

# Modelowanie deterministyczne

## Projekt ogrzewania mieszkania

Martyna Sikorska

2024-02-08

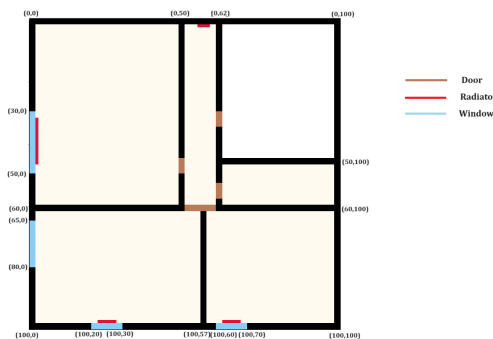
W obliczu współczesnych wyzwań związanych z efektywnym gospodarowaniem energią, nasza uwaga skupia się na poszukiwaniu innowacyjnych strategii ogrzewania mieszkań zimą. Celem głównym naszego projektu jest minimalizacja zużycia energii przy jednoczesnym utrzymaniu optymalnego komfortu termicznego w pomieszczeniach. W trakcie naszych badań, posługując się zaawansowanymi modelami matematycznymi, analizować będziemy różnorodne systemy ogrzewania, w celu zrozumienia wpływu różnych czynników na efektywność energetyczną.

Zakres naszych badań obejmie szereg kwestii, takich jak izolacja termiczna, rodzaj źródła ciepła oraz techniki sterowania temperaturą. Poprzez analizę wzajemnych interakcji tych czynników, dążymy do zidentyfikowania optymalnych rozwiązań uwzględniających efektywność energetyczną i aspekty ekonomiczne w kontekście sezonu zimowego.

Nasz projekt ma na celu nie tylko zlokalizowanie najlepszych praktyk, ale także opracowanie innowacyjnych strategii ogrzewania. Te strategie nie tylko redukują wpływ na środowisko przez obniżenie zużycia energii, ale także stanowią ekonomicznie opłacalne rozwiązanie dla użytkowników.

## Framework

Na początek musimy przygotować schemat mieszkania, na którym będzie opierał się nasz projekt. Założmy, że nasze mieszkanie jest wymiaru  $100 \times 100$ , wliczając w to wymiary klatki schodowej. Dla ułatwienia poniżej zobrazujemy owy schemat oraz zaznaczamy rozmieszczenie pokoi za pomocą indeksów wierszy i kolumn.



Rysunek 1: Schemat mieszkania

Mieszkanie ze schematu zawiera dwa pokoje, kuchnię, łazienkę oraz korytarz łączący wszystkie pomieszczenia. W prawym górnym rogu widoczna jest klatka schodowa. Rozmieszczenie okien oraz grzejników wygląda następująco:

- w salonie znajduje się jedno szerokie okno, a tuż pod nim grzejnik,
- w sypialni mamy dwa okna oraz grzejnik znajdujący się pod jednym z nich,
- kuchnia, tak samo jak salon zawiera jedno okno i grzejnik, lecz o mniejszych wymiarach,
- na korytarzu umieszczony jest jeden grzejnik.

Mamy możliwość ustawienia mocy grzejników od 1 do 5. Z kolei nasz system grzewczy wyłączy grzejnik w pokoju, gdy temperatura w pomieszczeniu osiągnie wartość dla nas optymalną, w tym przypadku około  $297K$ .

## Model matematyczny

Równanie opisujące rozchodzenie się temperatury w ciele stałym lub płynie można zapisać przy użyciu równania przewodnictwa cieplnego. Jednym z podstawowych równań opisujących ten proces jest równanie przewodnictwa cieplnego Fouriera, które wygląda następująco:

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}),$$

gdzie:

- $u$  oznacza temperaturę (w naszym przypadku wyrażona w Kalwinach),
- $t$  to czas,
- $D$  to współczynnik przewodzenia ciepła,
- $u_t$  to pochodna temperatury po czasie,
- $u_{xx}, u_{yy}$  to drugie pochodne przestrzenne temperatury  $u$  po każdej ze współrzędnych przestrzennych, które reprezentują zmiany temperatury w kierunkach przestrzennych.

Podobnie jak we wszystkich poprzednich problemach potrzebujemy pewnych początkowych danych. Musimy więc ustalić średnie temperatury w poszczególnych pokojach dla czasu  $t = 0$ . W naszym przypadku będą one oscylować na przedziale  $[280K, 298K]$ . W miejscach, gdzie mamy okna przyjmujemy temperaturę na zewnątrz, która jest zależna od czasu  $t$ . Z kolei w miejscach, gdzie mamy drzwi temperatura będzie średnią z temperatur w dwóch pokojach sąsiadujących. Na koniec, aby rozwiązać problem wartości początkowej, musimy dodać warunki brzegowe. Zakładamy, że na krawędziach nie ma przepływu, dlatego zastosujemy warunki Neumanna:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = \nabla u(x, y, t) \cdot n(x, y) = 0.$$

## Schemat numeryczny różnic skończonych

Teraz wyprowadzimy jawne schematy numeryczne dla warunków początkowych Neumanna. Całkując pierwsze równanie ze względu na krok czasowy  $h_t$  otrzymujemy:

$$u(x, y, t + h_t) = u(x, y, t) + h_t D \Delta u(x, y, t).$$

Drugi składnik po prawej stronie równania można dyskretyzować metodą różnicy centralnej. Liczymy więc z krokami  $h_x$  oraz  $h_y$  w obu kierunkach.

$$\Delta u(x, y, t) \approx \frac{1}{h_x^2} (u(x + h_x, y, t) + u(x - h_x, y, t) + u(x, y - h_x, t) + u(x, y + h_x, t) - 4u(x, y, t)).$$

Dla przejrzystości zapisać możemy powyższe równanie jako:

$$u_{i,j,k+1} = u_{i,j,k} + \frac{Dh_t}{h_x^2} (u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - 4u_{i,j,k}).$$

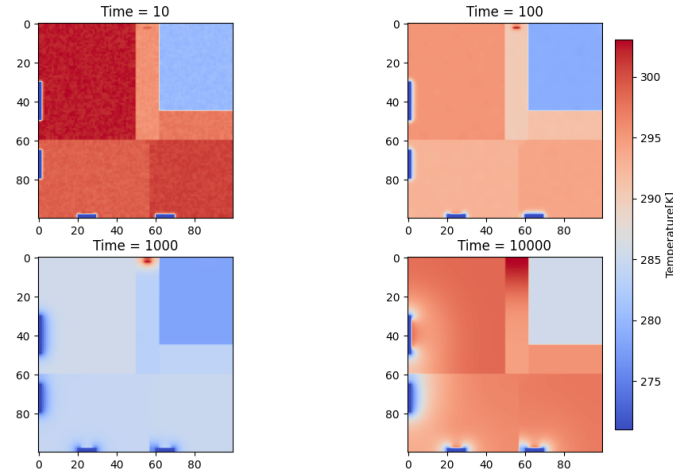
Równanie to jest prawdziwe jedynie dla  $(x_i, y_i) \notin \partial\Omega$ . Z kolei używając warunków Neumanna na brzegach otrzymujemy:

$$u_{i,j,k+1} = \begin{cases} u_{L-1,j,k+1} & \text{jeśli } x_i = L, 0 \leq y_j \leq M, \\ u_{1,j,k+1} & \text{jeśli } x_i = 0, 0 \leq y_j \leq M, \\ u_{i,L-1,k+1} & \text{jeśli } 0 \leq x_i \leq L, y_j = M, \\ u_{i,1,k+1} & \text{jeśli } 0 \leq x_i \leq L, y_j = 0. \end{cases}$$

## Symulacje

Celem naszej pracy jest ustalenie, czy istnieją konkretne strategie włączania grzejników, które mogą przyczynić się do obniżenia zużycia energii oraz kosztów związanych z ogrzewaniem mieszkania. Wykorzystując narzędzia symulacyjne, będziemy analizować różne scenariusze pracy grzejników w zależności od temperatury wewnątrz pomieszczeń oraz preferencji użytkowników. Dodatkowo w naszym modelu zakładamy, że nasze grzejniki są wyposażone w termostat, co pozwala ustawić optymalną temperaturę pomieszczenia, sprawiając, że w mieszkaniu nie jest ani za ciepło, ani za chłodno. W naszym przypadku wyłączenie grzejników nastąpi, gdy temperatura w pomieszczeniach wyniesie średnio  $297K$ . To idealne rozwiązanie, tym bardziej że instalacja termostatu grzejnikowego przekłada się na mniejsze rachunki za ogrzewanie.

Dla przykładu spójrzmy najpierw, jak zmienia się temperatura w mieszkaniu w zależności od upływu czasu.

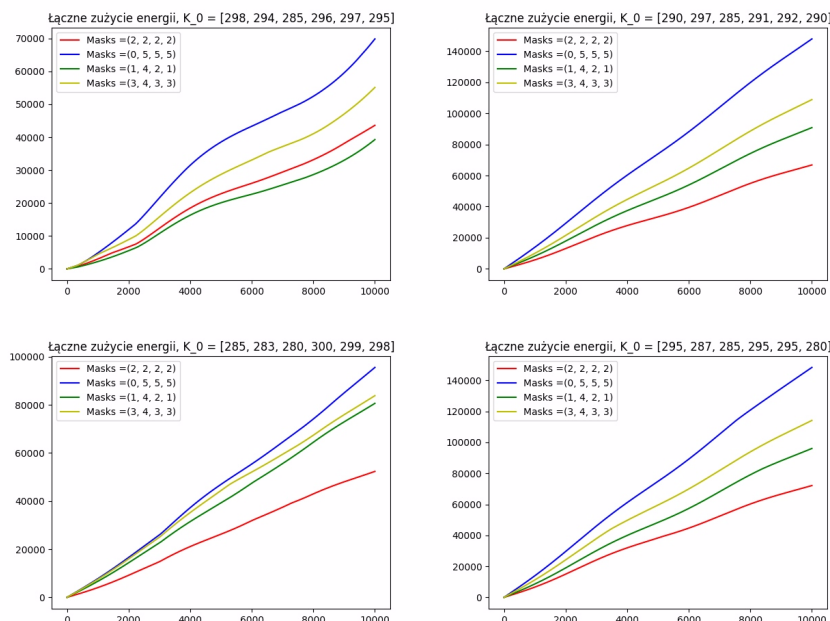


Rysunek 2: Średnia temperatura w zależności od czasu

Powyższe wykresy przedstawiają temperatury w pomieszczeniach w sytuacji, gdy początkowa temperatura w pokojach wynosi średnio od  $294K$  do  $298K$ . Z kolei moc każdego grzejnika ustawiona jest na poziomie 2.

Po czasie  $t = 100$  widać wyraźnie zarysowany grzejnik na korytarzu, jednak po takim czasie wydaje się jakby nie miał on dużego wpływu na średnią temperaturę w tym pomieszczeniu. Grzejniki znajdujące się pod oknami nie są aż tak widoczne, gdyż prawdopodobnie temperatura z zewnątrz równoważy ciepło płynące z grzejników. Dla czasu  $t = 1000$  otrzymaliśmy znacznie niższe temperatury. Możliwe, iż jest to sytuacja, gdy średnie temperatury w pokojach osiągnęły wartość, przy której grzejniki samoistnie się wyłączyły, co z czasem spowodowało ponowne ochłodzenie mieszkania z zewnątrz. Dla czasu  $t = 10000$  widzimy ponowne ocieplenie mieszkania. W tym momencie najcieplejsze miejsce w mieszkaniu jest przy grzejniku znajdującym się na korytarzu. Nie powinno nas to dziwić, gdyż to pomieszczenie nie ma okna, które mogłoby ochładzać pokój.

Porównajmy teraz zużycie energii w zależności od tego, jakie moce ustawimy dla poszczególnych grzejników. Warto również sprawdzić, czy początkowa temperatura w pokojach wpływa na zużycie energii dla poszczególnych ustawień mocy grzejników. Temperatury przedstawione w tytułach opisują początkowe temperatury kolejno w pokojach: salonie, korytarzu, klatce schodowej, sypialni, kuchni i łazience.



Rysunek 3: Zużycie energii w zależności od mocy grzejników

Pierwsze co możemy to fakt, iż najmniejsze zużycie energii mamy w pierwszym przypadku. Jest to standardowy przypadek, gdzie temperatura w pokojach waha się na przedziale  $[294, 298]$ . W dolnym lewym rogu mamy sytuację, gdy temperatura w dwóch pierwszych pokojach jest bardzo niska, z kolei w trzech kolejnych osiąga wartość prawie  $300K$ . W tym przypadku zużycie energii okazuje się być większe. Największą różnicę możemy zauważyć w przypadku, gdy jeden z grzejników jest wyłączony, a reszta jest ustawiona na najwyższą moc - osiąga ona wówczas wartość około 3000. Warto zauważyć, iż w sytuacji, gdy każdy z grzejników ma ustawioną moc 2, różnica ta jest niewielka. W dwóch pozostałych eksperymentach ogólne zużycie energii jest zdecydowanie większe - w najgorszym przypadku osiąga ono wartość około dwa razy większą niż w pierwszej sytuacji.

Spójrzmy teraz jak zmienia się zużycie energii ze względu na ustawienie mocy grzejników w poszczególnych pokojach. Zauważmy, że w każdym z czterech przypadków największe zużycie energii mamy w sytuacji, gdy w jednym z pokoi wyłączymy grzejnik, podczas gdy w innych pomieszczeniach ustawiona będzie maksymalna moc grzejnika. Z drugiej strony zdecydowanie najlepiej wypada pod względem zużycia energii równomierne ustawienie wszystkich grzejników na średnią moc. Dodatkowo widzimy, iż na pierwszym wykresie najlepiej wypadła sytuacja, gdzie każdy z grzejników jest włączony, lecz żaden z nich nie jest ustawiony na maksymalną moc. Możemy więc powiedzieć, iż w celu zminimalizowania zużycia energii najlepiej włączyć każdy z grzejników ze średnią mocą ogrzewania. Wyłączenie jednego z grzejników kosztem maksymalnej mocy reszty z nich skutkuje dużym zużyciem energii.