Universitat Autònoma de Barcelona

y

Universidad de Málaga

CATEGORÍAS 2024

Ejercicios Resueltos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "hg"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

1. Sesión 1

Lectura recomendada: Secciones 1.1, 1.2, 1.3 de [R16].

Lista de ejercicios: 1.1.i, 1.1.ii, 1.1.iii (i), 1.2.ii, 1.2.iii, 1.2.iv, 1.2.v, 1.3.i, 1.3.ii, 1.3.iii, 1.3.viii, 1.3.ix, 1.3.x.

Soluciones: [1]

Ejercicio 1.1.i

(i) Consideramos un morfismo $f\colon x \to y$. Demuestra que si existe un par de morfismos $g, h\colon \rightrightarrows x$ tal que $gf = 1_x$ y $fh = 1_y$, consecuentemente $g = h$ y f es un isomorfismo.

$f\colon x \to y$, $g\colon y \to x$, $h\colon y \to x$; $gf = 1_x$, $fh = 1_y$

$$gfh = g\,(fh) = g1_y = (gf)\,h = 1_x h \Rightarrow g = h$$

Por tanto $fh = 1_y$ y $hf = 1_x$ de esta forma f es isomorfismo.

(ii) Demuestra que un morfismo como máximo pude tener un único morfismo inverso.

Dado $f\colon x \to y$, un par de isomorfismos que invierten f son dos morfismos $g_1, g_2\colon y \to x$ tal que $g_1 f = g_2 = idx$ y existan $h_1, h_2\colon x \to y$ tal que $g_1 h_1 = g_2 h_2 = 1_x$ y $h_1 g_1 = h_2 g_2 = 1_y$.

Por tanto, aplicando **(i)** obtenemos $h_1 = f = h_2$ y como $g_1 f = 1_x$, $f g_2 = 1_y$ tenemos que $g_1 = g_2$.

[1]Soluciones proporcionadas por Alejandro García