Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem

Přírodovědecká fakulta

DŮKAZ MOOROVA ZÁKONA

SEMINÁRNÍ PRÁCE

Vypracoval: Martin Zeman

Vedoucí práce: doc. Ing. Mgr. Jiří Barilla, CSc.

Ústí nad Labem 2023

Obsah

1. Úvod **3**

2. Vymezení zákona **4**

3. Získání dat **5**

4. Logaritmizace **7**

5. Statistika **9**

6. Lineární regrese **10**

7. Závěr **13**

1. Úvod

Každý, kdo se alespoň trochu zajímá o svět technologií, dříve či později narazí na Moorův zákon; empiricky odvozené tvrzení, které se vyjadřuje k rostoucí výpočetní kapacitě, kterou máme k dispozici, je dnes jedním z těch poznatků, které prosakují například i do fantastické literatury. Předmětem práce bude právě důkaz tohoto zákona.

K důkazu autor využije tabulkového kalkulátoru MS Excel. V procesu bude využita nejedna z jeho funkcí – importování, kontingenční tabulky, matematické funkce, statistické funkce, grafy a doplněk Řešitele. Práce tak může čtenáři posloužit i jako inspirace a zčásti také vzdělávací materiál.

2. Vymezení zákona

Pokud chceme Moorův zákon dokázat, musíme si nejdříve přesně vymezit, co tímto zákonem máme vlastně na mysli. Důvodem pro toto opatření je kromě snahy být matematicky korektní také fakt, že Moorův zákon se během let stal v podstatě symbolem technologického rozvoje a jako takový se těší velké popularitě. Čtenář si jistě bez problému domyslí, jakým způsobem může být toto problematické – popularizací idejí dochází často k jejich zjednodušování a opakovanému komolení, a to až do té míry, kdy si původní myšlenka s tou, která je uhnízděna v povědomí průměrného člověka, není vůbec podobná. Jedna z populárních formulací Moorova zákona zní například takto:

> Počet tranzistorů v integrovaném obvodu se každé dva roky zdvojnásobí, zatímco ceny počítačů klesnou na polovinu.[1]

Toto znění se ale neshoduje s původním výrokem Gordona E. Moora, spoluzakladatele společnosti Intel, který ho formuloval takto:

> Složitost čipů při jejich minimální ceně se za rok zhruba zdvojnásobí.[2]

Ani jednu z verzí nelze považovat za úplně uspokojivou. Například většina moderních definic udává dobu pro zdvojnásobení dva roky místo jednoho, a Moorova formulace je proto v tomto ohledu považována za nesprávnou. Moore ale na druhou stranu zohlednil i ekonomický aspekt, což v populárním pojetí zákona jaksi chybí – šlo by ho proto chybně pochopit tak, že platí pro *jakýkoliv* integrovaný obvod včetně těch sestrojených během výzkumu a vývoje, což jen stěží může být pravda. Moore se také nikdy přímo nevyjádřil o klesající ceně počítačů. Naše pracovní definice Moorova zákona, a tedy hypotéza, kterou se budeme dále snažit dokázat, bude proto kombinací předchozích dvou definic a bude znít přesně takto:

> Počet tranzistorů v integrovaném obvodu, který lze vyrobit efektivně s ohledem na dané ekonomické podmínky, se každé dva roky zhruba zdvojnásobí.

3. Získání dat

Údaje o počtu tranzistorů v čipech napříč časem jsou díky popularitě Moorova zákona na internetu snadno dostupné. Stránka *Our World in Data*, která se zabývá shromažďováním výzkumných a statistických dat, nabízí tyto údaje jako kompaktní CSV soubor[3], který lze pohodlně naimportovat do MS Excel. V otevřeném programu klikneme na kartu **Data** a v ní na tlačítko **Z textu/CSV**.

Figura 1: Možnosti načtení dat

Po vybrání našeho souboru se zobrazí náhled toho, jak Excel data ze souboru interpretoval. Pokud je vše v pořádku, klikneme **Načíst**.

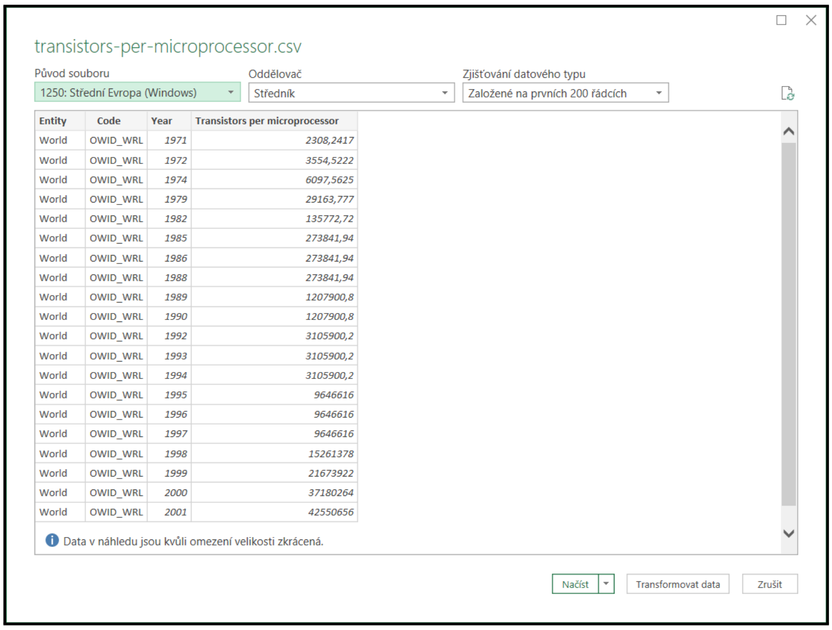

Figura 2: Náhled a doladění interpretace

Excel data z CSV automaticky načítá do kontingenční tabulky. To pro nás v tomto konkrétním případě neskýtá žádné výhody a naopak by nám přidělalo práci. Tabulka navíc obsahuje sloupce, které pro nás nemají žádný význam; zkopírujeme proto pouze sloupce roků a počtu tranzistorů v čipu a vložíme do nového listu.

	A	B	C	D
1	Entity	Code	Year	Transistors per microprocessor
2	World	OWID_WRL	1971	2308.2417
3	World	OWID_WRL	1972	3554.5222
4	World	OWID_WRL	1974	6097.5625
5	World	OWID_WRL	1979	29163.777
6	World	OWID_WRL	1982	135772.72
7	World	OWID_WRL	1985	273841.94
8	World	OWID_WRL	1986	273841.94

Figura 3: Kontingenční tabulka

	A	B
1	Year	Transistors per microprocessor
2	1971	2308,2417
3	1972	3554,5222
4	1974	6097,5625
5	1979	29163,777
6	1982	135772,72

Figura 4: Zkopírovaná data

4. Logaritmizace

Nyní, když máme požadovaná data načtena způsobem, kterým chceme, není na škodu na ně nahlédnout graficky. V kartě **Vložení** klikneme na **Doporučené grafy**. Vybíráme typ grafu **XY bodový**, který se pro data, jako jsou ty naše, hodí nejvíce. Výsledný graf vypadá následovně:

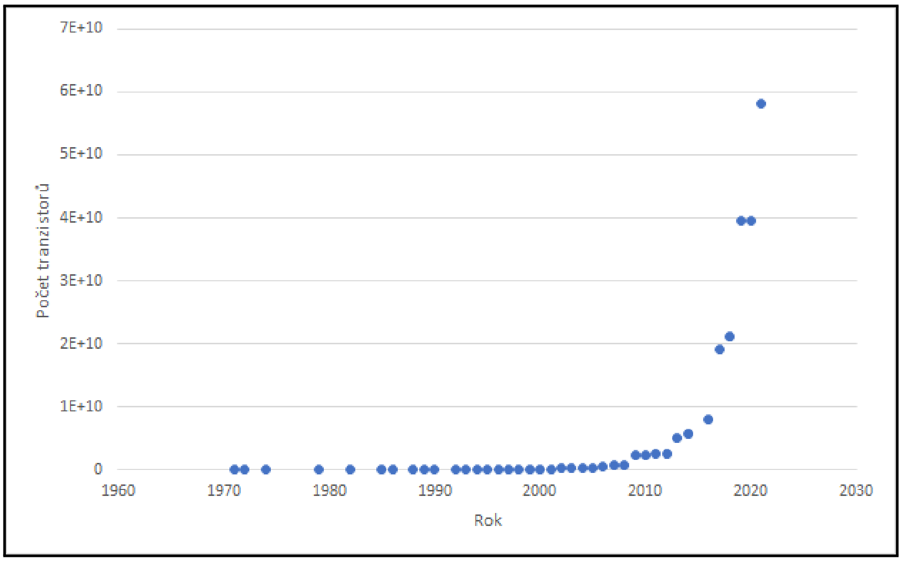

Figura 5: Počet tranzistorů napříč roky

Data nám v grafu vytvořila exponenciálu, což by odpovídalo naší hypotéze, že počet tranzistorů se zdvojnásobí každé dva roky, resp. nyní máme důvod domnívat se, že tyto počty jsou opravdu násobky *něčeho* (proto mají při zobrazení exponenciální charakter). S exponenciálami se ale hůře pracuje, naším cílem bude proto tato data zlogaritmovat, což nám dovolí nahlížet na ně z trochu jiného úhlu a objevit mezi nimi souvislosti, které by nám jinak zůstaly skryté. Vytvoříme proto v listu nový sloupec a použijeme funkci `LOGZ()`, která vrací logaritmus buňky při daném základu. Za buňku volíme počet tranzistorů relativně ke stávající pozici a jako základ volíme v souladu s naší hypotézou číslo dva (hypotéza tvrdí, že počet se zdvojnásobuje – tyto počty proto nutně musí být nějaké násobky dvou).

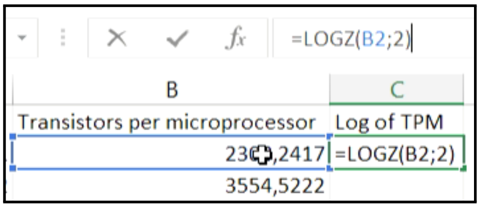

Figura 6: Použití logaritmu

Pokud z nově vzniklých hodnot vytvoříme opět graf, dostaneme následující:

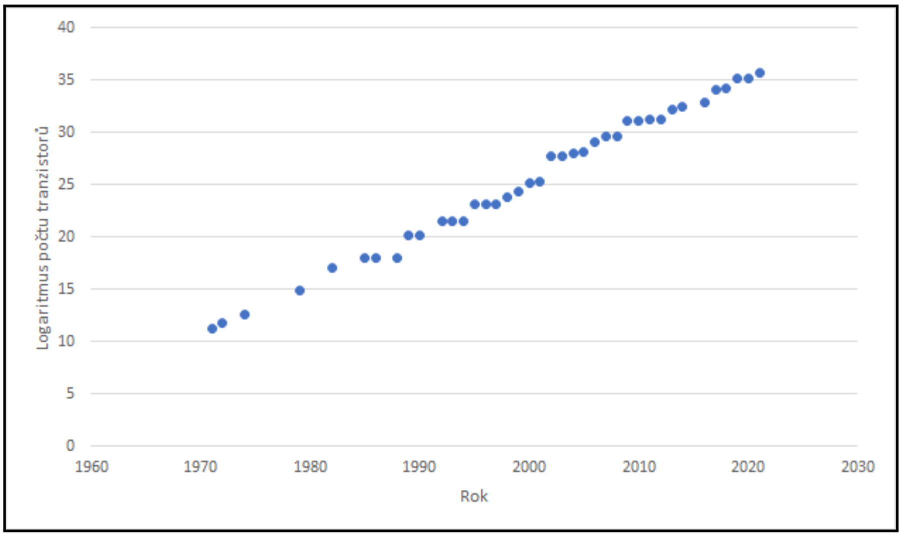

Figura 7: Logaritmus počtu tranzistorů

5. Statistika

Z předchozího grafu lze bez obtíží vypozorovat lineární závislost mezi roky a logaritmem počtu tranzistorů v integrovaném obvodu. To pro nás znamená dvě věci:

1. původní graf byl opravdu exponenciálou, resp. měl primitivně exponenciální charakter[1];
2. zjištěním míry růstu logaritmizovaných hodnot (tj. jakési pomyslné směrnice) získáme také míru růstu pro původní hodnoty.

První bod posiluje naši hypotézu a posouvá nás o krok blíže k jejímu dokázání. Než se však začneme věnovat bodu druhému, nebude na škodu podívat se na získané hodnoty z matematického, resp. statistického hlediska. Pro výpočet kovariance použijeme funkci `COVAR()`, jejímiž argumenty jsou dvě matice hodnot, v našem případě sloupce roků a logaritmů. Obdobně je to s funkcí `CORREL()`, která vrací korelaci mezi dvěma maticemi.

Vztahy	
Kovariance	92,31939228
Korelace	0,996894051

Figura 8: Statistické výpočty

V našem konkrétním případě bylo trochu zbytečné počítat kovarianci, korelace je ale pro nás na druhou stranu důležitá – číslo blížící se jedničce nám říká, že mezi daty opravdu existuje závislost, dokonce silná závislost, a my se proto v našich úsudcích nemýlíme.

[1]Exponenciální a logaritmická funkce jsou k sobě vzájemně inverzní; logaritmizací primitivní, tedy nesložené exponenciální funkce musíme proto vždy nutně dostat funkci lineární.

6. Lineární regrese

Zatím jsme dokázali, že vztah mezi roky a počtem tranzistorů je opravdu exponenciální, tj. že počet tranzistorů se za t jednotku času znásobí k-krát. Dále víme, že toto k je číslo dva, protože jsme tak řekli v naší hypotéze („počet se zdvojnásobí“) a v souladu s tím zvolili náš základ při logaritmizaci. Už nám tedy zbývá jen najít tu pomyslnou směrnici, která říká, *jak dlouho* trvá, než se počet tranzistorů zdvojnásobí.

Pro nalezení této směrnice použijeme lineární regresi. Jedná se o techniku, kdy lineárně závislá data proložíme přímkou, která nejlépe odpovídá této závislosti, tedy hledáme směrnici a vertikální posun této přímky. Tyto dva údaje si v listu někam zaznamenáme a prozatím je oba nastavíme na hodnotu nula.

Lineární regrese	
Součet čtverců	
Parametr A	0
Parametr B	0
Residuální směrodatná odchylka	

Figura 9: Parametry přímky

Dále potřebujeme jakousi účelovou funkci, tj. funkci, která měří *míru úspěchu* při řešení našeho problému. Jedna z populárních technik je následující: vezmeme rozdíly funkčních hodnot mezi našimi daty a proloženou přímkou, které umocníme a tyto umocněné hodnoty sečteme. Takováto funkce nám vlastně udává, *jak dobře* jsou naše data přímkou proložena (tj. do jaké míry jim proložená přímka odpovídá), a při řešení budeme hledat její minimum.

Vytvoříme tedy dva nové sloupce: jeden pro hodnoty proložené přímky a druhý pro mocniny rozdílů mezi hodnotami. Ve vzorci pro proloženou přímku zadáváme parametry absolutně, protože odkazují na pevně umístěné hodnoty, které jsme si poznamenali dříve; první obor této přímky zde odpovídá roku. Součet spočítaných mocnin, tj. naši účelovou funkci, si uložíme do buňky pomocí funkce `SUMA()`.

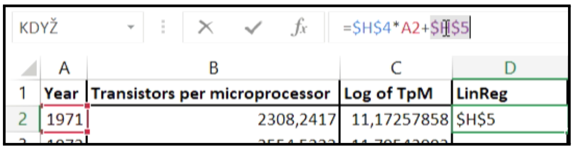

Figura 10: Vzorec přímky

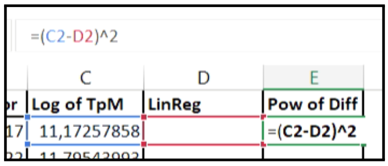

Figura 11: Čtverec rozdílů

Zde přichází na řadu doplněk **Řešitel**, který najdeme opět v kartě **Data**; tento doplněk nám rychle a snadno najde parametry pro naši proloženou přímku. Jako účelovou funkci volíme buňku se součtem čtverců; z možností, co hledat, vybíráme **Min**; jako proměnné modelu volíme buňky obsahující parametry přímky. Nezapomínáme vyškrtnout možnost **Nastavit podmínky nezápornosti** – v opačném případě nebude doplněk fungovat správně. Jako metodu řešení ponecháme gradientní metodu neboli metodu gradientního sestupu. Nakonec klikneme dole na tlačítko **Řešit**.

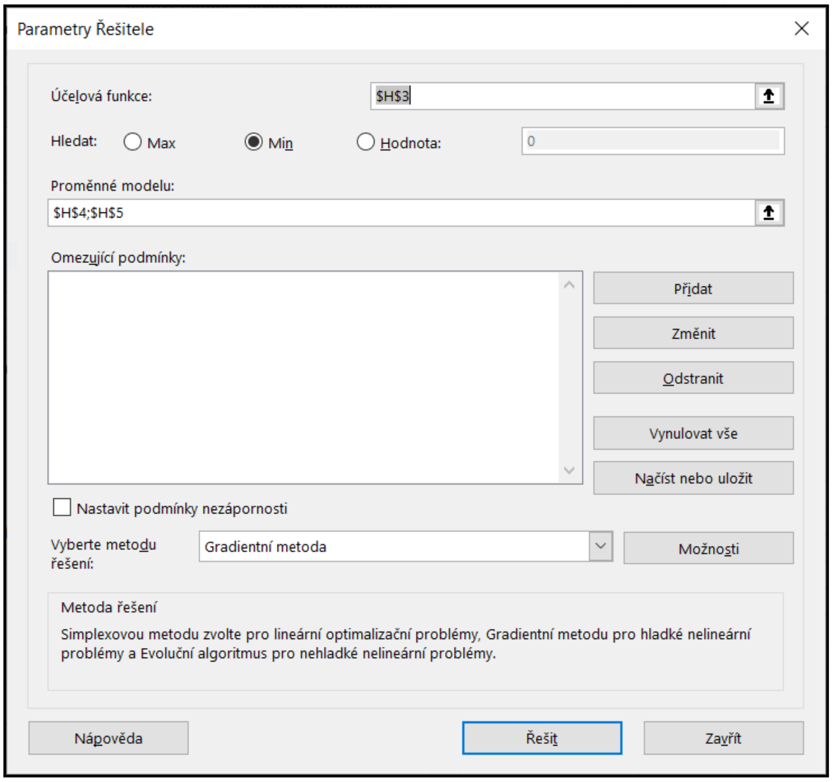

Figura 12: Dialogové okno Řešitele

Pokud vše proběhlo v pořádku, doplněk vypíše, že nalezl řešení; potvrdíme stiskem tlačítka **OK**. Zde jsou tedy výsledky:

Lineární regrese	
Součet čtverců	11,95133
Parametr A	0,496248
Parametr B	-966,945
Residuální směrodatná odchylka	3,457069

Figura 13: Parametry nalezené Řešitelem

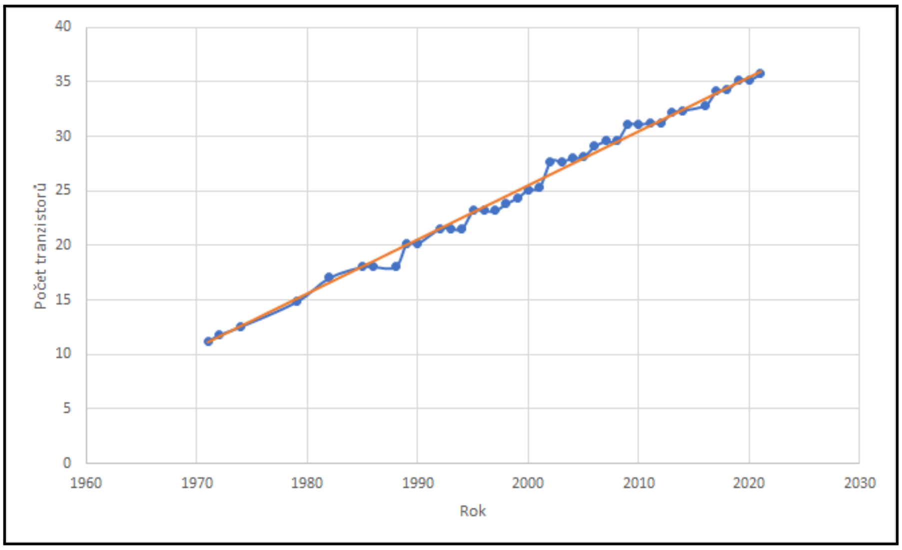

Figura 14: Data proložená přímkou

7. Závěr

Dokázali jsme, že závislost mezi roky a počtem tranzistorů je exponenciální. Hledali jsme míru růstu pro základ roven dvěma, tj. za jak dlouho se počet tranzistorů zdvojnásobí. Provedli jsme lineární regresi a získali tak parametry přímky proložené logaritmizovanými daty. Směrnice této přímky je rovna přibližně jedné polovině – co z toho vyplývá?

Pokud by byla směrnice rovna jedné, znamenalo by to, že na zdvojnásobení počtu tranzistorů je potřeba přesně jeden rok. Směrnice rovna jedné polovině nám tedy říká, že na stejný přírůstek je potřeba *dvakrát tolik času*, což odpovídá přesně dvěma rokům.

Tímto jsme jsme tedy úplně dokázali naši formulaci Moorova zákona.

Odkazy

[1] TARDI, Carla, 2023. What Is Moore's Law and Is It Still True? *Investopedia* [online]. Dostupné z: https://www.investopedia.com/terms/m/mooreslaw.asp

[2] MOORE, Gordon E., 1998. Cramming more components onto integrated circuits. *Proceedings of the IEEE* [online]. 86(1), 82–85. Dostupné z: doi:10.1109/jproc.1998.658762

[3] Anon., [b.r.]. Moore's law: The number of transistors per microprocessor. *Our World in Data* [online]. Dostupné z: https://ourworldindata.org/grapher/transistors-per-microprocessor