**十年（**2014**－**2023**）高考真题分项汇编—数列解答题**

**目录**

[**题型一：数列的概念和通项公式 1**](#_Toc140513127)

[**题型二：等差数列的定义与性质 7**](#_Toc140513128)

[**题型三：等比数列的定义与性质 10**](#_Toc140513129)

[**题型四：数列的求和 11**](#_Toc140513130)

[**题型五：数列中的新定义问题 13**](#_Toc140513131)

[**题型六：数列中的证明问题 26**](#_Toc140513132)

[**题型七：数列与其他知识的交汇 33**](#_Toc140513133)

[**题型八：数列的综合应用 43**](#_Toc140513134)

# 题型一：数列的概念和通项公式

1．(2021年新高考Ⅰ卷·第17题) 已知数列满足，

(1)记，写出，，并求数列的通项公式；

(2)求的前20项和．

**【答案】**；．

解析:(1)由题设可得

又，，故即即

所以为等差数列，故．

(2)设的前项和为，则，

因为，

所以

．

2．(2014高考数学湖南理科·第20题) 已知数列满足，

(Ⅰ)若是递增数列，且成等差数列，求的值；

(Ⅱ)若，且是递增数列，是递减数列，求数列的通项公式．

**【答案】**(1) (2) 

解析：(I)因为是递增数列，所以。而，因此又成等差数列，解得，但当时，，这与是递增数列矛盾。故．

(Ⅱ)由于是递增数列，因而，于是

 ①

但，所以

． ②

又①，②知，，因此

 ③

因为是递减数列，同理可得，故

 ④

由③，④即知，。

于是



  ．

故数列的通项公式为 

3．(2019·全国Ⅱ·理·第19题) 已知数列和满足，，，．

证明：是等比数列，是等差数列；

求和的通项公式．

**【答案】**见解析；，.

**【官方解析】**

由题设得，即．

又因为，所以是首项为，公比为的等比数列．

由题设得，即．

又因为，所以是首项为，公差为的等差数列．

由知，，．

所以，

．

**【分析】**可通过题意中的以及对两式进行相加和相减即可推导出数列是等比数列以及数列是等差数列；

可通过中的结果推导出数列以及数列的通项公式，然后利用数列以及数列的通项公式即可得出结果.

**【解析】**由题意可知www.zqy.com，www.zqy.com，www.zqy.com，www.zqy.com，

所以www.zqy.com，即，

所以数列www.zqy.com是首项为www.zqy.com、公比为www.zqy.com的等比数列，www.zqy.com，

因为www.zqy.com，

所以www.zqy.com，数列www.zqy.com是首项www.zqy.com、公差为www.zqy.comwww.zqy.com等差数列，www.zqy.com.

由可知，，www.zqy.com，

所以，.

**【点评】**本题考查了数列的相关性质，主要考查了等差数列以及等比数列的相关证明，证明数列是等差数列或者等比数列一定要结合等差数列或者等比数列的定义，考查推理能力，考查化归与转化思想，是中档题.

4．(2014高考数学广东理科·第19题) 设数列的前和为,满足，且．

(1)求的值；

(2)求数列的通项公式．

**【答案】**解：(1)当时， ①

当时， ②

 ③

由①②③解得

(2)当时，①

②

①—②化简得(当时也成立)

方法1：(凑配)

令，求得即



令，则，即

因为，故必有，即

方法2：(数学归纳法)由(1)，猜想，

下面用数学归纳法证明对：

当时，成立

假设当时成立，即有，

当时， 

所以，成立

综上所述，对

5．(2014高考数学湖北理科·第18题) 已知等差数列满足：，且、、成等比数列．

(Ⅰ)求数列的通项公式．

(Ⅱ)记为数列的前项和， 是否存在正整数，使得若存在， 求的最

小值；若不存在，说明理由．

**【答案】**(1)或；(2)详见解析．

解析：(1)设数列的公差为，依题意，成等比数列，所以，解得或，当是，；当时，，所以数列的通项公式为或．

(2)当时，，显然，不存在正整数，使得．

当时，，令，即，解得或(舍去)，此时存在正整数，使得成立，的最小值为41．

综上所述，当时，不存在正整数；

当时，存在正整数，使得成立，的最小值为41．

6．(2021年高考全国乙卷理科·第19题) 记为数列的前*n*项和，为数列的前*n*项积，已知．

(1)证明：数列是等差数列;

(2)求的通项公式．

**【答案】**(1)证明见解析；(2)．

解析：(1)由已知得,且，,

取,由得,

由于为数列的前*n*项积，

所以,

所以，

所以,

由于

所以，即,其中

所以数列是以为首项，以为公差等差数列;

(2)由(1)可得，数列是以为首项，以为公差的等差数列，

*,*

*,*

当*n*=1时，,

当*n*≥2时,,显然对于*n*=1不成立,

∴．

【点睛】本题考查等差数列的证明，考查数列的前*n*项和与项的关系，数列的前*n*项积与项的关系，其中由,得到，进而得到是关键一步；要熟练掌握前*n*项和，积与数列的项的关系，消和(积)得到项(或项的递推关系)，或者消项得到和(积)的递推关系是常用的重要的思想方法．

7．(2018年高考数学浙江卷·第20题) 已知等比数列的公比，且，是的等差中项．数列满足，数列的前项和为．

(1)求的值；

(2)求数列的通项公式．

**【答案】**(1)；(2)．

【解析】(1)由题知，

，，解得或，

， ．

(2)方法一：错位相减法

设，数列前项和为，由，解得．

由(1)知 ，所以， 故，





设，



，，

方法二：构造常数列

设，数列前项和为，由，解得．

由(1)知 ，所以，

而，

所以，

所以数列是一个常数列。即，

所以．

说明：其中是采用待定系数法求出的

可设待定求出．

# 题型二：等差数列的定义与性质

1．(2023年新课标全国Ⅰ卷·第20题) 设等差数列的公差为，且．令，记分别为数列的前项和．

(1)若，求的通项公式；

(2)若为等差数列，且，求．

**【答案】**(1)

(2)

解析：(1)，，解得，

，

又，

，

即，解得或(舍去)，

．

(2)为等差数列，

，即，

，即，解得或，

，，

又，由等差数列性质知，，即，

，即，解得或(舍去)

当时，，解得，与矛盾，无解；

当时，，解得．

综上，．

2．(2015高考数学四川理科·第16题) 设数列的前项和，且成等差数列．

(1)求数列的通项公式；

(2)记数列的前项和，求得成立的的最小值．

**【答案】**(1)；(2)10．

解析：(1)由已知，有，

即．

从而．

又因为成等差数列，即．

所以，解得．

所以，数列是首项为2，公比为2的等比数列．

故．

(2)由(1)得．

所以．

由，得，即．

因为，

所以．

于是，使成立的n的最小值为10．

考点：本题考查等差数列与等比数列的概念、等比数列通项公式与前n项和公式等基础知识，考查运算求解能力．

3．(2022年高考全国甲卷数学（理）·第17题) 记为数列的前*n*项和．已知．

(1)证明：是等差数列；

(2)若成等比数列，求的最小值．

**【答案】**(1)证明见解析； (2)．

【解析】(1)解：因为，即①，

当时，②，

①②得，，

即，

即，所以，且，

所以是以为公差的等差数列．

(2)解：由(1)可得，，，

又，，成等比数列，所以，

即，解得，

所以，所以，

所以，当或时．

4．(2021年新高考全国Ⅱ卷·第17题) 记是公差不为0的等差数列的前*n*项和，若．

(1)求数列的通项公式；

(2)求使成立的*n*的最小值．

**【答案】**解析:(1)由等差数列的性质可得：，则：，

设等差数列的公差为，从而有：，

，

从而：，由于公差不为零，故：，数列的通项公式为：．

(2)由数列的通项公式可得：，则：，

则不等式即：，整理可得：，解得：或，又为正整数，故的最小值为．

# 题型三：等比数列的定义与性质

1．(2018年高考数学课标Ⅲ卷（理）·第17题) (12分)等比数列中，，

(1)求的通项公式；

(2)记为的前项和，若，求．

**【答案】**(1)或；(2)

【官方解析】(1)设的公比为，由题设得

由已知得，解得(舍去)，或

故或

(2)若，则，由，得，此方和没有正整数解

若，则，由，得，解得

综上，．

【民间解析】(1)设等比数列的公比为，由，可得，所以

所以

当时，；当时，

(2)由(1)可知

当时，由即，即，所以；

当时，由即，即，无解

综上可知．

2．(2016高考数学课标Ⅲ卷理科·第17题) 已知数列的前项和,其中.

(Ⅰ)证明是等比数列,并求其通项公式;

(Ⅱ)若,求.

**【答案】**(Ⅰ);(Ⅱ).

【解析】(Ⅰ)由题意得,故,,.

由,得,即.

由,得,所以.

因此是首项为,公比为的等比数列,于是.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,由得,即,解得.

# 题型四：数列的求和

1．(2018年高考数学课标Ⅱ卷（理）·第17题) (12分)记为等差数列的前项和，已知，．

(1)求的通项公式；

(2)求，并求的最小值．

**【答案】**解析：(1)设的公差为，由题意得．

由得，所以的通项公式为．

(2)由(1)得．

所以当时，取得最小值，最小值为．

2．(2016高考数学课标Ⅱ卷理科·第17题) (本题满分12分)为等差数列的前项和，且记，其中表示不超过的最大整数，如．

(I)求；(II)求数列的前1 000项和．

**【答案】**(1)，，；(2)．

【解析】(1)设的公差为，据已知有，解得．

所以数列的通项公式为．

，，．

(2)因为

所以数列的前项和为．

3．(2020年新高考全国Ⅰ卷（山东）·第18题) 已知公比大于的等比数列满足．

(1)求的通项公式；

(2)记为在区间中的项的个数，求数列的前项和．

**【答案】**(1)；(2)．

解析：(1)由于数列是公比大于的等比数列，设首项为，公比为，依题意有，解得解得，或(舍)，

所以，所以数列的通项公式为．

(2)由于，所以

对应的区间为：，则；

对应的区间分别为：，则，即有个；

对应的区间分别为：，则，即有个；

对应的区间分别为：，则，即有个；

对应的区间分别为：，则，即有个；

对应的区间分别为：，则，即有个；

对应的区间分别为：，则，即有个．

所以．

4．(2020年新高考全国卷Ⅱ数学（海南）·第18题) 已知公比大于的等比数列满足．

(1)求通项公式；

(2)求．

**【答案】**(1)；(2)

解析：(1) 设等比数列的公比为*q*(*q*>1)，则，

整理可得：，

，

数列的通项公式为：．

(2)由于：，故：





．

5．(2023年全国甲卷理科·第17题) 设为数列的前*n*项和，已知．

(1)求的通项公式；

(2)求数列的前*n*项和．

**【答案】**(1)

(2)

解析：(1)因为，

当时，，即；

当时，，即，

当时，，所以，

化简得：，当时，，即，

当时都满足上式，所以．

(2)因为，所以，

，

两式相减得，

，

，即，．

6.(2020天津高考·第19题) 已知为等差数列，为等比数列，．

(Ⅰ)求和的通项公式；

(Ⅱ)记的前项和为，求证：；

(Ⅲ)对任意的正整数，设求数列的前项和．

**【答案】**(Ⅰ)，；(Ⅱ)证明见解析；(Ⅲ)．

【解析】(Ⅰ)设等差数列的公差为，等比数列的公比为．由，，可得．

从而的通项公式为．由，又，可得，解得，

从而的通项公式为．

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)可得，

故，，

从而，所以．

(Ⅲ)当为奇数时，，

当为偶数时，，

对任意的正整数，有，

和 ①

由①得 ②

由①②得，

由于，

从而得：．

因此，．所以，数列的前项和为．

7．(2014高考数学山东理科·第19题) 已知等差数列的公差为2，前项和为，且成等比数列．

(Ⅰ)求数列的通项公式；

(Ⅱ)令，求数列的前项和．

**【答案】**(1)；(2)(或)

解析：(1)因为，，

，

由题意得，解得，

所以．

(2)．

当为偶数时，

．

当为奇数时，

．

所以(或)

8．(2014高考数学江西理科·第18题) 已知首项都是1的两个数列(),满足．

(1)令,求数列的通项公式;

(2)若,求数列的前n项和

**【答案】**(1)(2) 分析:(1)已知数列,因此对变形为所以数列是以首项,公差的等差数列,故 (2)由知,是等差乘等比型,所以求和用错位相减法． , 相减得 所以 解析:(1)因为, 所以 所以数列是以首项,公差的等差数列,故 (2)由知 于是数列前n项和  相减得 所以 考点:等差数列定义,错位相减求和

9．(2014高考数学大纲理科·第18题) 等差数列的前n项和为，已知，为整数，且．

(1)求的通项公式；

(2)设，求数列的前n项和．

**【答案】**(1)；(2)

解析：(1)设等差数列的公差为，而，从而有

若，，此时不成立

若，数列是一个单调递增数列，随着的增大而增大，也不满足

当时，数列是一个单调递减数列，要使，则须满足即，又因为为整数，所以，所以

此时

(2)由(1)可得

所以

．

10．(2015高考数学新课标1理科·第17题) (本小题满分12分)为数列的前项和．已知

(Ⅰ)求的通项公式：

(Ⅱ)设,求数列的前项和

**【答案】**(Ⅰ)(Ⅱ)

分析：(Ⅰ)先用数列第项与前项和的关系求出数列{}的递推公式，可以判断数列{}是等差数列，利用等差数列的通项公式即可写出数列{}的通项公式；(Ⅱ)根据(Ⅰ)数列{}的通项公式，再用拆项消去法求其前项和．

解析：(Ⅰ)当时，，因为，所以=3，

当时，==，即，因为，所以=2，

所以数列{}是首项为3，公差为2的等差数列，

所以=；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，=，

所以数列{}前n项和为= =．

11．(2015高考数学天津理科·第18题) (本小题满分13分)已知数列满足

，且成等差数列．

(Ⅰ)求的值和的通项公式；

(Ⅱ)设，求数列的前项和．

**【答案】**(Ⅰ) ; (Ⅱ) ．

解析：(Ⅰ) 由已知，有，即，

所以，又因为，故，由，得，

当时，，

当时，，

所以的通项公式为

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得，设数列的前项和为，则

，



两式相减得

，

整理得

所以数列的前项和为．

12．(2015高考数学山东理科·第18题) 设数列的前项和为．已知．

(Ⅰ)求的通项公式；

(Ⅱ)若数列满足，求的前项和．

**【答案】**(Ⅰ); (Ⅱ)．

分析：(Ⅰ)利用数列前 项和 与通项 的关系求解；

(Ⅱ)结合第(Ⅰ)问的结果，利用关系式求出数列的通项公式，并结合其通项的结构特征，采用错位相减法求其前n项和．

解析：

(Ⅰ)因为

所以， ，故

当 时，

此时， 即

所以，

(Ⅱ)因为 ，所以

当 时，

所以

当 时，



所以

两式相减，得



所以

经检验， 时也适合，

综上可得：

13．(2015高考数学湖北理科·第18题) (本小题满分12分)设等差数列的公差为，前项和为，等比数列的公比为．已知，，，．

(Ⅰ)求数列，的通项公式；

(Ⅱ)当时，记，求数列的前项和．

**【答案】**解析：(Ⅰ)由题意有， 即

解得 或 故或

(Ⅱ)由，知，，故，

于是， ①

． ②

①-②可得，

故．

14．(2017年高考数学天津理科·第18题) 已知为等差数列,前项和为,是首项为的等比数列,且公比大于,,,．

(1)求和的通项公式;

(2)求数列的前项和．

**【答案】**(1) (2)高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 【解析】(1)设等差数列的公差为,等比数列的公比为． 由已知,得,而,所以． 又因为,解得．所以,． 由,可得①． 由,可得②, 联立①②,解得,,由此可得． 所以,数列的通项公式为,数列的通项公式为． (2)解:设数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。的前项和为, 由高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,有高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。, 故高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。, 高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。, 上述两式相减,得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。． 所以,数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。的前项和为高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。．

15．(2016高考数学山东理科·第18题) (本小题满分12分)已知数列 的前*n*项和，是等差数列，且

(Ⅰ)求数列的通项公式；

(Ⅱ)令 求数列的前项和．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)．

【解析】(Ⅰ)由题意知当时，，当时，，

所以．设数列的公差为，由，即，

可解得,所以．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，又，

得，

，

两式作差，得



所以

16．(2020年高考课标Ⅰ卷理科·第17题) 设是公比不为1的等比数列，为，的等差中项．

(1)求的公比；

(2)若，求数列的前项和．

**【答案】**(1)；(2)．

【解析】(1)设的公比为，为的等差中项，

，

；

(2)设前项和为，，

，①

，②

①②得，

，

．

17．(2020年高考课标Ⅲ卷理科·第17题) 设数列{*an*}满足*a*1=3，．

(1)计算*a*2，*a*3，猜想{*an*}的通项公式并加以证明；

(2)求数列{2*nan*}的前*n*项和*Sn*．

**【答案】**(1)，，，证明见解析；(2)．

解析：(1)由题意可得，，

由数列的前三项可猜想数列是以为首项，2为公差的等差数列，即，

证明如下：

当时，成立；

假设时，成立．

那么时，也成立．

则对任意的，都有成立；

(2)由(1)可知，

，①

，②

由①②得：

，

即．

【点睛】本题主要考查了求等差数列的通项公式以及利用错位相减法求数列的和，属于中档题．

18．(2014高考数学浙江理科·第19题) 已知数列和满足．若为等比数列，且

(1)求与；

(2)设。记数列的前项和为．

(i)求；

(ii)求正整数，使得对任意，均有．

**【答案】**解析：(I)由题意，，，知，又有，得公比(舍去)，所以数列的通项公式为，所以，故数列的通项公式为，；

(II)(i)由(I)知，，所以；

(ii)因为；当时，，而，得，所以当时，，综上对任意恒有，故．

19．(2014高考数学上海理科·第23题) 已知数列满足．

(1)若，求的取值范围；

(2)若是公比为的等比数列，，若，，

求的取值范围；

(3)若成等差数列，且，求正整数的最大值，以及取最大值时相应数列的公差．

**【答案】**

解析:(1)由条件得且，解得．

所以的取值范围是[3,6]．……3分

(2)由，且，得，所以……4分

又，所以．……5分

当时，，，由得成立．……6分

当时，即．

①若，则

由得，所以……8分

②若，则．

由得，所以

综上，的取值范围为．……10分

(3)设数列的公差为．由，且，

得

即

当时，，

当时，由得

所以……14分

所以，即，

得．……17分

所以的最大值为，时，的公差为．……18分．

# 题型五：数列中的新定义问题

1．(2017年高考数学江苏文理科·第19题) 对于给定的正整数*学科网 版权所有*,若数列学科网 版权所有满足学科网 版权所有学科网 版权所有对任意正整数学科网 版权所有总成立,则称数列学科网 版权所有是“学科网 版权所有数列”．(1)证明:等差数列学科网 版权所有是“学科网 版权所有数列”;(2)若数列学科网 版权所有既是“学科网 版权所有数列”,又是“学科网 版权所有数列”,证明:学科网 版权所有是等差数列．

**【答案】**(1)见解析(2)见解析 解析:证明:(1)因为学科网 版权所有是等差数列,设公差为*d*,则学科网 版权所有, 从而,当学科网 版权所有时,学科网 版权所有 学科网 版权所有 所以学科网 版权所有, 因此等差数列学科网 版权所有是“学科网 版权所有数列”; (2)数列学科网 版权所有既是“学科网 版权所有数列”,又是“学科网 版权所有数列”,因此, 当学科网 版权所有时,学科网 版权所有,① 当学科网 版权所有时,学科网 版权所有．② 由①知,学科网 版权所有学科网 版权所有,③ 学科网 版权所有学科网 版权所有,④ 将③④代入②,得学科网 版权所有, 所以是等差数列,设其公差为 在①中,取学科网 版权所有,则学科网 版权所有,所以学科网 版权所有, 在①中,取学科网 版权所有,则学科网 版权所有,所以学科网 版权所有, 所以学科网 版权所有是等差数列． 2．(2023年北京卷·第21题) 已知数列的项数均为*m*，且的前*n*项和分别为，并规定．对于，定义，其中，表示数集*M*中最大的数．

(1)若，求的值；

(2)若，且，求；

(3)证明：存在，满足 使得．

**【答案】**(1)，，，

(2)

(3)证明见详解

解析：(1)由题意可知：，

当时，则，故；

当时，则，故；

当时，则故；

当时，则，故；

综上所述：，，，．

(2)由题意可知：，且，

因为，则，当且仅当时，等号成立，

所以，

又因为，则，即，

可得，

反证：假设满足的最小正整数为，

当时，则；当时，则，

则，

又因为，则，

假设不成立，故，

即数列是以首项为1，公差为1的等差数列，所以．

(3)

(ⅰ)若，构建，由题意可得：，且为整数，

反证，假设存在正整数，使得，

则，可得，

这与相矛盾，故对任意，均有

①若存在正整数，使得，即，

可取，使得；

②若不存在正整数，使得，

因为，且，

所以必存在，使得，

即，可得，

可取，使得；

(ⅱ)若，构建，由题意可得：，且为整数，

反证，假设存在正整数，使得，

则，可得，

这与相矛盾，故对任意，均有．

①若存在正整数，使得，即，

可取，使得；

②若不存在正整数，使得，

因为，且，

所以必存在，使得，

即，可得，

可取，使得；

综上所述：存在使得．

3．(2019·上海·第21题) 数列有项，，对任意，存在，若与前项中某一项相等，则称具有性质.

(1)若，求可能的值；

(2)若不为等差数列，求证：中存在满足性质；

(3)若中恰有三项具有性质，这三项和为，使用表示.

**【答案】**(1)3,5,7；(2);(3)

【解析】(1)由题意，

①若具有性质，则

②若具有性质而不具有性质，则即；

③若不具有性质，则必有即；

此时若具有性质，则；若不具有性质，则

综上所述，可能的值为3、5、7

1. 假设中不存在满足性质的项，即对任意均有；

下面数学归纳法证明，是等差数列；

①当时，成立；

②设当且时，；

则当时，因为不具有性质，故

而又存在故，，即；

综上所述，当中不存在满足性质的项时，时等差数列成立；

故其逆否命题：当不是等差数列时，中存在满足性质的项成立.

1. 由题意，不妨设这三项为，其中;且

故数列为等差数列；为等差数列；

为等差数列，为等差数列；

若存在或或的情况

则去掉相应的、、每组等差数列的公差均为；

且、、

故当数列去掉这三项后，构成首项为，公差为，项数97项的等差数列；

故这97项的和；

故这100个数的和

4．(2019·江苏·第20题) 定义首项为1且公比为正数的等比数列为“－数列”.

(1)已知等比数列满足：，求证:数列为“－数列”；

(2)已知数列{*bn*}满足:，其中为数列的前项和．

①求数列的通项公式；

②设为正整数，若存在“－数列” ，对任意正整数，当时，都有成立，求的最大值．

**【答案】**见解析

【解析】(1)设等比数列的公比为，所以，

由，得，解得．

因此数列为“*M*—数列”.

(2)①因为，所以

由得，则

由，得

当时，由，得

整理得．

所以数列是首项和公差均为1的等差数列.

因此，数列的通项公式为.

②由①知，，.

因为数列为“–数列”，设公比为，所以，.

因为，所以，其中.

当时，有；

当时，有．

设*f*(*x*)=，则．

令，得.列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | (1，*e*) | *e* | (*e*，+∞) |
|  | + | 0 | – |
| *f*(*x*) | 学科网 | 极大值 | 学科网 |

因为，所以．

取，当时，，即，

经检验知也成立．

因此所求的最大值不小于5．

若，分别取，得，且，从而，且，

所以不存在.因此所求的最大值小于6.

5．(2019·北京·理·第20题) 已知数列，从中选取第项、第项、…、第项(<<…<)，若，则称新数列为的长度为*m*的递增子列．规定：数列的任意一项都是的长度为1的递增子列．

(Ⅰ)写出数列1，8，3，7，5，6，9的一个长度为4的递增子列；

(Ⅱ)已知数列的长度为*p*的递增子列的末项的最小值为，长度为*q*的递增子列的末项的最小值为．若*p*＜*q*，求证：＜；

(Ⅲ)设无穷数列{*an*}的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若的长度为的递增子列末项的最小值为，且长度为末项为的递增子列恰有个()，求数列的通项公式．

**【答案】**【解析】(Ⅰ)满足题意的一个长度为4的递增子列为：1，3，5，6．

(Ⅱ)对于每一个长度为的递增子列，都能从其中找到若干个长度为的递增子列，此时，

设所有长度为的子列的末项分别为：，

所有长度为的子列的末项分别为：，则，

注意到长度为的子列可能无法进一步找到长度为的子列，故，

据此可得：．

(Ⅲ)满足题意的一个数列的通项公式可以是，

下面说明此数列满足题意．

很明显数列为无穷数列，且各项均为正整数，任意两项均不相等．

长度为的递增子列末项的最小值为，

下面用数学归纳法证明长度为末项为的递增子列恰有个：

当时命题显然成立，

假设当时命题成立，即长度为末项为的递增子列恰有个，

则当时，对于时得到的每一个子列，

可构造：和两个满足题意的递增子列，则长度为*k*+1末项为2*k*+1的递增子列恰有个，

综上可得，数列是一个满足题意的数列的通项公式．

注：当时，所有满足题意的数列为：，

当时，数列对应的两个递增子列为：和．

6．(2018年高考数学江苏卷·第26题) (本小题满分10分)设，对1，2，···，*n*的一个排列，如果当*s*<*t*时，有，则称是排列的一个逆序，排列的所有逆序的总个数称为其逆序数．例如：对1，2，3的一个排列231，只有两个逆序(2，1)，(3，1)，则排列231的逆序数为2．记为1，2，···，*n*的所有排列中逆序数为*k*的全部排列的个数．

(1)求的值；

(2)求的表达式(用*n*表示)．

**【答案】**(1)2 5；(2)*n*≥5时，．

解析：(1)记为排列*abc*的逆序数，对1，2，3的所有排列，有

，

所以．

对1，2，3，4的排列，利用已有的1，2，3的排列，将数字4添加进去，4在新排列中的位置只能是最后三个位置．

因此，．

(2)对一般的*n*(*n*≥4)的情形，逆序数为0的排列只有一个：12…*n*，所以．

逆序数为1的排列只能是将排列12…*n*中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以．

为计算，当1，2，…，*n*的排列及其逆序数确定后，将*n*+1添加进原排列，*n*+1在新排列中的位置只能是最后三个位置．

因此，．

当*n*≥5时，



，

因此，*n*≥5时，．

7．(2018年高考数学上海·第21题) (本题满分18分，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分)

给定无穷数列，若无穷数列满足：对任意，都有，则称与 “接近”．

(1)设是首项为1，公比为的等比数列，，，判断数列是否与接近，并说明理由；

(2)设数列的前四项为：，，，，是一个与接近的数列，记集合，求中元素的个数；

(3)已知是公差为的等差数列，若存在数列满足：与接近，且在，，…，中至少有100个为正数，求的取值范围．

**【答案】**(1)接近；(2)3或4；(3)．

解析：(1)易得，．所以．

因为，所以．则对任意，都有．

所以与“接近”．

(2)由题设知，，，．

注意观察，，．

再考虑集合的特点以及“元素的互异性”知：

①各不相同时，；②时，此时必有与它们不同，则；

③时，此时必有与它们不同，则．

综上所述，或4．

(3)由题意知：，则．同理．

要使，则．(在左侧相交)．所以，即．因为是公差为的等差数列，所以．

8．(2014高考数学江苏·第20题) 设数列的前项和为．若对任意正整数，总存在正整数，使得，则称是“*H*数列”．

(1)若数列的前*n*项和(N)，证明: 是“*H*数列”；

(2)设是等差数列，其首项，公差．若 是“*H*数列”，求的值；

(3)证明：对任意的等差数列，总存在两个“*H*数列”和，使得

(N) 成立．

**【答案】**解析：(1) 证明：由已知，当时，，于是对任意的正整数*n*，总存在正整数，使得，所以是“*H*数列”．

(2) 解法一：由已知，得，因为是“*H*数列”，所以存在正整

数*m*，使得，即，于是．

因为，所以，故，从而．

当时，，是小于2的整数，．

于是对任意的正整数*n*，总存在正整数，使得，

所以是“*H*数列”，因此的值为．

解法二：由是首项为1的等差数列，则，，

又数列是“*H*数列”，不妨取时，存在满足条件的正整数，

使得，即，

(i)当时，此时，不符合题意，应舍去；

(ii)当时，不存在满足条件的；

(iii)当时，． 此时数列的通项公式为，

下面我们一起来验证为“*H*数列”:

；，此时，容易验证为正整数．

解法三：由题意设；又等差数列的前*n*项和；

由题意知对任意正整数，总存在正整数，使得，(\*)；

那么随着的变化而变化，可设满足函数关系式．

又，那么要使(\*)对任意自然数恒成立，则；

代入得：，即有；

又当时，，即，由此可以解得．

此时．

解法四：由是首项为1的等差数列，且数列是“*H*数列”，

则，又，所以，则，从而，

此时，，由得，为正整数，

从而数列是“*H*数列”．

(3) 解法一：设等差数列的公差为，

则．

令，则．

下证是“*H*数列”．

设的前*n*项和为，则，

于是对任意的正整数*n*，总存在正整数，使得，所以是“*H*数列”．

同理可证也是“*H*数列”．

所以，对任意的等差数列，总存在两个“*H*数列” 和，使得成立．

解法二：由(2)的解答过程可知：等差数列中若时， 是“数列”，

则．

同理等差数列中若时，是“数列”，．

任意的等差数列，则可表示为．

令，，此时，．

所以对任意的等差数列，总存在两个等差“数列”和，

使得成立．

9．(2014高考数学北京理科·第20题) 对于数对序列, 记 ,



其中表示和两个数中最大的数,

(1)对于数对序列, 求的值

(2)记*m*为*a*、*b*、*c*、*d*四个数中最小的数， 对于由两个数对(*a*, *b*), (*c*, *d*)组成的数对序列

和， 试分别对*m*=*a*和*m*=*d*时两种情况比较和的大小

(3)在由5个数对(11, 8), (5, 2), (16, 11), (11, 11), (4, 6)组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列*P*使 最小, 并写出的值(只需写出结论)．

**【答案】**解析：(Ⅰ)



(Ⅱ) 



当时,

因为,且所以

当时,

因为且所以

所以无论还是,都成立．

(Ⅲ) 数对序列的值最小,



10．(2016高考数学江苏文理科·第20题) 记．对数列()和的子集，若，定义；

若，定义．例如：时，．

现设()是公比为的等比数列，且当时，．

(1) 求数列的通项公式；

(2)对任意正整数()，若，求证：；

(3)设，，，求证：．

**【答案】**(1)；(2)(3)详见解析；

【官方解答】(1)由已知得．

于是当时，．

又，故，即．

所以数列的通项公式为．

(2)因为，，

所以，

因此，．

(3)下面分三种情况说明．

①若是的子集，则．

②若是的子集，则．

③若不是的子集，且不是的子集．

令，，则，，．

于是，，进而由得．

设为中的最大数，为中的最大数，则，，．

由(2)知，．于是，所以，即．

又，故．从而

，

故，所以，即．

综合①②③得，．

民间解答：(1)当时，

因此，从而，；

(2)；

(3)设，

则，，，

因此原题就等价于证明．

由条件可知．

①若，则，所以．

②若，由可知，设中最大元素为，中最大元素为

若，则由第⑵小题，，矛盾．

因为，所以，所以，

，即．

综上所述，，因此．

11．(2016高考数学北京理科·第20题) (本小题13分) 设数列．如果对小于的每个正整数都有 ，则称是数列的一个“时刻”．记“是数列的所有“时刻”组成的集合．

(Ⅰ)对数列：，写出的所有元素；

(Ⅱ)证明：若数列中存在使得，则；

(Ⅲ)证明：若数列满足，则的元素个数不小于．

**【答案】**（1）；（2）略；（3）略．

【官方解答】（Ⅰ）的元素为和．

（Ⅱ）因为存在使得，所以．

记，

则，且对任意正整数．

因此，从而．

（Ⅲ）当时，结论成立．

以下设．

由（Ⅱ）知．

设，记．

则．

对，记．

如果，取，则对任何．

从而且．

又因为是中的最大元素，所以．

从而对任意，，特别地，．

对．

因此．

所以．

因此的元素个数不小于．

【民间解答】⑴ 

⑵ 因为存在，设数列中第一个大于的项为，则，

其中，所以，．

⑶ 设数列的所有“时刻”为，

对于第一个“时刻”，有，，则

．

对于第二个“时刻”，有（）．

则．

类似的，…，．

于是，．

对于，若，则；

若，则

否则由⑵，知中存在“时刻”，与只有个“时刻”矛盾．

从而，，证毕．

12．(2016高考数学上海理科·第23题) (本题满分18分)本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分．

若无穷数列满足：只要，必有，则称具有性质．

(1)若具有性质，且，，求；

(2)若无穷数列是等差数列，无穷数列是公比为正数的等比数列，，，判断是否具有性质，并说明理由；

(3)设是无穷数列，已知．求证：“对任意都具有性质”的充要条件为“是常数列”．

**【答案】**(1)．(2)不具有性质．(3)见解析．

解析：(1)因为，所以，，．

于是，又因为，解得．

(2)的公差为，的公比为，

所以，．

．

，但，，，

所以不具有性质．

(3)[证]充分性：

当为常数列时，．

对任意给定的，只要，则由，必有．

充分性得证．

必要性：用反证法证明．假设不是常数列，则存在，

使得，而．

下面证明存在满足的，使得，但．

设，取，使得，则

，，故存在使得．

取，因为()，所以，

依此类推，得．

但，即．

所以不具有性质，矛盾．

必要性得证．

综上，“对任意，都具有性质”的充要条件为“是常数列”．

# 题型六：数列中的证明问题

1．(2023年新课标全国Ⅱ卷·第18题) 已知为等差数列，，记，分别为数列，前*n*项和，，．

(1)求的通项公式；

(2)证明：当时，．

**【答案】**(1)；

(2)证明见解析．

解析：(1)

设等差数列的公差为，而，

则，

于是，解得，，

所以数列的通项公式是．

(2)

方法1：由(1)知，，，

当为偶数时，，

，

当时，，因此，

当为奇数时，，

当时，，因此，

所以当时，．

方法2：由(1)知，，，

当为偶数时，，

当时，，因此，

当为奇数时，若，则

，显然满足上式，因此当为奇数时，，

当时，，因此，

所以当时，．

2．(2023年天津卷·第19题) 已知是等差数列，．

(1)求的通项公式和．

(2)已知为等比数列，对于任意，若，则，

(Ⅰ)当时，求证：；

(Ⅱ)求的通项公式及其前项和．

**【答案】**(1)，；

(2)(Ⅰ)证明见解析；(Ⅱ)，前项和为．

解析：(1)由题意可得，解得，

则数列的通项公式为，

求和得



．

(2)(Ⅰ)由题意可知，当时，，

取，则，即，

当时，，

取，此时，

据此可得，

综上可得：．

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知：，

据此猜测，

否则，若数列的公比，则，

注意到，则不恒成立，即不恒成立，

此时无法保证，

若数列的公比，则，

注意到，则不恒成立，即不恒成立，

此时无法保证，

综上，数列的公比为，则数列的通项公式为，

其前项和为：．

3．(2022新高考全国I卷·第17题) 记为数列的前*n*项和，已知是公差为的等差数列．

(1)求的通项公式；

(2)证明：．

**【答案】**(1)

(2)见解析

解析：(1)∵，∴,∴,又∵是公差为的等差数列，

∴,∴,∴当时，，

∴,整理得：,

即,∴

，

显然对于也成立，

∴的通项公式；

(2)

∴

4．(2014高考数学课标1理科·第17题) 已知数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。的前高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。项和为高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,其中高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。为常数．

(1)证明:高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。;

(2)是否存在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,使得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。为等差数列?并说明理由．

**【答案】**解析:(1)由题设高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,两式相减 高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,由于高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,所以高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。． (2) 由题设高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,可得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,由(1)知高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 假设高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。为等差数列,则高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。成等差数列,∴高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,解得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。; 证明高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。为等差数列:由高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。知 数列奇数项构成的数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。是首项为1,公差为4的等差数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 令高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。则高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,∴高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 数列偶数项构成的数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。是首项为3,公差为4的等差数列高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 令高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。则高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,∴高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 ∴高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。(高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。),高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 因此,存在存在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,使得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。为等差数列．

5．(2020年浙江省高考数学试卷·第20题) 已知数列{*an*}，{*bn*}，{*cn*}中，．

(Ⅰ)若数列{*bn*}为等比数列，且公比，且，求*q*与*an*的通项公式；

(Ⅱ)若数列{*bn*}为等差数列，且公差，证明：．

**【答案】**(I)；(II)证明见解析．

解析：(I)依题意，而，即，由于，所以解得，所以．

所以，故，所以数列是首项为，公比为的等比数列，所以．

所以()．

所以

(II)依题意设，由于，

所以，

故

．

所以

．

由于，所以，所以．

即，．

6．(2018年高考数学天津（理）·第18题) (本小题满分13分) 设是等比数列，公比大于0，其前项和为，是等差数列． 已知，，，．

(1)求和的通项公式；

(2)设数列的前项和为，

(i)求；

(ii)证明．

**【答案】**解析：(1)设等比数列的公比为*．*由可得．

因为，可得，故．

设等差数列的公差为，由，可得由，可得

从而， 故．

所以数列的通项公式为，数列的通项公式为．

(2)(i)由(1)，有，故．

(ii)证明：因为，

所以，．

7．(2016高考数学天津理科·第18题) 已知是各项均为正数的等差数列，公差为．对任意的，是和的等比中项．

(Ⅰ)设，求证：数列是等差数列；

(Ⅱ)设，求证．

**【答案】**(Ⅰ)详见解析 (Ⅱ)详见解析

解析：(Ⅰ) 

为定值．

∴为等差数列

(Ⅱ)(\*)

由已知

将代入(\*)式得

∴，得证

8．(2019·浙江·第20题) 设等差数列的前项和为，，．数列满足：对任意，，，成等比数列．

(Ⅰ)求数列，的通项公式；

(Ⅱ)记，，证明：，．

**【答案】**【意图】本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和、数学归纳法等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。

【解析】(Ⅰ)设数列的公差为，由题意得 解得，，

从而，，所以，．

解法一：由，，成等比数列得，

解得，所以，．

解法二：由，，成等比数列得，两边同减去，得

，即，再两边同减去，得，所以，

即，所以，．

(Ⅱ)解法一：由于，

从而．

解法二：由于，．

我们用数学归纳法证明：

①当时，，不等式成立；

②假设时不等式成立，即．

则当时，



，

即时，不等式也成立．

根据①和②，不等式对任意成立．

9．(2018年高考数学江苏卷·第20题) (本小题满分16分)设是首项为，公差为*d*的等差数列，是首项为，公比为*q*的等比数列．

(1)设，若对均成立，求*d*的取值范围；

(2)若，证明：存在，使得对均成立，并求的取值范围(用表示)．

**【答案】**解析：(1)由条件知：，，

因为对*n*=1，2，3，4均成立，

即对*n*=1，2，3，4均成立，

即1≤1，1≤*d*≤3，3≤2*d*≤5，7≤3*d*≤9，得．

因此，*d*的取值范围为．

(2)由条件知：，．

若存在*d*，使得(*n*=2，3，···，*m*+1)成立，

即(*n*=2，3，···，*m*+1)，

即当*n*=2，3，···，*m*+1时，*d*满足，

因为，则，

从而，，对*n*=2，3，···，*m*+1均成立，

因此，取*d*=0时，对*n*=2，3，···，*m*+1均成立．

下面讨论数列的最大值和数列的最小值(*n*=2，3，···，*m*+1)，

①当2≤*n*≤*m*时， ，

当时，有，从而，

因此，当时，数列单调递增，

故数列的最大值为．

①设，当时，，

所以单调递减，从而．

当时，，

因此，当时，数列单调递减，

故数列的最小值为．

因此，*d*的取值范围为，

10．(本小题满分14分)已知数列满足，并且(为非零参数，)．

(Ⅰ)若成等比数列，求参数的值；

(Ⅱ)设，常数且．证明．

**【答案】**分析：本小题以数列的递推关系为载体，主要考查等比数列的等比中项及前项和公式、等差数列前项和公式、不等式的性质及证明等基础知识，考查运算能力和推理论证能力。满分14分。

(I)由已知且



若、、成等比数列，则即而解得

(II)证明：设由已知，数列是以为首项、为公比的等比数列，故则　　



因此，对任意　　　　　　　　　　

当且时，所以



11．(2014高考数学重庆理科·第22题) (本小题满分12分，(1)问4分，(2)问8分)

设．

1. 若，求及数列的通项公式；
2. 若，问：是否存在实数使得对所有都成立?证明你的结论

**【答案】**(1)(2)符合条件的存在，其中的一个值为．

解析：(1)解法一:当时，，

是公差为1，首项为的等差数列，故，即

解法二：。

因此猜想．

下面用数学归纳法证明上式：

当时结论显然成立．

假设时结论成立，即．

则

即时结论成立．

所以，

1. 解法：设，则．

令,即，解得．

下用数学归纳法证明加强命题：．

当时，，所以，结论成立．

假设假设时结论成立，即．

易知在上为减函数，从而，即

再由在上为减函数得

故，因此，即时结论成立．

综上，符合条件的存在，其中的一个值为．

12．(2014高考数学课标2理科·第17题) (本小题满分12分)

已知数列满足=1，．

(Ⅰ)证明是等比数列，并求的通项公式；

(Ⅱ)证明：

**【答案】**解析：(Ⅰ)由，得，且

所以是首相为，公比为的等比数列。

因此，所以的通项公式为．

(Ⅱ)由(1)知

当时，，所以

于是

所以

13．(2014高考数学安徽理科·第21题) 设实数，整数．

(Ⅰ)证明：当且时，；

(Ⅱ)数列满足．证明：．

**【答案】**(Ⅰ)证：用数学归纳法证明如下：

①当时，，原不等式成立．

②假设时，成立．

当时，．

所以时，原不等式也成立．

综合①②可得，当时，对一切整数，不等式均成立．

(Ⅱ)证法1：先用数学归纳法证明．

①当时，由题设知成立．

②假设**时，不等式成立．

由易知．

当**时，．

由得．

由(Ⅰ)中的结论得．

因此，即．

所以**时，不等式也成立．

综合①②可得，对一切正整数**，不等式均成立．

再由可得，即．

综上所述，．

证法2：设，则，并且

．

由此可得，在上单调递增，

因而，当时，．

①当**时，由题设，即可知

，并且，

从而．

故当**时，不等式．

②假设** ()时，不等式成立，

则当**时，，即有．

所以**时，原不等式也成立．

综合①②可得，对一切正整数**，不等式均成立．

14．(2016高考数学浙江理科·第20题) (本题满分15分)设数列满足，．

(Ⅰ)证明：,；

(Ⅱ)若，，证明：，．

**【答案】**【命题意图】本题主要考查数列的递推关系与单调性、不等式性质等基础知识，同时考查推理论证能力、分析问题和解决问题的能力．

解析：(Ⅰ)由得，故，，

所以，

因此．

(Ⅱ)任取，由(Ⅰ)知，对于任意，

，

故．

从而对于任意，均有．由的任意性得． ①

否则，存在，有，取正整数且，

则，与①式矛盾．

综上，对于任意，均有．

15．(2015高考数学重庆理科·第22题) (本小题满分12分，(1)小问4分，(2)小问8分)

在数列中，．

(1)若求数列的通项公式；

(2)若证明：．

**【答案】**(1)；(2)证明见解析．

分析：(1)由于，因此把已知等式具体化得，显然由于，则(否则会得出)，从而，所以是等比数列，由其通项公式可得结论；(2)本小题是数列与不等式的综合性问题，数列的递推关系是可变形为,

由于，因此，于是可得，即有，又，于是有



，这里应用了累加求和的思想方法，由这个结论可知，因此

，这样结论得证，本题不等式的证明应用了放缩法．(1)由,有

若存在某个，使得，则由上述递推公式易得，重复上述过程可得，此与矛盾，所以对任意,．

从而，即是一个公比的等比数列．

故．

(2)由，数列的递推关系式变为

变形为．

由上式及，归纳可得



因为，所以对

求和得



另一方面，由上已证的不等式知得





综上：

16．(2015高考数学浙江理科·第20题) (本题满分15分)已知数列满足=且=()

(1)证明：1()；

(2)设数列的前项和为，证明()．

**【答案】**(1)详见解析；(2)详见解析．

解析：

(1)首先根据递推公式可得，再由递推公式变形可知

，从而得证；(2)由和得，

，从而可得，即可得证．

解析：(1)由题意得，，即，，由

得，由得，

，即；(2)由题意得，

∴①，由和得，，

∴，因此②，由①②得

．

# 题型七：数列与其他知识的交汇

1．(2016高考数学四川理科·第19题) 已知数列的首项为，为数列的前项和，，其中，．

(1)若时，成等差数列，求数列的通项公式；

(2)设双曲线的离心率为，且，求．

**【答案】**【官方解答】由已知由，两式相减得到

又由，故对所有的都成立

所以是以为首项，为公比的等比数列，

所以数列的通项公式为

因为成等差数列，所以

所以数列的通项公式为

(2)由(1)知，所以双曲线的离心率为

由于，则有

因为，所以

则有．

【民间解析】当时，

当时，由，

则有，，又知

所以是以为首项，为公比的等比数列，

所以数列的通项公式为

因为成等差数列，所以

所以数列的通项公式为

(2)由题意和(1)知，

因为，所以，

所以

所以

所以

2．(2015高考数学江苏文理·第20题) 设是各项为正数且公差为的等差数列．

(1)证明：依次构成等比数列；

(2)是否存在，使得依次构成等比数列？并说明理由；

(3)是否存在及正整数，使得依次构成等比数列？并说明理由．

**【答案】**(1)详见解析(2)不存在(3)不存在

分析(1)根据等比数列定义只需验证每一项与前一项的比值都为同一个不为零的常数即可(2)本题列式简单，变形较难，首先令将二元问题转化为一元，再分别求解两个高次方程，利用消最高次的方法得到方程：，无解，所以不存在(3)同(2)先令将二元问题转化为一元，为降次，所以两边取对数，消去n,k得到关于t的一元方程，从而将方程的解转化为研究函数零点情况，这个函数需要利用二次求导才可确定其在上无零点

解析：(1)证明：因为(，，)是同一个常数，

所以，，，依次构成等比数列．

(2)令，则，，，分别为，，，(，，)．

假设存在，，使得，，，依次构成等比数列，

则，且．

令，则，且(，)，

化简得()，且．将代入()式，

，则．

显然不是上面方程得解，矛盾，所以假设不成立，

因此不存在，，使得，，，依次构成等比数列．

(3)假设存在，及正整数，，使得，，，依次构成等比数列，

则，且．

分别在两个等式的两边同除以及，并令(，)，

则，且．

将上述两个等式两边取对数，得，

且．

化简得，

且．

再将这两式相除，化简得()．

令，

则．

令，

则．

令，则．

令，则．

由，，

知，，，在和上均单调．

故只有唯一零点，即方程()只有唯一解，故假设不成立．

所以不存在，及正整数，，使得，，，依次构成等比数列．

3．(2014高考数学四川理科·第19题) 设等差数列的公差为，点在函数的图象上()．

(Ⅰ)若，点在函数的图象上，求数列的前项和；

(Ⅱ)若，函数的图象在点处的切线在轴上的截距为，求数列的前项和．

**【答案】**解析：(Ⅰ)由已知，，，有

．

　　　解得．

　　　所以，．

(Ⅱ)函数在处的切线方程为，

　　　它在轴上的截距为．

　　　由题意，，

　　　解得．

　　　所以，．

　　　从而，．

　　　所以，

．

　　　因此，．

　　　所以，．

4．(2017年高考数学上海（文理科）·第19题) (本题满分14分,第1小题满分6分,第2小题满分8分)

根据预测,某地第个月共享单车的投放量和损失量分别为和(单位:辆),其中,,第个月底的共享单车的保有量是前个月的累计投放量与累计损失量的差．

(1)求该地区第4个月底的共享单车的保有量;

(2)已知该地共享单车停放点第个月底的单车容纳量(单位:辆)．设在某月底,共享单车保有量达到最大,问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

**【答案】**【解析】(1);

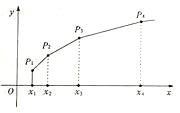
(2),即第42个月底,保有量达到最大

,∴此时保有量超过了容纳量．

5．(2017年高考数学山东理科·第19题) 已知是各项均为正数的等比数列,且,

(Ⅰ)求数列的通项公式;

(Ⅱ)如图,在平面直角坐标系中,依次连接点,,得到折线,求由该折线与直线,()所围成的区域的面积学科网 版权所有．



**【答案】** (I)  (II)  【分析】(1)依题意,列关于和的方程组;(2)利用梯形的面积公式,记梯形的面积为,求得,利用错位相减法计算得到． 【解析】 (I)设数列的公比为,由已知． 由题意得,所以, 因为,所以, 因此数列的通项公式为 (Ⅱ)过向轴作垂线,垂足分别为 由(Ⅰ)得． 记梯形的面积为,由题意: 所以:   两式相减得:  = 所以

6．(2022高考北京卷·第21题) 已知为有穷整数数列．给定正整数*m*，若对任意的，在*Q*中存在，使得，则称*Q*为连续可表数列．

(1)判断是否为连续可表数列？是否为连续可表数列？说明理由；

(2)若为连续可表数列，求证：*k*的最小值为4；

(3)若为连续可表数列，且，求证：．

**【答案】**解析:(1)，，，，，所以是连续可表数列；易知，不存在使得，所以不是连续可表数列．

(2)若,设为,则至多，6个数字，没有个，矛盾；

当时,数列，满足，，，，，，，， ．

(3)，若最多有种，若，最多有种，所以最多有种，

若，则至多可表个数，矛盾,

从而若,则，至多可表个数，

而，所以其中有负的，从而可表1~20及那个负数(恰 21个)，这表明中仅一个负的，没有0，且这个负的在中绝对值最小，同时中没有两数相同,设那个负数为 ，

则所有数之和，，

，再考虑排序，排序中不能有和相同，否则不足个，

 (仅一种方式)，

与2相邻，

若不在两端,则形式，

若，则(有2种结果相同，方式矛盾)，

， 同理 ，故在一端，不妨为形式，

若,则 (有2种结果相同，矛盾)，同理不行，

，则 (有2种结果相同，矛盾)，从而，

由于,由表法唯一知3,4不相邻,、

故只能，①或，②

这2种情形，

对①：，矛盾，

对②：，也矛盾，综上



7．(2021年高考浙江卷·第20题) 已知数列前*n*项和为，，且．

(1)求数列通项；

(2)设数列满足，记的前*n*项和为，若对任意恒成立，求的范围．

**【答案】**(1)；(2)．

解析:(1)当时，，，

当时，由①，得②，①②得

，又是首项为，公比为的等比数列，

；

(2)由，得，

所以，

，

两式相减得



，

所以，由得恒成立，

即恒成立，

时不等式恒成立；

时，，得；

时，，得；

所以．

8．(2019·天津·理·第19题) 设是等差数列，是等比数列．已知．

(Ⅰ)求和的通项公式；

(Ⅱ)设数列满足其中．

(i)求数列的通项公式；

(ii)求．

**【答案】**本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前项和公式等基础知识．考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力．满分14分．

(Ⅰ)解：设等差数列的公差为，等比数列的公比为．依题意得解得故．

所以，的通项公式为的通项公式为．

(Ⅱ)(i)解：．

所以，数列的通项公式为．

(ii)解：





．

9．(2015高考数学上海理科·第22题) (本题满分16分)本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分

已知数列与满足．

(1)若，且，求的通项公式；

(2)设的第项是最大项，即，求证：的第项是最大项；

(3)设，求的取值范围，使得有最大值与最小值，且．

**【答案】**(1)；(2)证明见解析；(3)；

解析：(1)由可得：，又，所以数列为以1为首项，6为公差的等差数列，即有；

(2)由可得：









将上述式子累加可得

，当时，也成立，所以，由此可得

，由于为常数，所以当的第项是最大项时，最大，即的第项是最大项；

(3)有(2)可知，即，结合可得

，分三种情况进行讨论：

①当时，则为偶数时，为奇数时，即有，，此时，由此，此情况不符合条件；

②当时，则为偶数时，，由于，所以，从而随着增大值减小，此时，，无最小值(无限靠近0)；为奇数时，，此时，由于，所以，从而随着增大值减小，结合，可知随着增大值增大，此时，无最大值(无限靠近0)；由此可知数列的最大值，最小值，，又，所以，解之；

③当时，则为偶数时，，由于，所以，从而随着增大值增大，此时，，无最大值(无限靠近)；为奇数时，，此时，由于，所以，从而随着增大值增大，结合，可知随着增大值减小，此时，无最小值(无限靠近)；由此可知，在条件下，数列无最值，显然不符合条件；

综上，符合条件的实数的取值范围为．

10．(2015高考数学陕西理科·第21题) (本小题满分12分)设是等比数列，，，，的各项和，其中，，．

(Ⅰ)证明：函数在内有且仅有一个零点(记为)，且；

(Ⅱ)设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列，其各项和为，比较与的大小，并加以证明．

**【答案】**(Ⅰ)证明见解析；(Ⅱ)当时， ，当时，，证明见解析．

分析：(Ⅰ)先利用零点定理可证在内至少存在一个零点，再利用函数的单调性可证在内有且仅有一个零点，进而利用是的零点可证；(Ⅱ)先设，再对的取值范围进行讨论来判断与的大小，进而可得和的大小．

解析：(Ⅰ)，则



所以在内至少存在一个零点．

又，故在内单调递增，

所以在内有且仅有一个零点．

因为是的零点，所以，即，故．

(Ⅱ)解法一：由题设，

设

当时，

当时，

若，

若，

所以在上递增，在上递减，

所以，即．

综上所述，当时, ；当时

解法二 由题设，

当时, 

当时, 用数学归纳法可以证明．

当时, 所以成立．

假设时，不等式成立，即．

那么，当时，

．

又

令，则

所以当,,在上递减；

当,,在上递增．

所以，从而

故．即，不等式也成立．

所以，对于一切的整数，都有．

解法三:由已知，记等差数列为,等比数列为,则，，

所以,

令

当时, ,所以．

当时, 

而，所以，．

若，，，

当，，，

从而在上递减，在上递增．所以，

所以当又，，故

综上所述，当时，；当时．

11．(2015高考数学北京理科·第20题) (本小题13分)已知数列满足：，，且．记集合．

(Ⅰ)若，写出集合的所有元素；

(Ⅱ)若集合存在一个元素是3的倍数，证明：的所有元素都是3的倍数；

(Ⅲ)求集合的元素个数的最大值．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)证明见解析；(III )8．

解析：(Ⅰ)由已知可知：



(Ⅱ)因为集合存在一个元素是3的倍数，所以不妨设是3的倍数，由已知，可用用数学归纳法证明对任意，是3的倍数，当时，则M中的所有元素都是3的倍数，如果时，因为或，所以是3的倍数，于是是3的倍数，类似可得，都是3的倍数，从而对任意，是3的倍数，因此的所有元素都是3的倍数．

(Ⅲ)由于中的元素都不超过36，由，易得，类似可得，其次中的元素个数最多除了前面两个数外，都是4的倍数，因为第二个数必定为偶数，由的定义可知，第三个数及后面的数必定是4的倍数，另外，M中的数除以9的余数,由定义可知，和除以9的余数一样，

①若中有3的倍数，由(2)知：所有的都是3的倍数，所以都是3的倍数，所以除以9的余数为为3，6，3，6，．．．．．． ,或6，3，6，3．．．．．．，或0，0，0，．．．．．． ,而除以9余3且是4的倍数只有12，除以9余6且是4的倍数只有24，除以9余0且是4的倍数只有36，则M中的数从第三项起最多2项，加上前面两项，最多4项．

②中没有3的倍数，则都不是3的倍数，对于除以9的余数只能是1，4，7，2，5，8中的一个，从起，除以9的余数是1，2，4，8，7，5，1，2，4，8，．．．．．． ,不断的6项循环(可能从2，4，8，7或5开始)，而除以9的余数是1，2，4，8，5且是4的倍数(不大于36)，只有28，20，4，8，16，32，所以M中的项加上前两项最多8项，则时，，项数为8，所以集合的元素个数的最大值为8．

12．(2015高考数学安徽理科·第18题) (本小题满分12分)设，是曲线在点处的切线与*x*轴交点的横坐标．

(Ⅰ)求数列的通项公式；

(Ⅱ)记，证明．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)．

分析：(Ⅰ)对题中所给曲线的解析式进行求导，得出曲线在点处的切线斜率为．从而可以写出切线方程为．令．解得切线与轴交点的横坐标．

(Ⅱ)要证，需考虑通项，通过适当放缩能够使得每项相消即可证明．思路如下：先表示出，求出初始条件当时，．当时，单独考虑，并放缩得，所以

，综上可得对任意的，均有．

解析：(Ⅰ)，曲线在点处的切线斜率为．

从而切线方程为．令，解得切线与轴交点的横坐标．

(Ⅱ)证：由题设和(Ⅰ)中的计算结果知

．

当时，．

当时，因为，

所以．

综上可得对任意的，均有．

13．(2017年高考数学浙江文理科·第22题) 已知数列满足:,．

证明:当时,

(Ⅰ);

(Ⅱ);

(Ⅲ)．

**【答案】**详见解析

【解析】

(1)当时,;

假设时,,

那么时,若,则矛盾,

故,即．

(2)由,得．

设函数

则,

故函数在上单调递增,于是有,

因此即．

(3),．

由(2)知,,则,

故．

综上,得证．

14．(2017年高考数学北京理科·第20题) 设学科网 版权所有和学科网 版权所有是两个等差数列,记学科网 版权所有学科网 版权所有,其中学科网 版权所有表示学科网 版权所有这学科网 版权所有个数中最大的数．

(Ⅰ)若学科网 版权所有,学科网 版权所有,求学科网 版权所有的值,并证明学科网 版权所有是等差数列;

(Ⅱ)证明:或者对任意正数,存在正整数,当时,;或者存在正整数,使得学科网 版权所有是等差数列．

**【答案】**(Ⅰ)详见解析;(Ⅱ)详见解析．

【解析】(Ⅰ)分别代入求,观察规律,再证明当学科网 版权所有时,,

所以学科网 版权所有关于学科网 版权所有单调递减． 所以学科网 版权所有,得证;(Ⅱ)首先求学科网 版权所有的通项公式,分学科网 版权所有三种情况讨论证明．

解:(Ⅰ),

,

,

当时,,

所以学科网 版权所有关于学科网 版权所有单调递减．

所以学科网 版权所有,

所以对于任意,,于是,

所以学科网 版权所有是等差数列．

(Ⅱ)设数列学科网 版权所有和学科网 版权所有的公差分别为学科网 版权所有,则

学科网 版权所有．

所以学科网 版权所有

①当学科网 版权所有时,取正整数学科网 版权所有,则当学科网 版权所有时,学科网 版权所有,因此学科网 版权所有．

此时,学科网 版权所有是等差数列．

②当学科网 版权所有时,对任意学科网 版权所有,

学科网 版权所有．

此时,学科网 版权所有是等差数列．

③当学科网 版权所有时,

当学科网 版权所有时,有学科网 版权所有．

所以学科网 版权所有学科网 版权所有．

对任意正数学科网 版权所有,取正整数学科网 版权所有,故当时,学科网 版权所有．

# 题型八：数列的综合应用

1．(2022新高考全国II卷·第17题) 已知为等差数列，是公比为2的等比数列，且．

(1)证明：；

(2)求集合中元素个数．

**【答案】**(1)证明见解析；

(2)．

解析：(1)设数列的公差为，所以，，即可解得，，所以原命题得证．

1. 由(1)知，，所以，即，亦即，解得，所以满足等式的解，故集合中的元素个数为．

2．(2022年浙江省高考数学试题·第20题) 已知等差数列的首项，公差．记的前*n*项和为．

(1)若，求；

(2)若对于每个，存在实数，使成等比数列，求*d*的取值范围．

**【答案】**解析:(1)因为，

所以，

所以，又，

所以，

所以，

所以，

(2)因为，，成等比数列，

所以，

，

，

由已知方程的判别式大于等于0，

所以，

所以对于任意的恒成立，

所以对于任意的恒成立，

当时，，

当时，由，可得

当时，，

又

所以

3．(2016高考数学四川理科·第19题) 已知数列的首项为，为数列的前项和，，其中，．

(1)若时，成等差数列，求数列的通项公式；

(2)设双曲线的离心率为，且，求．

**【答案】**【官方解答】由已知由，两式相减得到

又由，故对所有的都成立

所以是以为首项，为公比的等比数列，

所以数列的通项公式为

因为成等差数列，所以

所以数列的通项公式为

(2)由(1)知，所以双曲线的离心率为

由于，则有

因为，所以

则有．

【民间解析】当时，

当时，由，

则有，，又知

所以是以为首项，为公比的等比数列，

所以数列的通项公式为

因为成等差数列，所以

所以数列的通项公式为

(2)由题意和(1)知，

因为，所以，

所以

所以

所以

# 题型九：数列结构不良试题

1．(2021年高考全国甲卷理科·第18题) 已知数列的各项均为正数，记为的前*n*项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立．

①数列是等差数列：②数列是等差数列；③．

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

**【答案】**答案见解析

解析：选①②作条件证明③：

设，则，

当时，；

当时，；

因为也是等差数列，所以，解得；

所以，所以．

选①③作条件证明②：

因为，是等差数列，

所以公差，

所以，即，

因为，

所以是等差数列．

选②③作条件证明①：

设，则，

当时，；

当时，；

因为，所以，解得或；

当时，，当时，满足等差数列的定义，此时为等差数列；

当时，，不合题意，舍去．

综上可知为等差数列．

【点睛】这类题型在解答题中较为罕见，求解的关键是牢牢抓住已知条件，结合相关公式，逐步推演，等差数列的证明通常采用定义法或者等差中项法．