Задача 1

Условие

Найдите предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где
$\{a_n\} = |\sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + n^2})|$

Решение

- $|\sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + n^2})| = |\sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \pi n + \pi n)|$
  $= |\pm\sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \pi n)| = |\sin(\pi\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \pi n)|$
  $= |\sin\Big(\pi(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n)\Big)|$
  потому что $|\sin(x + \pi n)| = |\pm\sin(x)| = |sin(x)|$
- Используя формулу Тейлора для функции $\sqrt[3]{1 + x}$, выражение под синусом можно записать в следующем виде:
  $\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n = n\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$
  $= n\left(1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{3} + o(1)$
- Подставим результат в исходное выражение:
  $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |\sin\Big(\pi\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)\Big)| = \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$