Задача 2

Условие

В группе первокурсников ШАДа n ребят и они видят друг друга впервые. А в парке аттракционов сегодня дают скидку, если приходит компания ровно из k друзей, среди которых каждый дружит с каждым. Дружба между любой парой однокурсников независимо возникает с вероятностью p.
Макс, один из первокурсников, хочет пойти на аттракционы со скидкой. Каким в среднем количеством способов он может это сделать?

Решение

Индикаторная техника. Идея в том, чтобы представить случайную величину (в нашем случае, "количество подходящих групп") как сумму индикаторных случайных величин.
Индикаторная переменная для какого-либо события A, обозначаемая $\mathbb{1}(A)$, равна 1, если событие А произошло, и 0, если не произошло.
Ключевое свойство: Математическое ожидание индикаторной переменной равно вероятности того события, которое она индикатирует. То есть, $\mathbb{E}[\mathbb{1}(A)] = \mathbb{P}(A)$.

- Ясно, что ответом служит математическое ожидание числа групп, состоящих из k ребят, включая Макса, в каждой из которых все попарно дружат друг с другом:
  $\mathbb{E}\,(\text{числа подходящих групп}) = \mathbb{E}\left(\sum_{t\in T} \mathbb{1}\,(\text{в t все попарно знакомы})\right) = \sum_{t\in T} \mathbb{P}\,(\text{в t все попарно знакомы})$
  ,
  где T - множество всевозможных компаний мощности k, включающих Макса, а $\mathbb{1}\,(A)$ - индикатор события A.
- Всего таких различных групп $|T| = C_{n-1}^{k-1}$, так как Макс зафиксирован.
- Вероятность, что в одной из таких групп каждый знает каждого $p^{C_k^2}$. Если события независимы, вероятность их одновременного наступления равна произведению их индивидуальных вероятностей, а для k человек пар будет C_k^2.
- $\mathbb{E}\,(\text{числа подходящих групп}) = |T|p^{C_k^2} = C_{n-1}^{k-1}\,p^{C_k^2}$