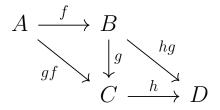
## Universitat Autònoma de Barcelona

y Universidad de Málaga

CATEGORÍAS 2024

## Ejercicios Resueltos









## 1 Sesión 1

Lectura recomendada: Secciones 1.1, 1.2, 1.3 de [R16].

Lista de ejercicios: 1.1.i, 1.1.ii, 1.1.iii (i), 1.2.ii, 1.2.iii, 1.2.iv, 1.2.v, 1.3.i, 1.3.ii, 1.3.iii, 1.3.viii, 1.3.ix, 1.3.x.

Soluciones: 1

Ejercicio 1.1.i

(i) Consideramos un morfismo  $f: x \to y$ . Demuestra que si existe un par de morfismos  $g, h: \Rightarrow x$  tal que  $gf = \mathbf{1}_x$  y  $fh = \mathbf{1}_y$ , consecuentemente g = h y f es un isomorfismo.

$$f: x \to y, g: y \to x, h: y \to x; gf = 1_x, fh = 1_y$$

$$qfh = q(fh) = q\mathbf{1}_{u} = (qf)h = \mathbf{1}_{x}h \Rightarrow q = h$$

Por tanto  $fh = 1_y$  y  $hf = 1_x$  de esta forma f es isomorfismo.

(ii) Demuestra que un morfismo como máximo pude tener un único morfismo inverso.

Dado  $f: x \to y$ , un par de isomorfismos que invierten f son dos morfismos  $g_1, g_2: y \to x$  tal que  $g_1 f = g_2 = i dx$  y existan  $h_1, h_2: x \to y$  tal que  $g_1 h_1 = g_2 h_2 = 1_x$  y  $h_1 g_1 = h_2 g_2 = 1_y$ .

Por tanto, aplicando (i) obtenemos  $h_1 = f = h_2$  y como  $g_1 f = 1_x$ ,  $fg_2 = 1_y$  tenemos que  $g_1 = g_2$ .

Ejercicio 1.1.ii

Dada una categoría C. Demuestra que la colección de isomorfismos en C definen una subcategoría, llamada grupoide máximal dentro de C.

$$I_{\mathsf{C}} := (\{\theta \in \mathsf{O} | \exists \varphi \colon \theta \to \theta' \text{ isomorfismo}\}, \{\varphi \in \mathsf{Mor}(\mathsf{C}) | \varphi \text{ isomorfismo}\})$$

Definimos una categoría  $I_{\mathsf{C}}$  que tiene por objetos  $\theta \in \mathrm{ob}(\mathsf{C})$  tales que existe un isomorfismo  $\varphi \to \theta'$  por algun objeto  $\theta'$ 

Ejercicio 1.1.ii

Por cualquier categoría C y cualquier objeto  $c \in C$ , demuestra:

(i) Existe una categoría  $c/\mathbb{C}$  cuyos objetos son morfismo  $f\colon c\to x$  con dominio c y un morfismo de  $f\colon c\to x$  a  $g\colon c\to y$  es un morfismo  $h\colon x\to y$  de forma que

$$x \xrightarrow{f} c \xrightarrow{g} y$$

es un diagrama conmutativo (g = hf).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Soluciones proporcionadas por Alejandro García