十年（2014－2023）年高考真题分项汇编—导数解答题

**目录**

[**题型一：导数的概念及几何意义 1**](#_Toc140596753)

[**题型二：导数与函数的单调性 13**](#_Toc140596754)

[**题型三：导数与函数的极值、最值 23**](#_Toc140596755)

[**题型四：导数与函数零点问题 55**](#_Toc140596756)

[**题型五：导数与不等式的证明 79**](#_Toc140596757)

[**题型六：导数与其他知识的交汇题型 93**](#_Toc140596758)

[**题型七：利用导数研究恒成立、能成立问题 105**](#_Toc140596759)

[**题型八：导数的综合应用 121**](#_Toc140596760)

# 题型一：导数的概念及几何意义

1．(2020北京高考·第19题) 已知函数．

(Ⅰ)求曲线的斜率等于的切线方程；

(Ⅱ)设曲线在点处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为，求的最小值．

**【答案】**(Ⅰ)，(Ⅱ)．

【解析】(Ⅰ)因为，所以，

设切点为，则，即，所以切点为，

由点斜式可得切线方程：，即．

(Ⅱ)显然，

因为在点处的切线方程为：，

令，得，令，得，所以，

不妨设时，结果一样，则，

所以，

由，得，由，得，

所以在上递减，在上递增，所以时，取得极小值，

也是最小值为．

2．(2018年高考数学天津（理）·第20题) (本小题满分14分)已知函数，，其中．

(1)求函数的单调区间；

(2)若曲线在点处的切线与曲线在点处的切线平行，证明

；

(3)证明当时，存在直线，使是曲线的切线，也是曲线的切线．

**【答案】**(1)解：由已知，，则．令 ，解得．

由，可知当变化时，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以函数的单调递减区间为，单调递增区间为．

(2)证明：由可得曲线在点处的切线斜率为，

由可得曲线在点处的切线斜率为因为这两条切线平行，故有，即．两边取以为底的对数，得，所以．

(3)证明：曲线在点处的切线，

曲线在点处的切线，

要证明当时，存在直线，使是曲线的切线，也是曲线的切线．

只需证明当时，存在，使得与重合．

即只需证明当时，方程组 有解，

由①得，代入②，得

因此只需证明当时，关于的方程③存在实数解．

设函数，既要证明当时，函数存在零点．

，可知当时，；当时，单调递减，又

，故存在唯一的，且，使得，

即，由此可得在上单调递增，在上单调递减，在处取得极大值．

因为，故，所以

．

下面证明存在实数，使得．

由(1)可得，，当时，有

 ，

所以存在实数，使得．

因此，当时，存在，使得．

所以当时，存在直线，使是曲线的切线，也是曲线的切线．

3．(2020年新高考全国Ⅰ卷（山东）·第21题) 已知函数．

(1)当时，求曲线*y*=*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2)若*f*(*x*)≥1，求*a*取值范围．

**【答案】**(1)(2)

解析：(1)，，．

，∴切点坐标为(1,1+*e*),

∴函数f(x)在点(1,*f*(1)处的切线方程为,即,

切线与坐标轴交点坐标分别为,

∴所求三角形面积为;

(2)解法一：,

，且．

设,则

∴g(*x*)在上单调递增，即在上单调递增，

当时，,∴,*∴*成立．

当时， ，，,

∴存在唯一，使得，且当时，当时，，，

因此

>1,

*∴**∴*恒成立；

当时， ∴不是恒成立．

综上所述，实数*a*的取值范围是[1,+∞)．

解法二：等价于

,

令,上述不等式等价于,

显然为单调增函数，∴又等价于，即，

令,则

在上*h’(x)>0,h(x)*单调递增；在(1,+∞)上*h’(x)<0,h(x)*单调递减，

∴,

*，*∴*a*的取值范围是[1,+∞)．

4．(2020年新高考全国卷Ⅱ数学（海南）·第22题) 已知函数．

(1)当时，求曲线*y*=*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2)若*f*(*x*)≥1，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)(2)

解析：(1)，，．

，∴切点坐标为(1,1+*e*),

∴函数f(x)在点(1,*f*(1)处的切线方程为,即,

切线与坐标轴交点坐标分别为,

∴所求三角形面积为;

(2)解法一：,

，且．

设,则

∴g(*x*)在上单调递增，即在上单调递增，

当时，,∴,*∴*成立．

当时， ，，,

∴存在唯一，使得，且当时，当时，，，

因此

>1,

*∴**∴*恒成立；

当时， ∴不是恒成立．

综上所述，实数*a*的取值范围是[1,+∞)．

解法二：等价于

,

令,上述不等式等价于,

显然为单调增函数，∴又等价于，即，

令,则

在上*h’(x)>0,h(x)*单调递增；在(1,+∞)上*h’(x)<0,h(x)*单调递减，

∴,

*，*∴*a*的取值范围是[1,+∞)．

5．(2018年高考数学浙江卷·第22题) (本题满分15分)已知函数．

(1)若在处导数相等，证明：；

(2)若，证明：对于任意，直线与曲线有唯一公共点．

**【答案】**【解法1】(1)函数的导函数，

由得



因为,所以

．

由基本不等式得



因为,所以





设



则



所以

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 0 | + |
|  | ↘ |  | ↗ |

所以在上单调递增,故

,

即

(2)令,则





所以,存在使

,

所以,对任意的及,直线曲线有公共点．

由得

设

则

其中．

由(I)可知,又,故



所以,即函数在上单调递减,因此方程至多1个实根．

综上，当时，对于任意，直线与曲线有唯一公共点．

【解法2】(1)，

令，，

，故在上单调递增，

(2)直线与曲线有唯一公共点，则有唯一解，即

与有且只有一个交点， 令，

当时，，，即，此时单调递减，又时，

时，，故单调且，即有唯一解，

当时，，

又，即，

此时，

又，，，

故，即．

6．(2014高考数学课标1理科·第21题) 设函数高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,曲线高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。在点高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。处的切线高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。．

(1)求高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。;

(2)证明:高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。．

**【答案】**解析:(1) 函数高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。的定义域为高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 由题意可得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,故高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。． (2)由(1)知高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,从而高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。等价于高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。 设函数高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,则高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,所以当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,故高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。单调递减,在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。上单调递增,从而高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。上的最小值为高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。． 设函数高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,则高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,所以当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,故高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。上单调递增,在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。单调递减,从而高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。在高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。的最小值为 高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。． 综上:当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时,高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,即高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。．

7．(2019·全国Ⅲ·理·第20题)已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)是否存在，使得在区间最小值为且最大值为1？若存在，求出的所有值；若不存在，说明理由．

**【答案】**(1)见详解；(2)或．

【官方解析】

(1)．

令，得或．

若，则当时，；当时，．故 在单调递增，在单调递减；

若时，在单调递增；

若，则当时，；当时，．故 在单调递增，在单调递减．

(2)满足题设条件的存在．

(ⅰ)当时，由(1)知，在单调递增，所以在区间的最小值为，最大值为．此时满足题设条件当且仅当，即．

(ⅱ)当时，由(1)知，在单调递减，所以在区间的最大值为，最小值为．此时满足题设条件当且仅当，即．

(ⅲ)当时，由(1)知，在的最小值为，最大值为或．

若，则，与矛盾．

若，则或或，与矛盾．

综上，当且仅当或，在最小值为，最大值为1．

【点评】这是一道常规的函数导数不等式和综合题，题目难度比往年降低了不少．考查的函数单调性，最大值最小值这种基本概念的计算．思考量不大，计算量略大．

8．(2019·全国Ⅱ·理·第20题)已知函数．

讨论的单调性，并证明有且仅有两个零点；

设是的一个零点，证明曲线在点处的切线也是曲线的切线．

**【答案】**函数在和上是单调增函数，证明见解析；证明见解析.

**【官方解析】**

**的定义域为.

因为，所以www.zqy.com在www.zqy.com和www.zqy.com上是单调递增.

因为，，

所以**在有唯一零点**，即．

又，，故**在有唯一零点．

综上，**有且仅有两个零点．

因为，故点在曲线上．

由题设知，即，

故直线**的斜率．

曲线在点处切线的斜率是，曲线在点处切线的斜率也是，所以曲线在点处的切线也是曲线的切线．

**【分析】**对函数求导，结合定义域，判断函数的单调性；

先求出曲线在处的切线，然后求出当曲线切线的斜率与斜率相等时，证明曲线切线在纵轴上的截距与www.zqy.com在纵轴的截距相等即可.

**【解析】**函数的定义域为，www.zqy.com，因为函数www.zqy.com的定义域为，所以www.zqy.com，因此函数在和上是单调增函数；

当www.zqy.com，时，www.zqy.com，而www.zqy.com，显然当www.zqy.com，函数www.zqy.com有零点，而函数www.zqy.com在www.zqy.com上单调递增，故当www.zqy.com时，函数www.zqy.com有唯一的零点；

当www.zqy.com时，www.zqy.com，

因为www.zqy.com，所以函数www.zqy.com在www.zqy.com必有一零点，而函数www.zqy.com在www.zqy.com上是单调递增，故当www.zqy.com时，函数www.zqy.com有唯一的零点

综上所述，函数www.zqy.com的定义域内有2个零点；

因为www.zqy.com是www.zqy.com的一个零点，所以www.zqy.com

www.zqy.com，所以曲线www.zqy.com在处的切线www.zqy.com的斜率www.zqy.com，故曲线www.zqy.com在处的切线www.zqy.com的方程为：www.zqy.com而www.zqy.com，所以www.zqy.com的方程为www.zqy.com，它在纵轴的截距为www.zqy.com.设曲线www.zqy.com的切点为www.zqy.com，过切点为www.zqy.com切线，www.zqy.com，所以在www.zqy.com处的切线的斜率为www.zqy.com，因此切线的方程为www.zqy.com，

当切线的斜率www.zqy.com等于直线www.zqy.com的斜率www.zqy.com时，即www.zqy.com，

切线在纵轴的截距为www.zqy.com，而www.zqy.com，所以www.zqy.com，直线的斜率相等，在纵轴上的截距也相等，因此直线重合，故曲线www.zqy.com在处的切线也是曲线www.zqy.com的切线.

**【点评】**本题考查了利用导数求已知函数的单调性、考查了曲线的切线方程，考查了数学运算能力.

# 题型二：导数与函数的单调性

1．(2022高考北京卷·第20题) 已知函数．

(1)求曲线在点处的切线方程；

(2)设，讨论函数在上的单调性；

(3)证明：对任意，有．

**【答案】**解析:(1)因为，所以，

即切点坐标为，

又，

∴切线斜率

∴切线方程为：

1. 因为， 所以，

令，则，

∴在上单调递增，∴∴在上恒成立，

∴上单调递增．

1. 原不等式等价于，

令，，

即证，

∵，

，

由(2)知在上单调递增，

∴，

∴

∴在上单调递增，又因为，

∴，所以命题得证．

2．(本小题满分12分)已知函数，其中，为参数，且．

(Ⅰ)当时，判断函数是否有极值；

(Ⅱ)要使函数的极小值大于零，求参数的取值范围；

(Ⅲ)若对(Ⅱ)中所求的取值范围内的任意参数，函数在区间内都是增函数，求实数的取值范围．

**【答案】**分析：考查运用导数研究函数的单调性及极值、解不等式等基础知识，考查综合分析和解决问题的能力。

(I)当时则在内是增函数，故无极值。

(II)令得 

由及(I)，只需考虑的情况。

当变化时，的符号及的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 |  |  |  |
|  | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

因此，函数在处取得极小值且

要使必有可得所以

(III)由(II)知，函数在区间与内都是增函数。

由题设，函数在内是增函数，则须满足不等式组

　　　或

由(II)，参数时，要使不等式

关于参数恒成立，必有

综上，解得或所以的取值范围是

3．(2014高考数学重庆理科·第20题) 已知函数的导函数为偶函数，且曲线在点处的切线的斜率为．

1. 确定的值；
2. 若，判断的单调性；

(3)若有极值，求的取值范围．

**【答案】**(1)；(2)在R上为增函数；(3)详见解析

解析：(1)对求导，由为偶函数，知，

即，因，所以。

又，故。

(2)当时，，

那么故在R上为增函数。

(3)由(1)知，

而当时等号成立。

下面分三类情况进行讨论：

当时，对任意，此时无极值；

当时，对任意，此时无极值；

当时，令，注意到方程有两根，

即有两根．

当时，；又当时，，从而在处取得极小值；

综上，若有极值，则取值范围为。

4．(2014高考数学天津理科·第20题) 设．已知函数有两个零点,且．

(Ⅰ)求的取值范围;

(Ⅱ)证明随着的减小而增大;

(Ⅲ)证明 随着的减小而增大．

**【答案】**(Ⅰ);(Ⅱ)详见解析;(Ⅲ)详见解析．解析:(Ⅰ)由,可得．下面分两种情况讨论:⑴当时,由在上恒成立,可得在上单调递增,不合题意．⑵当时,由,得．当变化时,,的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | + |  | - |
|  | ↗ |  | ↘ |

这时,的单调递增区间是;单调递减区间是．于是,“函数有两个零点”等价于如下条件同时成立:①；②存在,满足；

③存在,满足．由,即,解得,而此时,取,满足,且;取,满足,且．所以,的取值范围是．(Ⅱ)由,有．设,由知:在上单调递增,在上单调递减．并且当时,;当时,．由已知,满足,．由及的单调性,可得,．对于任意的,设,,其中;,其中．因为在上单调递增,故由,即,可得;类似可得．又由,得．所以,随着的减小而增大．(Ⅲ)由,,可得,．故．设,则,且解得,．所以,．①令,,则．令,得．当时,．因此,在上单调递增,故对于任意的,,由此可得,故在上单调递增．因此,由①可得随着的增大而增大．而由(Ⅱ),随着的减小而增大,所以随着的减小而增大．5．(2014高考数学江西理科·第19题) 已知函数．

(1)当时,求的极值;

(2)若在区间上单调递增,求b的取值范围．

**【答案】**(1)在取极小值,在取极大值4．(2) 分析:(1)求函数极值,首先明确其定义域:,然后求导数:当时,再在定义域下求导函数的零点:或根据导数符号变化规律,确定极值:当时,单调递减,当时,单调递增,当时,单调递减,故在取极小值,在取极大值4．(2)已知函数单调性,求参数取值范围,一般转化为对应导数恒非负,再利用变量分离求最值． 由题意得对恒成立,即对恒成立,即,,即 解析:(1)当时,由得或 当时,单调递减,当时,单调递增,当时,单调递减,故在取极小值,在取极大值4． (2)因为当时,  依题意当时,有,从而 所以b的取值范围为

6．(2015高考数学重庆理科·第20题) (本小题满分12分，(1)小问7分，(2)小问5分)

设函数．

(1)若在处取得极值，确定的值，并求此时曲线在点处的切线方程；

(2)若在上为减函数，求的取值范围．

**【答案】**(1)，切线方程为；(2)．

解析：

解析：本题考查求复合函数的导数，导数与函数的关系，由求导法则可得，由已知得，可得，于是有，，，由点斜式可得切线方程；(2)由题意在上恒成立，即在上恒成立，利用二次函数的性质可很快得结论，由得．

解析：(1)对求导得

因为在处取得极值，所以，即．

当时，,故,从而在点处的切线方程为,化简得

(2)由(1)得，,

令

由，解得．

当时，,故为减函数；

当时，,故为增函数；

当时，,故为减函数；

由在上为减函数，知，解得

故a的取值范围为．

7．(2016高考数学北京理科·第18题)(本小题13分)设函数，曲线在点处的切线方程为．

(I)求的值；

(Ⅱ)求的单调区间．

**【答案】**(I)，;(2)在上单调递增，无减区间

【官方解答】(Ⅰ)因为，所以．

依题设，即

解得．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知．

由即知，与同号．

令，则．

所以，当时，，在区间上单调递减；

当时，，在区间上单调递增．

故是在区间上的最小值，

从而．

综上可知，，，故的单调递增区间为．

∴在上单调递增，无减区间．

【民间解答】(I)

∴

∵曲线在点处的切线方程为

∴，

即①

 ②

由①②解得：，

(II)由(I)可知：，

令，

∴

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  | 极小值 |  |

∴的最小值是

∴的最小值为

即对恒成立

8．(2021年高考全国甲卷理科·第21题)已知且，函数．

(1)当时，求的单调区间；

(2)若曲线与直线有且仅有两个交点，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)上单调递增；上单调递减；(2)．

解析：(1)当时，,

令得,当时，,当时，,

∴函数在上单调递增；上单调递减；

(2),设函数,

则,令，得,

在内,单调递增；

在上,单调递减；

*,*

又，当趋近于时，趋近于0，

所以曲线与直线有且仅有两个交点，即曲线与直线有两个交点的充分必要条件是,这即是,

所以的取值范围是．

【点睛】本题考查利用导数研究函数的单调性，根据曲线和直线的交点个数求参数的取值范围问题，属较难试题，关键是将问题进行等价转化，分离参数，构造函数，利用导数研究函数的单调性和最值，图象，利用数形结合思想求解．

9．(2020年高考课标Ⅰ卷理科·第21题)已知函数．

(1)当*a*=1时，讨论*f*(*x*)的单调性；

(2)当*x*≥0时，*f*(*x*)≥*x*3+1，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)当时，单调递减，当时，单调递增．(2)

【解析】(1)当时，，，

由于，故单调递增，注意到，故：

当时，单调递减，

当时，单调递增．

(2)由得，，其中，

①．当*x*=0时，不等式为：，显然成立，符合题意；

②．当时，分离参数*a*得，，

记，，

令，

则，，

故单调递增，，

故函数单调递增，，

由可得：恒成立，

故当时，，单调递增；

当时，，单调递减；

因此，,

综上可得，实数*a*的取值范围是．

# 题型三：导数与函数的极值、最值

1．(2023年北京卷·第20题) 设函数，曲线在点处的切线方程为．

(1)求的值；

(2)设函数，求的单调区间；

(3)求的极值点个数．

**【答案】**(1)

(2)答案见解析 (3)3个

解析：(1)因为，所以，

因为在处的切线方程为，

所以，，

则，解得，

所以．

(2)由(1)得，

则，

令，解得，不妨设，，则，

易知恒成立，

所以令，解得或；令，解得或；

所以在，上单调递减，在，上单调递增，

即的单调递减区间为和，单调递增区间为和．

(3)由(1)得，，

由(2)知在，上单调递减，在，上单调递增，

当时，，，即

所以在上存在唯一零点，不妨设为，则，

此时，当时，，则单调递减；当时，，则单调递增；

所以在上有一个极小值点；

当时，在上单调递减，

则，故，

所以在上存在唯一零点，不妨设为，则，

此时，当时，，则单调递增；当时，，则单调递减；

所以在上有一个极大值点；

当时，在上单调递增，

则，故，

所以在上存在唯一零点，不妨设为，则，

此时，当时，，则单调递减；当时，，则单调递增；

所以在上有一个极小值点；

当时，，

所以，则单调递增，

所以在上无极值点；

综上：在和上各有一个极小值点，在上有一个极大值点，共有个极值点．

2．(2023年新课标全国Ⅱ卷·第22题) (1)证明：当时，；

(2)已知函数，若是的极大值点，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)证明见详解(2)

解析：(1)构建，则对恒成立，

则在上单调递增，可得，

所以；

构建，

则，

构建，则对恒成立，

则在上单调递增，可得，

即对恒成立，

则在上单调递增，可得，

所以；

综上所述：．

(2)令，解得，即函数的定义域为，

若，则，

因为在定义域内单调递减，在上单调递增，在上单调递减，

则在上单调递减，在上单调递增，

故是的极小值点，不合题意，所以．

当时，令

因为，

且，

所以函数在定义域内为偶函数，

由题意可得：，

(i)当时，取，，则，

由(1)可得，

且，

所以，

即当时，，则在上单调递增，

结合偶函数的对称性可知：在上单调递减，

所以是的极小值点，不合题意；

(ⅱ)当时，取，则，

由(1)可得，

构建，

则，

且，则对恒成立，

可知在上单调递增，且，

所以在内存在唯一的零点，

当时，则，且，

则，

即当时，，则在上单调递减，

结合偶函数的对称性可知：在上单调递增，

所以是的极大值点，符合题意；

综上所述：，即，解得或，

故*a*的取值范围为．

3．(2021高考北京·第19题) 已知函数．

(1)若，求曲线在点处的切线方程；

(2)若在处取得极值，求的单调区间，以及其最大值与最小值．

**【答案】(1)；**

**(2)函数的增区间为、，单调递减区间为，最大值为，最小值为．**

**解析：(1)当时，，则，，，**

**此时，曲线在点处的切线方程为，即；**

**(2)因为，则，**

**由题意可得，解得，**

**故，，列表如下：**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | **增** | **极大值** | **减** | **极小值** | **增** |

**所以，函数的增区间为、，单调递减区间为．**

**当时，；当时，．**

**所以，，．**

4．(2018年高考数学课标Ⅲ卷（理）·第21题) 已知函数．

(1)若，证明：当时，，当时，；

(2)若是的极大值点，求．

**【答案】**【官方解析】当时，，

设函数，则

当时，；当时，，故当时，

所以在上单调递增

又，故当时，；当时，．

(2)(i)若，由(1)知，当时，

这与是的极大值点矛盾

(ii)若，设函数

由于当时，，故与符号相同

又，故是的极大值点，当且仅当是的极大值点



如果，则当，且时，，故不是的极大值点

如果，则存在根，故当，且时，，所以不是的极大值点

如果，则

则当时，；当时，

所以是的极大值点，从而是的极大值点

综上．

【民间解析】(1)法一：当时，

函数的定义域为，此时

记

则

所以函数在上单调递增，而

所以当时，，此时

当时，，此时

法二：当时，，

则，



①当时，，此时单调递减

所以时，，故函数在上单调递增

所以时，

②当时，，此时单调递增

所以时，，所以函数在上单调递增

所以当时，

综上所述若，证明：当时，，当时，．

(2)法一：由

可得

所以

因为是的极大值点

所以，当时，；当时，

又

设，则，

所以在上单调递增，所以当时，；当时，

所以当时，

设，则

当时，；当时，

所以函数在上单调递减；在上单调递增

所以任意时，

所以若时，，此时不存在极值，故

由(1)知，当时，；当时，

显然，当时，

①当时，则



若，则，使得当时，，此时不满足题意，故，即

②当时，则



若，则，使得当时，，此时，不满足题意，故，即

综上，，所以．

法二：

记，

当，时，

所以在上单调递增，所以当时，即

所以在上单调递增，与是的极大值点不符合；

当时，，显然可知递减

①，解得，则有，，递增；

时，，递减，所以，故递减，又

则，，，递增；，，，递减

此时为的极大值点，符合题意

②当时，有，

所以在有唯一零点，记为，则，，递增

则，递增，所以，即，递增，不符合题意；

③当时，有，

所以在有唯一零点，记为，则，，递减

则，递减，所以，即，递减，不符合题意

综上可知．

法三：(2)尝试一：(极大值点的第二充要条件：已知函数在处各阶导数都存在且连续，是函数的极大值点的一个充要条件为前阶导数等于0，第阶导数小于0。)

，

，

，由得

下证：当时，是的极大值点，

，所以在单增，在单减

进而有，从而在单减，

当时，，当时，

从而在单增，在单减，所以是的极大值点。

点评：计算量很大，但不失为一种基本方法，激励热爱数学的学生不拘泥于老师所教，就着自己的兴趣，不断学习，学而致知。基于此，还可以从大学的角度给出一种解法。通过在阶的帕德逼近可得，且两个函数在处两个函数可以无限制逼近，估计这也是考试中心构造这个函数的方法。由此可以迅速得到，我们也可以根据帕德逼近把此题的对数函数改为指数函数和三角函数，构造出相应的题目。尝试一难点在于的各阶导数太复杂，由帕德逼近优化其解法。

法四：引理1：若与在处函数值和导数值都相同，则在处导数为．

证明：，

因为，且，代入化简即证：

引理2：已知函数在处各阶导数都存在且连续，是函数的极大值点的一个充要条件为前阶导数等于0，第阶导数小于0。

，

令，

则易得，，，

由引理1知，等价于，从而迅速求得。

当时，

尝试二：若是的极大值点，注意到，

则存在充分接近于的，使得当时，，当时，

得到一个恒成立问题，其基本方法之一有分离参数法。



对任意的，都有，进而有

①当时，，

当时，



②当时，，

当时，



综上：．

5．(2018年高考数学课标卷Ⅰ（理）·第21题) (12分)已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)若存在两个极值点，证明：．

**【答案】**解:(1)的定义域为，．

(i)若，则，当且仅当，时，所以在单调递减．

(ii)若，令得，或．

当时，；

当时，．所以在单调递减，在单调递增．

(2)由(1)知，存在两个极值点当且仅当．

由于的两个极值点满足，所以，不妨设，则．由于

，

所以等价于．

设函数，由(1)知，在单调递减，又，从而当时，．

所以，即．

6．(2018年高考数学北京（理）·第18题) (本小题13分)设函数．

(Ⅰ)若曲线在点处的切线与轴平行，求；

(Ⅱ)若在处取得极小值，求的取值范围．

**【答案】**解：(Ⅰ)因为，

所以*f ′*(*x*)=［2*ax*–

．



由题设知，即，解得．

此时．

所以的值为．

(Ⅱ)由(Ⅰ)得．

若，则当时，；

当时，．

所以在处取得极小值．

若，则当时，，，

所以．

所以不是的极小值点．

综上可知，的取值范围是．

7．(2014高考数学山东理科·第20题) 设函数(为常数，是自然对数的底数)．

(Ⅰ)当时，求函数的单调区间；

(Ⅱ)若函数在内存在两个极值点，求的取值范围．

**【答案】**(1)的单调递减区间为，单调递增区间为;(2) ．

解析：(1)函数的定义域为．



．

由可得，

所以当时，，函数单调递减；

当时，，函数单调递增；

所以的单调递减区间为，单调递增区间为．

(2)由(1)知，当时，函数在内单调递减，

故在内不存在极值点；

当时，设函数，．

因为，

当时，

当时，，单调递增，

故在内不存在两个极值点．

当时，得时，，函数单调递减；

时，，函数单调递增．

所以函数的最小值为．

函数在内存在两个极值点．

当且仅当

解得．

综上所述，函数在内存在两个极值点时，的取值范围为．

8．(2014高考数学湖南理科·第22题) 已知常数函数．

(Ⅰ)讨论在区间上的单调性；

(Ⅱ)若存在两个极值点，且求的取值范围．

**【答案】**解：(I)=(＊)

当a1时，在区间上，，此时在区间上单调递增。

当0＜a＜1时，由=0得(舍去)

当∈(0，)时＜0；当时， ＞0

故在区间(0，)上单调递减，在区间(，)上单调递增。

综上所述，当时，在区间(0，)上单调递增；

当0＜＜1时，在区间(0，)上单调递减，在区间(，)上单调递增

(II)由(＊)式知。当，0，此时不存在极值点，因而要使得有两个极值点，必有0＜＜1。又的极值点只可能是=和= -，且由的定义可知，＞且—2，所以-＞．

，解得。此时，由(＊)式易知，，分别是的极小值点和极大值点，而

+=()+(1+)

=-

=—=+

令2-1=x,由0＜＜1且知

当0＜＜时,-1＜x＜0; 当＜＜1时。0＜x＜1

记(x)=+-2

1. 当-1＜x＜0时，(x)=2(-x)+ -2，所以

(x)=-=＜0

因此，(x)在区间(-1,0)上单调递减，从而(x)＜(-1)=-4＜0，故当0＜＜时，+＜0

(ii)当0＜x＜1时，(x)=,所以

因此。(x)在区间(0,1)上单调递减，从而．故当＜＜1时，+＞0

综上所述。满足条件的a的取值范围为(，1)

9．(2014高考数学安徽理科·第18题) 设函数，其中．

(Ⅰ)讨论在其定义域上的单调性；

(Ⅱ)当时，求取得最大值和最小值时的的值．

**【答案】**解：(Ⅰ)的定义域为，．

令，得，．

所以．

当或时，，当时，．

故在和内单调递减，在内单调递增．

(Ⅱ)因为，所以，．

①当时，．由(Ⅰ)知，在[0，1]上单调递增．

所以在和处分别取得最小值和最大值．

②当时，． 由(Ⅰ)知，在上单调递增，在上单调递减．

所以在处取得最大值．

又，，

所以当时，在处取得最小值；

当时，在处和处同时取得最小值；

当时，在处取得最小值．

10．(2015高考数学安徽理科·第21题) (本小题满分13分)设函数．

(Ⅰ)讨论函数在内的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值；

(Ⅱ)记，求函数在上的最大值*D*；

(Ⅲ)在(Ⅱ)中，取，求满足时的最大值．

**【答案】**(Ⅰ)极小值为；(Ⅱ)； (Ⅲ)1．

分析：(Ⅰ)将代入为，．

求导得，．因为，所以．按的范围分三种情况进行讨论：①当时，函数单调递增，无极值．②当时，函数单调递减，无极值．③当，在内存在唯一的，使得．时，函数单调递减；时，函数单调递增．因此，，时，函数在处有极小值．

(Ⅱ)当时，依据绝对值不等式可知，从而能够得出函数在上的最大值为．(Ⅲ)当，即，此时，从而．依据式子特征取，则，并且．由此可知，满足条件的最大值为1．

解析：(Ⅰ)，．

，．

因为，所以．

①当时，函数单调递增，无极值．

②当时，函数单调递减，无极值．

③当，在内存在唯一的，使得．

时，函数单调递减；时，函数单调递增．

因此，，时，函数在处有极小值．

(Ⅱ)时，

，

当时，取，等号成立，

当时，取，等号成立，

由此可知，函数在上的最大值为．

(Ⅲ)，即，此时，从而．

取，则，并且．

由此可知，满足条件的最大值为1．

11．(2017年高考数学浙江文理科·第20题) 已知函数

(Ⅰ)求的导函数;

(Ⅱ)求在区间上的取值范围．

**【答案】** (1) (2)  【解析】(1)因为 所以 (2)由 解得或 因为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

又, 所以在区间上的取值范围是． 12．(2017年高考数学山东理科·第20题)已知函数,,其中是自然对数的底数．

(Ⅰ)求曲线在点处的切线方程;

(Ⅱ)令,讨论的单调性并判断有无极值;有极值时,求出极值．

**【答案】**(Ⅰ)． (Ⅱ)详看解答

【分析】(Ⅰ)求导数得斜率说明: 学科网 版权所有,由点斜式写出直线方程．(2)写出函数,求导得到,由于的正负与的取值有关,故可令,通过应用导数研究在的单调性,明确其正负．然后分以下情况讨论极值情况:和． 【解析】(Ⅰ)由题意, 又,所以, 因此 曲线在点处的切线方程为,即． (Ⅱ)由题意得, 因为 , 令则 所以在上单调递增．又 所以当时,,当时, (1)当时, 所以:当时,,单调递减; 当时,,单调递增; 故当时,取得极小值,极小值是; (2)当时, 由 得 , ①当时,, 当时,,单调递增; 当时,,单调递减; 当时,,单调递增． 所以 当时取得极大值． 极大值为, 当时,取到极小值,极小值是 ; ②当时,, 所以 当时,,函数在上单调递增,无极值; ③当时,, 所以 当时,,,单调递增; 当时,,,单调递减; 当时,,,单调递增． 故当时,取得极大值,极大值是; 当时,取得极小值,极小值是 ． 综上所述: 当时,在上单调递减,在上单调递增, 函数有极小值,极小值是; 当时,函数在和和上单调递增,在上单调递减,函数有极大值,也有极小值, 极大值是 极小值是; 当时,函数在上单调递增,无极值; 当时,函数在和上单调递增, 在上单调递减,函数有极大值,也有极小值, 极大值是; 极小值是．

13．(2017年高考数学课标Ⅲ卷理科·第21题)(12分)已知函数．

(1)若，求的值；

(2)设为整数，且对于任意正整数，，求的最小值．

**【答案】**(Ⅰ)学科网 版权所有 ;(Ⅱ)学科网 版权所有 【解析】(Ⅰ), 则,且 当时,,在上单调增,所以时,,不满足题意; 当时, 当时,,则在上单调递减; 当时,,则在上单调递增． ①若,在上单调递增∴当时矛盾 ②若,在上单调递减∴当时矛盾 ③若,在上单调递减,在上单调递增∴满足题意 综上所述． (Ⅱ)当时即 则有当且仅当时等号成立 ∴, 一方面:, 即． 另一方面: 当时, ∵,, ∴的最小值为．

14．(2017年高考数学江苏文理科·第20题)已知函数学科网 版权所有有极值,且导函数学科网 版权所有的极值点是学科网 版权所有的零点．(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)(1)求学科网 版权所有关于学科网 版权所有 的函数关系式,并写出定义域;(2)证明:学科网 版权所有;(3)若学科网 版权所有,学科网 版权所有这两个函数的所有极值之和不小于学科网 版权所有,求学科网 版权所有的取值范围．

**【答案】**(1)学科网 版权所有(2)见解析(3)学科网 版权所有 解析:解:(1)由学科网 版权所有,得学科网 版权所有． 当学科网 版权所有时,学科网 版权所有有极小值学科网 版权所有． 因为学科网 版权所有的极值点是学科网 版权所有的零点． 所以学科网 版权所有,又学科网 版权所有,故学科网 版权所有． 因为学科网 版权所有有极值,故学科网 版权所有有实根,从而学科网 版权所有,即学科网 版权所有． 学科网 版权所有时,学科网 版权所有,故学科网 版权所有在R上是增函数,学科网 版权所有没有极值; 学科网 版权所有时,学科网 版权所有有两个相异的实根学科网 版权所有,学科网 版权所有． 列表如下

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 学科网 版权所有 | 学科网 版权所有 | 学科网 版权所有 | 学科网 版权所有 | 学科网 版权所有 |
| 学科网 版权所有 | + | 0 | – | 0 | + |
| 学科网 版权所有 | 学科网 版权所有 | 极大值 | 学科网 版权所有 | 极小值 | 学科网 版权所有 |

故学科网 版权所有的极值点是学科网 版权所有． 从而学科网 版权所有, 因此学科网 版权所有,定义域为学科网 版权所有． (2)由(1)知, 设,则, 当时,,从而在上单调递增． 因为,所以,故,即． 因此,． (3)由(1)知,学科网 版权所有的极值点是学科网 版权所有,且学科网 版权所有,学科网 版权所有． 从而学科网 版权所有 学科网 版权所有 学科网 版权所有, 记学科网 版权所有,学科网 版权所有所有极值之和为学科网 版权所有, 因为学科网 版权所有的极值为学科网 版权所有,所以学科网 版权所有． 因为,于是学科网 版权所有在学科网 版权所有上单调递减． 因为学科网 版权所有,于是学科网 版权所有≥学科网 版权所有,故学科网 版权所有, 因此,求学科网 版权所有的取值范围为学科网 版权所有．

15．(2017年高考数学北京理科·第19题)已知函数．

(Ⅰ)求曲线在点处的切线方程;

(Ⅱ)求函数在区间上的最大值和最小值．

**【答案】**(Ⅰ);(Ⅱ)最大值;最小值． 【解析】(Ⅰ)根据导数的几何意义,求斜率再代入切线方程公式;(Ⅱ)设,求,根据确定函数的单调性,根据单调减求函数的最大值,可以知道恒成立,所以函数是单调递减函数,根据单调性求最值． 解:(Ⅰ)因为,所以． 又因为,所以曲线在点处的切线方程为． (Ⅱ)设,则, 当时,, 所以在区间上单调递减． 所以对任意有,即, 所以函数在区间上单调递减, 因此在区间上的最大值为,最小值为．

16．(2017年高考数学课标Ⅱ卷理科·第21题)(12分)已知函数且．

(1)求 ；

(2)证明：存在唯一的极大值点，且．

**【答案】**(1)学科网 版权所有；(2)证明略．

【命题意图】本题考查函数的极值，导数的应用．

【基本解法】(1)法一．

由题知：，且 ，

所以：．

即当时，；当时，；

当时，成立．

令，，当时，，

递减，，所以：，即：．所以：；

当时，，

递增，，所以：，即：．所以：；

综上：．

法二．洛必达法则

由题知：，且 ，

所以：．

即当时，；当时，；

当时，成立．

令，．

令，．

当时，,递增，；

所以，递减，．

所以：；

当时，,递减，；

所以，递减，．

所以：；

故．

1. 由(1)知：，．

设，则．

当时，；当时，．

所以在递减，在递增．

又，，，所以在有唯一零点，在有唯一零点1，且当时，；当时，；

当时，．

又，所以是的唯一极大值点．

由得，故．

由得．

因为是在的唯一极大值点，由，得



所以．

17．(2016高考数学天津理科·第20题)设函数，其中．

(Ⅰ)求的单调区间；

(Ⅱ)若存在极值点，且，其中，求证：；

(Ⅲ)设，函数，求证：在区间上的最大值不小于．

**【答案】**(Ⅰ)详见解析 (Ⅱ)详见解析

解析：(Ⅰ) 

①当时，，单调递增；

②当时，令，得或，当变化时，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
|  | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

综上可知,在区间,单调递增,在区间单调递减．

(Ⅱ)由得

∴











(Ⅲ)证明：设在区间上的最大值为，表示两数的最大值．下面分三种情况进行讨论：

(1)当时，，由(1)知，在区间上单调递减，所以在区间上的取值范围为，因此



所以

(2)当时，，由(1)和(2)知，

所以在区间上的取值范围为，因此





(3)当时，，由(1)和(2)可知

，

所以在区间上的取值范围为，因此





综上所述，当时，在区间上的最大值不小于

方法二：欲证在区间上的最大值不小于，只需证在区间上存在，使得即可

①当时，在上单调递减

，成立

②当时，





∵ 

∴

若时，，成立

当时，，成立

18．(2023年全国乙卷理科·第21题)已知函数．

(1)当时，求曲线在点处切线方程；

(2)是否存在*a*，*b*，使得曲线关于直线对称，若存在，求*a*，*b*的值，若不存在，说明理由．

(3)若在存在极值，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)；

(2)存在满足题意，理由见解析．

(3)．

解析：(1)当时，，

则，

据此可得，

函数在处的切线方程为，

即．

(2)

由函数的解析式可得，

函数的定义域满足，即函数的定义域为，

定义域关于直线对称，由题意可得，

由对称性可知，

取可得，

即，则，解得，

经检验满足题意，故．

即存在满足题意．

(3)由函数的解析式可得，

由在区间存在极值点，则在区间上存在变号零点;

令，

则，

令，

在区间存在极值点，等价于在区间上存在变号零点，



当时，，在区间上单调递减，

此时，在区间上无零点，不合题意;

当，时，由于，所以在区间上单调递增，

所以，在区间上单调递增，，

所以在区间上无零点，不符合题意；

当时，由可得，

当时，，单调递减，

当时，，单调递增，

故的最小值为，

令，则，

函数在定义域内单调递增，，

据此可得恒成立，

则，

令，则，

当时，单调递增，

当时，单调递减，

故，即(取等条件为)，

所以，

，且注意到，

根据零点存在性定理可知:在区间上存在唯一零点．

当时，，单调减，

当时，，单调递增，

所以．

令，则，

则函数在上单调递增，在上单调递减，

所以，所以，

所以





，

所以函数在区间上存在变号零点，符合题意．

综合上面可知:实数得取值范围是．

19．(2019·北京·理·第19题)已知函数．

(Ⅰ)求曲线的斜率为1的切线方程；

(Ⅱ)当时，求证：；

(Ⅲ)设，记在区间上的最大值为，当最小时，求*a*的值．

**【答案】**【解析】(Ⅰ)，令得或者．

当时，，此时切线方程为，即；

当时，，此时切线方程为，即；

综上可得所求切线方程为和．

(Ⅱ)设，，令得或者，所以当时，，增函数；当时，，为减函数；当时，，为增函数；而，所以，即；

又，所以，即，综上可得．

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，所以是中的较大者，

若，即时，；

若，即时，；

所以当最小时，，此时．

# 题型四：导数与函数零点问题

1．(2022年高考全国甲卷数学（理）·第21题) 已知函数．

(1)若，求*a*的取值范围；

(2)证明：若有两个零点，则环．

**【答案】**(1) (2)证明见的解析

【解析】(1)的定义域为，



令,得

当单调递减

当单调递增，

若,则,即，所以的取值范围为

(2)由题知,一个零点小于1,一个零点大于1

不妨设

要证,即证

因为,即证

因为,即证

即证

即证

下面证明时，

设，

则



设

所以,而

所以,所以

所以在单调递增

即,所以

令



所以在单调递减

即,所以；

综上, ,所以．

2．(2018年高考数学课标Ⅱ卷（理）·第21题) (12分)

已知函数．

(1)若，证明：当时，；

(2)若在只有一个零点，求．

**【答案】**解析：(1)当时，等价于．

设函数，则．

当时，，所以在单调递减．而，故当时，，即．

(2)设函数．

在只有一个零点当且仅当在只有一个零点．

(i)当时，，没有零点．

(ii)当时，．

当时，；当时，．

所以在单调递减，在单调递增．

故是在的最小值．

①若，即，在没有零点；

②若，即，在只有一个零点；

③若，即，由于，所以在有一个零点．

由(1)知，当时，，所以．

故在有一个零点．因此在有两个零点．

综上，在只有一个零点时，．

3．(2014高考数学四川理科·第21题) 已知函数其中为自然对数的底数．

(Ⅰ)设是函数的导函数，求函数在区间 上的最小值；

(Ⅱ)若，函数在区间内有零点，求学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！的取值范围．

**【答案】**解析：(Ⅰ)由，有．

　　　所以．

　　　因此，当时，．

　　　当时，，所以在上单调递增，

　　　因此在上的最小值是；

　　　当时，，所以在上单调递减，

　　　因此在上的最小值是；

当时，令，得．

所以函数在区间上单调递减，在区间上单调递增，

于是在上的最小值是．

　　　综上所述，

当时，在上的最小值是；

　　　当时，在上的最小值是；

当时，在上的最小值是．

(Ⅱ)设为在区间内的一个零点，则由可知，

在区间上不可能单调递增，也不可能单调递减．

　　　则不可能恒为正，也不可能恒为负．

　　　故在区间内存在零点．

　　　同理在区间内存在零点．

　　　所以在区间内至少有两个零点．

　　　由(Ⅰ)知，当时，在上单调递增，故在内至多有一个零点．

　　　当时，在上单调递减，故在内至多有一个零点．

所以．

此时，在区间上单调递减，在区间上单调递增．

因此，，必有

，．

由，有，有

，．

解得．

当时，在区间内有最小值．

若，则()，

从而在区间单调递增，这与矛盾，所以．

又，，

故此时在和内各只有一个零点和．

由此可知在上单调递增，在上单调递减，在上单调递增．

所以，，

故在内有零点．

综上可知，的取值范围是．

4．(2014高考数学辽宁理科·第21题) (本小题满分12分)

已知函数，．

证明：(1)存在唯一，使；

(2)存在唯一，使，且对(1)中的．

**【答案】**(1)见解析；(2)见解析．

解析:根据题意可得，f′(x)=﹣(1+sinx)(π+2x)﹣2x﹣cosx

(Ⅰ)∵当x∈(0，)时，f′(x)＜0，

∴函数f(x)在(0，)上为减函数，

又f(0)=π﹣＞0，f()=﹣π2-＜0；

∴存在唯一的x0∈(0，)，使f(x0)=0；

(Ⅱ)考虑函数h(x)=﹣4ln(3﹣x)，x∈[，π]，

令t=π﹣x，则x∈[，π]时，t∈[0，]，

记u(t)=h(π﹣t)=﹣4ln(1+t)，

则u′(t)=，

由(Ⅰ)得，当t∈(0，x0)时，u′(t)＜0；

在(0，x0)上u(x)是增函数，又u(0)=0，∴当t∈(，x0]时，u(t)＞0，

∴u(t)在(0，x0]上无零点；

在(x0，)上u(t)是减函数，由u(x0)＞0，u()=﹣4ln2＜0，

∴存在唯一的t1∈(x0，)，使u(t1)=0；

∴存在唯一的t1∈(0，)，使u(t1)=0；

∴存在唯一的x1=π﹣t1∈(，π)，使h(x1)=h(π﹣t1)=u(t1)=0；

∵当x∈(，π)时，1+sinx＞0，∴g(x)=(1+sinx)h(x)与h(x)有相同的零点，

∴存在唯一的x1∈(，π)，使g(x1)=0，

∵x1=π﹣t1，t1＞x0，∴x0+x1＜π．

5．(2015高考数学新课标1理科·第21题) (本小题满分12分)

已知函数

(Ⅰ)当为何值时，轴为曲线 的切线；

(Ⅱ)用 表示中的最小值，设函数 ，讨论零点的个数．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)当或时，由一个零点；当或时，有两个零点；当时，有三个零点．

分析：(Ⅰ)先利用导数的几何意义列出关于切点的方程组，解出切点坐标与对应的值；(Ⅱ)根据对数函数的图像与性质将分为研究的零点个数，若零点不容易求解，则对再分类讨论．

解析：(Ⅰ)设曲线与轴相切于点，则，，即，解得．

因此，当时，轴是曲线的切线．

(Ⅱ)当时，，从而，

∴在(1，+∞)无零点．

当=1时，若，则，,故=1是的零点；若，则，,故=1不是的零点．

当时，，所以只需考虑在(0,1)的零点个数．

(ⅰ)若或，则在(0,1)无零点，故在(0,1)单调，而，，所以当时，在(0，1)有一个零点；当0时，在(0，1)无零点．

(ⅱ)若，则在(0，)单调递减，在(，1)单调递增，故当=时，取的最小值，最小值为=．

①若＞0，即＜＜0，在(0,1)无零点．

②若=0，即，则在(0,1)有唯一零点；

③若＜0，即，由于，，所以当时，在(0,1)有两个零点；当时，在(0,1)有一个零点．…10分

综上，当或时，由一个零点；当或时，有两个零点；当时，有三个零点．

6．(2015高考数学天津理科·第20题) (本小题满分14分))已知函数，其中．

(I)讨论的单调性；

(II)设曲线与轴正半轴的交点为，曲线在点处的切线方程为,求证：对于任意的正实数，都有；

(III)若关于的方程为实数)有两个正实根，求证： ．

**【答案】**(Ⅰ) 当为奇数时，在，上单调递减，在内单调递增；当为偶数时，在上单调递增，在上单调递减． (Ⅱ)见解析； (Ⅲ)见解析．

解析：(Ⅰ)由，可得，其中且，

下面分两种情况讨论：

(1)当为奇数时：

令，解得或，

当变化时，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

所以，在，上单调递减，在内单调递增．

(2)当为偶数时，

当，即时，函数单调递增；

当，即时，函数单调递减．

所以，在上单调递增，在上单调递减．

(Ⅱ)证明：设点的坐标为，则，，曲线在点处的切线方程为，即，令，即，则

由于在上单调递减，故在上单调递减，又因为，所以当时，，当时，，所以在内单调递增，在内单调递减，所以对任意的正实数都有，即对任意的正实数，都有．

(Ⅲ)证明：不妨设，由(Ⅱ)知，设方程的根为，可得

，当时，在上单调递减，又由(Ⅱ)知可得．

类似的，设曲线在原点处的切线方程为，可得，当，

，即对任意，

设方程的根为，可得，因为在上单调递增，且，因此．

由此可得．

因为，所以，故，

所以．

7．(2015高考数学四川理科·第21题) 已知函数，其中．

(1)设是的导函数，评论的单调性；

(2)证明：存在，使得在区间内恒成立，且在内有唯一解．

**【答案】**(1)当时，在区间上单调递增， 在区间上单调递减；当时，在区间上单调递增．(2)详见解析．

解析：(1)由已知，函数的定义域为，

，

所以．

当时，在区间上单调递增，

在区间上单调递减；

当时，在区间上单调递增．

(2)由，解得．

令．

则，．

故存在，使得．

令，．

由知，函数在区间上单调递增．

所以．

即．

当时，有，．

由(1)知，函数在区间上单调递增．

故当时，有，从而；

当时，有，从而；

所以，当时，．

综上所述，存在，使得在区间内恒成立，且在内有唯一解．

考点：本题考查导数的运算、导数在研究函数中的应用、函数的零点等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程、数形结合、分类与整合，化归与转化等数学思想．

8．(2015高考数学江苏文理·第19题) 已知函数．

(1)试讨论的单调性；

(2)若(实数是与无关的常数)，当函数有三个不同的零点时，的取值范围恰好是，求的值．

**【答案】**(1)当时， 在上单调递增；

当时， 在，上单调递增，在上单调递减；

当时， 在，上单调递增，在上单调递减．

(2)

分析(1)先求函数导数，根据导函数零点大小讨论函数单调性，注意需分三种情况讨论，不要忽略相等的情况(2)首先转化条件：函数有三个不同的零点，就是零在极大值与极小值之间，然后研究不等式以及解集情况，令，则当时且当时，因此确定，然后再利用函数因式分解验证满足题意

解析：(1)，令，解得，．

当时，因为()，所以函数在上单调递增；

当时，时，，时，，

所以函数在，上单调递增，在上单调递减；

当时，时，，时，，

所以函数在，上单调递增，在上单调递减．

(2)由(1)知，函数的两个极值为，，则函数有三个

零点等价于，从而或．

又，所以当时，或当时，．

设，因为函数有三个零点时，的取值范围恰好是

，则在上，且在上均恒成立，

从而，且，因此．

此时，，

因函数有三个零点，则有两个异于的不等实根，

所以，且，

解得．

综上．

9．(2017年高考数学新课标Ⅰ卷理科·第21题)已知函数．

(1)讨论的单调性;

(2)若有两个零点,求的取值范围．

**【答案】**(1)详见解析;(2)． 【分析】(1)讨论的单调性,首先进行求导,发现式子特点后要及时进行因式分解,再对按、进行讨论,写出函数的单调区间;(2)根据第(1)问,若,至多有一个零点,若,当时,取得最小值,求出最小值,根据,进行讨论,可知当有个零点,设正整数满足,则,由于,因此在有一个零点,所以的取值范围为． 【解析】(1)的定义域为, (ⅰ)若,则,所以在单调递减． (ⅱ)若,则由得． 当时,;当时, 所以在单调递减,在单调递增． (2)(ⅰ)若,由(1)知,至多有一个零点． (ⅱ)若,由(1)知,当时,取得最小值,最小值为． ①当时,由于,故只有一个零点; ②当时,由于,即,故没有零点; ③当时,,即． 又,故在有一个零点． 设正整数满足,则． 由于,因此在有一个零点． 综上,的取值范围为． 【民间解析】:(1)函数的定义域为,且 注意到 当时,,所以恒成立 此时函数在上单调递减 当,由,由 所以函数在上单调递减,在上单调递增 综上可知 ①时,在上单调递减; ②时,函数在上单调递减,在上单调递增 (2)由(1)可知,时,在上单调递减 此时至多一个零点,不符合题意 当时,函数在上单调递减,在上单调递增 此时函数的最小值为 要使有两个零点,首先必须有即 令,则有,故在上单调递增,而 所以 另一方面取 而,在单调递增 所以函数在上有唯一一个零点,在没有零点 此时当时, 所以,而在上单调递减 所以函数在上没有零点,在上有唯一零点 综上可知当时,函数有两个零点．

10．(2016高考数学课标Ⅰ卷理科·第21题)(本小题满分12分)已知函数有两个零点．

(I)求*a*的取值范围；

(II)设是的两个零点，证明：．

**【答案】** (I)； (II)见解析

【官方解答】(I)由已知得：

①若，那么，只有唯一的零点，不合题意；

②若，则当时，；当时，．

所以在单调递减，在单调递增．

又，，取b满足且，则

，

故存在两个零点．

③设，由得或．

若，则，故当时，，因此在单调递增．

又当时，，所以不存在两个零点．

若，则，故当时

；当时，

因此在单调递减，在单调递增．

又当时，，所以不存在两个零点．

综上的取值范围为．

(II)不妨设．由(I)知

在单调递减

所以，即．

由于，而

所以

设，则

所以当时，，则，故当时，

从而，故．

【民间解答】(I)由已知得：

①若，那么，只有唯一的零点，不合题意；

②若，那么，

所以当时，，单调递增

当时，，单调递减

即：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | ↓ | 极小值 | ↑ |

故在上至多一个零点，在上至多一个零点

由于，，则，

根据零点存在性定理，在上有且仅有一个零点．

而当时，，，

故

则的两根，， 

因为，故当或时，

因此，当且时，

又，根据零点存在性定理，在有且只有一个零点．

此时，在上有且只有两个零点，满足题意．

③若，则，

当时，，，

即，单调递增；

当时，，

即，单调递减；

当时，，，即，单调递增．

即：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 | + |
|  | ↑ | 极大值 | ↓ | 极小值 | ↑ |

而极大值

故当时，在处取到最大值

那么恒成立，即无解

而当时，单调递增，至多一个零点

此时在上至多一个零点，不合题意．

④若，那么

当时，，，即，

单调递增

当时，，，即，单调递增

又在处有意义，故在上单调递增，此时至多一个零点，不合题意．

⑤若，则

当时，，，即，单调递增

当时，，，即，单调递减

当时，，，即，单调递增

即：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  | ↑ | 极大值 | ↓ | 极小值 | ↑ |

故当时，在处取到最大值

那么恒成立，即无解

当时，单调递增，至多一个零点

此时在上至多一个零点，不合题意．

综上所述，当且仅当时符合题意，即的取值范围为．

(II) 由已知得：，不难发现，，

故可整理得：

设，则

那么

当时，，单调递减；

当时，，单调递增．

设，构造代数式：

设，

则，故单调递增，有．

因此，对于任意的，．

由可知、不可能在的同一个单调区间上，不妨设，则必有

令，则有

而，，在上单调递增，因此：

整理得：．

11．(2020年高考课标Ⅲ卷理科·第21题)设函数，曲线在点(，*f*())处的切线与*y*轴垂直．

(1)求*b*．

(2)若有一个绝对值不大于1的零点，证明：所有零点的绝对值都不大于1．

**【答案】**(1)；(2)证明见解析

解析：(1)因为，

由题意，，即

则；

(2)由(1)可得，

，

令，得或；令，得，

所以在上单调递减，在，上单调递增，

且，

若所有零点中存在一个绝对值大于1零点，则或，

即或．

当时，，

又，

由零点存在性定理知在上存在唯一一个零点，

即在上存在唯一一个零点，在上不存在零点，

此时不存在绝对值不大于1的零点，与题设矛盾；

当时，，

又，

由零点存在性定理知在上存在唯一一个零点，

即在上存在唯一一个零点，在上不存在零点，

此时不存在绝对值不大于1的零点，与题设矛盾；

综上，所有零点的绝对值都不大于1．

【点晴】本题主要考查利用导数研究函数的零点，涉及到导数的几何意义，反证法，考查学生逻辑推理能力，是一道有一定难度的题．

12．(2022年高考全国乙卷数学(理)·第21题)已知函数

(1)当时，求曲线在点处切线方程；

(2)若在区间各恰有一个零点，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)

(2)

解析：【小问1详解】

的定义域为

当时,,所以切点为,所以切线斜率为2

所以曲线在点处的切线方程为

【小问2详解】





设

若,当,即

所以在上单调递增,

故在上没有零点,不合题意

若,当,则

所以在上单调递增所以,即

所以在上单调递增,

故在上没有零点,不合题意

若

(1)当,则,所以在上单调递增



所以存在,使得,即

当单调递减

当单调递增

所以

当

当

所以在上有唯一零点

又没有零点,即在上有唯一零点

(2)当

设



所以在单调递增



所以存在,使得

当单调递减

当单调递增,

又

所以存在,使得,即

当单调递增,当单调递减

有

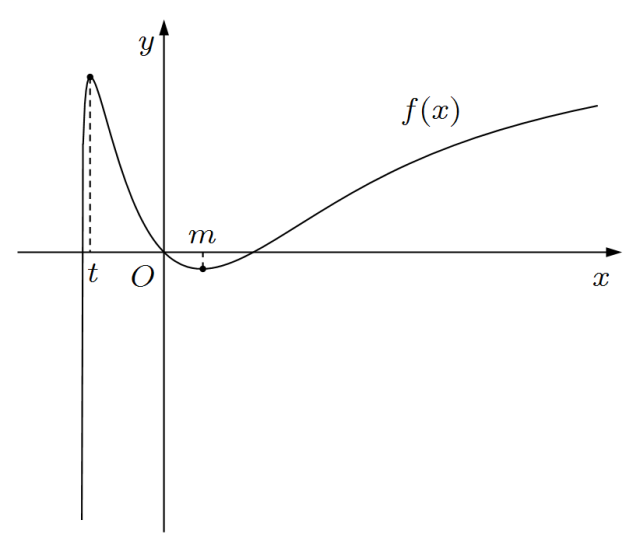
而,所以当

所以在上有唯一零点,上无零点

即在上有唯一零点

所以,符合题意

所以若在区间各恰有一个零点,求的取值范围为



13．(2019·全国Ⅰ·理·第20题)已知函数，为的导数．证明：

(1)在区间存在唯一极大值点；

(2)有且仅有2个零点．

**【答案】**解：(1)设，则，．当时，单调递减，而，可得在有唯一零点，设为．

则当时，；当时，．

所以在单调递增，在单调递减，故在存在唯一极大值点，即在存在唯一极大值点．

(2)的定义域为．

(i)当时，由(1)知，在单调递增，而，所以当时，，故在单调递减，又，从而是在的唯一零点．

(ii)当时，由(1)知，在单调递增，在单调递减，而，，所以存在，使得，且当时，；当时，．故在单调递增，在单调递减．

又，，所以当时，．从而在没有零点．

(iii)当时，，所以在单调递减．而，，所以在有唯一零点．

(iv)当时，，所以<0，从而在没有零点．

综上，有且仅有2个零点．

14．(2019·江苏·第19题)设函数、为的导函数．

(1)若，，求的值；

(2)若，且和的零点均在集合中，求的极小值；

(3)若，且的极大值为，求证:．

**【答案】**见解析

【解析】(1)因为，所以．

因为，所以，解得．

(2)因为，

所以，

从而．令，得或．

因为，都在集合中，且，

所以．

此时，．

令，得或．列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | －3 |  | 1 |  |
|  | + | 0 | – | 0 | + |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

所以的极小值为．

(3)因为，所以，

．

因为，所以，

则有2个不同的零点，设为．

由，得．

列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | + | 0 | – | 0 | + |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

所以的极大值．

解法一：







．因此

解法二：因为，所以

当时，

令，则．

令，得．列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | + | 0 | – |
|  |  | 极大值 |  |

所以当时，取得极大值，且是最大值，故．

所以当时，，因此．

# 题型五：导数与不等式的证明

1．(2022年浙江省高考数学试题·第22题) 设函数．

(1)求的单调区间；

(2)已知，曲线上不同的三点处的切线都经过点．证明：

(ⅰ)若，则；

(ⅱ)若，则．

(注：是自然对数的底数)

**【答案】**解析:(1)，

当，；当，，

故的减区间为，的增区间为．

(2)(ⅰ)因为过有三条不同的切线，设切点为，

故，故方程有3个不同的根，

该方程可整理为，

设，

则

，

当或时，；当时，，

故在上为减函数，在上为增函数，

因为有3个不同的零点，故且，

故且，

整理得到：且，

此时，

设，则，

故为上的减函数，故，

故

(ⅱ)当时，同(ⅰ)中讨论可得：

故在上为减函数，在上为增函数，

不妨设，则，

因为有3个不同的零点，故且，

故且，

整理得到：，

因为，故，

又，

设，，则方程即为：

即为，

记则为有三个不同的根，

设，，

要证：，即证，

即证：，

即证：，

即证：，

而且，

故，

故，

故即证：，

即证：

即证：，

记，则，

设，则即，

故在上为增函数，故，

所以，

记，

则，

所以在为增函数，故，

故即，

故原不等式得证．

2．(2014高考数学大纲理科·第22题) 函数．

(1)讨论的单调性；

(2)设，证明：．

**【答案】**详见解析

解析：(1)的定义域为，

(i)当时，若，则，在上是增函数

若，则，在上是减函数

若，则，在上是增函数

(ii)当时，，成立当且仅当，在上是增函数

(iii)当时，若，则，在上是增函数

若，则，在上是减函数

若，则，在上是增函数

(2)由(1)知，当时， 在上是增函数

当时，则，即．

又由(1)知，当时， 在上是减函数．

当时，则，即．

下面用数学归纳法证明．

(i)当时，由已知，故结论成立；

(ii)设当时结论成立，即．

当时，

成立当且仅当，在上是增函数；

，

，

即当时有，结论成立．

根据(i)、(ii)知对任何结论都成立．

3．(2015高考数学广东理科·第19题) (本小题满分14分)

设，函数．

(1) 求的单调区间 ；

(2) 证明：在上仅有一个零点；

(3) 若曲线在点*P*处的切线与轴平行，且在点处的切线与直线*OP*平行(*O*是坐标原点),证明：．

**【答案】**解析：(1)的定义域为，由导数公式知

∵对任意，都有，∴的单调递增区间为，无减区间。

(2)由(1)知在单调递增，且

而



∴使得，

又∵在是单调函数，∴在上仅有一个零点。

(3)，令，解得

∴点，∴

又∵在处的切线与直线平行，∴

即∴

而要证：

只需证：，而

只需证： ，即只需证：

构造函数则，

令，解得，令，解得

∴在单调递减，在单调递增。

∴，即

∴，得证。

4．(2017年高考数学天津理科·第20题)设,已知定义在上的函数在区间内有一个零点,为的导函数．

(1)求的单调区间;

(2)设,函数,求证:;

(3)求证:存在大于的常数,使得对于任意的正整数,且满足．

**【答案】** (1)所以的单调增区间是;单调减区间是 (2)详见解析(3)详见解析 【解析】(1)由 可得 令 当变化时,变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 增 | 减 | 增 |

所以的单调增区间是;单调减区间是 (2)证明:由  令 由(I)得,当时, 当单调递减 当单调增; ∴当时, 可得即 令 由(I)可知,在上单调递增, 故当时,,单调递增 故当时,,单调递减 当时, 故 (3)对于任意的正整数,且 令 函数 由(II)知,当时,在区间内有零点, 当时,在区间内有零点 故在上至少有一个零点,不妨设为 则 由(I)得在上单调递增,故 于是 ∵当时,故在单调递增,在区间上除外没有其他的零点,而故,而是正整数,所以 是正整数,从而 ,只要取,就有 【考点】导数的运算,利用导数研究函数的性质,证明不等式 【点评】本题综合性较强,导数的运算要熟练,利用导数研究单调性和最值,从而研究不等式等基础知识要熟练运用,另外对于(III)要注意试题设计的整体性原则,从前2问得到的结果或者过程去思考,“取值”,“取点”是目前试题中比较难的一类技巧,也是大学数学分析开始学习过程的难点,多思考,多积累,多总结慢慢获得解题经验． 5．(2021年高考浙江卷·第22题)设*a*，*b*为实数，且，函数

(1)求函数的单调区间；

(2)若对任意，函数有两个不同的零点，求*a*的取值范围；

(3)当时，证明：对任意，函数有两个不同的零点，满足．

(注：是自然对数的底数)

**【答案】**(1)时，在上单调递增；时，函数的单调减区间为，单调增区间为；

(2)；

(3)证明见解析．

解析:(1)，

①若，则，所以在上单调递增；

②若，

当时，单调递减，

当时，单调递增．

综上可得，时，在上单调递增；

时，函数的单调减区间为，单调增区间为．

(2)有2个不同零点有2个不同解有2个不同的解，

令，则，

记，

记，

又，所以时，时，，

则在单调递减，单调递增，，

．

即实数的取值范围是．

(3)有2个不同零点，则，故函数的零点一定为正数．

由(2)可知有2个不同零点，记较大者为，较小者为，，

注意到函数在区间上单调递减，在区间上单调递增，

故，又由知，，

要证，只需，

且关于的函数在上单调递增，

所以只需证，

只需证，

只需证，

，只需证在时为正，

由于，故函数单调递增，

又，故在时为正，

从而题中的不等式得证．

6．(2021年新高考全国Ⅱ卷·第22题)已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)从下面两个条件中选一个，证明：有一个零点

①；

②．

**【答案】**已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)从下面两个条件中选一个，证明：有一个零点

①；

②．

7．(2021年新高考Ⅰ卷·第22题)已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)设，为两个不相等的正数，且，证明：．

**【答案】**解析：(1)函数的定义域为，又，

当时，，当时，，

故的递增区间为，递减区间为．

(2)因为，故，即，故，

设，由(1)可知不妨设．

因为时，，时，，

故．

先证：，

若，必成立．

若， 要证：，即证，而，

故即证，即证：，其中．

设，则，

因为，故，故，

所以，故在为增函数，所以，

故，即成立，所以成立，

综上，成立．

设，则，

结合，可得：，

即：，故，

要证：，即证，即证，

即证：，即证：，

令，则，

先证明一个不等式：．

设，则，

当时，；当时，，

故在上为增函数，在上为减函数，故，故成立

由上述不等式可得当时，，故恒成立，

故在上为减函数，故，

故成立，即成立．

综上所述，．

8．(2022新高考全国II卷·第22题)已知函数．

(1)当时，讨论的单调性；

(2)当时，，求*a*的取值范围；

(3)设，证明：．

**【答案】**(1)的减区间为，增区间为．

(2) (3)见解析

解析:(1)当时，，则，

当时，，当时，，

故的减区间为，增区间为．

(2)设，则，

又，设， 则，

若，则， 因为为连续不间断函数，

故存在，使得，总有，

故在为增函数，故，

故在为增函数，故，与题设矛盾．

若，则，

下证：对任意，总有成立，

证明：设，故，

故在上为减函数，故即成立．

由上述不等式有，

故总成立，即在上为减函数，

所以．

当时，有，

所以在上为减函数，所以．

综上，．

(3)取，则，总有成立，

令，则，

故即对任意的恒成立．

所以对任意的，有，

整理得到：，

故

， 故不等式成立．

9．(2021年高考全国乙卷理科·第20题)设函数，已知是函数的极值点．

(1)求*a*；

(2)设函数．证明:．

**【答案】**；证明见详解

解析：(1)由，，

又是函数的极值点，所以，解得；

(2)由(1)得，，且，

当 时，要证，， ，即证，化简得；

同理，当时，要证，， ，即证，化简得；

令，再令，则，，

令，，

当时，，单减，假设能取到，则，故；

当时，，单增，假设能取到，则，故；

综上所述，在恒成立

【点睛】本题为难题，根据极值点处导数为0可求参数，第二问解法并不唯一，分类讨论对函数进行等价转化的过程，一定要注意转化前后的等价性问题，构造函数和换元法也常常用于解决复杂函数的最值与恒成立问题．

# 题型六：导数与其他知识的交汇题型

1．(2022新高考全国I卷·第22题) 已知函数和有相同的最小值．

(1)求*a*；

(2)证明：存在直线，其与两条曲线和共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列．

**【答案】**(1)

(2)见解析

解析：(1)的定义域为，而，

若，则，此时无最小值，故．

的定义域为，而．

当时，，故在上为减函数，

当时，，故在上为增函数，

故．

当时，，故在上为减函数，

当时，，故在上为增函数，

故．

因为和有相同的最小值，

故，整理得到，其中，

设，则，

故为上的减函数，而，

故的唯一解为，故的解为．

综上，．

(2)由(1)可得和的最小值为．

当时，考虑的解的个数、的解的个数．

设，，

当时，，当时，，

故在上为减函数，在上为增函数，

所以，

而，，

设，其中，则，

故在上为增函数，故，

故，故有两个不同的零点，即的解的个数为2．

设，，

当时，，当时，，

故在上为减函数，在上为增函数，

所以，

而，，

有两个不同的零点即的解的个数为2．

当，由(1)讨论可得、仅有一个零点，

当时，由(1)讨论可得、均无零点，

故若存在直线与曲线、有三个不同的交点，

则．

设，其中，故，

设，，则，

故在上为增函数，故即，

所以，所以在上为增函数，

而，，

故在上有且只有一个零点，且：

当时，即即，

当时，即即，

因此若存在直线与曲线、有三个不同的交点，

故，

此时有两个不同的零点，

此时有两个不同的零点，

故，，，

所以即即，

故为方程的解，同理也为方程的解

又可化为即即，

故为方程的解，同理也为方程的解，

所以，而，

故即．

2．(2015高考数学湖南理科·第23题) 已知，函数．记为的从小到大的第个极值点．证明：

(1)数列是等比数列;

(2)若，则对一切，恒成立．

**【答案】**(1)详见解析；(2)详见解析．

分析：(1)求导，可知，利

用三角函数的知识可求得的极值点为，即可得证；(2)分析题意可知，问题等

价于恒成立，构造函数，利用导数判断其单调性即可得证．

解析：(1)

其中，，令，由得，即，，

对，若，即，则，

若，即，则，

因此，在区间与上，的符号总相反，于是

当时，取得极值，∴，

此时，，易知，而

是非零常数，故数列是首项为，公比为的等比数列；(2)由(1)知，，于是对一切，|恒成立，即恒成立，等价于()恒成立(∵)，

设，则，令，得，

当时，，∴在区间上单调递减；

当时，，∴在区间上单调递增，

从而当时，函数取得最小值，因此，要是()式恒成立，只需，即只需，而当时，，且，于是

，且当时，，因此对一切，，∴，故()式亦恒成立．

综上所述，若，则对一切，恒成立．

3．(2015高考数学湖北理科·第22题) (本小题满分14分)已知数列的各项均为正数，，为自然对数的底数．

(Ⅰ)求函数的单调区间，并比较与的大小；

(Ⅱ)计算，，，由此推测计算的公式，并给出证明；

(Ⅲ)令，数列，的前项和分别记为,, 证明：．

**【答案】**解析：(Ⅰ)的定义域为，．

当，即时，单调递增；

当，即时，单调递减．

故的单调递增区间为，单调递减区间为．

当时，，即．

令，得，即． ①

(Ⅱ)；；

．

由此推测：  ②

下面用数学归纳法证明②．

(1)当时，左边右边，②成立．

(2)假设当时，②成立，即．

当时，，

由归纳假设可得．

所以当时，②也成立．

根据(1)(2)，可知②对一切正整数都成立．

(Ⅲ)由的定义，②，算术-几何平均不等式，的定义及①得













．

即．

4．(2015高考数学广东理科·第21题) (本小题满分14分)

数列满足 , ．

(1) 求的值；

(2) 求数列前项和；

(3) 令，，证明：数列的前项和满足．

**【答案】**解析：(1)依据题意

(2)当时，，



两式相减，得：

又也适合此式，∴．

所以数列是首项为1，公比为的等比数列，故

(3)成立







…………………………



将以上各式相加，得：



构造函数则．

令，得：，令，得：

在上递增，在上递减。

(当且仅当时取等号)





即

5．(2023年天津卷·第20题)已知函数．

(1)求曲线在处切线的斜率；

(2)当时，证明：；

(3)证明：．

**【答案】**(1)

(2)证明见解析 (3)证明见解析

解析：(1)，则，

所以，故处的切线斜率为；

(2)要证时，即证，

令且，则，

所以在上递增，则，即．

所以时．

(3)设，，

则，

由(2)知：，则，

所以，故在上递减，故；

下证，

令且，则，

当时，递增，当时，递减，

所以，故在上恒成立，

则，

所以，，…，，

累加得：，而，

因为，所以，

则，

所以，故；

综上，，即

6．(2023年新课标全国Ⅰ卷·第19题)已知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)证明：当时，．

**【答案】**(1)答案见解析

(2)证明见解析

解析：(1)因为，定义域为，所以，

当时，由于，则，故恒成立，

所以在上单调递减；

当时，令，解得，

当时，，则在上单调递减；

当时，，则在上单调递增；

综上：当时，在上单调递减；

当时，在上单调递减，在上单调递增．

(2)方法一：

由(1)得，，

要证，即证，即证恒成立，

令，则，

令，则；令，则；

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以，则恒成立，

所以当时，恒成立，证毕．

方法二：

令，则，

由于在上单调递增，所以在上单调递增，

又，

所以当时，；当时，；

所以在上单调递减，在上单调递增，

故，则，当且仅当时，等号成立，

因为，

当且仅当，即时，等号成立，

所以要证，即证，即证，

令，则，

令，则；令，则；

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以，则恒成立，

所以当时，恒成立，证毕．

7．(2018年高考数学江苏卷·第19题)(本小题满分16分)记分别为函数的导函数．若存在，满足且，则称为函数与的一个“*S*点”．

(1)证明：函数与不存在“*S*点”；

(2)若函数与存在“*S*点”，求实数*a*的值；

(3)已知函数，．对任意，判断是否存在，使函数与在区间内存在“*S*点”，并说明理由．

**【答案】**(1)证明见解析(2)*a*的值为．

(3)对任意*a*>0，存在*b*>0，使函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在区间(0，+∞)内存在“*S*点”．

解析：(1)函数*f*(*x*)=*x*，*g*(*x*)=*x*2+2*x*-2，则*f*′(*x*)=1，*g*′(*x*)=2*x*+2．

由*f*(*x*)= *g*(*x*)且*f*′(*x*)= *g*′(*x*)，得

，此方程组无解，因此，*f*(*x*)与*g*(*x*)不存在“*S*”点．

(2)函数，，则，，

设*x*0为*f*(*x*)与*g*(*x*)的“*S*”点，由*f*(*x*0)与*g*(*x*0)且*f*′(*x*0)与*g*′(*x*0)，得

，即，(\*)

解得，即，则，

当时，，满足方程组(\*)，即为*f*(*x*)与*g*(*x*)的“*S*”点．

因此，*a*的值为．

(3)对任意*a*>0，设，

因为，，且*h*(*x*)的图象是不间断的，

所以存在，使得，令，则*b*>0．

函数，，则，，

由*f*(*x*)= *g*(*x*)且*f*′(*x*)= *g*′(*x*)，得

，即(\*\*)，

此时满足方程组(\*\*)，即是函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在区间(0，1)内的一个“*S*点”．

因此，对任意*a*>0，存在*b*>0，使函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在区间(0，+∞)内存在“*S*点”．

# 题型七：利用导数研究恒成立、能成立问题

1．(2023年全国甲卷理科·第21题)已知函数

(1)当时，讨论单调性；

(2)若恒成立，求*a*的取值范围．

**【答案】**(1)答案见解析．

(2)

解析：(1)





令,则

则

当

当,即．

当,即．

所以在上单调递增,在上单调递减

(2)设

设



所以．

若,

即在上单调递减,所以．

所以当,符合题意．

若

当,所以．

．

所以,使得,即,使得．

当,即当单调递增．

所以当,不合题意．

综上,的取值范围为．

2．(2014高考数学浙江理科·第22题) 已知函数

(1)若在上的最大值和最小值分别记为，求；

(2)设若对恒成立，求的取值范围．

**【答案】**解析：(I)因为，所以，由于，

(i)当时，有，故，此时在上是增函数，因此，，

(ii)当时，若，，在上是增函数，，若，，在上是减函数，所以，，由于，因此，当时，，当时，，

(iii)当时，有，故，此时在上是减函数，因此，，故，综上；

(II)令，则，，因为，对恒成立，即对恒成立，所以由(I)知，

(i)当时，在上是增函数，在上的最大值是，最小值是，则，且，矛盾；

(ii)当时，在上的最大值是，最小值是，所以，，从而且，令，则，在上是增函数，故，因此，

(iii)当时，在上的最大值是，最小值是，所以，，解得，

(iv)当时，在上的最大值是，最小值是，所以，，解得，综上的取值范围．

3．(2014高考数学陕西理科·第23题) 设函数，其中是的导函数．

⑴，求的表达式；

⑵若恒成立，求实数的取值范围；

⑶设，比较与的大小，并加以证明．

**【答案】**(1)；(2)；(3)详见解析．

解析：由题设得，()．

⑴由已知，，，

，…，可得．

下面用数学归纳法证明．

①当时，，结论成立．

②假设当时结论成立，即．

那么当时，

，

即结论成立．

由①②可知，结论对成立．

⑵已知恒成立，即恒成立．

设()，

则，

当时，(仅当，时等号成立)，

∴在上单调递增，又

∴在上恒成立，

∴时，恒成立(仅当时等号成立)，

当时，对恒有，∴在上单调递减，

∴．

即时，存在，使，故知不恒成立，

综上可知，的取值范围是．

⑶由题设知，

，

比较结果为．

证明如下：

**证法一**  上述不等式等价于，

在⑵中取，可得，．令，，则．

下面用数学归纳法证明．

①当时，，结论成立．

②假设当时结论成立，即．

那么当时，，

即结论成立．

由①②可知，结论对成立．

**证法二** 上述不等式等价于，

在⑵中取，可得，．

令，，则．

故有，

，

…

，

上述各式相加可得，

*O*



*n*

*x*

*y*

1

2

3



…



结论得证．

**证法三** 如图，是由曲线，及轴所围成的曲边梯形的面积，而是图中所示各矩形的面积和，

∴，

结论得证．

4．(2014高考数学福建理科·第20题) (本小题满分14分)

已知函数(为常数)的图像与轴交于点，曲线在点处的切线斜率为．

(1)求的值及函数的极值；

(2)证明：当时，；

(3)证明：对任意给定的正数，总存在，使得当，恒有．

**【答案】**解析： (I)由得．

又，得．所以得．

令得．

当时，，单调递减；当时，，单调递增．

所以当时，取得极小值，且极小值为，无极大值．

(II)令，则．

由(I)得，故在上单调递增，又，

因此，当时，，即．

(III) 解法一：①若，则．又由(II)知，当时，．

所以当时，．

取，当时，恒有．

②若，令，要使不等式成立，只要成立．

而要使成立，则只要，只要成立．

令，则，

所以当时，，在内单调递增．

取，所以在内单调递增．

又．

易知，，，所以．

即存在，当时，恒有．

综上，对任意给定的正数，总存在，当时，恒有．

解法二：对任意给定的正数，取．

由(II)知，当时，，所以．

当时，．

因此，对任意给定的正数，总存在，当时，恒有．

解法三：首先证明当时，恒有．

证明如下：

令，则．

由(II)知，当时，．

从而，在单调递减

所以，即．

取，当时，有．

因此，对任意给定的正数，总存在，当时，恒有．

5．(2014高考数学北京理科·第18题) 已知, 

(1)求证：

(2)在上恒成立，求*a*的最大值与*b*的最小值

**【答案】**解析：(Ⅰ)由得

．

因为在区间上所以在区间上单调递减．

从而．

(Ⅱ)当时,“”等价于“”；“”等价于“”．

令,则．

当时,对任意恒成立．

当时,因为对任意,,所以在区间上单调递减．从而对任意恒成立．

当时,存在惟一的使得．

与在区间上的情况如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | - |
|  | ↗ |  | ↘ |

因为在区间上是增函数,所以．进一步,“对任意恒成立”当且仅当即．

综上所述,当且仅当时,对任意恒成立；当且仅当时,对任意恒成立．

所以,若对任意恒成立,则的最大值为,的最小值为．

6．(2015高考数学新课标2理科·第21题) (本题满分12分)设函数．

(Ⅰ)证明：在单调递减，在单调递增；

(Ⅱ)若对于任意，都有，求的取值范围．

**【答案】**(Ⅰ)详见解析；(Ⅱ)．

解析：(Ⅰ)．

若，则当时，，；当时，，．

若，则当时，，；当时，，．

所以，在单调递减，在单调递增．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，对任意的，在单调递减，在单调递增，故在处取得最小值．所以对于任意，的充要条件是：即①，设函数，则．当时，；当时，．故在单调递减，在单调递增．又，，故当时，．当时，，，即①式成立．当时，由的单调性，，即；当时，，即．综上，的取值范围是．

7．(2015高考数学山东理科·第21题) 设函数，其中．

(Ⅰ)讨论函数极值点的个数，并说明理由；

(Ⅱ)若成立，求的取值范围．

**【答案】**(Ⅰ)当 时，函数在上有唯一极值点；

当时，函数在上无极值点；

当时，函数在上有两个极值点；

(Ⅱ)的取值范围是．

分析：(Ⅰ)先求，令

通过对 的取值的讨论，结合二次函数的知识，由导数的符号得到函数 的单调区间；(Ⅱ)根据(1)的结果这一特殊性，通过对参数的讨论确定的取值范围．

解析：函数的定义域为



令，

(1)当 时， ， 在上恒成立

所以，函数在上单调递增无极值；

(2)当 时， 

①当时， ，

所以，，函数在上单调递增无极值；

②当 时，

设方程的两根为

因为

所以，

由可得：

所以，当时， ，函数单调递增；

当时， ，函数单调递减；

当时， ，函数单调递增；

因此函数有两个极值点．

(3)当 时，

由可得：

当时， ，函数单调递增；

当时， ，函数单调递减；

因此函数有一个极值点．

综上：

当 时，函数在上有唯一极值点；

当时，函数在上无极值点；

当时，函数在上有两个极值点；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，

(1)当时，函数在上单调递增，

因为

所以，时， ，符合题意；

(2)当 时，由 ，得

所以，函数在上单调递增，

又，所以，时， ，符合题意；

(3)当 时，由 ，可得

所以 时，函数 单调递减；

又

所以，当时， 不符合题意；

(4)当时，设

因为时，

所以 在 上单调递增，

因此当时，

即：

可得：

当 时，

此时， 不合题意．

综上所述，的取值范围是

8．(2015高考数学北京理科·第18题) (本小题13分)已知函数．

(Ⅰ)求曲线在点处的切线方程；

(Ⅱ)求证：当时，；

(Ⅲ)设实数使得对恒成立，求的最大值．

**【答案】**(Ⅰ)，(Ⅱ)证明见解析，(Ⅲ)的最大值为2．

分析：利用导数的几何意义，求出函数在处的函数值及导数值，再用直线方程的点斜式写出直线方程；第二步要证明不等式在成立，可用作差法构造函数，利用导数研究函数在区间(0，1)上的单调性，由于，在(0，1)上为增函数，则，问题得证；第三步与第二步方法类似，构造函数研究函数单调性，但需要对参数作讨论，首先符合题意，其次当时，不满足题意舍去，得出的最大值为2．

解析：(Ⅰ)，曲线在点处的切线方程为；

(Ⅱ)当时，，即不等式，对成立，设，则，当时，，故在(0，1)上为增函数，则，因此对，成立；

(Ⅲ)使成立，，等价于，；，

当时，，函数在(0，1)上位增函数，，符合题意；

当时，令，

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | - | 0 | + |
|  |  | 极小值 |  |

，显然不成立，

综上所述可知：的最大值为2．

9．(2016高考数学四川理科·第21题)设函数，其中．

(1)讨论的单调性；

(2)确定的所有可能取值，使得在区间内恒成立，(为自然对数的底数)

**【答案】**【官方解答】

(1)令

当时，，则

所以在单调递减；

当时，

综上所述当时，在单调递减；

当时，在单调递减；在单调递增

(2)令，

则，而当时，，所以在区间单调递增，

又由，有，从而当时，

当时，

故当在区间内恒成立。必有

当时，，由(1)有，

所以此时故当在区间内不恒成立

当时，，令

当时，

因此，所以当时，，即恒成立

综上，．

【民间解析】函数的定义域为，

(1)令

当时，，则

所以在单调递减；

当时，，则

所以在单调递减；

当时，

综上所述当时，在单调递减；

当时， 在单调递减；在单调递增

(2)令，且



当时，恒成立，在为减函数，

所以不成立

当时，

时，，所以存在，

，，则在单调递减

所以时，，所以不满足

当时，



所以在单调递增，所以

所以在单调递增，所以，满足题意

所以的取值为

(2)法二：要使在区间内恒成立，

即在区间内恒成立

令，且

要使在区间内恒成立，只需保证在单调递增

在内恒成立

由



当 时，，设

则，易知是为增函数，

所以时，，所以在单调递增

所以，当时，

所以当时，在在单调递增，所以

所以要使在区间内恒成立，的取值为．

10．(2016高考数学山东理科·第20题)(本小题满分13分)已知．

(I)讨论的单调性；

(II)当时，证明对于任意的成立．

**【答案】**【解析】(Ⅰ)的定义域为；．

当， 时，，单调递增；时，，单调递减．

当时，．

(1)，，

当或时，，单调递增；

当时，，单调递减；

(2)时，，在内，，单调递增；

(3)时，，

当或时，，单调递增；

当时，，单调递减．

综上所述，

当时，函数在内单调递增，在内单调递减；

当时，在内单调递增，在内单调递减，在 内单调递增；

当时，在内单调递增；

当，在内单调递增，在内单调递减，在内单调递增．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，时，

，，

令，．

则，由可得，当且仅当时取得等号．

又，设，则在单调递减，

因为=-10,所以在上存在使得时，时，,

所以函数在上单调递增；在上单调递减，

由于,因此,当且仅当时取等号，

所以即对任意的恒成立．

11．(2015高考数学福建理科·第20题)已知函数，

(Ⅰ)证明：当；

(Ⅱ)证明：当时，存在,使得对

(Ⅲ)确定*k*的所以可能取值，使得存在，对任意的恒有．

**【答案】**(Ⅰ)详见解析；(Ⅱ)详见解析；(Ⅲ)．

解析：解法一：(1)令则有

当 ,所以在上单调递减；

故当时，即当时，．

(2)令则有

当 ,所以在上单调递增, 

故对任意正实数均满足题意．

当时，令得．

取对任意恒有,所以在上单调递增, ,即．

综上，当时，总存在,使得对任意的恒有．

(3)当时，由(1)知，对于故，

，

令，则有

故当时，,在上单调递增，故,即,所以满足题意的t不存在．

当时，由(2)知存在,使得对任意的任意的恒有．

此时,

令，则有

故当时，,在上单调递增，故,即,记与中较小的为，

则当，故满足题意的t不存在．

当，由(1)知，，

令，则有

当时，,所以在上单调递减，故,

故当时，恒有,此时，任意实数t满足题意．

综上，．

解法二：(1)(2)同解法一．

(3)当时，由(1)知，对于，

故，

令，

从而得到当时，恒有,所以满足题意的t不存在．

当时，取

由(2)知存在,使得．

此时,

令，此时 ,

记与中较小的为，则当，

故满足题意的t不存在．

当，由(1)知，，

令，则有

当时，,所以在上单调递减，故,

故当时，恒有,此时，任意实数t满足题意．

综上，．

# 题型八：导数的综合应用

1．(2014高考数学课标2理科·第21题) (本小题满分12分)

已知函数=．

(Ⅰ)讨论的单调性；

(Ⅱ)设，当时，, 求的最大值；

(Ⅲ)已知，估计ln2的近似值(精确到0．001)

**【答案】**解析：

(Ⅰ)，等号仅当时成立

所以在上单调递增．

(Ⅱ)







当时，，等号仅当时成立，所以在上单调递增，而，故．

当时，若满足，即时，，而，故，．

综上的最大值为2．

(Ⅲ)由(2)知，

当时，，得

当时，

，得

所以

2．(2014高考数学湖北理科·第22题) 为圆周率，为自然对数的底数．

(Ⅰ)求函数的单调区间；

(Ⅱ)求，，，，，这6个数中的最大数与最小数；

(Ⅲ)将，，，，，这6个数按从小到大的顺序排列，并证明你的结论．

**【答案】**(1)详见解析；(2)详见解析；(3)详见解析．

解析：(1)函数的定义域为．因为，所以．

当，即时，函数单调递增；

当，即时，函数单调递减．

故的单调递增区间为；单调递减区间为．

(2)因为，所以，，即，．

于是根据函数在定义域上单调递增，可得，

，故这6个数中最大数在与之中，最小数在与之中．

由及(1)的结论，得，即．

由，得，所以．由，得，所以

．综上6个数中最大的数是，最小的数是．

(3)由(2)知，，；又由(2)知，，得．

故只需比较与和与的大小．

由(1)知，当时，，即．

在上式中，令，又．则，从而，

即得 ①

由①得，，

即，所以，又由①得，，即，

所以．

综上可得，，即个数从小到大排序为：．

3．(2014高考数学江苏·第19题) 已知函数，其中*e*是自然对数的底数．

(1)证明：是R上的偶函数；

(2)若关于的不等式≤在上恒成立，求实数的取值范围；

(3)已知正数满足：存在，使得成立． 试比较与的大小，并证明你的结论．

**【答案】**(2) ；(3) 当时，，当时，，当时，．

解析：(1)因为对任意，都有，

所以是**R**上的偶函数．

(2) 解法一：由条件知上恒成立．

令，则，所以对于任意成立．

因为，所以，

当且仅当，即时等号成立．

因此实数*m*的取值范围是．

解法二：考虑不等式两边同乘，则不等式转化为在上恒成立．

令，则问题可简化为：在上恒成立．

构造函数，由图象易得当时不符合题意．

当时，或解得．

综上可知，实数的取值范围为．

(3)解法一： 令函数，则．

当时，，，又，故，

所以是上的单调增函数，

因此在上的最小值是．

由于存在，使成立，当且仅当最小值，

故，即．

令函数，则，令，得．

当时，，故是上的单调减函数．

当时，，故是上的单调增函数．

所以在上的最小值时．

注意到，所以当时，．

当时，，所以对任意的成立．

①当时，，即，从而；

②当时，；

③当时，，即，故．

综上所述，当时，，当时，，当时，．

解法二：要比较与的大小，由于，那么，

故只要比较与的大小．

令，那么．

当时，；当时，．

所以在区间上，为增函数；在区间上，为减函数．

又，，则，；

那么当时，，，；

当时，，，．

综上所述，当时，；当时，；当时，．

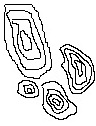
4．(2015高考数学江苏文理·第17题) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路，为进一步改善山区的交通现状，计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路．记两条相互垂直的公路为，山区边界曲线为，计划修建的公路为．如图所示，为的两个端点，测得点到的距离分别为5千米和40千米，点到的距离分别为20千米和2．5千米，以所在的直线分别为轴，建立平面直角坐标系．假设曲线符合函数(其中为常数)模型．

(1)求的值；

(2)设公路与曲线相切于点,的横坐标为．

①请写出公路长度的函数解析式，并写出其定义域；

②当为何值时，公路的长度最短？求出最短长度．















*O*

*C*





**【答案】**(1)(2)①定义域为，②千米

分析(1)由题意得函数过点，列方程组就可解出a，b的值(2)①求公路l长度的函数解析式，就是求出直线l与x,y轴交点，再利用两点间距离公式计算即可，关键是利用导数几何意义求出直线l方程，再根据M，N为C的两个端点的限制条件得定义域为②对函数解析式解析式根式内部分单独求导求最值，注意列表说明函数变化趋势．

解析：(1)由题意知，点，的坐标分别为，．

将其分别代入，得，解得．

(2)①由(1)知，()，则点的坐标为，

设在点处的切线交，轴分别于，点，，

则的方程为，由此得，．

故，．

②设，则．令，解得．

当时，，是减函数；

当时，，是增函数．

从而，当时，函数有极小值，也是最小值，所以，

此时．

答：当时，公路的长度最短，最短长度为千米．

5．(2020年高考课标Ⅱ卷理科·第21题)已知函数*f*(*x*)=sin2*x*sin2*x*．

(1)讨论*f*(*x*)在区间(0，*π*)的单调性；

(2)证明：；

(3)设*n*∈*N*\*，证明：sin2*x*sin22*x*sin24*x*…sin22*nx*≤

**【答案】**(1)当时，单调递增，当时，单调递减，当时，单调递增．(2)证明见解析；(3)证明见解析．

解析：(1)由函数的解析式可得：，则：



，

在上的根为：，

当时，单调递增，

当时，单调递减，

当时，单调递增

(2)注意到，

故函数是周期为的函数，

结合(1)的结论，计算可得：，

，，

据此可得：，，

即．

(3)结合(2)的结论有：









．

6．(2020天津高考·第20题)已知函数，为的导函数．

(Ⅰ)当时，

(i)求曲线在点处的切线方程；

(ii)求函数的单调区间和极值；

(Ⅱ)当时，求证：对任意的，且，有．

**【答案】**(Ⅰ)(i)；(ii)的极小值为，无极大值；(Ⅱ)证明见解析．

【解析】(Ⅰ)(i)当时，，．可得，，

所以曲线在点处的切线方程为，即．

(ii)依题意，．

从而可得，整理可得：，

令，解得．当变化时，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

所以，函数的单调递减区间为，单调递增区间为；

的极小值为，无极大值．

(Ⅱ)证明：由，得．

对任意的，且，令，则







． ①

令．

当时，，

由此可得在单调递增，所以当时，，即．

因为，，，

所以

． ②

由(Ⅰ)(ii)可知，当时，，即，

故 ③

由①②③可得．

所以，当时，任意的，且，有

．

7．(2019·浙江·第22题)已知实数，设函数，．

(Ⅰ)当时，求函数的单调区间；

(Ⅱ)对任意均有，求的取值范围．

注：为自然对数的底数．

**【答案】**【意图】本题主要考查函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分15分。

【解析】(Ⅰ)当时，，



所以，函数的单调递减区间为，单调递增区间为

(Ⅱ)由，得

当时，，等价于

令，则

设，

则

(ⅰ)当时，

则

记，

则



列表讨论：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  |
|  |  |  | 0 |  |
|  |  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

(1)



当时，

令，

则，

故在上单调递增，，

由得

，，

由知对任意，，，

即对任意，均有，

综上所述，所求的的取值范围是．

8．(2019·天津·理·第20题)设函数为的导函数．

(Ⅰ)求的单调区间；

(Ⅱ)当时，证明；

(Ⅲ)设为函数在区间内的零点，其中，证明．

**【答案】**本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和化归与转化思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分14分．

(Ⅰ)解：由已知，有．

因此，当时，有，得，则单调递减；

当时，有，得，则单调递增．

所以，的单调递增区间为，

的单调递减区间为．

(Ⅱ)证明：记．依题意及(Ⅰ)，有，

从而．当时，，故

．

因此，在区间上单调递减，进而．

所以，当时，．

(Ⅲ)证明：依题意，，即．记，则，

且．

由及(Ⅰ)，得．由(Ⅱ)知，当时，，所以在上为减函数，因此．又由(Ⅱ)知，，故．

所以，．