

Universitat Autònoma de Barcelona

y

Universidad de Málaga

CATEGORÍAS 2024

Apéndice

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Sing}(X)_n & \xrightarrow[\varphi \circ -]{\text{Sing}(\varphi)_n} & \text{Sing}(Y)_n & \xrightarrow[\theta \circ -]{\text{Sing}(\theta)_n} & \text{Sing}(Z)_n \\
 \begin{array}{c} s_j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow d_i \\ - \circ S^j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow - \circ D^i \end{array} & & \begin{array}{c} s_j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow d_i \\ - \circ S^j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow - \circ D^i \end{array} & & \begin{array}{c} s_j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow d_i \\ - \circ S^j \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow - \circ D^i \end{array} \\
 \text{Sing}(X)_{n+1} & \xrightarrow[\varphi \circ -]{\text{Sing}(\varphi)_{n+1}} & \text{Sing}(Y)_{n+1} & \xrightarrow[\theta \circ -]{\text{Sing}(\theta)_{n+1}} & \text{Sing}(Z)_{n+1}
 \end{array}$$

UAB

Universitat Autònoma
de Barcelona



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

| uma.es

El **Apéndice** esta pensado para poner a disposición de todos detalles técnicos o ampliaciones del contenido visto durante las sesiones.

1. Lema de Yoneda

Esta es la traducción del apartado dedicado al lema de Yoneda en mi TFG¹ donde se demuestra la versión contravariante del lema de Yoneda usando la sumersión de Yoneda.

Definición 1.0.1 Dada una categoría localmente pequeña \mathbf{C} . Definimos la categoría de diagramas $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ donde los objetos son funtores de \mathbf{C} a \mathbf{Set} y los morfismos son transformaciones naturales de entre estos funtores.

Definición 1.0.2 Para un objeto $c \in \mathbf{C}$ definimos el **functor representable contravariante** que es la forma contravariante del functor $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(c, -)$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Mor}_{\mathbf{C}}(-, c) : & \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{Set} \\ & d & \longmapsto \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c) \\ g : e \rightarrow d & \longmapsto & \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g, c) : \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(s, c) \xrightarrow{- \circ g} \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(e, c) \end{array}$$

Para comprobar que es un functor, para $f : d \rightarrow c$ de $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c)$ y $f : d \rightarrow c$ de \mathbf{C}^{op} podemos ver que $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\text{Id}_d, c) = \text{Id}_{\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c)}$ y $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g \circ s, c) = \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(s, c) \circ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g, c)$.

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\text{Id}_d, c)(f) &= f \circ \text{Id}_d \\ &= f \\ &= \text{Id}_{\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c)}(f) \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g \circ s, c)(f) &= f \circ (g \circ s) \\ &= (f \circ g) \circ s \\ &= (\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(s, c) \circ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g, c))(f) \end{aligned}$$

Definición 1.0.3 La **sumersión de Yoneda** es un functor d'una categoría localmente pequeña \mathbf{C} a la categoría de diagramas $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$.

$$\mathbf{y} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$$

¹Intrducció a les Categories de Models en Topologia (Martí Parés Baraldés) con Carles Broto Blanco como tutor

que envía un objeto c al functor $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(-, c)$ (Definición 1.0.2)

$$\mathfrak{J}(c) = \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(-, c) : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Y el morfismo $\xi : c \rightarrow c'$ en \mathbf{C} lo envía a la siguiente transformación natural,

$$\mathfrak{J}(\xi) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(-, \xi) : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(-, c) \Rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(-, c')$$

tal que, por todo $g : e \rightarrow d$ en \mathbf{C}^{op}

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c) & \xrightarrow[\xi \circ -]{\mathfrak{J}(\xi)_d} & \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(d, c') \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g, c) \downarrow - \circ g & & - \circ g \downarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(g, c') \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(e, c) & \xrightarrow[\xi \circ -]{\mathfrak{J}(\xi)_e} & \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(e, c') \end{array}$$

es un diagrama conmutativo, cosa fácilmente comprobable ya que por todo $f \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(d, c)$ tenemos que $(\xi \circ f) \circ g = \xi \circ (f \circ g)$.

Teorema 1.0.4 (*Lema de Yoneda*) Sea \mathbf{C} una categoría localmente pequeña. Para cualquier objeto $c \in \mathbf{C}$ y functor $F \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ tenemos un isomorfismo de conjuntos.

$$\text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F) \cong F(c)$$

que es natural en F y en c que se traduce en que por todo functor $G : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, transformación natural $\alpha : F \Rightarrow G$ y morfismo $h : c \rightarrow d$ los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F) & \xrightarrow{\cong} & F(c) \\ \text{Mor}(\mathfrak{J}(c), \alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha_c \\ \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), G) & \xrightarrow{\cong} & G(c) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F) & \xrightarrow{\cong} & F(c) \\ \text{Mor}(\mathfrak{J}(h), F) \uparrow & & \uparrow F(h) \\ \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(d), F) & \xrightarrow{\cong} & F(d) \end{array}$$

Demostración. Definimos una aplicación $\Phi_{c,F}$ de $\text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F)$ a $F(c)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F) & \xrightarrow{\Phi_{c,F}} & F(c) \\ \eta : \mathfrak{J}(c) \Rightarrow F & \longmapsto & \eta_c(\text{Id}_c) \end{array}$$

y definimos una segunda aplicación $\Theta_{c,F}$ de $F(c)$ a $\text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F)$

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{\Theta_{c,F}} & \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\mathfrak{J}(c), F) \\ \theta & \longmapsto & \eta_\theta : \mathfrak{J}(c) \Rightarrow F \end{array}$$

Definimos la imagen de θ bajo $\Theta_{c,F}$ como la transformación natural η_θ , cuyos componentes son

$$\begin{array}{ccc} (\eta_\theta)_e : \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (e, c) & \longrightarrow & F(r) \\ g : e \rightarrow c & \longmapsto & F \end{array}$$

Primero vamos a comprobar que η_θ esta bien definida como transformación natural, verificando que para cualquier $f : r \rightarrow e$ de \mathbf{C}^{op} , el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (r, c) & \xrightarrow{(\eta_\theta)_r} & F(r) \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (f, c) \uparrow & & \uparrow F \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (e, c) & \xrightarrow{(\eta_\theta)_e} & F(e) \end{array}$$

Para todo $g \in \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (e, c)$

$$\begin{aligned} (\eta_\theta)_r \circ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (f, c) (g) &= (\eta_\theta)_r (g \circ f) \\ &= F(g \circ f) (\theta) \\ &= F(f) \circ F(g) (\theta) \\ &= F \circ (\eta_\theta)_e (g) \end{aligned}$$

El siguiente paso es comprobar que $\Phi_{c,F}$ y $\Theta_{c,F}$ son mutuamente inversos.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\text{cop}}} (\mathcal{J}(c), F) & \xrightarrow{\Phi_{c,F}} & F(c) & \xrightarrow{\Theta_{c,F}} & \text{Mor}_{\mathbf{Set}^{\text{cop}}} (\mathcal{J}(c), F) \\ \eta : \mathcal{J}(c) \Rightarrow F & \longmapsto & \eta_c (\text{Id}_c) = \theta & \longmapsto & \eta_\theta : \mathcal{J}(c) \Rightarrow F \end{array}$$

Por definición de $\eta : \mathcal{J}(c) \Rightarrow F$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (c, c) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{J}(c)(c) & \xrightarrow{\eta_c} & F(c) \\ \downarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (g, c) & & \downarrow \mathcal{J}(c)(g) & & \downarrow F(g) \\ \text{Mor}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} (e, c) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{J}(c)(e) & \xrightarrow{\eta_e} & F(e) \end{array}$$

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
(\eta_\theta)_e(g) &= F(g)(\theta) \\
&= F(g)(\eta_c(\text{Id}_c)) \\
&= \eta_e \circ \mathfrak{J}(c)(g)(\text{Id}_c) \\
&= \eta_e(g)
\end{aligned}$$

Así que $\eta_\theta = \eta$ por cualquier $\theta \in F(c)$, por tanto $\Theta_{c,F} \circ \Phi_{c,F} = \text{Id}_{\text{Mor}_{\text{Set}^{\text{cop}}}(\mathfrak{J}(c), F)}$.

A continuación comprobamos el otro orden de composición.

$$\begin{array}{ccccc}
F(c) & \xrightarrow{\Theta_{c,F}} & \text{Mor}_{\text{Set}^{\text{cop}}}(\mathfrak{J}(c), F) & \xrightarrow{\Phi_{c,F}} & F(c) \\
\theta & \longmapsto & \eta_\theta: \mathfrak{J}(c) \Rightarrow F & \longmapsto & (\eta_\theta)_c(\text{Id}_c)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_\theta)_c(\text{Id}_c) &= F(\text{Id}_c)(\theta) \\
&= \text{Id}_{F(c)}(\theta) \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Finalmente podemos concluir que $\Phi_{c,F} \circ \Theta_{c,F} = \text{Id}_{F(c)}$.

Por tanto hemos demostrado que $\Phi_{c,F}: \text{Mor}_{\text{Set}^{\text{cop}}}(\mathfrak{J}(c), F) \xrightarrow{\cong} F(c)$ es un isomorfismo.

Para finalizar la demostración nos falta demostrar la naturalidad en F y en $c \in \mathbf{C}$.

Por cualquier functor $G: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ y transformación natural $\alpha: F \Rightarrow G$,

$$\begin{array}{ccc}
(\eta: \mathfrak{J}(c) \Rightarrow F) \in \text{Mor}(\mathfrak{J}(c), F) & & \\
\text{Mor}(\mathfrak{J}(c), F) \xrightarrow[\Phi_{c,F}]{\cong} F(c) & & \\
\text{Mor}(\mathfrak{J}(c), \alpha) \downarrow \alpha \circ - & & \downarrow \alpha_c \\
\text{Mor}(\mathfrak{J}(c), G) \xrightarrow[\Phi_{c,G}]{\cong} G(c) & &
\end{array}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}
(\alpha_c \circ \Phi_{c,F})(\eta) &= \alpha_c(\eta_c(\text{Id}_c)) \\
&= (\alpha \circ \eta)_c(\text{Id}_c) \\
&= \Phi_{c,G}(\text{Mor}(\mathfrak{J}(c), \alpha)(\eta))
\end{aligned}$$

Para la naturalidad en $c \in \mathbb{C}$, por cualquier $h: c \rightarrow d$

$$\begin{array}{ccc}
 \omega \circ \mathfrak{J}(h) : \mathfrak{J}(c) \Rightarrow F & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\omega \circ \mathfrak{J}(h))_c (\text{Id}_c) \\
 \uparrow & & \\
 \text{Mor}(\mathfrak{J}(c), F) & \xrightarrow[\Phi_{c,F}]{\cong} & F(c) \\
 \text{Mor}(\mathfrak{J}(h), F) \uparrow \scriptstyle{-\circ \mathfrak{J}(h)} & & \uparrow \scriptstyle{F(h)} \\
 \text{Mor}(\mathfrak{J}(d), F) & \xrightarrow[\Phi_{d,F}]{\cong} & F(d) \\
 \omega : \mathfrak{J}(d) \Rightarrow F & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \omega_d (\text{Id}_d)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{c,F} \circ \text{Mor}(\mathfrak{J}(h), F)(\omega) &= \Phi_{c,F}(\omega \circ \mathfrak{J}(h)) \\
 &= (\omega \circ \mathfrak{J}(h))_c (\text{Id}_c) \\
 &= \omega_c(\mathfrak{J}(h)_c (\text{Id}_c)) \\
 &= \omega_c(h \circ \text{Id}_c) \\
 &= \omega_c(h) \\
 &= \omega_c(\text{Id}_d \circ h) \\
 &= \omega_c(\mathfrak{J}(d)(h) (\text{Id}_d)) \\
 &= F(h) \circ \omega_d (\text{Id}_d) \\
 &= F(h) \circ \Phi_{d,F}(\omega)
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior a la última es consecuencia de

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{J}(d)(d) & \xrightarrow{\omega_d} & F(d) \\
 \downarrow \scriptstyle{\mathfrak{J}(d)(h)} & & \downarrow \scriptstyle{F(h)} \\
 \mathfrak{J}(d)(c) & \xrightarrow{\omega_c} & F(d)
 \end{array}$$

Finalizamos la demostración con $\Phi_{c,F} \circ \text{Mor}(\mathfrak{J}(h), F) = F(h) \circ \Phi_{d,F}$

1.1. Lema de Yoneda aplicado a los **sSet**

□