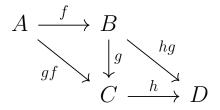
Universitat Autònoma de Barcelona

y Universidad de Málaga

CATEGORÍAS 2024

Ejercicios Resueltos









1. Sesión 1

Lectura recomendada: Secciones 1.1, 1.2, 1.3 de [R16].

Lista de ejercicios: 1.1.i, 1.1.ii, 1.1.iii (i), 1.2.ii, 1.2.iii, 1.2.iv, 1.2.v, 1.3.i, 1.3.ii, 1.3.viii, 1.3.x.

Soluciones: 1

Ejercicio 1.1.i

(i) Consideramos un morfismo $f: x \to y$. Demuestra que si existe un par de morfismos $g, h: \Rightarrow x$ tal que $gf = \mathbf{1}_x$ y $fh = \mathbf{1}_y$, consecuentemente g = h y f es un isomorfismo.

$$f: x \to y, g: y \to x, h: y \to x; gf = 1_x, fh = 1_y$$

$$gfh = g(fh) = g1_y = (gf) h = 1_x h \Rightarrow g = h$$

Por tanto $fh = 1_y$ y $hf = 1_x$ de esta forma f es isomorfismo.

(ii) Demuestra que un morfismo como máximo pude tener un único morfismo inverso.

Dado $f: x \to y$, un par de isomorfismos que invierten f son dos morfismos $g_1, g_2: y \to x$ tal que $g_1 f = g_2 = i dx$ y existan $h_1, h_2: x \to y$ tal que $g_1 h_1 = g_2 h_2 = 1_x$ y $h_1 g_1 = h_2 g_2 = 1_y$.

Por tanto, aplicando (i) obtenemos $h_1 = f = h_2$ y como $g_1 f = 1_x$, $fg_2 = 1_y$ tenemos que $g_1 = g_2$.

Ejercicio 1.1.ii

Dada una categoría C. Demuestra que la colección de isomorfismos en C definen una subcategoría, llamada grupoide máximal dentro de C.

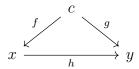
$$I_{\mathsf{C}} := (\{\theta \in \mathsf{O} | \exists \varphi \colon \theta \to \theta' \text{ isomorfismo}\}, \{\varphi \in \mathsf{Mor}(\mathsf{C}) | \varphi \text{ isomorfismo}\})$$

Definimos una categoría I_{C} que tiene por objetos $\theta \in \mathrm{ob}(\mathsf{C})$ tales que existe un isomorfismo $\varphi \to \theta'$ por algun objeto θ'

Ejercicio 1.1.ii

Por cualquier categoría C y cualquier objeto $c \in C$, demuestra:

(i) Existe una categoría c/\mathbb{C} cuyos objetos son morfismo $f\colon c\to x$ con dominio c y un morfismo de $f\colon c\to x$ a $g\colon c\to y$ es un morfismo $h\colon x\to y$ de forma que



es un diagrama conmutativo (g = hf).

¹Soluciones proporcionadas por Alejandro García