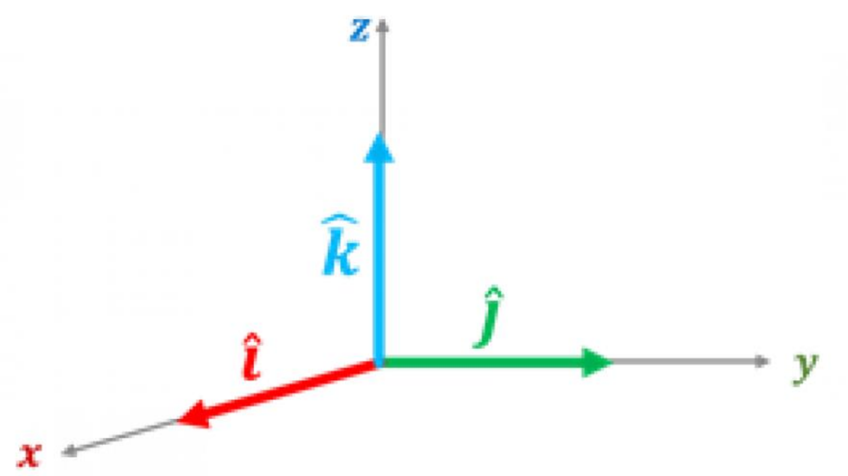
- el plano xy (en azul)
- el plano xz (en verde)
- el plano yz (en rosa)



Versor o vector unitario

Es un vector de módulo uno. Se simboliza como $\check{v}$ o como $\hat{v}$
Tanto en el plano como en el espacio, cuando usamos ejes cartesianos para representar vectores, necesitamos conocer la "unidad de medida" sobre cada eje

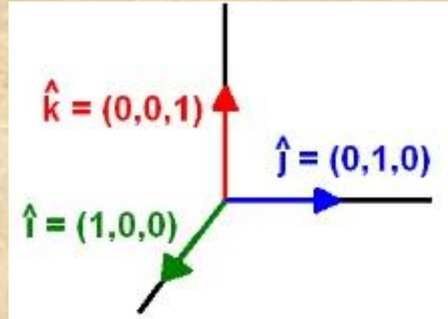




Dicha unidad de medida está constituida por versores, que se nombran $\check{\imath}, \check{\jmath}, \check{k}$ para los ejes x, y, z, respectivamente

$\check{\imath}=(1;0)$ y $\check{\jmath}=(0;1)$ son los versores en el plano ($\mathbb{R}^2$)

$\check{\imath}=(1;0;\ 0)$, $\check{\jmath}=(0;1;\ 0)$ y $\check{k}=(0;0;1)$ son los versores en el espacio ($\mathbb{R}^3$)



Resolvemos el ejercicios de la guía de actividades

Considerando $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3) ; $\vec{v}$(-1;4; 6) y $\vec{w}$ (7;-3; -4)

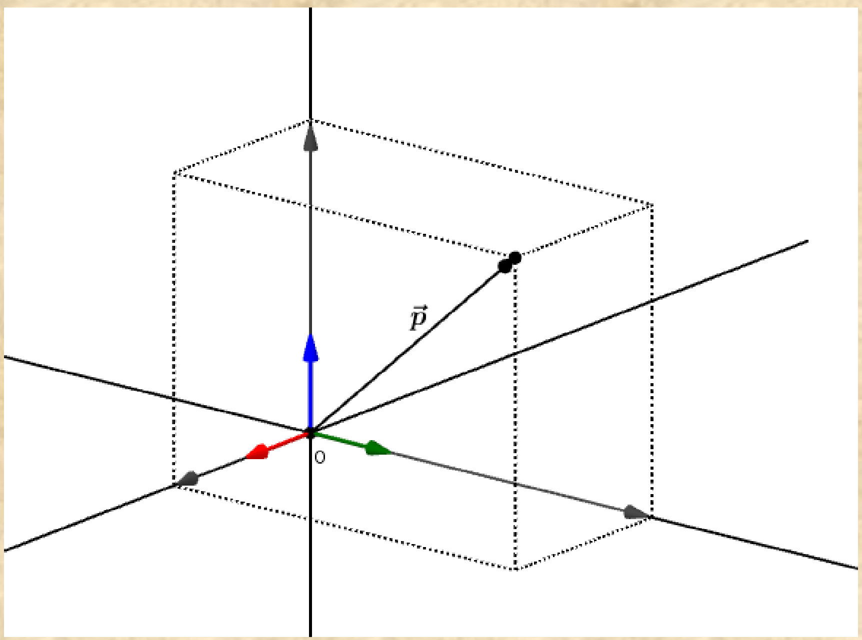
Efectuar analíticamente las siguientes operaciones:

a) $-2\vec{u} + 3\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$ $b)$ $-\vec{u} - 2(4\vec{v} + \vec{w})$

Calcular el módulo de cada vector obtenido y el versor correspondiente a cada uno de ellos

Expresión canónica de un vector en el espacio

Todo vector de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como *combinación lineal* de los versores canónicos: ˘=(1,0,0); ˘=(0,1,0); ˘=(0,0,1)



$$\vec{v} = (x, y, z)$$
$$\vec{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$\vec{v} = x.˘ + y.˘ + z.˘ \quad (expresión\ canónica)$$

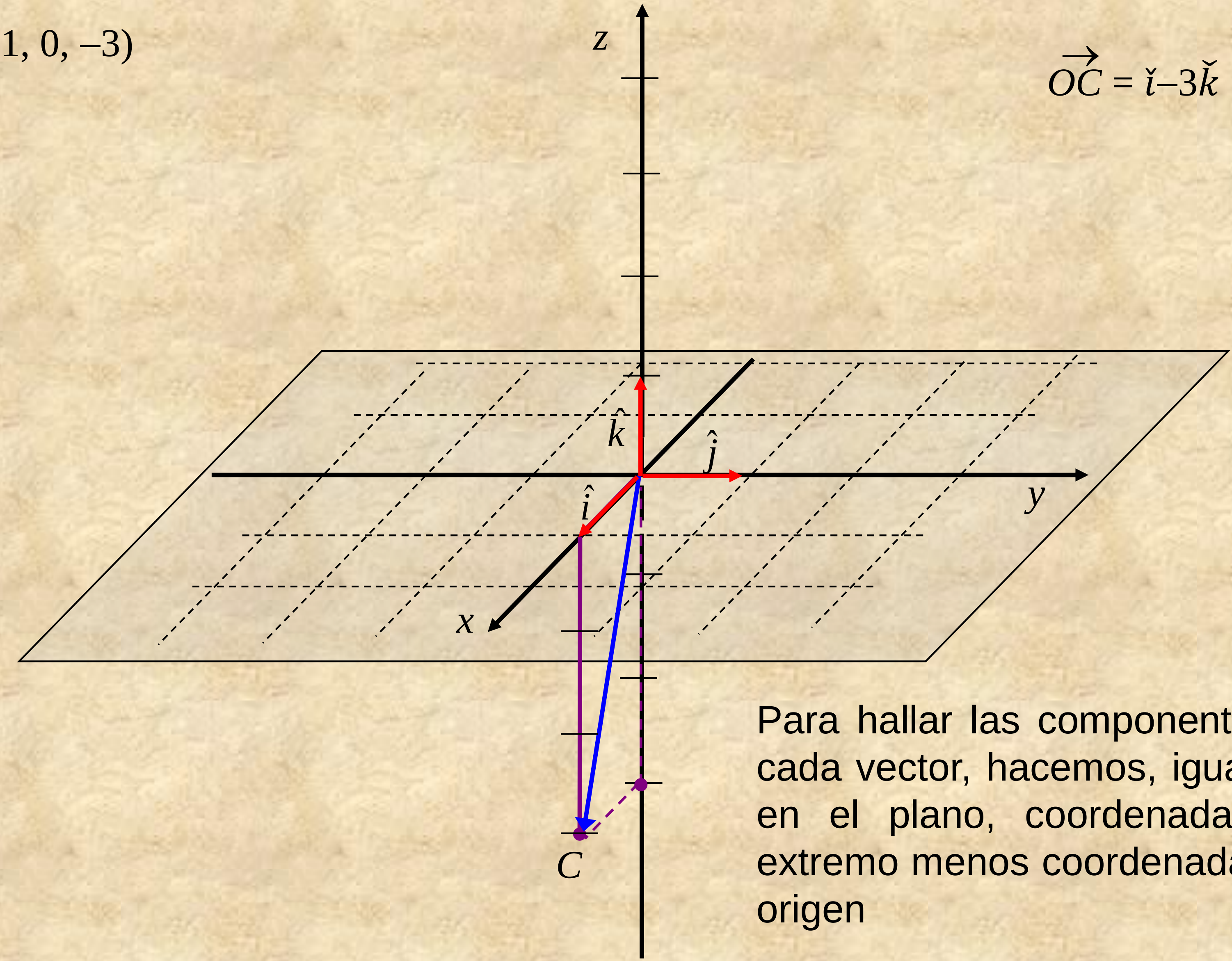
Sistema de referencia cartesiano ortogonal en el espacio ($\mathbb{R}^3$)

$P(x, y, z)$

$C(1, 0, -3)$

$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \equiv x\check{\imath} + y\check{\jmath} + z\check{k}$

$\overrightarrow{OC} = \check{\imath} - 3\check{k}$



Para hallar las componentes de cada vector, hacemos, igual que en el plano, coordenadas del extremo menos coordenadas del origen

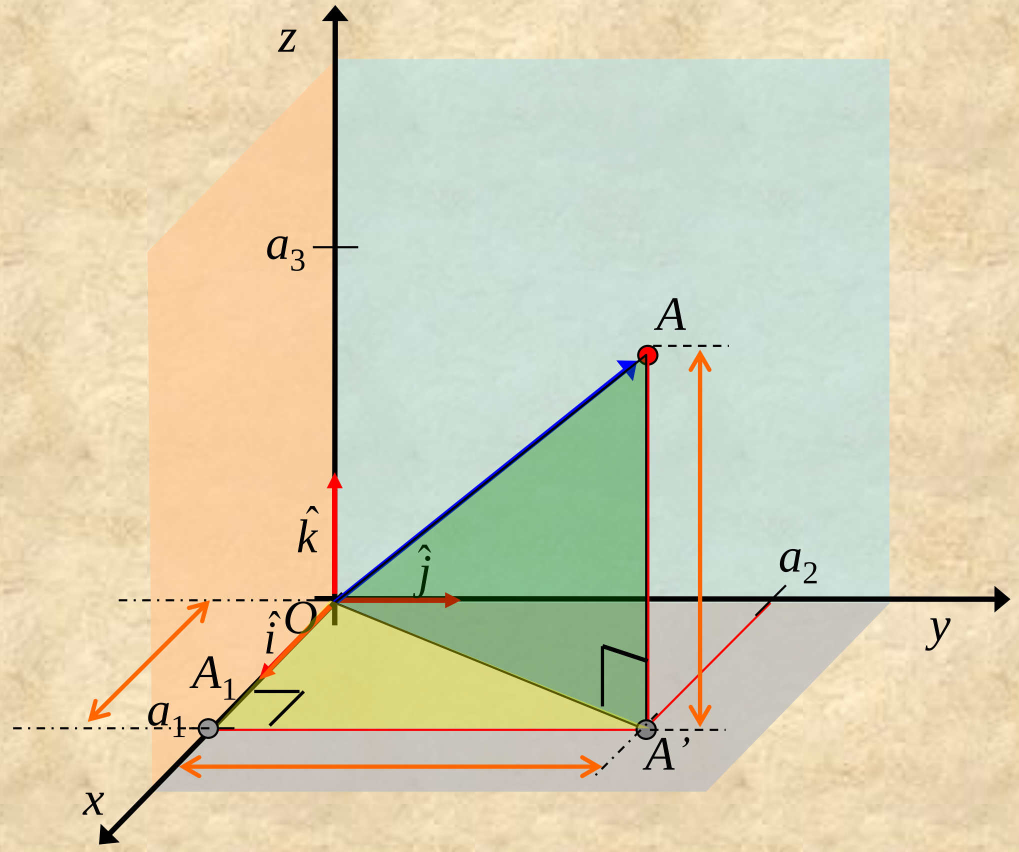
Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

- Determinar los valores de x,y,z para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ resulten equipolentes en los siguientes casos:

B) A=(0;0;0) B=(2;1;x+y) P=(1;-1;0) Q=(x;y;3)

C) A=(x;2;2x) B=(-3y;z;-y) P=(10;x;-5) Q=(z;y;-3z)

Módulo de un vector en $\mathbf{R}^3$



$$|\overrightarrow{OA}|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$$

$$\boxed{|\overrightarrow{OA}| = +\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \in \mathbf{R}_{\geq 0}}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

(vector nulo)

$\vec{u}$

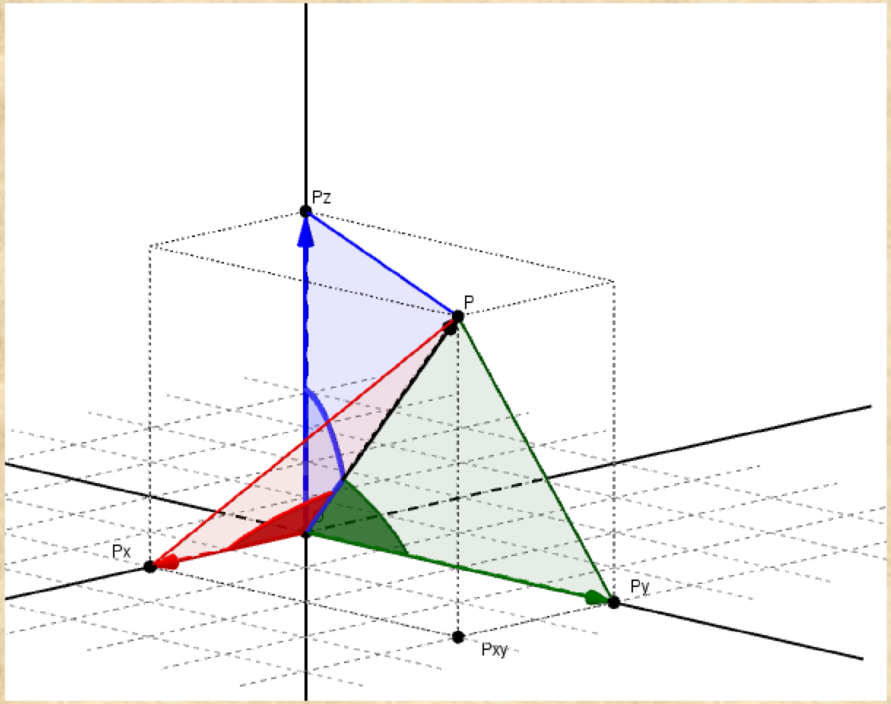
Resolvemos ejercicios de la guía de actividades

Sabiendo que la norma del vector $\vec{a}$ es 13 y siendo $\vec{a}$ =(x;3;4). Hallar "x"

Dado el vector $\vec{a}$ =(x;x;x) y sabiendo que $|\vec{a}|$=5,encontrar las componentes de $\vec{a}$.

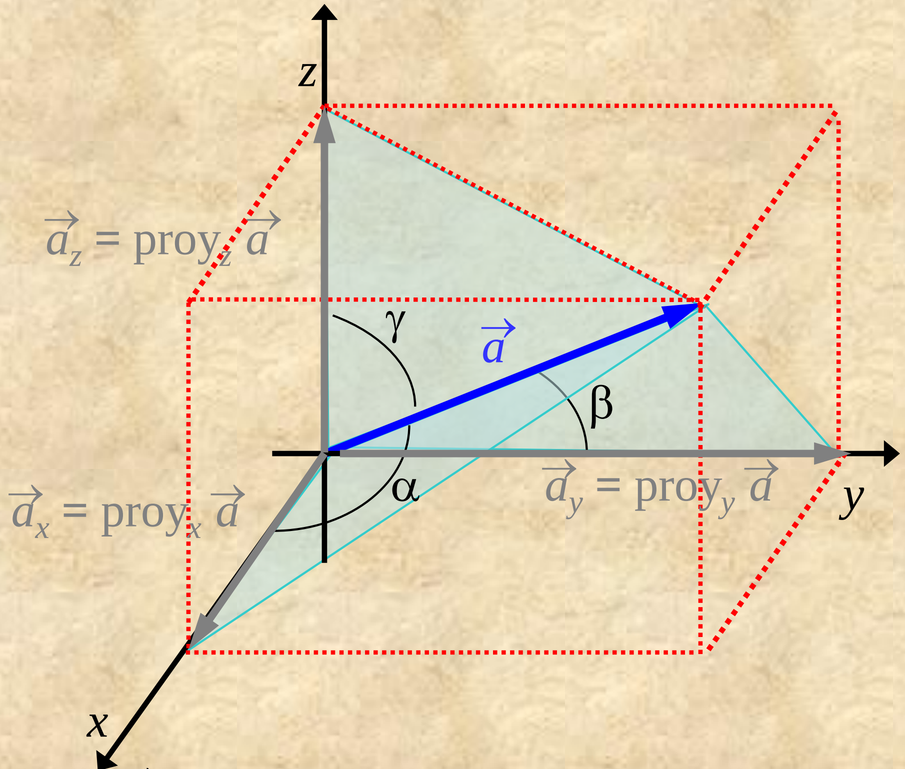
Ángulos directores de un vector

Llamamos *ángulos directores* de un vector a los ángulos determinados por el vector y cada uno de los semiejes positivos, como se muestra en la siguiente figura:



Los cosenos de dichos ángulos se llaman cosenos directores

Ángulos directores de un vector en R³



$$|\vec{a}|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$ Relación pitagórica

Primer ángulo director: $\angle(a\,;\check{\imath})$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

Segundo ángulo director: $\angle(a\,;\check{\jmath})$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

Tercer ángulo director: $\angle(a\,;\check{k})$

$$0 \leq \gamma \leq \pi$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

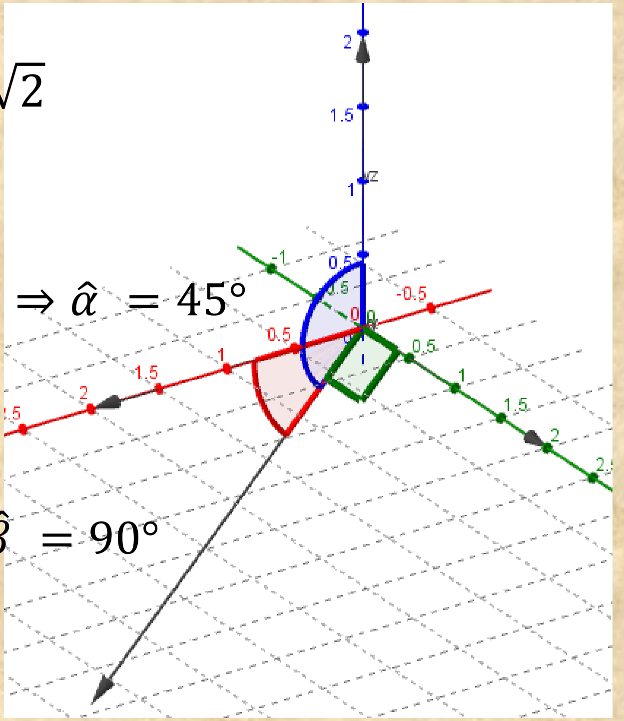
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$$

Expresión de un vector en función de sus cosenos directores

Ejemplo

Hallar los ángulos directores de $\vec{a} = (2; 0; -2)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{\alpha} = arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \hat{\alpha} \ = 45°$$

$$cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{0}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{\beta} = arc\cos(0) \Rightarrow \hat{\beta} \ = 90°$$

$$cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{\gamma} = arc\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \hat{\gamma} \ = 135°$$

Comprobación gráfica

$\hat{\alpha}$ en rojo (ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las x)

$\hat{\beta}$ en verde (ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las y)

$\hat{\gamma}$ en azul (ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las z)

Operaciones

con

Vectores en el espacio

Norma de un vector en R^3

sea u = (u_1; u_2; u_3) ⟹ $$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Suma: $$u + v = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

Resta: $$u + (-v) = (u_1 + (-v_1); u_2 + (-v_2); u_3 + (-v_3))$$

Multiplicación por un escalar: $$\alpha.u = (\alpha.u_1; \alpha.u_2; \alpha.u_3)$$

Producto escalar: $$u \bullet v = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3)$$

Ángulo entre 2 vectores R^3: $$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u|.|v|}$$ si u y v $\neq 0$

Proyección de un vector sobre otro: $$proy_v u = \frac{u \bullet v}{|v|^2}.v$$

A resolver los ejercicios restantes
de la guía de actividades

FIN