Unidad Nº 6

Transformaciones lineales

Transformaciones Lineales.

Una transformación lineal es una función. Como toda función, posee dominio y codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales.

Consideramos dos espacios vectoriales V y W, y una función definida de V a W. Dicha función es una regla de asignación que transforma vectores de V en vectores de W.

Pero no toda función que transforme vectores de V en vectores de W es una transformación lineal. Para serlo, debe cumplir las siguientes condiciones:

$T : V \to W$ es transformación lineal si y sólo si:

1. $T(u+v) = T(u) + T\ v) \ \forall\ u, v \in V$

2. $T(k.v) = k.\ T\ (v)\ \ \forall\ v \in V, \forall\ k \in \mathbb{R}$

Transformaciones Lineales: propiedades

La imagen del vector nulo del dominio 0_V es el vector nulo del codominio, 0_W

$$T(0_V) = 0_W$$

La imagen del vector $-v$ es igual al opuesto de la imagen de v:

$$T\ (-\mathrm{v}) = -\,T(v)$$

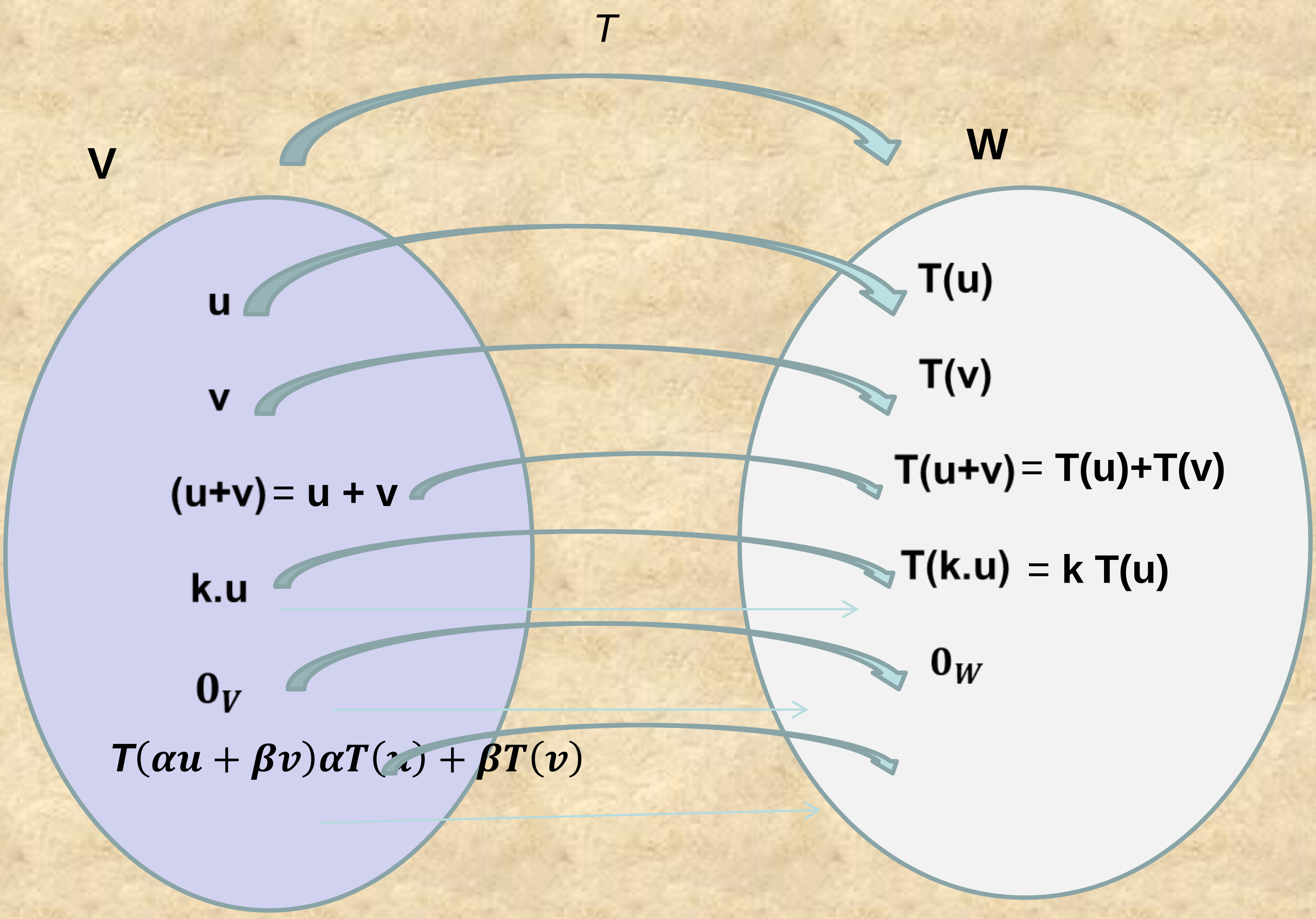
Toda transformación lineal preserva combinaciones lineales

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

Como consecuencia de las dos últimas propiedades, se puede establecer que

$$T(u - v) = T(u) - T(v)$$

Transformaciones Lineales.



Transformaciones Lineales: ejemplos

Determinar si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; T(x;y) = (3x - 2y; x)$ es transformación lineal
Consideramos dos vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^2$: $u(u_1;u_2); v(v_1;v_2)$

Analizamos la primera condición: $\boldsymbol{T(u+v) = T(u) + T(v)}$

$$T(u) + T(v) = T(u_1;u_2) + T(v_1;v_2)$$
$$T(u) + T(v) = (3u_1 - 2u_2; u_1) + (3v_1 - 2v_2; v_1)$$
$$T(u) + T(v) = (3u_1 - 2u_2 + 3v_1 - 2v_2; u_1 + v_1)$$
$$T(u) + T(v) = (3(u_1 + v_1) - 2(u_2 + v_2); u_1 + v_1)$$

$$T(u+v) = T(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$
$$T(u+v) = (3(u_1 + v_1) - 2(u_2 + v_2); u_1 + v_1)$$

Comprobamos que $\boldsymbol{T(u+v) = T(u) + T(v)}$

Analizamos la segunda condición: $\boldsymbol{T(\alpha u) = \alpha\, T(u)}$

$$T(\alpha u) = T(\alpha u_1; \alpha u_2) = (3\alpha u_1 - 2\alpha u_2; \alpha u_1) = \alpha(3u_1 - 2u_2; u_1) = \alpha\, T(u)$$

Comprobamos que $\boldsymbol{T(\alpha u) = \alpha\, T(u)}$

Ambas condiciones de la definición se cumplen; por lo tanto
T es transformación lineal

Actividad

1) Determinar si la función dada es una transformación lineal:

b) F: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / F(x; y) = (x^2; 0)$

c) F: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / F(x; y; z) = (x.y; y.z; z.x)$

$$f)\ \mathrm{F}: \mathrm{R}^{2x1} \rightarrow R^{3x1} / F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

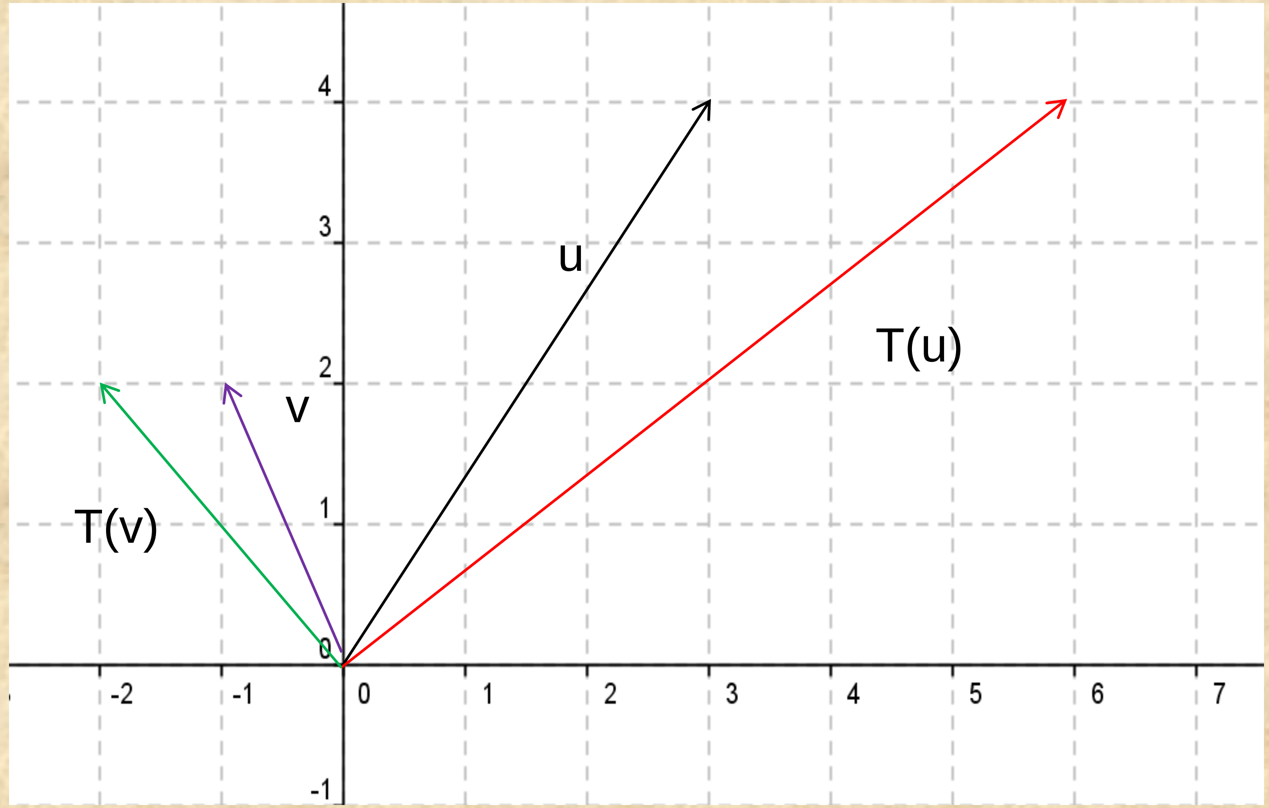
Transformaciones Lineales: ejemplos

Sea u= (3;4) y v= (-1,2)

Hallar los transformados de u y v a través de T(x; y) = (2x; y)

T(u) = (6;4) T(v) = (-2;2)

Gráficamente:



Provoca un **estiramiento** del vector original en dirección paralela al eje x.

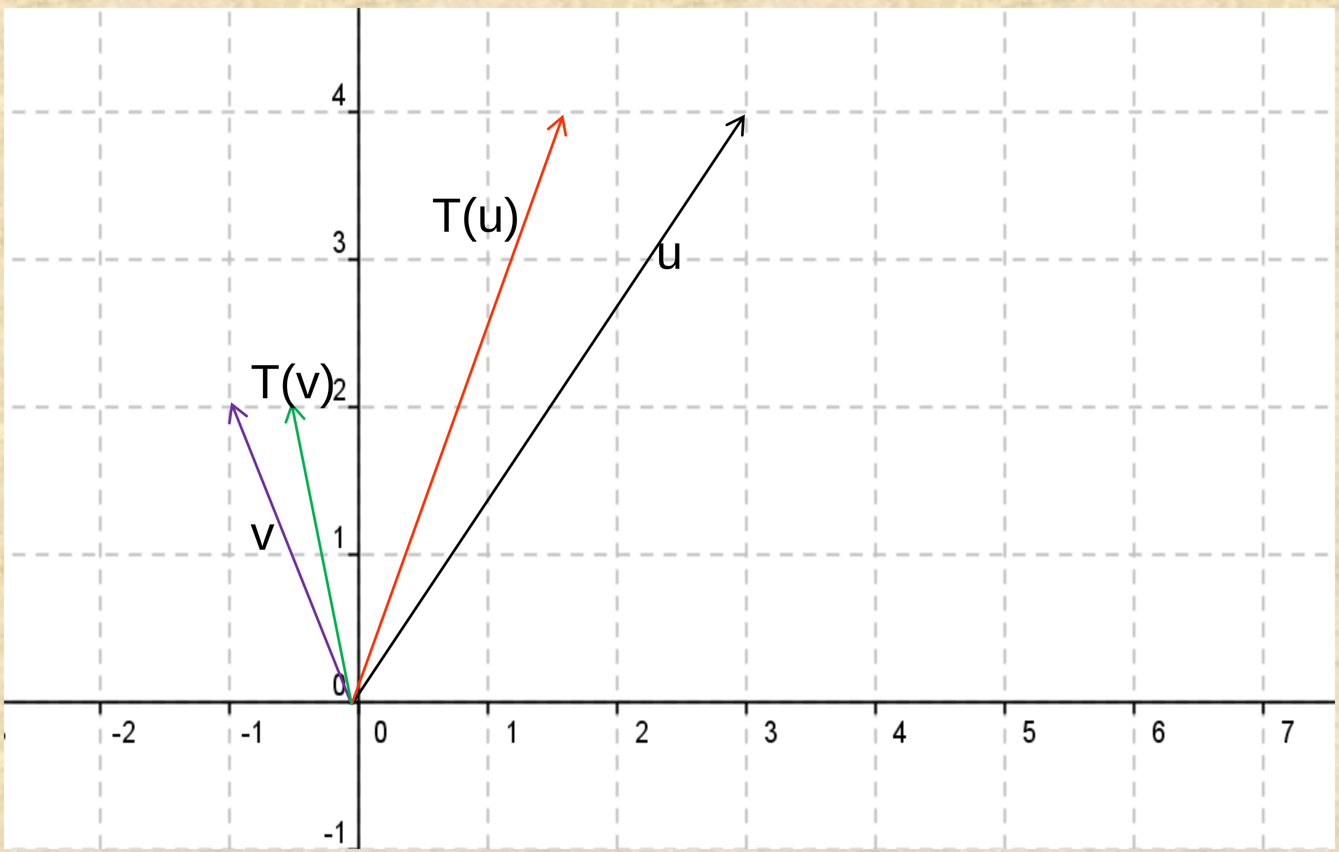
Transformaciones Lineales: ejemplos

Sea u= (3;4)   y v= (-1,2)

Hallar los transformados de u y v a través de   T(x; y) = $\left(\frac{1}{2}\ x; y\right)$

T(u) = $\left(\frac{3}{2}:4\right)$; T(v) = $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

Gráficamente:



Provoca una **compresión** en el vector original en dirección paralela al eje x si 0< c < 1

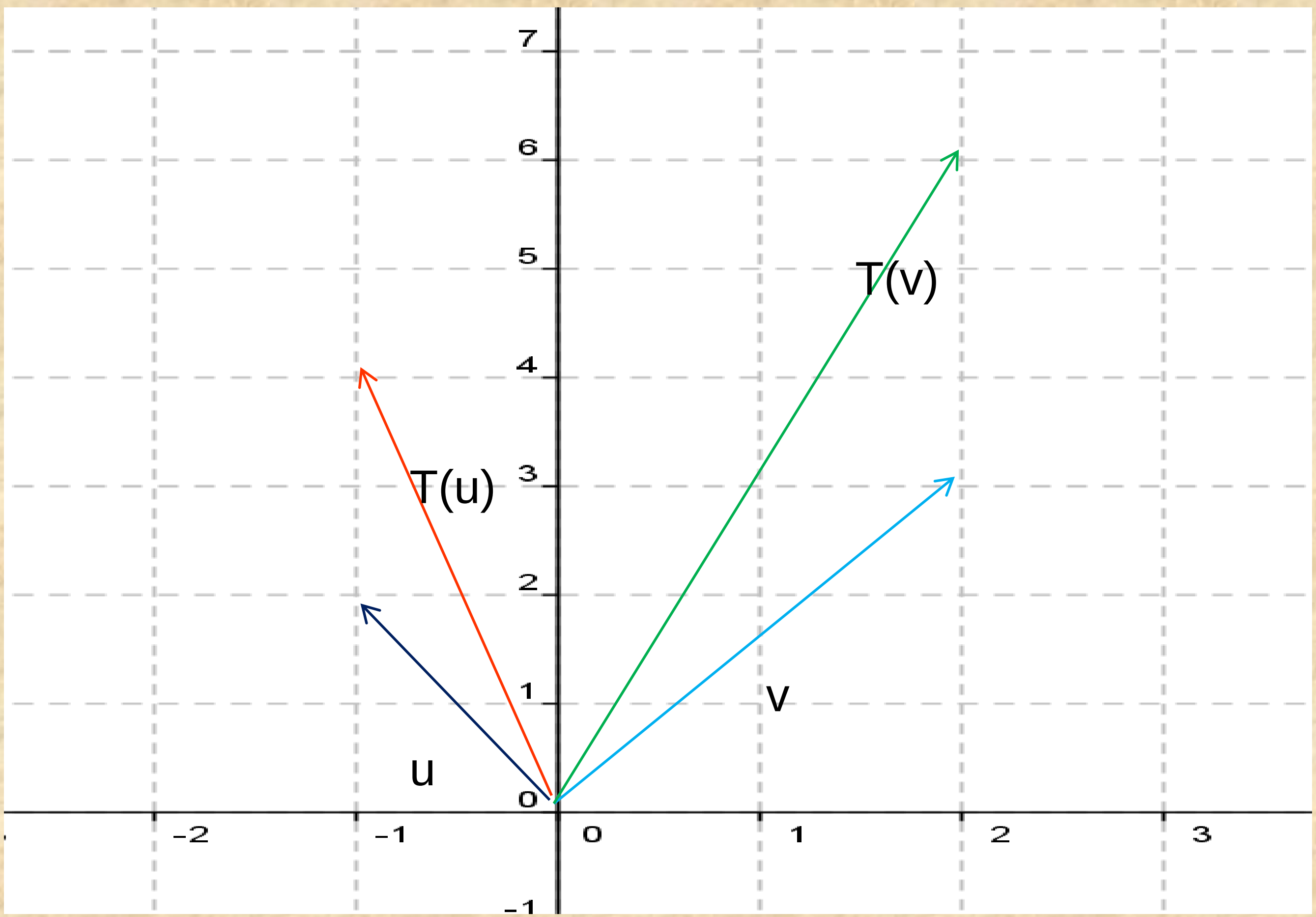
Transformaciones Lineales: ejemplos

Sea u= (-1;2) y v= (2 ;3)

Hallar los transformados de u y v a través de T(x; y) = (x; 2 y)

T(u) = $(-1{:}\,4)$; T(v) = $(2;6)$

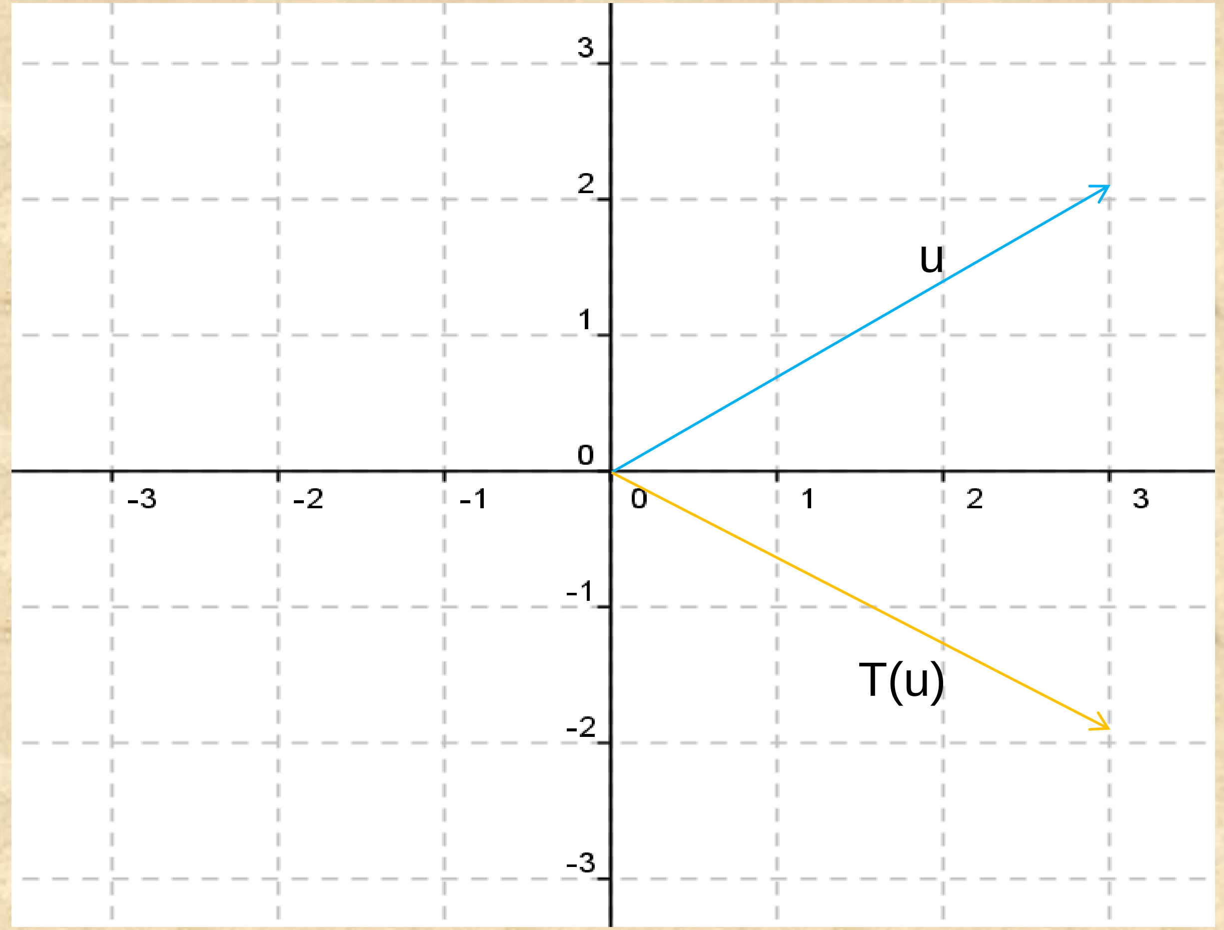
Gráficamente:



Provoca un **estiramiento** del vector original en dirección paralela al eje y; si c> 1

Transformaciones Lineales: ejemplos

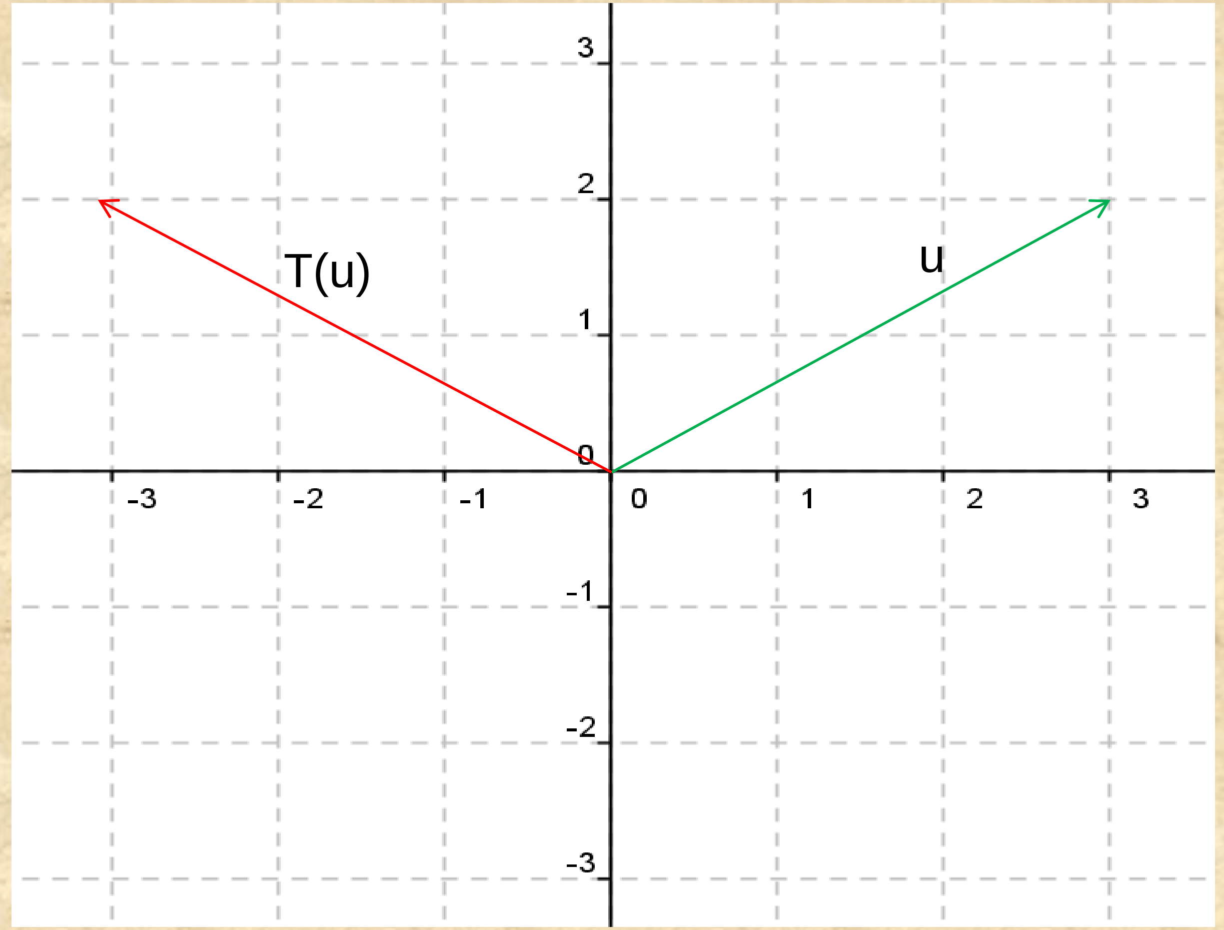
Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x; y) = (x; -y)$



Es una **reflexión** sobre el eje x o **simetría axial** de eje x

Transformaciones Lineales: ejemplos

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T(x; y) = (-x; y)$



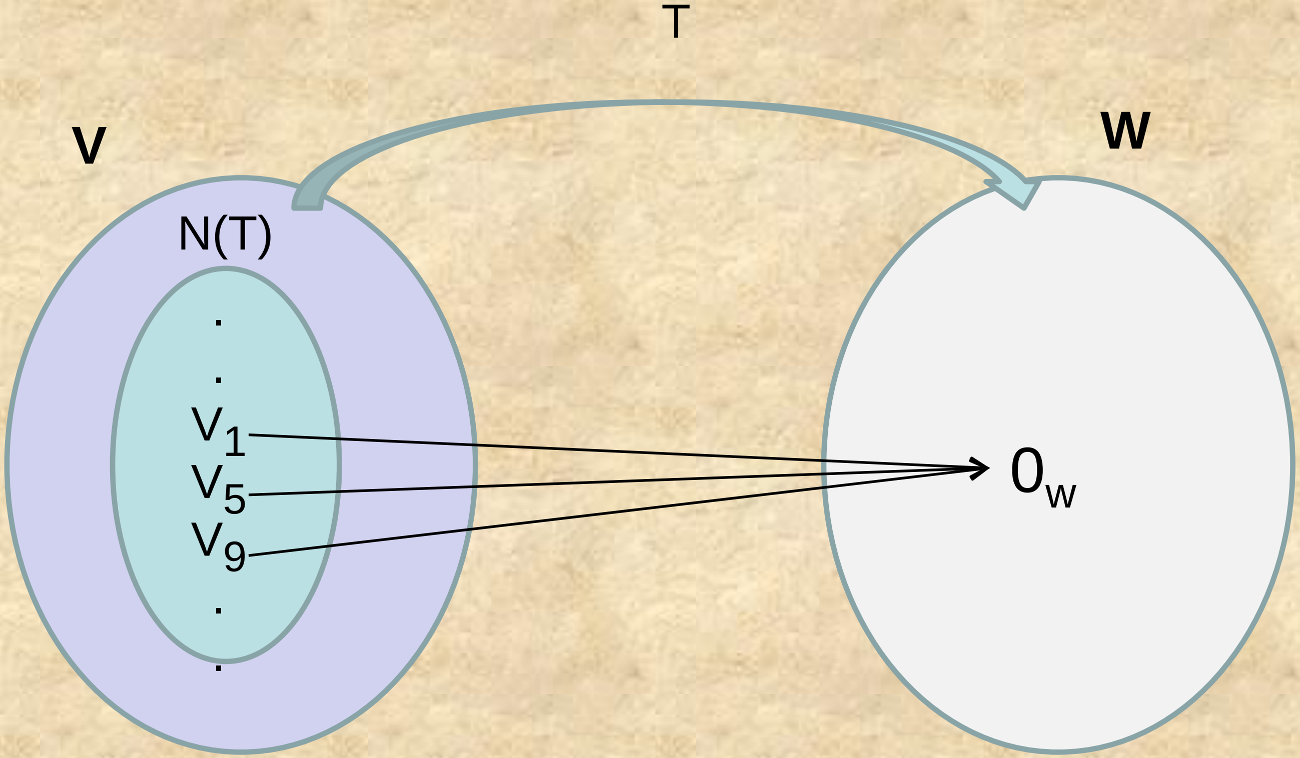
Es una **reflexión** sobre el eje y o **simetría axial** de eje y

Núcleo de una transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal
Llamamos **núcleo** de *T* al conjunto de vectores del dominio cuya imagen por *T* es el 0_W.

$$Nu\,(T) = \{v \in V \ / \ T(v) = 0_W\}$$

*El **núcleo** de una transformación lineal es un **subespacio de $\boldsymbol{V}$**.*



Núcleo de una transformación lineal: ejemplo

Hallar el núcleo de la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ / T (x; y; z) = (x - 2y ; y + 3z)

(x; y; z) está en el núcleo $\Leftrightarrow$ T(x; y; z)= (0 ; 0)

Debe ser, entonces, (x -2y ; y +3z) = (0;0)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = -6z$$
$$y = -3z$$

(x ; y; z) = (-6z ; - 3z ; z) = z. (-6 ; -3 ; 1)

$$Nu(T) = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ x = -6\,z; y = -3\,z; \ z = z \ \ \}$$

Nu(T): < (-6; -3;1) > Se trata del conjunto generador del Núcleo

Una base del Núcleo es: $B_{Nu(T)} = \{(-6; -3; 1)\}$

$$\dim Nu\,(T) = 1$$

Actividad

Dada la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 f(x,y,z) = (x - y\text{:}\, x + z;\; y + z)$

a) Indicar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al núcleo de la transformación

(0; 0; 0) (1, 1, -1) (-2; -2; 2) (3; 3; 3) (-4; 4; -4)

Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar núcleo (T) e Im (T). Indicar la dimensión de los mencionados subespacios, y, si es posible, una base para cada uno de ellos:

a) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$/T(x; y; z)=(x + z; y - z)

c) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow$: $\mathbb{R}^2$/T(x; y) =(2x;x - y)

$e)\ \mathrm{T}: \mathrm{M}_{2x2} \rightarrow M_{2x2} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & a+d \end{pmatrix}$

Imagen de una transformación lineal

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal

La **imagen** de T es el conjunto de vectores de W que son imagen de algún vector de V.

$$Im(T) = \{w \in W \ / \ w = T(v); v \in V\}$$

La imagen de una transformación lineal un subespacio vectorial de W.

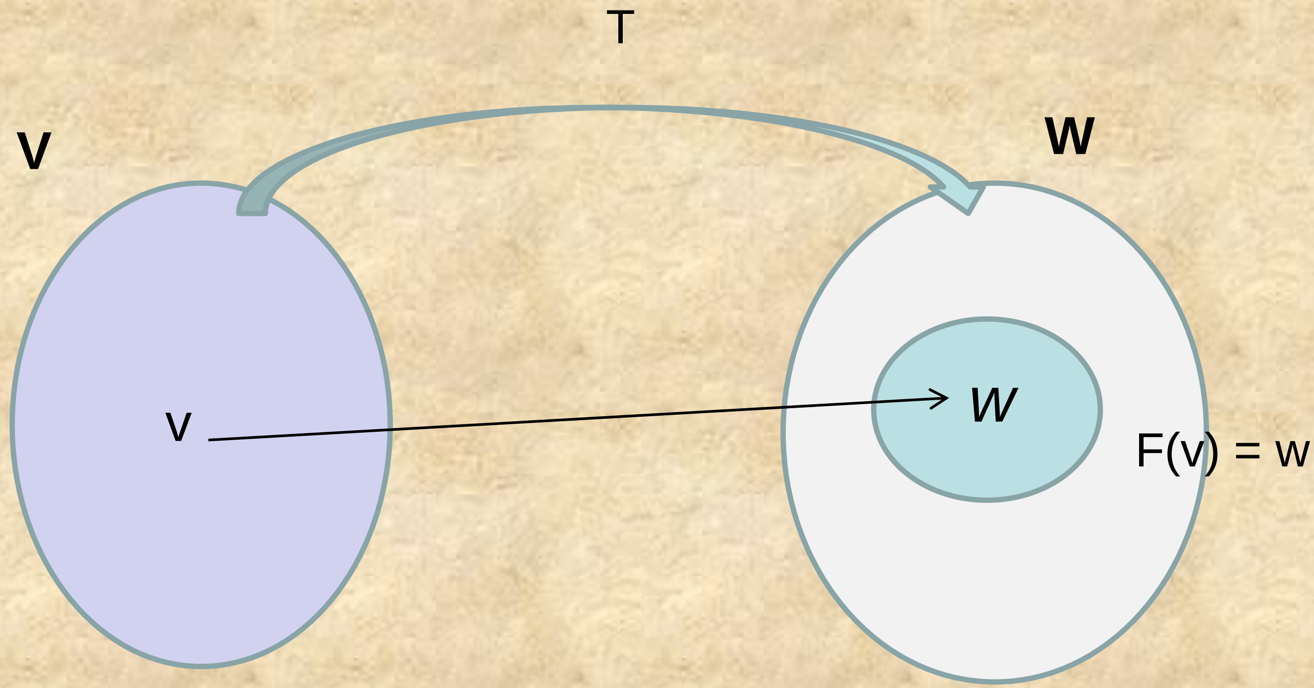


Imagen de una transformación lineal: ejemplo

Hallar la imagen de la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ / T (x; y; z) = (x - 2y ; y + 3z)

Im(T) ={ w $\in$ W : w=T(v) para algún v $\in$ V }

La imagen la podemos obtener aplicando propiedades sobre la expresión que define la transformación lineal:

$$T[(x; y; z)] = (x-2y; y+3z)$$

$$T[(x; y; z)] = (x; 0) + (- 2 y; y) + (0; 3 z)$$

$$T[(x; y; z)] = x (1;0) + y (-2;1) + z (0; 3)$$

Im(T): < (1; 0) ; (-2; 1); (0; 3) > es un conjunto generador de la Imagen

Como es un conjunto linealmente dependiente, eliminamos uno de los vectores para obtener una base:

$$B_{Im(T)} = \{(1; 0) ;(0; 3)\}$$

Actividad

b) Indicar cuáles de los siguientes vectores pertenecen a la imagen de la transformación

(0; 0; 0) (1; 2; 2) (0; 4; 4) (1; 1; 0) (1; 2; 3)

Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar núcleo (T) e Im (T).

Indicar la dimensión de los mencionados subespacios, y, si es posible, una base para cada uno de ellos:

a) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x; y; z) = (x + z; y - z)$

c) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow: \mathbb{R}^2 / T(x; y) = (2x; x - y)$

$$e)\ T: M_{2x2} \rightarrow M_{2x2} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & a+d \end{pmatrix}$$

Propiedad:

Núcleo e Imagen de una transformación lineal

La suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen es igual a la dimensión del dominio de la transformación lineal:

$T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal. Se cumple que:

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{V})=\mathbf{dim}(\boldsymbol{Nu}(T))+\mathbf{dim}(\boldsymbol{Im}(T))$$

La dimensión del Núcleo también se denomina ***nulidad***

La dimensión de la Imagen se denomina ***rango***

Matriz de una transformación lineal

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, llamamos matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n y\ \mathbb{R}^m$ a la matriz de orden mxn cuyas columnas son las imágenes de los vectores canónicos del dominio

(Esta definición puede extenderse para todos los espacios vectoriales de dimensión finita, con cualquier base para el dominio y el codominio)

Matriz de una transformación lineal: ejemplo

$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; T(x;y;z) = (3x-2y+z;x-z)$$

Calculamos

$$T(1;0;0) = (3;1)$$
$$T(0;1;0) = (-2;0\ )$$
$$T(0;0;1) = (1;-1)$$

Por lo tanto, resulta

$$M_T \in \mathbb{R}^{2x3} \qquad / \quad M_T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y podemos escribir (omitiendo la trasposición):

$$T(x;y;z) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Actividad

3) Hallar la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales:

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5; f(x, y, z) = (0; 3x + 5y - 4z; x - z;\ 2y + z; -2x + 4y - 6z)$

c) $f: \mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^3; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c; 4b; c + d)$

Transformación lineal inversible

Una transformación lineal posee inversa, si la matriz asociada a ella es inversible

Ejemplo: $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ /T(x;y;z) = (x+y;y+z;x)$

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow M_T \text{ es inversible}$$

Si buscamos la matriz inversa, por cualquiera de los métodos conocidos, obtenemos: ${M_T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto,

$$T^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ /T^{-1} = (M_T)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x-z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

Resulta: $T^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $T^{-1}(x;y;z) = (z;x-z;-x+y+z)$

Expresión de una transformación lineal a partir de la matriz: ejemplo

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \wedge M_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar la expresión de la transformación lineal, multiplicamos la matriz por un vector genérico del dominio:

$$M_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$M_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y - t \\ 2x - y + 3t \end{pmatrix}$$

$$T(x; y; z; t) = (2x + z; y - t; 2x - y + 3t)$$

Actividad

Indicar si las siguientes transformaciones lineales son inversibles. En caso afirmativo, hallar la expresión de la transformación lineal inversa

a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 /\ f(x.\ y) = (2x\text{-}y;\ \text{-}x+y)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,\ y,\ z) = (x+2y\text{-}z;\ y+3z;\ 3z)$

Matriz de transición o cambio de base

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$consideramos la base canónica E de $\mathbb{R}^3$ y la base $B = \{(1;1;1);(1;1;0);(1;0;0)\}$

1) Vamos a buscar la matriz P de pasaje de la base canónica E a la base B.
   La simbolizamos: $P_{E\to B}$

a) Para ello, expresamos a cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de los vectores de la nueva base:

$$\alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \delta\big((1;0;0)\big) = (1;0;0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0;\ \beta = 0; \delta = 1$$

$$\alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \delta\big((1;0;0)\big) = (0;1;0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0;\ \beta = 1; \delta = -1$$

$$\alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \delta\big((1;0;0)\big) = (0;0;1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1;\ \beta = -1; \delta = 0$$

Matriz de transición o cambio de base

Por lo tanto, la matriz buscada es:

$$P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que las columnas de esta matriz, son los escalares de la combinación lineal de cada vector canónico en la nueva base. Es decir, que las columnas son las componentes de los vectores de *E* expresados en la base *B*

2) Dado el vector $\overrightarrow{v}$, cuyas coordenadas en la base canónica son $\vec{v} = (3; 4; 5)$, hallamos sus coordenadas en la nueva base, utilizando la matriz de pasaje calculada anteriormente

$$[(3; 4; 5)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Si queremos verificar:

$$5(1; 1; 1) + (-1)(1; 1; 0) + (-1)(1; 0; 0) = (3; 4; 5)$$

Actividad

Encontrar la matriz de transición de B a B´ encada caso:

c) B= {(12; 6);(24 ; 0)} ; B´={(6;6); (6;0)}

d) B= {(2;2;10); (6;-2;14) ; (10;-22;50)} ; B´={(2;-2;10) ; (2;2;2) ; (0;-4;0)}

Resolvemos la
Guía Nº 6