Задача 3

Условие

Рассмотрим некоторую билинейную функцию $Q : V \times W \to \mathbf{R}$ - на вещественных линейных пространствах V и W. В базисах α и β Q имеет матрицу $Q_{\alpha,\beta}$:

$$Q(v, w) = v_\alpha^T (Q_{\alpha,\beta}) w_\beta$$

где v_α, w_β - координаты векторов v, w в соответствующих базисах.
Рассмотрим $Q_{\alpha,\beta}$ как матрицу некоторого линейного оператора в некотором базисе.
Оказалось, что в некотором другом базисе его матрица B обладает следующим свойством: $B^2 = B$.
Найдите максимальную и минимальную возможную размерности собственного подпространства этого оператора, если известно, что Q в некоторой другой паре базисов ω, γ:

$$Q_{\omega,\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

- Приводим матрицу $Q_{\omega,\gamma}$ методом Гаусса к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ранг этой матрицы равен 2, значит ранг матрицы $Q = Q_{\alpha,\beta}$ тоже равен 2
- Пусть в каких-то базисах α, β билинейная функция Q имеет матрицу $Q_{\alpha,\beta}$, а в других базисах она становится оператором с матрицей B. Между ними существует невырожденная замена базиса

$$Q_{\alpha,\beta} = C^{-1} BC$$

- а подобие сохраняет ранг: $rank(B) = rank(C^{-1}BC) = rank(Q_{\alpha,\beta}) = 2$
- Оператор B, удовлетворяющий $B^2 = B$, называется **проектором**. Из теории линейных операторов известно:
    1. Собственные значения B - это 0 и 1
    2. Минимальный многочлен делится на $x(x-1)$, у которого нет кратных корней
    3. Значит, B диагонализуем, и в некотором базисе его матрица - просто диагональ из 0 и 1
- Если у оператора ранг r, то:
    - $dim(\ker B) = n - r$ дает кратность (и размерность) собственного значения 0.
    - $dim(\operatorname{Im} B) = r$ дает кратность (и размерность) собственного значения 1.
- Применяем к нашей задаче (размерность пространства $n = 4$, ранг $r = 2$)
    - $\lambda = 1$ - собственное подпространство размерности $r = 2$
    - $\lambda = 0$ - собственное подпространство размерности $n - r = 4 - 2 = 2$
- Получается для всех собственных значений (0 и 1) размерности равны 2, следовательно минимальная и максимальная размерности собственного подпространства равны **2**.

Ответ: 2, 2