2024年1月普通高等学校招生全国统一考试适应性测试(九省联考)数学试题

一、单选题

1.(2024·九省适应性测试)样本数据16,24,14,10,20,30,12,14,40的中位数为(　　).

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

2.(2024·九省适应性测试)若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的离心率为$\frac{1}{2}$,则$a=$(　　).

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3.(2024·九省适应性测试)记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_3+a_7=6$,$a_{12}=17$,则$S_{16}=$(　　).

A. 120　　B. 140　　C. 160　　D. 180

4.(2024·九省适应性测试)设α,β是两个平面,m,l是两条直线,则下列命题为真命题的是(　　).

A. 若$\alpha\perp\beta$,$m/\!/\alpha$,$l/\!/\beta$,则$m\perp l$

B. 若$m\subset\alpha$,$l\subset\beta$,$m/\!/l$,则$\alpha/\!/\beta$

C. 若$\alpha\cap\beta=m$,$l/\!/\alpha$,$l/\!/\beta$,则$m/\!/l$

D. 若$m\perp\alpha$,$l\perp\beta$,$m/\!/l$,则$\alpha\perp\beta$

5.(2024·九省适应性测试)若甲、乙、丙等5人排成一列,且甲不在两端,乙和丙之间恰有2人,则不同的排法共有(　　).

A. 20种　　B. 16种　　C. 12种　　D. 8种

6.(2024·九省适应性测试)已知Q为直线$l:x+2y+1=0$上的动点,点P满足$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$,记$P$的轨迹为$E$,则(　　).

A. E是一个半径为$\sqrt{5}$的圆

B. E是一条与l相交的直线

C. E上的点到l的距离均为$\sqrt{5}$

D. E是两条平行直线

7.(2024·九省适应性测试)已知$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,则$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

8.(2024·九省适应性测试)设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,过坐标原点的直线与$C$的左、右支分别交于$A,B$两点,$|F_1B|=2|F_1A|$,$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$,则$C$的离心率为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

二、多选题

9.(多选题)(2024·九省适应性测试)已知函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$,则(　　).

A. 函数$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$为偶函数

B. 曲线$y=f(x)$的对称轴为直线$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

C. $f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

D. $f(x)$的最小值为-2

10.(多选题)(2024·九省适应性测试)已知复数z,w均不为0,则(　　).

A. $z^2=|z|^2$　　B. $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$　　D. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

11.(多选题)(2024·九省适应性测试)已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$,若$f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$,则(　　).

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是偶函数

D. 函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数

三、填空题

12.(2024·九省适应性测试)已知集合$A=\{-2,0,2,4\}$,$B=\{x\,|\,|x-3|\leqslant m\}$,若$A\cap B=A$,则$m$的最小值为________.

13.(双空题)(2024·九省适应性测试)已知轴截面为正三角形的圆锥MM'的高与球O的直径相等,则圆锥MM'的体积与球O的体积的比值是________,圆锥MM'的表面积与球O的表面积的比值是________.

14.(2024·九省适应性测试)以$\max M$表示数集M中

最大的数.设 $0<a<b<c<1$,已知 $b\geqslant 2a$ 或 $a+b\leqslant 1$,则 $\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为________.

四、解答题

15.(2024·九省适应性测试)已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点$(2,f(2))$处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直.

(1)求 a;

(2)求 $f(x)$的单调区间和极值.

16.(2024·九省适应性测试)盒中有标记了数字 1,2,3,4 的小球各 2 个,随机取出 3 个小球.

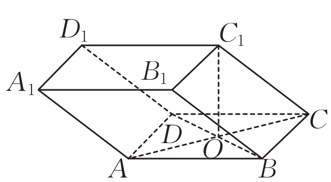
(1)求取出的 3 个小球上的数字两两不同的概率;

(2)记取出的 3 个小球上的最小数字为 X,求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17.(2024·九省适应性测试)如图,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,O 为 AC 与 BD 的交点,$AA_1=2$,$\angle C_1CB=\angle C_1CD$,$\angle C_1CO=45°$.

(1)证明:$C_1O\perp$平面 $ABCD$.

(2)求二面角 $B\text{-}AA_1\text{-}D$ 的正弦值.



18.(2024·九省适应性测试)已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,过 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点,过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D,E 两点,其中 B,D 在 x 轴上方,M,N 分别为 AB,DE 的中点.

(1)证明:直线 MN 过定点.

(2)设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点,求$\triangle GMN$面积的最小值.

19.(2024·九省适应性测试)离散对数在密码学中有重要的应用.设 p 是素数,集合 $X=\{1,2,\cdots,p-1\}$,若 $u,v\in X$,$m\in\mathbf{N}$,记 $u\otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数,$u^{m,\otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数;设 $a\in X$,$1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同,若 $a^{n,\otimes}=b(n\in\{0,1,\cdots,p-2\})$,则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数,记为 $n=\log(p)_ab$.

(1)若 $p=11$,$a=2$,求 $a^{p-1,\otimes}$.

(2)对 $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$,记 $m_1\oplus m_2$ 为 m_1+m_2 除以 $p-1$ 的余数(当 m_1+m_2 能被 $p-1$ 整除时,$m_1\oplus m_2=0$).证明:$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$,其中 $b,c\in X$.

(3)已知 $n=\log(p)_ab$.对 $x\in X$,$k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$,令 $y_1=a^{k,\otimes}$,$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$.证明:$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

注:一般地,设 n 为正整数,a 和 b 为整数,如果 a 和 b 被 n 除后余数相同,那么称 a 和 b 模 n 同余,记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$.例如,12 与 -6 被 9 除后余数均为 3,所以 $12\equiv -6(\mathrm{mod}\ 9)$.

1. B　**解析**　将这些数据从小到大排列可得 10，12，14，14，16，20，24，30，40. 故其中位数为 16. 故选 B.

2. A　**解析**　由题意得 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

3. C　**解析**　因为 $a_3+a_7=2a_5=6$，所以 $a_5=3$，所以 $a_5+a_{12}=3+17=20$，

所以 $S_{16}=\dfrac{(a_1+a_{16})\times 16}{2}=8(a_5+a_{12})=160$.

故选 C.

4. C　**解析**　对于 A，m，l 可能平行、相交或异面，故 A 错误；对于 B，α，β 可能相交或平行，故 B 错误；对于 D，α，β 平行，故 D 错误. 由线面平行的性质可知 C 正确.

故选 C.

5. B　**解析**　因为乙和丙之间恰有 2 人，所以乙、丙及中间 2 人占据首四位或尾四位.

①当乙、丙及中间 2 人占据首四位，此时还剩末位，故甲在乙、丙中间，此时排乙、丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两人有 A_2^2 种排法，所以有 $A_2^2A_2^1A_2^2=8$ 种方法；

②当乙、丙及中间 2 人占据尾四位，此时还剩首位，故甲在乙、丙中间，此时排乙、丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两人有 A_2^2 种排法，所以有 $A_2^2A_2^1A_2^2=8$ 种方法.

由分类加法计数原理可知，一共有 8+8=16 种排法.

故选 B.

6. C　**解析**　设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，得 $Q(x-1,y+3)$，

由点 Q 在直线 $l:x+2y+1=0$ 上，得 $x-1+2(y+3)+1=0$，

化简得 $x+2y+6=0$，即点 P 的轨迹 E 为一条直线且与直线 l 平行，

E 上的点到 l 的距离 $d=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，故 A，B，D 错误，C 正确.

故选 C.

7. A　**解析**　由 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

得 $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{-4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}$，即 $-4(\tan\theta+1)^2=2\tan\theta$，

则 $(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0$，解得 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，

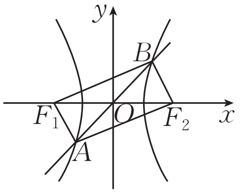
因为 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，所以 $\tan\theta\in(-1,0)$，所以 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，

故 $\dfrac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{4}+1-1}{2+(-1)}=\dfrac{1}{4}$.

故选 A.

8. D　**解析**　如图，设双曲线的半焦距长为 c，离心率为 e，由双曲线的对称性可知 $|F_1A|=|F_2B|$，$|F_1B|=|F_2A|$，则四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，



令 $|F_1A|=|F_2B|=m$，则 $|F_1B|=|F_2A|=2m$，

由双曲线的定义可知 $|F_2A|-|F_1A|=2a$，故 $2m-m=2a$，即 $m=2a$，

即 $|F_1A|=|F_2B|=m=2a$，$|F_1B|=|F_2A|=4a$，

$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=|\overrightarrow{F_2A}|\cdot|\overrightarrow{F_2B}|\cos\angle AF_2B=4a\cdot 2a\cos\angle AF_2B=4a^2$，

则 $\cos\angle AF_2B=\dfrac{1}{2}$，即 $\angle AF_2B=\dfrac{\pi}{3}$，故 $\angle F_2BF_1=\dfrac{2\pi}{3}$，

则 $\cos\angle F_2BF_1=\dfrac{|F_1B|^2+|F_2B|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1B|\cdot|F_2B|}=\dfrac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\cdot 4a\cdot 2a}=-\dfrac{1}{2}$，

即 $\dfrac{20a^2-4c^2}{16a^2}=-\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{20}{16}-\dfrac{4e^2}{16}=-\dfrac{1}{2}$，则 $e^2=7$，由 $e>1$，得 $e=\sqrt{7}$.

故选 D.

9. AC　**解析**　$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$=\sin 2x\cos\dfrac{3\pi}{4}+\cos 2x\sin\dfrac{3\pi}{4}+\cos 2x\cos\dfrac{3\pi}{4}-\sin 2x\sin\dfrac{3\pi}{4}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=-\sqrt{2}\sin 2x$，

即 $f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x$.

对于 A，$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，易知 $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数，故 A 正确；

对于 B，函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x$ 图象的对称轴为直线 $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 B 错误；

对于 C，$x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$，$y=\sin 2x$ 单调递减，则 $f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x$ 单调递增，故 C 正确；

对于 D，$f(x)=-\sqrt{2}\sin 2x$，由 $\sin 2x\in[-1,1]$，得 $f(x)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故 D 错误.

故选 AC.

10. BCD　**解析**　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$w=c+di(c,d\in\mathbf{R})$.

对于 A，$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2=a^2-b^2+2abi$，$|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$，故 A 错误；

对于 B，$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2}{\overline{z}\cdot z}$，因为 $\overline{z}\cdot z=|z|^2$，所以 $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}$，故 B 正确；

对于 C，$z-w=a+bi-c-di=a-c+(b-d)i$，则 $\overline{z-w}=a-c-(b-d)i$，

$\overline{z}=a-bi$，$\overline{w}=c-di$，则 $\overline{z}-\overline{w}=a-bi-c+di=a-c-(b-d)i$，

即 $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$，故 C 正确；

对于 D，$\left|\dfrac{z}{w}\right|=\left|\dfrac{a+bi}{c+di}\right|=\left|\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right|=\left|\dfrac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}\right|$

$=\sqrt{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}}{c^2+d^2}$，

$\dfrac{|z|}{|w|}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}$

$=\dfrac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2}}{c^2+d^2}$，

故 $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$，故 D 正确.

故选 BCD.

11. ABD　**解析**　令 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\times f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)[1+f(0)]=0$，

因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$，所以 $1+f(0)=0$，即 $f(0)=-1$.

令 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4\times\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，由 $f(0)=-1$，可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，故 A 正确；

令 $y=-\frac{1}{2}$，则 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，故函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是奇函数，

则 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，故函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数，

令 $x=0$，有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，

故 B 正确，C 错误，D 正确.

故选 ABD.

12. 5　**解析**　由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$，

由 $|x-3|\leqslant m$，得 $-m+3\leqslant x\leqslant m+3$，

故 $\begin{cases}4\leqslant m+3,\\-2\geqslant -m+3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\geqslant 1,\\m\geqslant 5,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 5$，

故 m 的最小值为 5.

13. $\frac{2}{3}$　1　**解析**　设圆锥的底面半径为 r，球的半径为 R，

因为圆锥的轴截面为正三角形，所以圆锥的高 $h=\sqrt{3}r$，母线 $l=2r$，

由题可知，$h=2R$，所以球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

所以圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\cdot(\pi\times r^2)\cdot\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$，

球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3$，

所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3}=\frac{2}{3}$.

圆锥的表面积 $S_1=\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2$，

球的表面积 $S_2=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=3\pi r^2$，

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi r^2}{3\pi r^2}=1$.

14. $\frac{1}{5}$　**解析**　令 $b-a=m$，$c-b=n$，$1-c=p$，其中 $m,n,p>0$，

则 $\begin{cases}b=1-n-p,\\a=1-m-n-p.\end{cases}$

若 $b\geqslant 2a$，则 $b=1-n-p\geqslant 2(1-m-n-p)$，故 $2m+n+p\geqslant 1$，

令 $k=\max\{b-a,c-b,1-c\}=\max\{m,n,p\}$，

因此 $\begin{cases}2k\geqslant 2m,\\k\geqslant n,\\k\geqslant p,\end{cases}$ 故 $4k\geqslant 2m+n+p\geqslant 1$，则 $k\geqslant\frac{1}{4}$，

当且仅当 $m=n=p$ 时，等号成立.

若 $a+b\leqslant 1$，则 $1-n-p+1-m-n-p\leqslant 1$，即 $m+2n+2p\geqslant 1$，

令 $k=\max\{b-a,c-b,1-c\}=\max\{m,n,p\}$，

由 $\begin{cases}k\geqslant m,\\2k\geqslant 2n,\\2k\geqslant 2p,\end{cases}$ 得 $5k\geqslant m+2n+2p\geqslant 1$，则 $k\geqslant\frac{1}{5}$，

当且仅当 $m=n=p$ 时，等号成立.

综上可知，$\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$.

15. 解析　(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2x+a$，则 $f'(2)=\frac{1}{2}+2\times 2+a=\frac{9}{2}+a$，

由题意可得 $\left(\frac{9}{2}+a\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$，解得 $a=-3$.

(2)由(1)得 $f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，$x>0$，

故当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，

故 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+2=\frac{3}{4}-\ln 2$，$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=\ln 1+1^2-3\times 1+2=0$.

16. 解析　(1)记"取出的 3 个小球上的数字两两不同"为事件 M，

先确定 3 个不同数字，有 C_4^3 种情况，

然后每种小球各取 1 个，有 $C_2^1C_2^1C_2^1$ 种取法，

所以 $P(M)=\frac{C_4^3C_2^1C_2^1C_2^1}{C_8^3}=\frac{4}{7}$.

(2)由题意可知，X 的所有可能取值为 1，2，3，

当 $X=1$ 时，分为只有一个数字为 1 的小球、有两个数字为 1 的小球两种情况，

所以 $P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{9}{14}$；

当 $X=2$ 时，分为只有一个数字为 2 的小球、有两个数字为 2 的小球两种情况，

所以 $P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{2}{7}$；

当 $X=3$ 时，分为只有一个数字为 3 的小球、有两个数字为 3 的小球两种情况，

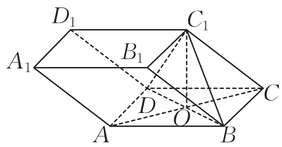
所以 $P(X=3)=\frac{C_2^1C_2^2+C_2^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{1}{14}$.

故 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{9}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$

所以 $E(X)=1\times\frac{9}{14}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{10}{7}$.

17. 解析　(1)如图，连接 BC_1，DC_1，



因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，所以 $BC=DC$，

又因为 $\angle C_1CB=\angle C_1CD$，$CC_1=CC_1$，

所以 $\triangle C_1CB\cong\triangle C_1CD$，所以 $BC_1=DC_1$，

因为 O 为线段 BD 的中点，所以 $C_1O\perp BD$，

在 $\triangle C_1CO$ 中，$CC_1=2$，$CO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$\angle C_1CO=45°$，

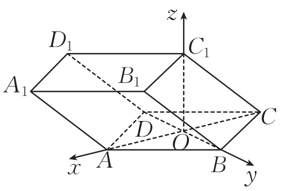
所以 $\cos\angle C_1CO=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{C_1C^2+OC^2-C_1O^2}{2\cdot C_1C\cdot OC}$，解得 $C_1O=\sqrt{2}$，

则 $C_1C^2=OC^2+C_1O^2$，即 $C_1O\perp OC$，

又 $OC\cap BD=O$，$OC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$C(-\sqrt{2},0,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{2})$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，

设平面 BAA_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 DAA_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0\end{cases}\Rightarrow$ 令 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}y_2=0\end{cases}\Rightarrow$ 令 $x_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，

设二面角 $B\text{-}AA_1\text{-}D$ 大小为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，得 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以二面角 $B\text{-}AA_1\text{-}D$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

18. 解析 (1) 由 $C:y^2=4x$，得 $F(1,0)$，由直线 AB 与直线 DE 垂直，故两条直线的斜率都存在且不为 0，

设直线 AB,DE 的方程分别为 $x=m_1y+1$，$x=m_2y+1$，则 $m_1m_2=-1$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$E(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=m_1y+1,\end{cases}$

消去 x 可得 $y^2-4m_1y-4=0$，$\Delta=16m_1^2+16>0$，

故 $y_1+y_2=4m_1$，$y_1y_2=-4$，

则 $x_1+x_2=m_1y_1+1+m_1y_2+1=m_1(y_1+y_2)+2=4m_1^2+2$，

故 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2m_1^2+1$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=2m_1$，

即 $M(2m_1^2+1,2m_1)$，同理可得 $N(2m_2^2+1,2m_2)$.

当 $2m_1^2+1\neq 2m_2^2+1$ 时，

则 $l_{MN}:y=\dfrac{2m_2-2m_1}{2m_2^2+1-(2m_1^2+1)}(x-2m_1^2-1)+2m_1$，

即 $y=\dfrac{m_2-m_1}{m_2^2-m_1^2}(x-2m_1^2-1)+2m_1=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{2m_1^2+1}{m_2+m_1}+\dfrac{2m_1(m_2+m_1)}{m_2+m_1}=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{1-2m_1m_2}{m_2+m_1}$，

由 $m_1m_2=-1$，得 $y=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{1+2}{m_2+m_1}=\dfrac{1}{m_2+m_1}(x-3)$，

故当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{1}{m_2+m_1}(3-3)=0$，

此时直线 MN 过定点，且该定点为 $(3,0)$；

当 $2m_1^2+1=2m_2^2+1$，即 $m_1^2=m_2^2$ 时，由 $m_1m_2=-1$，得 $\begin{cases}m_1=1,\\ m_2=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m_1=-1,\\ m_2=1,\end{cases}$

则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=3$，$\dfrac{x_3+x_4}{2}=3$，故 $l_{MN}:x=3$，亦过定点 $(3,0)$.

故直线 MN 过定点，且该定点为 $(3,0)$.

(2) 由 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$E(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

得 $l_{AE}:y=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x-x_1)+y_1$，由 $y_1^2=4x_1$，$y_3^2=4x_3$，

得 $y=\dfrac{y_3-y_1}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}\left(x-\dfrac{y_1^2}{4}\right)+y_1=\dfrac{4x}{y_3+y_1}-\dfrac{y_1^2}{y_3+y_1}+\dfrac{y_1^2+y_1y_3}{y_3+y_1}=\dfrac{4x}{y_3+y_1}+\dfrac{y_1y_3}{y_3+y_1}$，

同理可得 $l_{BD}:y=\dfrac{4x}{y_4+y_2}+\dfrac{y_2y_4}{y_4+y_2}$，联立 $\begin{cases}y=\dfrac{4x}{y_3+y_1}+\dfrac{y_1y_3}{y_3+y_1},\\ y=\dfrac{4x}{y_4+y_2}+\dfrac{y_2y_4}{y_4+y_2},\end{cases}$

则 $\dfrac{4x}{y_3+y_1}+\dfrac{y_1y_3}{y_3+y_1}=\dfrac{4x}{y_4+y_2}+\dfrac{y_2y_4}{y_4+y_2}$，

即 $4x(y_4+y_2)+y_1y_3(y_4+y_2)=4x(y_3+y_1)+y_2y_4(y_3+y_1)$，

则 $x=\dfrac{y_2y_4(y_3+y_1)-y_1y_3(y_4+y_2)}{4(y_4+y_2-y_3-y_1)}$，由 $y_1y_2=-4$，$y_3y_4=-4$，

得 $x=\dfrac{y_2y_4(y_3+y_1)-y_1y_3(y_4+y_2)}{4(y_4+y_2-y_3-y_1)}$

$=\dfrac{y_2y_3y_4+y_1y_2y_4-y_1y_3y_4-y_1y_2y_3}{4(y_4+y_2-y_3-y_1)}$

$=\dfrac{-4(y_2+y_4-y_1-y_3)}{4(y_4+y_2-y_3-y_1)}=-1$，

故 $x_G=-1$，

如图，过点 G 作 $GQ\,/\!/\,x$ 轴，交直线 MN 于点 Q，则 $S_{\triangle GMN}=\dfrac{1}{2}|y_M-y_N|\times|x_Q-x_G|$，

由 $M(2m_1^2+1,2m_1)$，$N(2m_2^2+1,2m_2)$，

得 $|y_M-y_N|=|2m_1-2m_2|=2\left(|m_1|+\dfrac{2}{|m_1|}\right)\geqslant 2\sqrt{2|m_1|\times\dfrac{2}{|m_1|}}=4$，

当且仅当 $|m_1|=1$ 时，等号成立.

下证 $|x_Q-x_G|\geqslant 4$：

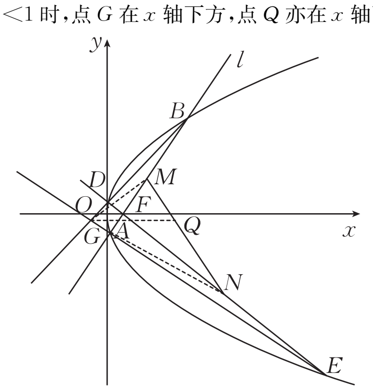
由抛物线的对称性，不妨设 $m_1>0$，则 $m_2<0$，

当 $m_1>1$ 时，$m_2=-\dfrac{1}{m_1}\in(-1,0)$，则点 G 在 x 轴上方，点 Q 亦在 x 轴上方，

有 $\dfrac{1}{m_2+m_1}=\dfrac{1}{m_1-\frac{1}{m_1}}>0$，由直线 MN 过定点 $(3,0)$，

得 $|x_Q-x_G|>3-(-1)=4$，

同理，当 $m_1<1$ 时，点 G 在 x 轴下方，点 Q 亦在 x 轴下方，



则 $\dfrac{1}{m_2+m_1}<0$，故 $|x_Q-x_G|>4$，

当且仅当 $m_1=1$ 时，$x_Q=3$.

故 $|x_Q-x_G|\geqslant 4$ 恒成立，且当 $|m_1|=1$ 时，等号成立，

所以 $S_{\triangle GMN}=\dfrac{1}{2}|y_M-y_N|\times|x_Q-x_G|\geqslant\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$.

19. 解析 (1) 若 $p=11$，$a=2$，且注意到 $2^{10}=1024=93\times11+1$，

则 $a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}=1$.

(2) 当 $p=2$ 时，此时 $X=\{1\}$，此时 $b=c=1$，$b\otimes c=1$，

故 $\log(p)_a(b\otimes c)=0$，$\log(p)_ab=0$，$\log(p)_ac=0$，

此时 $\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_ab\oplus\log(p)_ac$.

当 $p>2$ 时，因为 $1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 相异，所以 $a\geqslant 2$，

而 $a\in X$，故 a,p 互质.

设 $n=\log(p)_a(b\otimes c)$，$n_1=\log(p)_ab$，$n_2=\log(p)_ac$，

则 $\exists k_1,k_2\in\mathbf{N}$，使得 $a^{n_1}=pk_1+b$，$a^{n_2}=pk_2+c$，

故 $a^{n_1+n_2}=(pk_1+b)(pk_2+c)$，故 $a^{n_1+n_2}\equiv bc\pmod p$，

设 $n_1+n_2=t(p-1)+s, 0\leqslant s\leqslant p-2$，则 $n_1\oplus n_2=s$，
因为 $1,2,3,\cdots,p-1$ 除以 p 的余数两两相异，
且 $a,2a,3a,\cdots,(p-1)a$ 除以 p 的余数两两相异，
所以 $(p-1)!\equiv[a\times 2a\times 3a\cdots\times(p-1)a](\bmod p)$，故 $a^{p-1}\equiv 1 \bmod p$，
故 $a^s\equiv bc(\bmod p)$，而 $a^n\equiv b\otimes c(\bmod p)=bc(\bmod p)$，其中 $0\leqslant n\leqslant p-2$，
故 $s=n$，即 $\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$.
(3) 当 $b\geqslant 2$ 时，由(2)可得 $b^{p-1}\equiv 1 \bmod p$，若 $b=1$，则 $b^{p-1}\equiv 1 \bmod p$ 也成立.
因为 $n=\log(p)_a b$，所以 $a^n\equiv b(\bmod p)$.
另一方面，$y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv y_2 y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv(x\otimes b^{k,\otimes})(a^{k,\otimes})^{n(p-2)}$
$\equiv(xb^k)a^{kn(p-2)}\equiv(xb^k)b^{k(p-2)}\equiv x(b^{p-1})^{k-1}\equiv x(1)^{k-1}(\bmod p)$
$\equiv x(\bmod p)$.
因为 $x\in X$，所以 $x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.