

Universitat Autònoma de Barcelona

y

Universidad de Málaga

CATEGORÍAS 2024

Ejercicios Resueltos

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & & \\ & \searrow gf & \downarrow g & \searrow hg & \\ & & C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

UAB

Universitat Autònoma
de Barcelona



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

| uma.es

1. Sesión 1

Lectura recomendada: Secciones 1.1, 1.2, 1.3 de [R16].

Lista de ejercicios: 1.1.i, 1.1.ii, 1.1.iii (i), 1.2.ii, 1.2.iii, 1.2.iv, 1.2.v, 1.3.i, 1.3.ii, 1.3.iii, 1.3.viii, 1.3.ix, 1.3.x.

Soluciones:¹

Ejercicio 1.1.i

(i) Consideramos un morfismo $f: x \rightarrow y$. Demuestra que si existe un par de morfismos $g, h: y \rightarrow x$ tal que $gf = 1_x$ y $fh = 1_y$, consecuentemente $g = h$ y f es un isomorfismo.

$$f: x \rightarrow y, g: y \rightarrow x, h: y \rightarrow x; gf = 1_x, fh = 1_y$$

$$ghf = g(fh) = g1_y = (gf)h = 1_xh \Rightarrow g = h$$

Por tanto $fh = 1_y$ y $hf = 1_x$ de esta forma f es isomorfismo.

(ii) Demuestra que un morfismo como máximo puede tener un único morfismo inverso.

Dado $f: x \rightarrow y$, un par de isomorfismos que invierten f son dos morfismos $g_1, g_2: y \rightarrow x$ tal que $g_1f = g_2 = 1_x$ y existan $h_1, h_2: x \rightarrow y$ tal que $g_1h_1 = g_2h_2 = 1_y$ y $h_1g_1 = h_2g_2 = 1_y$.

Por tanto, aplicando (i) obtenemos $h_1 = f = h_2$ y como $g_1f = 1_x$, $fg_2 = 1_y$ tenemos que $g_1 = g_2$.

Ejercicio 1.1.ii

Dada una categoría \mathbf{C} . Demuestra que la colección de isomorfismos en \mathbf{C} definen una subcategoría, llamada grupoide máximo dentro de \mathbf{C} .

$$\mathbf{I}_{\mathbf{C}} = (\{\theta \in \mathbf{O} \mid \exists \varphi: \theta \rightarrow \theta' \text{ isomorfismo}\}, \{\varphi \in \text{Mor}(\mathbf{C}) \mid \varphi \text{ isomorfismo}\})$$

Definimos una categoría $\mathbf{I}_{\mathbf{C}}$ que tiene por objetos $\theta \in \text{ob}(\mathbf{C})$ tales que existe un isomorfismo $\varphi: \theta \rightarrow \theta'$ por algún objeto θ'

Ejercicio 1.1.ii

Por cualquier categoría \mathbf{C} y cualquier objeto $c \in \mathbf{C}$, demuestra:

(i) Existe una categoría c/\mathbf{C} cuyos objetos son morfismos $f: c \rightarrow x$ con dominio c y un morfismo de $f: c \rightarrow x$ a $g: c \rightarrow y$ es un morfismo $h: x \rightarrow y$ de forma que

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ x & \xrightarrow{h} & y \end{array}$$

es un diagrama conmutativo ($g = hf$).

¹Soluciones proporcionadas por Alejandro García