4.5 Markov-Ketten

Ein Autovermietungsunternehmen habe Niederlassungen in Zürich (Niederlassung 1), Basel (Niederlassung 2) und Genf (Niederlassung 3). Eine Kundin bzw. ein Kunde kann das gemietete Auto an irgendeiner der drei Niederlassungen zurückgeben. Es wird das folgende Verhalten festgestellt:

- 50% der Fahrzeuge, welche am Morgen in Zürich vermietet werden, kehren am Abend dorthin zurück. 30% haben von Zürich nach Basel und 20% von Zürich nach Genf gewechselt.
- 30% der Fahrzeuge, welche am Morgen in Basel vermietet werden, kehren am Abend dorthin zurück. 40% wechseln von Basel nach Zürich und 30% von Basel nach Genf.
- 40% der Fahrzeuge, welche am Morgen in Genf vermietet werden, kehren am Abend dorthin zurück. 25% wechseln von Genf nach Zürich und 35% von Genf nach Basel.

Diese Anteile müssen als ***Wahrscheinlichkeiten*** interpretiert werden. Für ein Fahrzeug, das am Morgen in Zürich gemietet wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in Zürich, Basel oder Genf zurückgegeben wird 50%, 30% bzw. 20%.

Wir nehmen an, dass die Unternehmung über 150 Fahrzeuge verfüge. Wir bezeichnen mit $x_1(0)$, $x_2(0)$ und $x_3(0)$ den Anteil der Fahrzeuge, welcher am Morgen des 0-ten Tages in Zürich, Basel oder Genf steht. Beispielsweise:

$$x_1(0) = 0.45 = 45\%, \qquad x_2(0) = 0.25 = 25\%, \qquad x_3(0) = 0.3 = 30\%$$

Beachten Sie, dass die Summe dieser Anteile gleich 1 sein muss. Wir möchten herausfinden, wie die Verteilung der Fahrzeuge am Morgen des 1-ten Tages aussieht. Zu diesem Zweck definieren wir die Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.25 \\ 0.3 & 0.3 & 0.35 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

In dieser Matrix ist p_{ij} gleich dem Anteil der Fahrzeuge, welcher von Niederlassung j nach der Niederlassung i wechselt ($i, j = 1, 2, 3$). Damit muss die Summe jeder Kolonne gleich 1 sein.

Wenn $N = 150$ die totale Anzahl der Fahrzeuge ist, dann ist die Anzahl der Fahrzeuge am i-ten Standort am Morgen des 1-ten Tages gegeben durch:

$$Nx_i(1) = p_{i1}Nx_1(0) + p_{i2}Nx_2(0) + p_{i3}Nx_3(0)$$

Dies folgt sofort aus der Definition der Matrixelemente p_{ij}. Indem wir durch N dividieren erhalten wir den Anteil:

$$x_i(1) = p_{i1}x_1(0) + p_{i2}x_2(0) + p_{i3}x_3(0)$$

Offenbar entsteht der Vektor $\vec{x}(1)$ mit den Anteilen am Morgen des 1-ten Tages dadurch, dass wir den Vektor $\vec{x}(0)$ mit den Anteilen am Morgen des 0-ten Tages mit P multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.25 \\ 0.3 & 0.3 & 0.35 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.315 \\ 0.285 \end{pmatrix}$$

Wie oben bemerkt, sind diese Anteile wieder als Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewähltes Fahrzeug am Morgen des 1-ten Tages in Zürich ist beträgt 40%. Wir dürfen natürlich nicht erwarten, dass ***exakt*** 40% der Fahrzeuge sich in Zürich befinden. Es gibt zufallsbedingte Schwankungen. Wenn wir den Übergang vom 0-ten zum 1-ten Tag mehrmals wiederholen würden, so würden wir feststellen, dass ***im Mittel*** 40% der Fahrzeuge am Morgen des 1-ten Tages in Zürich sind.

Allgemein gilt für den Vektor $\vec{x}(k)$ mit den Anteilen am k-ten Tag ($k \in \mathbf{N}$) :

$$\vec{x}(k) = P \cdot \vec{x}(k-1) = P^k \cdot \vec{x}(0)$$

Man bezeichnet jeden Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

als ***Zustandsvektor***. Ein Zustandsvektor $\vec{x}$ mit der Eigenschaft

$$\vec{x} = P \cdot \vec{x} \ . \tag{38}$$

heisst ***stationär.*** Ein solcher Vektor als Anfangsverteilung ist für unser Autovermietungsunternehmen besonders interessant. Im Mittel bleiben dann nämlich die Anteile konstant. Wir bestimmen jetzt einen solchen Vektor. Offenbar ist (38) äquivalent zu

$$(P - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Wir müssen also dieses homogene Gleichungssystem lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -0.5 & 0.4 & 0.25 & 0 \\ 0.3 & -0.7 & 0.35 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & -0.60 & 0 \end{array}\right) \stackrel{(-2)L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.8 & -0.5 & 0 \\ 0.3 & -0.7 & 0.35 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & -0.60 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.8 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.46 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.46 & -0.5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.8 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.46 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = t\,, \quad x_2 = 1.08696t\,, \quad x_1 = 1.36957t$$

Wir müssen jetzt t so bestimmen, dass $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist:

$$t(1 + 1.08696 + 1.36957) \stackrel{!}{=} 1 \Longrightarrow t = 0.289308$$

Der stationäre Vektor ist also gegeben durch:

$$\vec{x} = (0.396226, 0.314465, 0.289308)^T$$

Es stellt sich die Frage, was passiert, wenn der Anfangszustand nicht gleich einem stationären Vektor ist. Es gilt das folgende Resultat, das wir ohne Beweis zitieren:

Satz 17 *Falls die Übergangsmatrix P so beschaffen ist, dass es eine natürliche Zahl n gibt, mit der Eigenschaft, dass P^n lauter* ***positive*** *Matrixelemente besitzt, dann gilt:*

(a) *Es gibt genau einen stationären Vektor $\vec{s}$.*

(b) *Für jeden Anfangszustand $\vec{x}(0)$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P^n \vec{x}(0) = \vec{s}$$

(c) *Die Spalten von P^n streben für $n \to \infty$ gegen den stationären Vektor $\vec{s}$:*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = (\vec{s}, \vec{s}, \vec{s})$$

In unserem Beispiel, ist die Bedingung mit den positiven Matrixelementen bereits für $n = 1$ erfüllt. Die Aussagen des Satzes 17 müssen also gelten. Wir haben bereits gesehen, dass genau ein stationärer Vektor existiert. Wir überprüfen **(b)**. Angenommen der Anfangszustand sei gegeben durch $\vec{x}(0) = (0.8, 0.1, 0.1)^T$. Es gilt dann:

$$P\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.465 \\ 0.305 \\ 0.23 \end{pmatrix}, \quad P^2\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.3115 \\ 0.2765 \end{pmatrix}, \quad P^3\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.399725 \\ 0.313825 \\ 0.28645 \end{pmatrix}$$

Die Folge der Zustandsvektoren konvergiert tatsächlich gegen den stationären Vektor. Wir überprüfen **(c)**:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.25 \\ 0.3 & 0.3 & 0.35 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.395 & 0.365 \\ 0.31 & 0.315 & 0.32 \\ 0.27 & 0.29 & 0.315 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.4015 & 0.396 & 0.38925 \\ 0.3135 & 0.3145 & 0.31575 \\ 0.285 & 0.2895 & 0.295 \end{pmatrix} \qquad P^4 = \begin{pmatrix} 0.3974 & 0.396175 & 0.394675 \\ 0.31425 & 0.314475 & 0.31475 \\ 0.28835 & 0.28935 & 0.290575 \end{pmatrix}$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.396285 & 0.396224 & 0.39615 \\ 0.314455 & 0.314466 & 0.31448 \\ 0.289261 & 0.28931 & 0.289371 \end{pmatrix} \qquad P^8 = \begin{pmatrix} 0.396229 & 0.396226 & 0.396223 \\ 0.314465 & 0.314465 & 0.314466 \\ 0.289306 & 0.289308 & 0.289311 \end{pmatrix}$$

Die Spalten von P^n konvergieren tatsächlich gegen den stationären Vektor.

4.6 Inzidenzmatrix

Wir betrachten den folgenden einfachen Graphen: