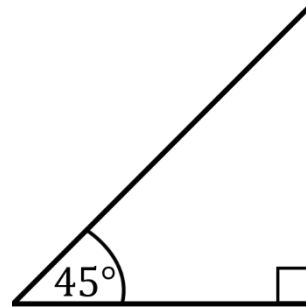
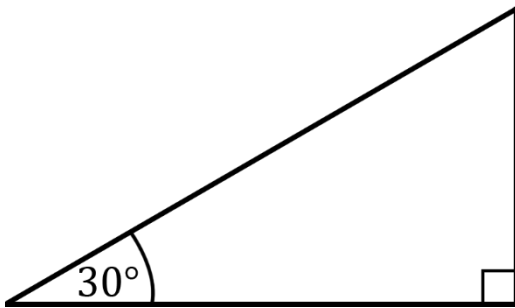


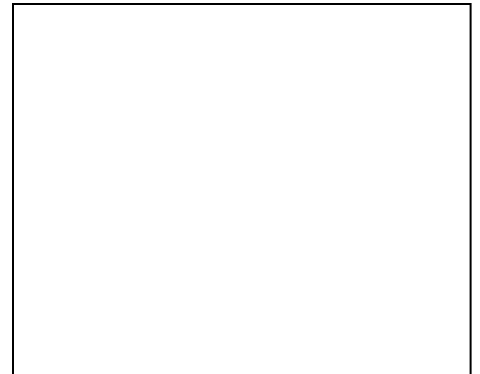
ตรีโกณมิติ (trigonometry) เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับขนาดของมุมและความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม สามเหลี่ยมมุมฉากกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ



กำหนดให้มุม $30^\circ = \theta$ (θ อ่านว่า theta - ทีตา)

พิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยม จะได้ทั้งหมด 6 แบบ

- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ
- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ
- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ
- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ
- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ
- อัตราส่วนระหว่าง _____ เรียกว่า _____ ของ มุม θ หรือ



จากสามเหลี่ยมข้างต้น จะได้

| ฟังก์ชันค่ามุม | θ | 30° | 45° | 60° |
|----------------|----------|------------|------------|------------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Ex.1 จงหา $\frac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$

Ex.2 จงหา $\left(\frac{\sin 30^\circ - \sec 45^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 60^\circ} \right) \times \left(\frac{\tan 45^\circ + \cot 30^\circ}{\csc 60^\circ - \cot 45^\circ} \right)$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
2. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
3. $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

การหาระยะทางและความสูง

มุมก้ม คือ

มุมเงย คือ

จุดสังเกต •

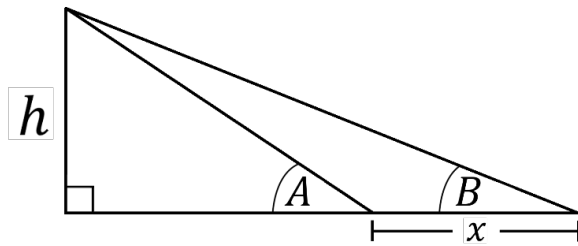
• วัดดู

• วัดดู

จุดสังเกต •

Ex จากหน้าผาสูง 200 เมตรจากระดับน้ำทะเลปานกลาง ผู้สังเกตการณ์คนหนึ่งมองเห็นเรือสองลำ ทอดสมออยู่ในทะเลเป็นมุมก้ม 40 และ 60 องศา จากเส้นระดับสายตาเดียวกัน จงหาว่าเรือทั้งสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าใด (กำหนด $\cot 10^\circ \approx 5.7$ และ $\cot 60^\circ \approx 0.57$)

สูตรัดมุมกัมมุเมย



พิสูจน์

1) ถ้า $\sec^4 A - \tan^4 A = 2$ แล้ว $\operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A$ เท่ากับเท่าไร

1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

2) ค่าของ $(\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 - (\tan^2 A + \cot^2 A)$
เท่ากับเท่าไร

1) $2\sqrt{3}$

2) 3

3) 4

4) $5\sqrt{2}$

3) ถ้า $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ และ $4 \sin B + 3 \cos A = 1$

แล้วค่าของ $\cos(A + B)$ เท่ากับเท่าใด

เมื่อกำหนดให้ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ (TU)

4) ถ้า $x = \sec \theta - \tan \theta$ และ $x + \frac{1}{x} = 4$ แล้ว จงหา $\cos \theta$ (TU)

5) ค่าของ $(\cos^2 A - \sin^2 A)^2 - \frac{4}{3}(\sin^6 A + \cos^6 A)$ เท่ากับเท่าใด

- 1) **1** 2) $\frac{1}{3}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) **-1**

6) รูปสามเหลี่ยม ABC มีส่วนสูงที่ลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับด้าน BC ยาว 3 หน่วย
ถ้า $\hat{BAC} = 50^\circ$ และ $\hat{ABC} - \hat{ACB} = 10^\circ$ แล้วด้าน AC ยาวกี่หน่วย

- 1) **$2\sqrt{3}$** 2) **3** 3) **4** 4) **$5\sqrt{2}$**

- 7) สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $\hat{ACB} = 30^\circ$
ลากเส้นจาก A ไปตัดด้าน \overline{BC} ที่จุด D ได้ $\hat{ADB} = 60^\circ$
ถ้า \overline{DC} ยาว $6\sqrt{3}$ หน่วย แล้ว \overline{AB} ยาวเท่าไร

1) 9 2) $9\sqrt{2}$ 3) $9\sqrt{3}$ 4) 12

- 8) นาย ก ยืนอยู่บนดาดฟ้าของตึกแห่งหนึ่ง มองเห็นนาย ข เป็นมุมก้ม 45° ต่อมา นาย ข เดินเข้าหาตึกเป็นระยะทาง 30 เมตร พบว่า นาย ก จะมองเห็นนาย ข เป็นมุมก้ม 60° แล้วตึกแห่งนี้สูงกี่เมตร (TU2563)

- 9) เสาธง AB และ CD ตั้งอยู่บนพื้นดินที่จุด A และจุด C ซึ่งห่างกัน 120 เมตร จากจุดกึ่งกลางบนพื้นดิน ระหว่างจุด A และจุด C มุมเงยของยอดเสาธงทั้งสองรวมกันเท่ากับหนึ่งมุมฉาก ถ้าเสาธง AB สูงเป็นสามเท่าของเสาธง CD แล้วเสาธง AB มีความสูงเท่ากับเท่าใด

- 10) นนทวัฒน์ผู้ห่าวหาญซึ่งมอเตอร์ไซค์แข่งกับเครื่องบินด้วยอัตราเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามเครื่องบินซึ่งบินด้วยอัตราเร็ว 700 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และกำลังบินอยู่ที่ระดับเพดานบิน $6\sqrt{3}$ กิโลเมตร ถ้าในขณะนี้นนทวัฒน์มองเห็นเครื่องบินที่มุมเงย 60° แล้วอีกกี่วินาที นนทวัฒน์จะมองเห็นเครื่องบินที่มุมเงย 30°