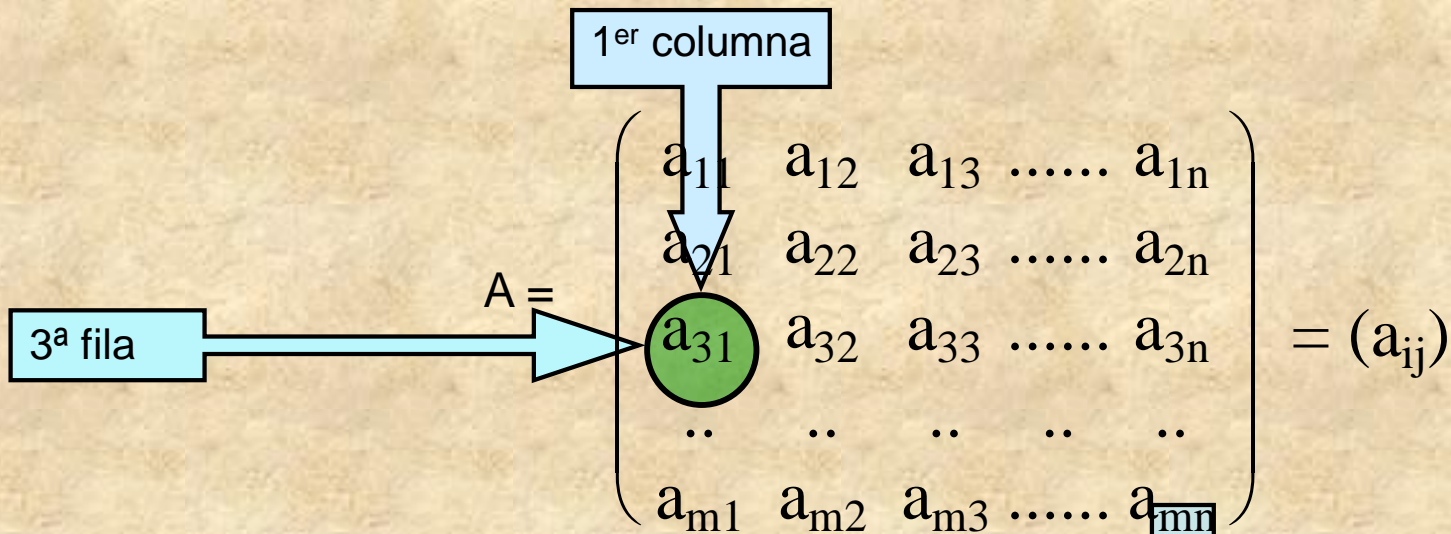


Unidad N^o 1

Matrices

Matriz

Se llama **matriz** a una disposición bidimensional de números reales, a los cuales se les denomina **elementos** de la matriz. Cada elemento tiene dos subíndices, el primero “i” indica la fila y el segundo “j” la columna . El máximo número de filas será m y el de columnas n, con éstos últimos se indicará la dimensión de la matriz.



Dimensión de la matriz

$m \times n$

1) a

1) b



Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 4 \\ 8 & -\frac{1}{4} & 11 \end{pmatrix}$$

A es una matriz cuadrada de orden 3, donde:

$$a_{11} = 2; a_{12} = \sqrt{5}; a_{13} = \frac{2}{3}; a_{21} = -1; a_{22} = 0$$
$$a_{23} = 4; a_{31} = 8; a_{32} = -\frac{1}{4}; a_{33} = 11$$

Realizamos la actividad del cuadernillo

2) B

2) C



Igualdad de matrices

Dos **matrices** son **iguales** cuando tienen **el mismo orden** y los **elementos** que ocupan la misma posición en cada una de ellas son **iguales**

$$A = (a_{ij}) \text{ y } B = (b_{ij}) \text{ resulta } A = B \Leftrightarrow (a_{ij}) = (b_{ij}), \forall i, \forall j$$

¿Son iguales las matrices de cada ítem? Justificar la respuesta:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 5x \\ 6y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Traza de una matriz

- **Traza de una matriz cuadrada:** es la suma de los elementos de la diagonal .
- Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Traza:
 $\text{Tr}(A) = 1 + 4 + 10 = 15$

- **Propiedades de la traza:**
- $\text{Tr}(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \text{Tr}(A)$
- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$

Operaciones con matrices

Trasposición de matrices

Dada una matriz de orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$, se llama **matriz traspuesta de A**, y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A. Si A es $m \times n$, entonces A^t es $n \times m$

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Respecto de la trasposición de matrices:

- Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además **es única**.

- **Matriz simétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta:

$$A \in R^{n \times n}, A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz anti simétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta

$$A \in R^{n \times n}, A \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow A = -A^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Observación:**

- En toda matriz anti simétrica los elementos de la diagonal son nulos.

Suma de matrices:

- Para sumar dos matrices A y B éstas deben tener la misma dimensión.
- Definición: dadas dos matrices A y B la matriz suma es otra matriz, cuyos elementos se obtienen sumando los elementos que ocupan la misma posición.

$$\text{Se } A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in R^{m \times n} : A + B = C$$

$$\text{siendo } C = (c_{ij}) \in R^{m \times n} / \forall_i, \forall_j : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & a_{34} + b_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} = C$$

Operaciones con matrices

Producto de un número por una matriz

Para multiplicar **un número real por una matriz**, se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número.

Si $A = (a_{ij})$, entonces $kA = (ka_{ij})$

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} = (ka_{ij})$$

Sustracción de matrices

Si en particular, $k = -1$, la matriz $-1 \cdot A$ se denomina opuesta de A , y se simboliza con $-A$.

La matriz $A + (-B) = A - B$ se denomina matriz diferencia de A y B

Realizamos la actividad del cuadernillo

3) a y 3) b



Producto de matrices:

¿Cuándo es posible el producto de matrices?

The diagram shows the matrix multiplication equation $(a_{ij})_{m,n} \cdot (b_{ij})_{n,p} = (c_{ij})_{m,p}$. A blue bracket labeled "filas" (rows) spans the first and third matrices, indicating they share the same number of rows (m). A red bracket labeled "Posible" (Possible) connects the column index n of the first matrix to the row index n of the second matrix, indicating they must be equal. A green bracket labeled "columnas" (columns) spans the second and third matrices, indicating they share the same number of columns (p).

$$(a_{ij})_{m,n} \cdot (b_{ij})_{n,p} = (c_{ij})_{m,p}$$

filas

Posible

columnas

El producto de matrices es posible cuando coincide el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda matriz.

Producto de matrices:

Dadas las matrices $A_{m \times p}$ y $B_{p \times n}$, la matriz producto $A \cdot B$ es de orden $m \times n$.

$$A \cdot B = C \quad / \quad A \in R^{m \times p} \text{ y } B \in R^{p \times n} \Rightarrow C \in R^{m \times n}$$

Cada elemento se obtiene como una combinación lineal de la fila y la columna correspondiente a cada posición; es decir:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

En general:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

no se pueden multiplicar

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

Realizamos la actividad del cuadernillo

4) a

4) b



Potencia de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, **las potencias de A** , de exponente natural, se definen como en el caso de los números naturales: el exponente indica el número de veces que se multiplica la matriz por sí misma.

$$A^n = A \cdot A \cdot \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \cdot A$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \underbrace{A \dots A}_{n \text{-veces}} = A \cdot A^{n-1}$$

Rango de una Matriz:

Es el mayor número de vectores columna canónicos distintos que se pueden obtener de una matriz aplicando sucesivas operaciones elementales.

Vector canónico: es aquel en el cual todos los elementos son ceros; excepto uno que vale 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 3$$

$$\rho(B) = 2$$

$$\rho(C) = 2$$

Método de Gauss- Jordan para el cálculo del rango de una matriz

Regla del rectángulo:

Obtención del transformado: el transformado de un elemento es igual a la resta del producto de los elementos de la diagonal y el producto de los elementos de la contradiagonal; dividido por el pivote

Procedimiento:

- 1) Se elige un pivote (elemento distinto de cero; preferentemente 1)
- 2) La fila del pivote se divide por el pivote (si es 1 omito este paso)
- 3) Los elementos de la columna del pivote se transforman en cero, excepto el pivote que se transforma en 1
- 4) Los demás elementos se transforman por la regla del rectángulo.
- 5) Repito el procedimiento eligiendo otro pivote que no pertenezca ni a la fila ni a la columna del pivote elegido anteriormente.

Realizamos la actividad del cuadernillo

21) a

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



Matriz Inversa :

Sea $A \in R^{n \times n}$, se dice que admite inversa si existe una matriz simbolizada por A^{-1} que multiplicada a derecha y a izquierda por la matriz dada A da como resultado la matriz identidad.

En símbolos:

$$A \in R^{n \times n}; \exists A^{-1} \in R^{n \times n} / A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

- Si una matriz admite inversa se dice que es inversible, regular o no singular

- La condición para que exista la matriz inversa de $A \in R^{n \times n}$ es que el rango de A sea n

- Si la matriz inversa existe; ésta es única.

Método de Gauss- Jordan para el cálculo de la matriz inversa

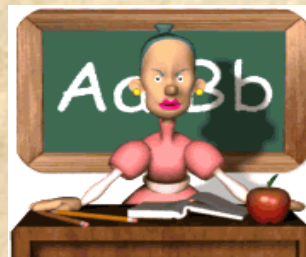
Regla del rectángulo:

Obtención del transformado: el transformado de un elemento es igual a la resta del producto de los elementos de la diagonal y el producto de los elementos de la contradiagonal; dividido por el pivote

Síntesis:

- 1) Se elige un pivote (distinto de cero; preferentemente 1)
- 2) La fila del pivote se divide por el pivote (si es 1 omito este paso)
- 3) Los elementos de la columna del pivote se transforman en cero, excepto el pivote que se transforma en 1
- 4) Los demás elementos se transforman por la regla del rectángulo.
- 5) Repito el procedimiento eligiendo otro pivote que no pertenezca ni a la fila ni a la columna del pivote elegido anteriormente.

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & A^{-1} \end{array}$$



Pizarrón

Realizamos la actividad del cuadernillo

20) a

20) d



FIN

Profundización de contenidos

Clasificación de matrices

- **Matriz fila:** $A = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9)$

- **Matriz simétrica:** es una matriz cuadrada que verifica que:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz cuadrada:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonal
secundaria

Diagonal
principal

- **Matriz antisimétrica:** es una matriz cuadrada que verifica que:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz opuesta:** es aquella que tiene todos sus elementos opuestos (A y B son matrices opuestas)

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 9 \\ 7 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -9 \\ -7 & 2 & 0 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad A \text{ y } B \in R^{n \times n} \text{ son matrices opuestas} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j : a_{ij} = -b_{ij}$$

- **Matriz diagonal:** es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D \in R^{n \times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$$

- **Matriz escalar:** es una matriz diagonal donde todos los elementos de ella son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n} \quad \forall_i, \forall_j \begin{cases} \text{si } i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ \text{si } i = j \Rightarrow a_{ij} = k \end{cases} \quad k \in R$$

- **Matriz unidad o identidad:** es una matriz escalar, cuya diagonal principal es 1.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n} \quad \forall_i, \forall_j \begin{cases} si, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ si, i = j \Rightarrow a_{ij} = 1 \end{cases}$$

- **Matriz triangular superior:** es una matriz donde todos los elementos por debajo de la diagonal son ceros.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- **Matriz triangular inferior:** es una matriz donde todos los elementos por encima de la diagonal son ceros.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Matriz involutiva: 1 matriz $A \in R^{n \times n}$ se llama involutiva si y solo si $A^2 = I$, siendo I la identidad.

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz idempotente: A es idempotente si y solo si $A^2 = A$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz probabilidad: es una matriz cuadrada que cumple con las siguientes condiciones:

- a) Cada componente es no negativo.
- b) La suma de los elementos de cada fila es 1.

Propiedades de la adición de matrices

Sean A, B y C tres matrices del mismo orden

Si sumamos dos matrices, el resultado es otra matriz. Esto mismo se puede expresar, con vocabulario específico, que la suma de matrices es

~ Ley de composición interna:

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Elemento neutro: $A + N = N + A = A$ donde N es la matriz nula.
- Elemento opuesto: $A + (-A) = (-A) + A = N$

La matriz $-A$ (opuesta) se obtiene cambiando de signo los elementos de A.

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

Sean **A** y **B** dos matrices del mismo orden y α y β dos números reales.

- **Elemento absorbente:** $\exists 0 \in R / \forall A \in R^{m \times n} : 0.A = N$

— Si $\alpha.A = N \Rightarrow \alpha = 0 \vee A = N$

- **Elemento neutro:** $\exists 1 \in R / \forall A \in R^{m \times n} : 1.A = A$

- **Distributividad del “.” respecto a la adición de matrices:**

$$\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$$

- **Distributividad del “.” respecto a la adición de escalares:**

$$(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$$

- **Asociatividad mixta:** $\alpha.(A.B) = (\alpha.A).B$

- **Propiedad de la traspuesta :** $(k.A)^t = k.A^t$

- **Propiedad de la traza:** $\text{Tr} (\alpha .A) = \alpha .\text{Tr} (A)$

El conjunto de las matrices $m \times n$ con las operaciones suma y producto por un escalar antes definidas, **tiene estructura de espacio vectorial**

Propiedades del producto de matrices

I. La multiplicación de matrices no cumple la propiedad conmutativa: si una de las dos matrices no es cuadrada ni siquiera tiene sentido plantear el producto en un orden distinto al dado.

II. Si $A \cdot B = 0$ entonces no siempre ocurre que $A = 0$ ó $B = 0$.

Ejemplo: Aunque $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ninguno de los factores que forman el producto es la matriz nula.

III. Si $A \cdot C = B \cdot C$ y $C \neq 0$, entonces no necesariamente $A = B$.

IV. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$ salvo que A y B conmuten.

V. $(A - B)^2 \neq A^2 - 2A \cdot B + B^2$ salvo que A y B conmuten.

VI. $A^2 - B^2 \neq (A - B) \cdot (A + B)$ salvo que A y B conmuten.

Propiedades de la matriz inversa

- I. Si las matrices A y B son inversibles $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- II. Si A es una matriz inversible y $k \neq 0$, $(k \cdot A)^{-1} = (1/k) \cdot A^{-1}$
- III. Si A es una matriz inversible, $(A^{-1})^{-1} = A$
- IV. La matriz identidad es inversible y además $I^{-1} = I$
- V. Si A es una matriz inversible, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$