Laboratorio de Programación - Labo01

Ejercicio 8: Resolución Iterativa - Tips

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.

Ejercicio 8

Escribir una función que dados n, k $\in \mathbb{N}$ *compute el combinatorio:* $\binom{n}{k}$. *Hacerlo usando la igualdad* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

¿Qué pasa si tuvieran que escribir la versión iterativa?

Ejercicio 8

Voy a plantear los tips para llegar a una solución iterativa al problema. Esto no es una receta, y Uds. puedente tener la suya propia.
El problema plantea resolver la combinatoria utilizando la igualdad

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lo debemos resolver de forma iterativa, por lo tanto, parecido a la metodología del ejercicio de Fibonacci. El problema que aqui no conocemos el Caso Base.
Para encarar la resolución debemos entonces:

- Identificar el Caso Base.
- Aplicar la sustitución de valores pre-calculados.

Ejercicio 8

1) Caso Base

Planteemos como se podría descomponer la cuenta utilizando esta fórmula...

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \ldots + \binom{n-1-1}{k-1} + \binom{n-1-1}{k-1-1} \\
&= \; + \; + \binom{n-1-2}{k-2} + \binom{n-1-2}{k-1-2} \\
&= \; + \; + \ldots + \; + \binom{n-1-m}{k-m} + \binom{n-1-m}{k-1-m}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ejercicio 8

1) Caso Base
Tomo los dos "ultimos" términos

$$\binom{n-1-m}{k-m} + \binom{n-1-m}{k-1-m} \tag{3}$$

A mi me interesa que el último tenga una expresión que si puedo calcular:

$$\binom{n-1-m}{k-1-m} = \binom{?}{1} \tag{4}$$

Entonces:

- $k-1-m=1$
- $m=k-2$
- El "?" en ecuación 4 es $n-1-m=n-1-k+2=n-k+1$

Ejercicio 8

1) Caso Base

Llego al Caso Base con valores de n y k que conozco y son datos de entrada:

$$\left(\begin{array}{c} n-k+1 \\ 1 \end{array} \right) = n-k+1 \tag{5}$$

Introduzco ahora una variable i de control en los dos últimos términos del desarrollo (ecuación 3)... Al asignarle un valor inicial $i = 2$ se conserva el Caso Base, y lo aplico también al otro término de la ecuación 3:

$$\left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i-1 \end{array} \right) \tag{6}$$

Bueno, genial, ya tengo el caso base compuesto por los dos ultimos términos, al que agregué la variable de control i que estoy interesado que sea la que voy a ir incrementando a lo largo de mis iteraciones.

Ejercicio 8

2) Aplicar la sustitución de valores pre-calculados.
Por definición:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{7}$$

Voy a aplicarla a los dos términos de ecuación 6.

$$\left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i \end{array} \right) = \frac{(n-k+i-1)!}{i!(n-k+i-1-i)!} = \frac{(n-k+i-1)!}{i(i-1)!(n-k-1)!} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i-1 \end{array} \right) &= \frac{(n-k+i-1)!}{(i-1)!(n-k+i-1-i+1)!} \\ &= \frac{(n-k+i-1)!}{(i-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k+i-1)!}{(i-1)!(n-k)(n-k-1)!} \end{aligned} \tag{9}$$

Ejercicio 8

2) Aplicar la sustitución de valores pre-calculados.
Reacomodo ecuación 11

$$(n-k)\left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i-1 \end{array}\right) = \frac{(n-k+i-1)!}{(i-1)!(n-k-1)!} \qquad (10)$$

Esto lo puedo reemplazar en ecuación 8:

$$\left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i \end{array}\right) = \frac{(n-k)}{i}\left(\begin{array}{c} n-k+i-1 \\ i-1 \end{array}\right) \qquad (11)$$

Voilà, ya tenemos el primer término de la ecuación 6 escrito en función del segundo (Caso Base). Esta es la semilla para resolver el problema y pueden usarla para escribir el código.