基础课 58 事件的相互独立性、条件概率与全概率公式

课时评价·提能

基础巩固练

1. 若某射击运动员每次射击命中目标的概率都为0.9，则他连续射击两次都命中的概率是（ C ）.

A. 0.64　　B. 0.56　　C. 0.81　　D. 0.99

[解析]A_i表示“第i次击中目标”，$i=1,2$，则$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0.9\times 0.9=0.81$.故选C.

2. 某质检部门对某种建筑构件的抗压能力进行检测，对此建筑构件实施两次击打，若没有受损，则认为该构件通过质检.若第一次击打后该构件没有受损的概率为0.85，当第一次没有受损时第二次再实施击打也没有受损的概率为0.80，则该构件通过质检的概率为（ C ）.

A. 0.4　　B. 0.16　　C. 0.68　　D. 0.17

[解析]设事件A_i表示“第i次击打后该构件没有受损”，$i=1,2$，则由已知可得$P(A_1)=0.85$，$P(A_2|A_1)=0.80$，因此由乘法公式可得$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=0.85\times 0.80=0.68$，即该构件通过质检的概率为0.68,故选C.

3. （改编）已知在 50 件产品中有 45 件合格品，5 件不合格品，现从中不放回地取两次，每次任取一件，则在第一次取到不合格品后，第二次取到不合格品的概率为（ A ）.

A. $\frac{4}{49}$　　B. $\frac{4}{99}$　　C. $\frac{2}{49}$　　D. $\frac{2}{99}$

[解析]设事件A为“第一次取到不合格品”，事件B为“第二次取到不合格品”，则所求的概率为$P(B|A)$，因为$P(AB)=\frac{C_5^2}{C_{50}^2}=\frac{2}{245}$，$P(A)=\frac{C_5^1}{C_{50}^1}=\frac{1}{10}$，所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{245}}{\frac{1}{10}}=\frac{4}{49}$,故选A.

4. 阅读不仅可以开阔视野,还可以提升语言表达和写作能力.某校全体学生中大约有30%的学生的写作能力被评为优秀等级.经调查知,该校大约有20%的学生每天阅读时间超过 1 小时,这些学生中写作能力被评为优秀等级的占70%.现从每天阅读时间不超过 1 小时的学生中随机抽取一名,则该生写作能力被评为优秀等级的概率为（ B ）.

A. 0.25　　B. 0.2　　C. 0.15　　D. 0.1

[解析]设事件$A=$“写作能力被评为优秀等级”,事件$B=$“每天阅读时间超过 1 小时”,则$P(A)=30\%=0.3$,$P(B)=20\%=0.2$,$P(A|B)=70\%=0.7$.$\because P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})$,$\therefore P(A|\overline{B})=\frac{P(A)-P(A|B)P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{0.3-0.7\times 0.2}{1-0.2}=\frac{0.16}{0.8}=0.2$,即从每天阅读时间不超过 1 小时的学生中随机抽取一名,则该生写作能力被评为优秀等级的概率为0.2，故选B.

5. （改编）从1～80共 80 个正整数中，任取一数，已知取出的这个数不大于 40，则此数是 2 或 3 的倍数的概率为（ B ）.

A. $\frac{33}{80}$　　B. $\frac{27}{40}$　　C. $\frac{13}{20}$　　D. $\frac{7}{10}$

[解析]设事件C为“取出的数不大于 40”，事件A为“取出的数是 2 的倍数”，事件B为“取出的数是 3 的倍数”,则$P(C)=\frac{1}{2}$，且所求概率$P(A\cup B|C)=$

$P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}+\frac{P(BC)}{P(C)}-\frac{P(ABC)}{P(C)}=2\times\left(\frac{20}{80}+\frac{13}{80}-\frac{6}{80}\right)=\frac{27}{40}$，故选B.

6. 市场调查发现，大约$\frac{3}{5}$的人喜欢在网上购买儿童玩具，其余的人则喜欢在实体店购买儿童玩具.经某部门抽样调查发现，网上购买的儿童玩具的合格率为$\frac{4}{5}$，而实体店里的儿童玩具的合格率为$\frac{9}{10}$.现随机抽取到一个不合格的儿童玩具，则这个儿童玩具是在网上购买的可能性是（ B ）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

[解析]这个儿童玩具是在网上购买的可能性是$\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}}=\frac{3}{4}$，故选B.

7. 某校开设了“陆地冰壶”“陆地冰球”“滑冰”“模拟滑雪”四类冰雪运动体验课程.甲、乙两名同学各自从中任意挑选两门课程学习，设事件$A=$“甲、乙两人所选课程恰有一门相同”，事件$B=$“甲、乙两人所选课程完全不同”，事件$C=$“甲、乙两人均未选择陆地冰壶课程”，则（ C ）.

A. A与B为对立事件　　B. A与C互斥

C. A与C相互独立　　D. B与C相互独立

[解析]依题意,甲、乙两人所选课程有如下情形：①有一门相同；②两门都相同；③两门都不相同.故A与B互斥不对立，A与C不互斥，所以$P(A)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{2}{3}$，

$P(B)=\frac{C_4^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{4}$且$P(AC)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(BC)=0$，所以$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)\neq P(B)P(C)$，即$A$与$C$相互独立，$B$与$C$不相互独立，故选C.

8. （改编）某射手每次射击击中目标的概率是$\frac{3}{4}$，且各次射击的结果互不影响.假设这名射手射击 4 次，则有 2 次连续击中目标，另外 2 次未击中目标的概率为（ B ）.

A. $\frac{27}{128}$　　B. $\frac{27}{256}$　　C. $\frac{8}{81}$　　D. $\frac{29}{256}$

[解析]因为该射手每次射击击中目标的概率是$\frac{3}{4}$,所以每次射击未击中目标的概率为$\frac{1}{4}$，设“第i次射击击中目标”为事件$A_i(i=1,2,3,4)$，“该射手在 4 次射击中，

有2次连续击中目标,另外2次未击中目标”为事件A,则$P(A)=P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4)=3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{256}$,故选B.

综合提升练

9. （多选题）已知红箱内有6个红球、3个白球，白箱内有3个红球、6个白球，所有小球的大小、形状完全相同.第一次从红箱内取出一球后再放回，第二次从与第一次取出的球颜色相同的箱子内取出一球，然后再放回，以此类推，第$(k+1)$次从与第k次取出的球颜色相同的箱子内取出一球，然后再放回.记第n次取出的球是红球的概率为P_n，则下列说法正确的是（ AC ）.

A. $P_2=\frac{5}{9}$

B. $3P_{n+1}+P_n=1$

C. 第5次取出的球是红球的概率为$\frac{122}{243}$

D. 前3次取球恰有2次取到红球的概率是$\frac{139}{243}$

[解析]依题意$P_1=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，设第$n$次取出的球是红球的概率为$P_n$，则取出的球是白球的概率为$1-P_n$，对于第$n+1$次，取出红球有两种情况：①从红箱内取出的概率为$P_n\cdot\frac{2}{3}$;②从白箱取出的概率为$(1-P_n)\cdot\frac{1}{3}$，对应$P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}(1-P_n)=\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}$，即$3P_{n+1}=P_n+1$.故B错误.$P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$，令$a_n=P_n-\frac{1}{2}$，则数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为$\frac{1}{3}$，因为$P_1=\frac{2}{3}$，所以$a_1=\frac{1}{6}$，故$P_n=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$，所以$P_2=\frac{5}{9}$，$P_5=\frac{122}{243}$，故A，C正确.前3次取球恰有2次取到红球，有三种情况，分别是红红白，红白红，白红红，故所求概率是$\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}\times\frac{13}{27}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}\times\frac{14}{27}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\times\frac{14}{27}=\frac{104}{243}$，故D错误.故选AC.

10. （多选题）已知事件A,B满足$A\subseteq B$,且$P(B)=0.5$,则一定有（ BC ）.

A. $P(\overline{A}B)>0.5$　B. $P(\overline{B}|A)<0.5$　C. $P(A\overline{B})<0.25$　D. $P(A|B)>0.5$

[解析]对于A,因为$A\subseteq B$,所以$\overline{A}B\subseteq B$,所以$P(\overline{A}B)\le P(B)=0.5$,故A错误;

对于B,因为$A\subseteq B$,所以$A\cap\overline{B}=\varnothing$,所以$P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=0$,故B正确;

对于C,因为$A\subseteq B$,所以$A\cap\overline{B}=\varnothing$,所以$P(A\overline{B})=0$,故C正确;

对于D,因为$A\subseteq B$,所以$A\cap B=A$,所以$P(A\cap B)=P(A)$,若$A=\varnothing$,则$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$,故D错误.故选BC.

11. 某社区举办“环保我参与”有奖问答比赛活动，在某场比赛中，甲、乙、丙三个家庭同时回答一道有关环保知识的问题.已知甲家庭回答正确的概率是$\frac{3}{4}$，甲、丙两个家庭都回答错误的概率是$\frac{1}{12}$，乙、丙两个家庭都回答正确的概率是$\frac{1}{4}$，各家庭回答是否正确互不影响,则乙、丙两个家庭各自回答正确的概率分别为$\frac{3}{8}$,$\frac{2}{3}$.

[解析]记“甲家庭回答正确”“乙家庭回答正确”“丙家庭回答正确”分别为事件A，B，C，

则$P(A)=\frac{3}{4}$,

且有$\begin{cases} P(\overline{A})P(\overline{C})=\frac{1}{12}, \\ P(B)P(C)=\frac{1}{4}, \end{cases}$

即$\begin{cases} [1-P(A)]\cdot[1-P(C)]=\frac{1}{12}, \\ P(B)P(C)=\frac{1}{4}, \end{cases}$

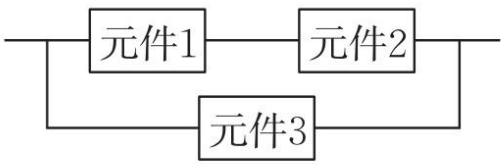
所以$P(B)=\frac{3}{8}$，$P(C)=\frac{2}{3}$.

12. 已知播种用的一等品种子中混合了2.0%的二等品种子，1.5%的三等品种子，1.0%的四等品种子，若用一等品、二等品、三等品、四等品种子长出优质产品的概率分别为0.5,0.15,0.1,0.05，则从这批种子中任选一粒能长出优质产品的概率为 0.4825.

[解析]设事件$B_i=$“从这批种子中任选一粒是$i(i=1,2,3,4)$等品种子”，则$\Omega=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$，且$B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$两两互斥.事件$A=$“在这批种子中任选一粒长出优质产品”，则$P(B_1)=95.5\%$，$P(B_2)=2\%$，$P(B_3)=1.5\%$，$P(B_4)=1.0\%$，$P(A|B_1)=0.5$，$P(A|B_2)=0.15$，$P(A|B_3)=0.1$，$P(A|B_4)=0.05$，由全概率公式得$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.955\times0.5+0.02\times0.15+0.015\times0.1+0.01\times0.05=0.4825$，所以从这批种子中任选一粒长出优质产品的概率为0.4825.

应用情境练

13. 某一部件由三个电子元件按如图所示的方式连接而成,元件1和元件2同时正常工作,或元件3正常工作,则部件正常工作.设三个电子元件正常工作的概率均为$\frac{3}{4}$,且各个元件能否正常工作相互独立,那么该部件正常工作的概率为$\frac{57}{64}$.



[解析]讨论元件3正常与不正常,第一类,元件3正常,上部分正常或不正常都不影响该部件正常工作,则正常工作的概率为$\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$;第二类,元件3不正常,上部分

必须正常,则正常工作的概率为$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.故该部件正常工作的概率为$\frac{3}{4}+\frac{9}{64}=\frac{57}{64}$.

创新拓展练

14.（双空题）田忌赛马的故事出自司马迁的《史记》,话说齐王、田忌分别有上、中、下等马各一匹.赛马规则：一场比赛需要比赛三局,每匹马都要参赛,且只能参赛一局,最后以获胜局数多者为胜.记齐王的马匹分别为A_1,A_2,A_3,田忌的马匹分别为B_1,B_2,B_3,每局比赛之间都是相互独立的,而且不会出现平局.用$P_{A_iB_j}(i,j\in\{1,2,3\})$表示马匹$A_i$与$B_j$比赛时齐王获胜的概率,且$P_{A_1B_1}=0.8$，$P_{A_1B_2}=0.9$，$P_{A_1B_3}=0.95$，$P_{A_2B_1}=0.1$，$P_{A_2B_2}=0.6$，$P_{A_2B_3}=0.9$，$P_{A_3B_1}=0.09$，$P_{A_3B_2}=0.1$，$P_{A_3B_3}=0.6$，则一场比赛共有 6 种不同的比赛方案.在上述所有的方案中,有一种方案田忌获胜的概率最大,此概率的值为 0.819.

[解析]所有的比赛方案有 6 种,即
(A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3),(A_1B_1,A_2B_3,A_3B_2),(A_1B_2,A_2B_1,A_3B_3),(A_1B_2,A_2B_3,A_3B_1),
(A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2),(A_1B_3,A_2B_2,A_3B_1),易知其中采用方案(A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2)可使田忌获胜的概率最大,记田忌三局全胜和恰好胜两局的概率分别为P_1,P_2,则$P_1=0.05\times0.9\times0.9=0.0405$,
$P_2=0.05\times0.9\times0.1\times2+0.95\times0.9\times0.9=0.7785$,
所以所求概率的值为$P_1+P_2=0.819$.