Universitat Autònoma de Barcelona

y

Universidad de Málaga

Categorías 2024

Ejercicios Resueltos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "hg"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

1 Sesión 1

Lectura recomendada: Secciones 1.1, 1.2, 1.3 de [R16].

Lista de ejercicios: 1.1.i, 1.1.ii, 1.1.iii (i), 1.2.ii, 1.2.iii, 1.2.iv, 1.2.v, 1.3.i, 1.3.ii, 1.3.iii, 1.3.viii, 1.3.ix, 1.3.x.

Soluciones: [1]

Ejercicio 1.1.i

(i) Consideramos un morfismo $f\colon x \to y$. Demuestra que si existe un par de morfismos $g, h\colon \rightrightarrows x$ tal que $gf = 1_x$ y $fh = 1_y$, consecuentemente $g = h$ y f es un isomorfismo.

$f\colon x \to y$, $g\colon y \to x$, $h\colon y \to x$; $gf = 1_x$, $fh = 1_y$

$$gfh = g\,(fh) = g1_y = (gf)\,h = 1_x h \Rightarrow g = h$$

Por tanto $fh = 1_y$ y $hf = 1_x$ de esta forma f es isomorfismo.

(ii) Demuestra que un morfismo como máximo pude tener un único morfismo inverso.

Dado $f\colon x \to y$, un par de isomorfismos que invierten f son dos morfismos $g_1, g_2\colon y \to x$ tal que $g_1 f = g_2 = idx$ y existan $h_1, h_2\colon x \to y$ tal que $g_1 h_1 = g_2 h_2 = 1_x$ y $h_1 g_1 = h_2 g_2 = 1_y$.

Por tanto, aplicando **(i)** obtenemos $h_1 = f = h_2$ y como $g_1 f = 1_x$, $fg_2 = 1_y$ tenemos que $g_1 = g_2$.

Ejercicio 1.1.ii

Dada una categoría C. Demuestra que la colección de isomorfismos en C definen una subcategoría, llamada grupoide máximal dentro de C.

$$\mathsf{I_C}\colon = \left(\{\theta \in \mathsf{O} | \exists \varphi\colon \theta \to \theta' \text{ isomorfismo}\}, \{\varphi \in \mathrm{Mor}\,(\mathsf{C})\,|\varphi \text{ isomorfismo}\}\right)$$

Definimos una categoría $\mathsf{I_C}$ que tiene por objetos $\theta \in \mathrm{ob}\,(\mathsf{C})$ tales que existe un isomorfismo $\varphi \to \theta'$ por algun objeto θ'

Ejercicio 1.1.ii

Por cualquier categoría C y cualquier objeto $c \in \mathsf{C}$, demuestra:

(i) Existe una categoría c/C cuyos objetos son morfismo $f\colon c \to x$ con dominio c y un morfismo de $f\colon c \to x$ a $g\colon c \to y$ es un morfismo $h\colon x \to y$ de forma que

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[rr, "h"'] & & y \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo ($g = hf$).

[1] Soluciones proporcionadas por Alejandro García