Universitat Autònoma de Barcelona

y

Universidad de Málaga

Categorías 2024

Apéndice

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\operatorname{Sing}(X)_n \arrow[r, "\operatorname{Sing}(\varphi)_n", "\varphi\circ-"'] \arrow[d, shift right=2, "s_j"', "-\circ S^j"'] & \operatorname{Sing}(Y)_n \arrow[r, "\operatorname{Sing}(\theta)_n", "\theta\circ-"'] \arrow[d, shift right=2, "s_j"', "-\circ S^j"'] & \operatorname{Sing}(Z)_n \arrow[d, shift right=2, "s_j"', "-\circ S^j"'] \\
\operatorname{Sing}(X)_{n+1} \arrow[r, "\operatorname{Sing}(\varphi)_{n+1}", "\varphi\circ-"'] \arrow[u, shift right=2, "d_i"', "-\circ D^i"'] & \operatorname{Sing}(Y)_{n+1} \arrow[r, "\operatorname{Sing}(\theta)_{n+1}", "\theta\circ-"'] \arrow[u, shift right=2, "d_i"', "-\circ D^i"'] & \operatorname{Sing}(Z)_{n+1} \arrow[u, shift right=2, "d_i"', "-\circ D^i"']
\end{tikzcd}
$$

Universitat Autònoma de Barcelona

Universidad de Málaga | uma.es

El **Apéndice** esta pensado para poner a disposición de todos detalles técnicos o ampliaciones del contenido visto durante las sesiones.

Índice

1. Lema de Yoneda

Esta es la traducción del apartado dedicado al lema de Yoneda en mi TFG[1] donde se demuestra la vercion contravariante del lema de Yoneda usando la sumersión de Yoneda. Si alguien esta interesado por mi TFG (aviso esta en catalán) o los recusas usados pónganse en contacto (martiparesmath arroba gmail punto com)

Definición 1.0.1 Dada una categoría localmente pequeña C. Definimos la categoría de diagramas $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$ donde los objetos son functores de C a Set y los morfismos son transformaciones naturales de entre estos functores.

Definición 1.0.2 Para un objeto $c \in \mathsf{C}$ definimos el **functor representable contravariante** que es la forma contravariante del functor $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(c, -)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(-, c) : \quad & \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set} \\
& d \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d, c) \\
& g\colon e \to d \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g, c) : \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(s, c) \xrightarrow{-\circ g} \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e, c)
\end{aligned}
$$

Para comprobar que es un functor, para $f\colon d \to c$ de $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d, c)$ y $f\colon d \to c$ de C^{op} podemos ver que $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Id}_d, c) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d,c)}$ y $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g \circ s, c) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(s, c) \circ \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g, c)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Id}_d, c)(f) &= f \circ \mathrm{Id}_d \\
&= f \\
&= \mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d,c)}(f) \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g \circ s, c)(f) &= f \circ (g \circ s) \\
&= (f \circ g) \circ s \\
&= (\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(s, c) \circ \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g, c))(f)
\end{aligned}
$$

Definición 1.0.3 La **sumersión de Yoneda** es un functor d'una categoría localmente

[1] Intrducció a les Categories de Models en Topologia (Martí Parés Baraldés) con Carles Broto Blanco como tutor

pequeña C a la categoría de diagramas $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$.

$$よ\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$$

que envía un objeto c al functor $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(-,c)$ (Definición 1.0.2)

$$よ(c) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(-,c) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$$

Y el morfismo $\xi\colon c \to c'$ en C lo envía a la siguiente transformación natural,

$$よ(\xi) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(-,\xi) : \ \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(-,c) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(-,c')$$

tal que, por todo $g\colon e \to d$ en C^{op}

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d,c) \arrow[r, "よ(\xi)_d", "\xi\circ -"'] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g,c)"', "-\circ g"] & \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(d,c') \arrow[d, "-\circ g"', "\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g,c')"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e,c) \arrow[r, "よ(\xi)_e", "\xi\circ -"'] & \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e,c')
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, cosa fácilmente comprobable ya que por todo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}}(d,c)$ tenemos que $(\xi \circ f) \circ g = \xi \circ (f \circ g)$.

Teorema 1.0.4 *(Lema de Yoneda) Sea C una categoría localmente pequeña. Para cualquier objeto $c \in \mathsf{C}$ y functor $\mathrm{F} \in \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ tenemos un isomorfismo de conjuntos.*

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(c), \mathrm{F}\big) \cong \mathrm{F}(c)$$

que es natural en F y en c que se traduce en que por todo functor $\mathrm{G}\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, transformación natural $\alpha\colon \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ y morfismo $h\colon c \to d$ los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(c), \mathrm{F}\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}\left(よ(c),\alpha\right)"'] & \mathrm{F}(c) \arrow[d, "\alpha_c"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(c), \mathrm{G}\big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{G}(c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(c), \mathrm{F}\big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{F}(c) \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(d), \mathrm{F}\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\mathrm{Mor}\left(よ(h),\mathrm{F}\right)"] & \mathrm{F}(d) \arrow[u, "\mathrm{F}(d)"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos una aplicación $\Phi_{c,\mathrm{F}}$ de $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\big(よ(c), \mathrm{F}\big)$ a $\mathrm{F}(c)$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(\text{よ}(c)\,,\mathrm{F}\right) & \xrightarrow{\quad\Phi_{c,\mathrm{F}}\quad} & \mathrm{F}(c) \\
\eta\colon \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F} & \longmapsto & \eta_c(\mathrm{Id}_c)
\end{array}
$$

y definimos una segunda aplicación $\Theta_{c,\mathrm{F}}$ de $\mathrm{F}(c)$ a $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(\text{よ}(c)\,,\mathrm{F}\right)$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{F}(c) & \xrightarrow{\quad\Theta_{c,\mathrm{F}}\quad} & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(\text{よ}(c)\,,\mathrm{F}\right) \\
\theta & \longmapsto & \eta_\theta\colon \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F}
\end{array}
$$

Definimos la imagen de θ bajo $\Theta_{c,\mathrm{F}}$ como la transformación natural η_θ, cuyos componentes son

$$
\begin{array}{rcl}
(\eta_\theta)_e :\ \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e,c) & \longrightarrow & \mathrm{F}(r) \\
g\colon e \to c & \longmapsto & \mathrm{F}
\end{array}
$$

Primero vamos a comprobar que η_θ esta bien definida como transformación natural, verificando que para cualquier $f\colon r \to e$ de C^{op}, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(r,c) \arrow[r, "(\eta_\theta)_r"] & \mathrm{F}(r) \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e,c) \arrow[r, "(\eta_\theta)_e"] \arrow[u, "\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(f,c)"] & \mathrm{F}(e) \arrow[u, "\mathrm{F}"']
\end{tikzcd}
$$

Para todo $g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(e,c)$

$$
\begin{aligned}
(\eta_\theta)_r \circ \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(f,c)(g) &= (\eta_\theta)_r(g \circ f) \\
&= \mathrm{F}(g \circ f)(\theta) \\
&= \mathrm{F}(f) \circ \mathrm{F}(g)(\theta) \\
&= \mathrm{F} \circ (\eta_\theta)_e(g)
\end{aligned}
$$

El siguiente paso es comprobar que $\Phi_{c,\mathrm{F}}$ y $\Theta_{c,\mathrm{F}}$ son mutuamente inversos.

$$
\begin{array}{rcccl}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(\text{よ}(c)\,,\mathrm{F}\right) & \xrightarrow{\quad\Phi_{c,\mathrm{F}}\quad} & \mathrm{F}(c) & \xrightarrow{\quad\Theta_{c,\mathrm{F}}\quad} & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(\text{よ}(c)\,,\mathrm{F}\right) \\
\eta\colon \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F} & \longmapsto & \eta_c(\mathrm{Id}_c) = \theta & \longmapsto & \eta_\theta\colon \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F}
\end{array}
$$

Por definición de $\eta\colon \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F}$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}\left(c,c\right) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g,c)"] & よ\left(c\right)\left(c\right) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "よ(c)(g)"] & \mathrm{F}\left(c\right) \arrow[d, "\mathrm{F}(g)"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}\left(e,c\right) \arrow[r, equal] & よ\left(c\right)\left(e\right) \arrow[r, "\eta_e"] & \mathrm{F}\left(e\right)
\end{tikzcd}
$$

De esta forma tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\eta_\theta\right)_e\left(g\right) &= \mathrm{F}\left(g\right)\left(\theta\right)\\
&= \mathrm{F}\left(g\right)\left(\eta_c\left(\mathrm{Id}_c\right)\right)\\
&= \eta_e \circ よ\left(c\right)\left(g\right)\left(\mathrm{Id}_c\right)\\
&= \eta_e\left(g\right)
\end{aligned}
$$

Asi que $\eta_\theta = \eta$ por cualquier $\theta \in \mathrm{F}\left(c\right)$, por tanto $\Theta_{c,\mathrm{F}} \circ \Phi_{c,\mathrm{F}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(よ(c),\mathrm{F}\right)}$.

A continuación comprobamos el otro orden de composición.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{F}\left(c\right) \arrow[r, "\Theta_{c,\mathrm{F}}"] & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(よ\left(c\right),\mathrm{F}\right) \arrow[r, "\Phi_{c,\mathrm{F}}"] & \mathrm{F}\left(c\right) \\
\theta \arrow[r, mapsto] & \eta_\theta \colon よ\left(c\right) \Rightarrow \mathrm{F} \arrow[r, mapsto] & \left(\eta_\theta\right)_c\left(\mathrm{Id}_c\right)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\eta_\theta\right)_c\left(\mathrm{Id}_c\right) &= \mathrm{F}\left(\mathrm{Id}_c\right)\left(\theta\right)\\
&= \mathrm{Id}_{\mathrm{F}(c)}\left(\theta\right)\\
&= \theta
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos concluir que $\Phi_{c,\mathrm{F}} \circ \Theta_{c,\mathrm{F}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}(c)}$.

Por tanto hemos demostrado que $\Phi_{c,\mathrm{F}} \colon \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}}\left(よ\left(c\right),\mathrm{F}\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{F}\left(c\right)$ es un isomorfismo.

Para finalizar la demostración nos falta demostrar la naturalidad en F y en $c \in \mathsf{C}$.

Por cualquier functor $\mathrm{G} \colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ y transformación natural $\alpha \colon \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$,

$$
\left(\eta \colon よ\left(c\right) \Rightarrow \mathrm{F}\right) \in \mathrm{Mor}\left(よ\left(c\right),\mathrm{F}\right)
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\left(よ\left(c\right),\mathrm{F}\right) \arrow[r, "\cong", "\Phi_{c,\mathrm{F}}"'] \arrow[d, "\mathrm{Mor}\left(よ(c),\alpha\right)"', "\alpha\circ-"] & \mathrm{F}\left(c\right) \arrow[d, "\alpha_c"] \\
\mathrm{Mor}\left(よ\left(c\right),\mathrm{G}\right) \arrow[r, "\cong", "\Phi_{c,\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G}\left(c\right)
\end{tikzcd}
$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha_c \circ \Phi_{c,\mathrm{F}}\right)(\eta) &= \alpha_c\left(\eta_c\left(\mathrm{Id}_c\right)\right) \\
&= \left(\alpha \circ \eta\right)_c\left(\mathrm{Id}_c\right) \\
&= \Phi_{c,\mathrm{G}}\left(\mathrm{Mor}\left(\text{よ}\left(c\right), \alpha\right)\left(\eta\right)\right)
\end{aligned}
$$

Para la naturalidad en $c \in \mathsf{C}$, por cualquier $h\colon c \to d$

$$
\begin{tikzcd}
\omega \circ \text{よ}(h) : \text{よ}(c) \Rightarrow \mathrm{F} \arrow[rrr, mapsto] & & & \left(\omega \circ \text{よ}(h)\right)_c\left(\mathrm{Id}_c\right) \\
& \mathrm{Mor}\left(\text{よ}(c), \mathrm{F}\right) \arrow[r, "\cong", "\Phi_{c,\mathrm{F}}"'] & \mathrm{F}(c) & \\
& \mathrm{Mor}\left(\text{よ}(d), \mathrm{F}\right) \arrow[u, "\mathrm{Mor}\left(\text{よ}(h),\mathrm{F}\right)", "-\circ\text{よ}(h)"'] \arrow[r, "\cong", "\Phi_{d,\mathrm{F}}"'] & \mathrm{F}(d) \arrow[u, "\mathrm{F}(h)"] & \\
\omega\colon \text{よ}(d) \Rightarrow \mathrm{F} \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \omega_d\left(\mathrm{Id}_d\right)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{c,\mathrm{F}} \circ \mathrm{Mor}\left(\text{よ}(h), \mathrm{F}\right)(\omega) &= \Phi_{c,\mathrm{F}}\left(\omega \circ \text{よ}(h)\right) \\
&= \left(\omega \circ \text{よ}(h)\right)_c\left(\mathrm{Id}_c\right) \\
&= \omega_c\left(\text{よ}(h)_c\left(\mathrm{Id}_c\right)\right) \\
&= \omega_c\left(h \circ \mathrm{Id}_c\right) \\
&= \omega_c(h) \\
&= \omega_c\left(\mathrm{Id}_d \circ h\right) \\
&= \omega_c\left(\text{よ}(d)(h)\left(\mathrm{Id}_d\right)\right) \\
&= \mathrm{F}(h) \circ \omega_d\left(\mathrm{Id}_d\right) \\
&= \mathrm{F}(h) \circ \Phi_{d,\mathrm{F}}(\omega)
\end{aligned}
$$

La ecuación anterior a la última es consecuencia de

$$
\begin{tikzcd}
\text{よ}(d)(d) \arrow[r, "\omega_d"] \arrow[d, "\text{よ}(d)(h)"] & \mathrm{F}(d) \arrow[d, "\mathrm{F}(h)"] \\
\text{よ}(d)(c) \arrow[r, "\omega_c"] & \mathrm{F}(d)
\end{tikzcd}
$$

Finalizamos la demostración con $\Phi_{c,\mathrm{F}} \circ \mathrm{Mor}\left(\text{よ}(h), \mathrm{F}\right) = \mathrm{F}(h) \circ \Phi_{d,\mathrm{F}}$

$\square$

1.1. Lema de Yoneda aplicado a los sSet

Mi comentario en la sesión 6 trataba explicar un uso del lema de Yoneda en la categoría de conjuntos simpliciales. Dada la categoría de los conjuntos finitos completamente ordenados $\mathbf{\Delta}$ la categoría formada por los functores $\mathrm{F}\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ se llama sSet los elementos de sSet también se pude caracterizar por la imagen de dicho functor donde $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}(n)$ por cada n de $\mathbf{\Delta}$ (creo que dicha imagen es una categoría pero no lo pude justificar).

Simplificándolo mucho la idea, partiendo de los complejos simpliciales geométricos, como agrupaciones de "triángulos" n-dimensionales, abstraes a un ida puramente combinatoria llamada complejos simpliciales y finalmente abstraes los complejos simpliciales a una ida categórica llamada conjuntos simpliciales o sSet.

Al aplicar la sumersión de Yoneda 1.0.3 tenemos que

$$よ_{\mathbf{\Delta}}\colon \mathbf{\Delta} \to \mathsf{sSet}$$

si hora aplicaos el lema de Yoneda 1.0.4 tenemos que dados $X \in \mathsf{sSet}$ y $n \in \mathbf{\Delta}$

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{sSet}}\left(よ(n), X\right) \cong X(n)$$

donde $よ(n)$ es el equivalente categórico al n-símplex geométrico estándar y $X(n)$ de forma similar a la nomenclatura usada en los complejos simpliciales lo llamaremos X_n como versión categórica del conjunto de n-caras de los complejos simpliciales, de forma que obtenemos

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{sSet}}(\mathbf{\Delta}^n, X) \cong X_n$$

Si trasladamos este resultado al los complejos simpliciales geométricos nos vendría a decir que el conjunto de aplicaciones continuas entre el n-símplex geométrico estándar y un complejo simplicial geométrico es isomorfo al conjunto de n-caras.