

北京大学 2013 年—2017 年自主招生笔试真题集锦

目录

一、北京大学 2017 年自主招生笔试考察范围.....	2
二、北京大学 2017 年博雅计划笔试考查范围.....	2
三、北京大学 2016 年自主招生笔试	3
四、北京大学 2016 年博雅计划笔试题	12
五、北京大学 2015 年自主招生笔试题	19
六、北京大学 2015 年博雅计划笔试题	26
七、北约 2014 年数学试题及答案	28
八、北京大学 2014 年综合营试题	33
九、北京大学 2014 年夏令营其他试题	36
十、北京大学 2013 年综合营试题	38

一、北京大学 2017 年自主招生笔试考察范围

笔试科目：语文、数学、外语；其他考生现场作文，题目：考题为对高晓松的“诗和远方”的看法。

题型均为选择题，其中语文和英语各 50 道题，数学 20 道题。

据考生介绍，语文试卷中对古诗词的考查较多；莫言的小说《奇遇》成为阅读理解的考生内容，其中一道考题是将结尾文章补充完整，选择文中主角母亲最可能说的一句话是什么。

其中语文题中有一些古诗词题，阅读理解材料选择莫言的小说《奇遇》，考的是原句填空。“那是个有点像《聊斋志异》一样，有些荒诞的故事”。一位同学称，英语题目的词汇量较多，有些是大学英语 4 级考试中的词汇。英语阅读的题目涉及迪士尼的创始人事迹等等。

据招生办介绍，“自主招生”重点选拔具有学科特长和创新潜质的学生，其笔试作为选拔性考试，对考生的综合能力要求较高，内容是中学阶段应掌握的知识，并与实际生活紧密联系，知识覆盖面广。

一位报考中文系的考生告诉记者，他们的考题没有选择题，只有作文题，字数和题材不限，题目自拟，考题为对高晓松的“诗和远方”的看法。在 3 个小时的答题时间里，她写了 2000 多字。据她回忆，考题表述为，有人认为“诗和远方”是一种病，病症就是觉得所有人都应该追求诗和远方，认为生活苟且的人应该被鄙视，对此怎么看。

二、北京大学 2017 年博雅计划笔试考查范围

笔试考卷题型多样，题量较大，考生需合理分配答题时间，自主掌握应考节奏。基础学

业能力测试一为必考科目，重点考查语数英相关基础知识和综合能力。语文部分题型较新颖，包括基础知识、文言文、现代文阅读和小作文，考查汉语素养和文学积淀，并着重强调理解和表达等实际应用能力。数学部分均为客观题，计算量不大，但在数学思维上具有一定挑战性，值得一提的是，与高考规则不同，数学部分的选择题“答对得分，不答不得分，答错扣分”，所以“蒙题”需谨慎。英语题型与高考类似，包括单选、完形和阅读，突出语言素质与应用能力的考核。此外，学生还要在“文科综合”或“理科综合”中选考一门。

三、北京大学 2016 年自主招生笔试

北大 2016 年自主招生笔试科目：语数外，不分文理科。

北大自主招生考题为 120 道客观选择题，其中英语和语文各 50 道，数学题 20 道。3 个小时时间略紧张，考试题少有时政热点，考查的是学生平时的积累。

数学试题：

2016 年北京大学自主招生数学试题 (回忆版)

兰琦

2017 年 1 月 4 日

一、选择题. 在每小题的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 已知 $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 2$ ($0 < x < 2\pi$), 则 x 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. 前三个答案都不对

解析 B.

根据题意, 有 $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, 于是 x 是第二象限的角.

2. $(2+1)(2^2+1)(2^3+1)\cdots(2^{2016}+1)$ 的个位数字是 ()

A. 1 B. 3 C. 5 D. 前三个答案都不对

解析 C.

因为 $2^2+1=5$, 且对于任意正整数 k , 都有 2^k+1 为奇数, 所以

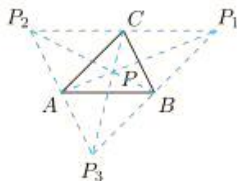
$$(2+1)(2^2+1)(2^3+1)\cdots(2^{2016}+1) \equiv 5 \pmod{10}.$$

3. 点 P 位于 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 使得 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ 的面积相等, 则满足题意的点 P 有 ()

A. 1 个 B. 3 个 C. 5 个 D. 前三个答案都不对

解析 D.

考虑到平面内使 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的面积相等的点的轨迹为直线 BM 以及过点 B 且与 AC 平行的直线, 其中 M 为边 AC 的中点, 因此满足题意的点 P 有 4 个: $\triangle ABC$ 的重心, 或者由 P, A, B, C 四点所构成的平行四边形的顶点.



4. 记 $f(n)$ 为最接近 \sqrt{n} 的整数, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$. 若 $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(m)} = 2016$, 则正整数 m 的值为 ()

A. 1015056 B. 1017072 C. 1019090 D. 前三个答案都不对

解析 B.

若 $f(n) = k$, 则

$$k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k,$$

所以

$$f(1) = f(2) = 1,$$

$$f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = 2,$$

...

进而有

$$2016 = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(m)} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 2016 \cdot \frac{1}{1008},$$

故 $m = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2016 = 1017072$.

5. 实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 2016$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2016}$, 则 $(x - 2016)(y - 2016)(z - 2016) = (\quad)$
 A. 0 B. 1 C. -1 D. 前三个答案都不对

解析 A.

由于

$$\begin{aligned} (x - m)(y - m)(z - m) &= xyz - m(xy + yz + zx) + m^2(x + y + z) - m^3, \\ &= mxyz \left[\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] + m^2[(x + y + z) - m], \end{aligned}$$

于是所求代数式的值为 0.

6. 方程组 $\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, \\ a^2 = 2(b + c) \end{cases}$ 的非负整数解有 ()
 A. 1 组 B. 4 组 C. 5 组 D. 前三个答案都不对

解析 B.

根据题意, 有

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 - 3abc &= a^3 - (b + c)^3 + 3bc(b + c - a) \\ &= a^3 - \frac{1}{8}a^6 + 3bc \left(\frac{1}{2}a^2 - a \right), \\ &= a \left(1 - \frac{1}{2}a \right) \left[a^2 \left(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2 \right) - 3bc \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

当 $a = 0$ 时, $(b, c) = (0, 0)$; 当 $a = 2$ 时, $(b, c) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$. 当 $a \neq 0, 2$ 时, 有

$$a^2 \left(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2 \right) - 3bc > \frac{1}{4}a^4 - 3bc = (b + c)^2 - 3bc \geq 0,$$

于是题中方程组的非负整数解共有 4 组.

7. 4 个半径为 1 的球两两外切, 则这 4 个球的外切正四面体的棱长为 ()

A. $2+2\sqrt{2}$ B. $2+2\sqrt{3}$ C. $2+2\sqrt{6}$ D. 前三个答案都不对

解析 C.

棱长为 a 的正四面体的内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$. 设 4 个半径为 1 的球的球心分别为 O_1, O_2, O_3, O_4 , 则正四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 的棱长为 2, 故其内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 设这 4 个球的外切正四面体为 $ABCD$, 则正四面体 $ABCD$ 的内切球半径为 $1+\frac{\sqrt{6}}{6}$, 故正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2+2\sqrt{6}$.

8. 将 $1, 2, \dots, 100$ 分成三组, 使得第一组数的和为 102 的倍数, 第二组数的和为 203 的倍数, 第三组数为 304 的倍数, 则不同的分法共有 ()

A. 1 种 B. 2 种 C. 3 种 D. 前三个答案都不对

解析 D. 假设这样的分法存在, 设三组数的和分别为 $102x, 203y, 304z$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, 则

$$102x + 203y + 304z = 5050,$$

即

$$101(x + 2y + 3z) + (x + y + z) = 101 \cdot 50,$$

于是

$$101 \mid x + y + z,$$

因此 $x + y + z \geq 101$, 而此时

$$102x + 203y + 304z > 102(x + y + z) > 5050,$$

矛盾. 故不存在满足题意的分法.

二、填空题.

9. 已知 $f(x) = 3x^2 - x + 4$, $g(x)$ 为整系数多项式, $f(g(x)) = 3x^4 + 18x^3 + 50x^2 + 69x + a$, 则 $g(x)$ 的各项系数之和为_____.

解析 8.

易知 $g(x)$ 为二次多项式, 设 $g(x) = px^2 + qx + r$, 则

$$f(g(x)) = 3g^2(x) - g(x) + 4 = 3p^2x^4 + 6pqx^3 + (3q^2 + 6pr - p)x^2 + (6qr - q)x + 3r^2 - r + 4.$$

对比系数, 依次解得 $p = 1, q = 3, r = 4, a = 48$. 故 $g(x)$ 的各项系数之和为 8.

10. 54 张扑克牌排成一列. 先去掉第一张, 将第二张放到最后; 再去掉第三张, 将第四张放到最后……以此类推, 则最后剩下的那张牌是原先的第_____张.

解析 44.

每一轮剩下的牌依次是

2, 4, 6, ..., 52, 54,
4, 8, 12, ..., 48, 52,
4, 12, 20, ..., 44, 52,
12, 28, 44,
12, 44,
44.

11. 用高斯函数 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 则方程 $n[2002\sqrt{2001^2+1}] = 2002[n\sqrt{2001^2+1}]$ 的正整数解有_____个.

解析 4002.

因为

$$2002 \cdot 2001 < 2002\sqrt{2001^2+1} < 2002 \cdot 2001 + 1,$$

所以 $[2002\sqrt{2001^2+1}] = 2002 \cdot 2001$. 于是原方程等价于

$$[n\sqrt{2001^2+1}] = 2001n,$$

即

$$2001n \leq n\sqrt{2001^2+1} < 2001n + 1,$$

解得 $n < \sqrt{2001^2+1} + 2001$, 所以原方程的正整数解有 4002 组.

12. 空间中的一点 $P(x, y, z)$ 满足 $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|3x|^n + |8y|^n + |z|^n \leq 1$ 成立, 则所有满足要求的点 P 所形成的空间几何体的体积为_____.

解析 $\frac{1}{3}$.

考虑第一卦限, 只需要 $3x, 8y, z \in (0, 1)$ 即可. 因此所有满足要求的点 P 所形成的空间几何体为一个长方体, 体积为

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 8 = \frac{1}{3}.$$

 微信
语文试题(回忆版)

1、政策：制定，制订，制顶（记不清了，最后一个）

2、（ ）不后悔。。。。1.绝 2.决 3.诀

4、苟利国家生死以，岂因祸福以避之出自于谁

A.林则徐 B.文天祥 C.岳飞 选 1

5、荀子劝学中声非加疾也中疾的意思，闻者彰中彰的意思

6、王维：诗佛，释 李白：诗仙，道； 杜甫：诗圣，儒

7、还有词语辨析题 30 分>:-<分值太重了

大致是，牛书道和冯世伦本是好朋友两人说得上话好了半辈子。

有一年他俩在入冬时节结伴去长治拉煤。那晚离家还有 25 公里地时牛书道煤车的车轴(断)了只好露宿荒郊(等)天亮再说。

冯世伦饿了问牛书道还有没有干粮。牛书道翻看了(粮袋)说空了。谁知到了半夜冯世伦在起身撒尿时发现牛书道(躲)在煤车后偷偷啃一个馒头。从此两人成了仇人。

冯世伦是这样想的；明明有馒头却不肯与朋友分吃说什么患难与共。而且是你的车轴断了我才陪着你挨饿挨冻的。这样的人怎能再做朋友呢：他当夜就拉起自己的煤车(走)qqq了。

而牛书道是这样想的，翻粮袋时里面的确已空谁知扯被子睡觉时又滚出一个馒头来因这时不好说还有干粮才偷偷吃了。因为一个馒头至于把好了几十年的朋友一个人扔在荒山野岭吗：太无情了吧。

以前是好朋友又说得上话觉得对方什么都好，但因为一个馒头突然间看透了对方看哪都不顺眼于是绝交。

不完全是这篇文但大多一样，但是很多上下文有提示 !!!

比如有道题考的冲，刷，洗后文就再次出现了刷。

8、还有比如说诗歌如哪些不是写怀才不遇，那首诗属于王维的风格。。。

9、还有对联的押韵：只记得到选项胡适之，韩退之，祖冲之

10、文言文考的马钧（三国志），大多是高考第6题模式

11、小说考主旨和艺术手法

半张纸

【瑞典】斯特林堡

最后一辆搬运车离去了；那位帽子上戴着黑纱的年轻房客还在空房子里徘徊，看看是否有什么东西遗漏了。没有，没有什么东西遗漏，没有什么了。他走到走廊上，决定再也不去回想他在这寓所中所遭遇的一切。但是在墙上，在电话机旁，有一张涂满字迹的小纸头。上面所记的字是好多种笔迹写的；有些很容易辨认，是用黑黑的墨水写的，有些是用黑、红和蓝铅笔草草写成的。这里记录了短短两年间全部美丽的罗曼史。他决心要忘却的一切都记录在这张纸上——半张小纸上的一段人生事迹。

他取下这张小纸。这是一张淡黄色有光泽的便条纸。他将它铺平在起居室的壁炉架上，俯下身去，开始读起来。

首先是她的名字：艾丽丝——他所知道的名字中最美丽的一个，因为这是他爱人的名字。旁边是一个电话号码，15，11——看起来像是教堂唱诗牌上圣诗的号码。

下面潦草地写着：银行，这里是他工作的所在，对他说来这神圣的工作意味着面包、住所和家庭——也就是生活的基础。有条粗粗的黑线划去了那电话号码，因为银行倒闭了，他在短时期的焦虑之后又找到了另一个工作。

接着是出租马车行和鲜花店，那时他们已订婚了，而且他手头很宽裕。

家具行，室内装饰商——这些人布置了他们这寓所。搬运车行——他们搬进来了。歌剧院售

票处，50，50—他们新婚，星期日夜晚常去看歌剧。在那里度过的时光是最愉快的。他们静静地坐着，心灵沉醉在舞台上神话境域的美及和谐里。

接着是一个男子的名字（已经被划掉了），一个曾经飞黄腾达的朋友，但是由于事业兴隆冲昏了头脑，以致又潦倒到无可救药的地步，不得不远走他乡。荣华富贵不过是过眼烟云罢了。

现在这对新婚夫妇的生活中出现了一个新东西。一个女子的铅笔笔迹写的“修女”。什么修女？哦，那个穿着灰色长袍，有着亲切和蔼的面貌的人，她总是那么温柔地到来，不经过起居室，而直接从走廊进入卧室。她的名字下面是L医生。

名单上第一次出现了一位亲戚—母亲。这是他的岳母。她一直小心地躲开，不来打扰这新婚的一对。但现在她受到他们的邀请，很快乐地来了，因为他们需要她。

以后是红蓝铅笔写的项目。佣工介绍所，女仆走了，必须再找一个。药房—哼，情况开始不妙了。牛奶厂—订牛奶了，消毒牛奶。杂货铺，肉铺等等，家务事都得用电话办理了。是这家女主人不在了吗？不，她生产了。

下面的项目他已无法辨认，因为他眼前一切都模糊了，就像溺死的人透过海水看到的那样。这里用清楚的黑体字记载着：承办人。

在后面的括号里写着“埋葬事”。这已足以说明一切！—一个大的和一个小的棺材。

埋葬了，再也没有什么了。一切都归于泥土，这是一切肉体的归宿。

他拿起这淡黄色的小纸，吻了吻，仔细地将它折好，放进胸前的衣袋里。

在这两分钟里，他重又度过了他一生中的两年。

但是他走出去时并不是垂头丧气的。相反地，他高高地抬起了头，像是个骄傲的快乐的人。因为他知道他已经尝到一些生活所能赐予人的最大的幸福。有很多人，可惜，连这一点

也没有得到过。(选自人教版《外国小说欣赏》)

15、下列对这篇小说有关内容的理解和赏析，不正确的两项是()()(4分)

A 这是一篇富有怀旧气息的微型小说，基调是悲伤的，浮在表面的字和沉在深处的情，仅由半张记录主人公一生中两年“全部美丽的罗曼史”的纸条存着。

B 小说主体情节是那半张纸上的字引起的回忆。忘却和怀念构成了对比；主人公将这段爱情认定为人生最大的幸福，这幸福之大和纸条之小又构成了对比。

C 小说聚焦于“那一刻”：一生中的“两年”那一刻；两年中的“一个大的和一个小的棺材”出现的那一刻；两分钟里主人公“高高地抬起了头”走出去的最后那一刻。

D 小说注重肖像、心理、细节的刻画。半张纸让他重温诸多的人生欢乐，给予了他精神慰藉，他吻着淡黄色的小纸等细节描写，写出了主人公对半张纸的珍爱。

E 作者不惜笔墨，精细地描绘了半张纸的大小、形状、颜色、质地，甚至连纸上的字迹也一一作了说明，这样，半张纸像电影特写镜头似的强烈吸引着读者。

还有考了左传，论语的部分文言选段，他没写出处，不知道到底是哪一章

还有钱穆的《古诗论》阅读考察

素材如下：

今天我讲一点关于诗的问题。最近偶然看《红楼梦》，有一段话，现在拿来做我讲这问题的开始。林黛玉讲到陆放翁的两句诗：

重帘不卷留香久

古砚微凹聚墨多

有个丫鬟很喜欢这一联，去问林黛玉。黛玉说：“这种诗千万不能学，学作这样的诗，

你就不会作诗了。”下面她告诉那丫鬟学诗的方法。她说：“你应当读王摩诘、杜甫、李白跟陶渊明的诗。每一家读几十首，或是一两百首。得了了解以后，就会懂得作诗了。”这一段话讲得很有意思。

...

文章篇幅有限，具体素材建议百度

四、北京大学 2016 年博雅计划笔试试题

北京大学 2016 年博雅计划笔试科目：文科——语文、数学、英语、历史、政治；

理科——语文、数学、英语、物理、化学

2016 年北京大学博雅计划数学试题

选择题共 20 小题；在每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把正确选项的代号填在表格中，选对得 5 分，选错扣 1 分，不选得 0 分。

1. 直线 $y = -x + 2$ 与曲线 $y = -e^{x+a}$ 相切，则 a 的值为 ()

A -3 B -2 C -1 D 前三个答案都不对

2. 已知三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，有以下 4 个命题：

(1) 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在；(2) 以 a^2, b^2, c^2 为边长的三角形一定存在；(3) 以 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ 为边长的三角形一定存在；(4) 以 $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$ 为边长的

三角形一定存在，其中正确命题的个数为 ()

A 2 B 3 C 4 D 前三个答案都不对

3. 设 AB, CD 是圆 O 的两条互相垂直的直径，弦 DF 交 AB 于点 E ， $DE = 24, EF = 18$ ，

则 OE 等于 ()

- A $4\sqrt{6}$ B $5\sqrt{3}$ C $6\sqrt{2}$ D 前三个答

案都不对

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, x = \frac{q}{p}, (p, q) = 1, p, q \in \mathbb{N}^*, \\ 0, x \notin Q, \end{cases}$, 则满足 $x \in (0, 1)$ 且 $f(x) > \frac{1}{7}$ 的 x 的个数

为 ()

- A 12 B 13 C 14 D 前三个答案都

不对

5. 若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根也是方程 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 则 $a + b - 2c$ 的值为 ()

- A -13 B -9 C -5 D 前三个答案都不对

6. 已知 $k \neq 1$, 则等比数列 $a + \log_2 k, a + \log_4 k, a + \log_8 k$ 的公比是 ()

- A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D 前三个答案

都不对

7. 计算 $\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cdots \cos \frac{10\pi}{11}$ 的值为 ()

- A $-\frac{1}{16}$ B $-\frac{1}{32}$ C $-\frac{1}{64}$ D 前三个答案都不对

8. 设 a, b, c 为实数, $a, c \neq 0$, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个虚根 x_1, x_2 满足 $\frac{x_1^2}{x_2}$ 为实数, 则

$\sum_{k=0}^{2015} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k$ 等于 ()

- A 1 B 0 C $\sqrt{3}i$ D 前三个

答案都不对

9. 将 12 个不同的物体分成 3 堆, 每堆 4 个, 则不同的分法种类为 ()

A 34650 B 5940 C 495 D 前三个答案

都不对

10. 设 A 是以 BC 为直径的圆上的一点, D, E 是线段 BC 上的点, F 是 CB 延长线上的点, 已知 $BF = 4, BD = 2, BE = 5, \angle BAD = \angle ACD, \angle BAF = \angle CAE$, 则 BC 的长为 ()

A 11 B 12 C 13 D 前三个答案都不对

11. 两个圆内切于点 K , 大圆的弦 AB 与小圆切于点 L , 已知 $AK : BK = 2 : 5, AL = 10$, 则 BL 的长为 ()

A 24 B 25 C 26 D 前三个答案都不对

12. $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 且对任意实数 x 均有 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$, 则 $f(-\sqrt{5})$ 等于 ()

A 0 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{3}$ D 前三个答案都不对

13. 从一个正 9 边形的 9 个顶点中选 3 个使得它们是一个等腰三角形的三个顶点的方法数是 ()

A 30 B 36 C 42 D 前三个答案都不对

对

14. 已知正整数 a, b, c, d 满足 $ab = cd$, 则 $a + b + c + d$ 有可能等于 ()

A 101 B 301 C 401 D 前三个答案都不对

15. 三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$, 则 $x + y + z$ 等于 ()

A -1 B 0 C 1 D 前三个答案都不对

16. 已知 $a + b + c = 1$, 则 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ 的最大值与最小值的乘积属于区间 ()

A [10,1] B [11,12) C [12,1] D 前三个答

案都不对

17. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $BD = 6, \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$, 则四边形 $ABCD$ 的面积等于 ()

A $8\sqrt{3}$ B $9\sqrt{3}$ C $12\sqrt{3}$ D 前三个答案

都不对

18. $1! + 2! + 3! + \cdots + 2016!$ 除以 100 所得的余数为 ()

A 3 B 13 C 27 D 前三个答

案都不对

19. 方程组 $\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5 \end{cases}$ 的实数解的组数为 ()

A 5 B 6 C 7 D 前三个答案都不对

20. 方程 $(\frac{x^3+x}{3})^3 + \frac{x^3+x}{3} = 3x$ 的所有实根的平方和等于 ()

A 0 B 2 C 4 D 前三个答案都不对

2016 年北京大学博雅计划数学试题答案

ABCD A BDBDA BCABD CBBCC

略解:

1. 由于 $(-e^{x+a})' = -e^{x+a}$, 于是切点横坐标为 $x = -a$, 从而有 $-(-a) + 2 = -e^{-a+a}$, 解得 $a = -3$.

2.不妨假设 $0 < a \leq b \leq c, a+b > c$

(1)正确, 因为有 $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \geq \sqrt{a+b} - \sqrt{c} > 0$; (2)错误, $a=2, b=3, c=4$ 即为反例;

(3)正确, 因为有 $\frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2} - \frac{b+c}{2} = a > 0$;

(4)正确, 因为有 $(|a-b|+1) + (|b-c|+1) - (|c-a|+1) > |(a-b) + (b-c)| - |c-a| = 0$

3.如图, 连接 CF , 由于 $\triangle DOE$ 与 $\triangle DFC$ 相似, 因此 $DO \cdot DC = DE \cdot DF$, 从而

$$DO^2 = 24 \times 21,$$

$$\text{因此 } OE = \sqrt{DE^2 - DO^2} = 6\sqrt{2}$$

4.满足 $x \in (0,1)$ 且 $f(x) > \frac{1}{7}$ 的 x 的个数为 11, 分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$.

5.根据题意, 有 $(x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - c) = x^4 + ax^2 + bx + c$,

于是 $a = -c - 10, b = 3c - 3$, 从而 $a + b - 2c = -13$.

6.令 $\log_2 k = x$, 则 $a + x, a + \frac{1}{2}x, a + \frac{1}{3}x$ 成等比数列, 从而 $x = -4a$, 进而可得公比为 $\frac{1}{3}$.

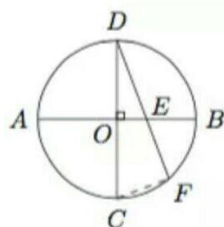
$$\begin{aligned} 7. \text{根据题意, 有 } \cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cdots \cos \frac{10\pi}{11} &= (\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \cos \frac{8\pi}{11}) \\ (\cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{6\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} \cos \frac{9\pi}{11} \cos \frac{10\pi}{11}) &= -(\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{8\pi}{11} \cos \frac{16\pi}{11})^2 \\ &= -\frac{1}{1024} \end{aligned}$$

8. 因为一元二次方程的虚根必然共轭, 因此可设

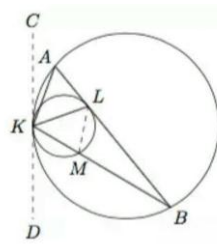
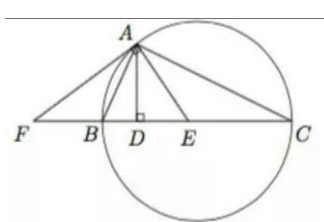
$$x_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta), x_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta),$$

从而 $\frac{x_1^2}{x_2} = r(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ 为实数, 所以 $\theta = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 于是

$$\frac{x_1}{x_2} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3},$$



$$\text{所以 } \sum_{k=0}^{2015} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2016}}{1 - \frac{x_1}{x_2}} = 0.$$



$$9. \text{不同分法数有 } \frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_3^3} = 5775.$$

10. 因为 $\angle BAF = \angle CAE$, 于是 $AE \perp AF$, 又因为 $\angle BAD = \angle ACD$, 于是 $AD \perp BC$, 故 $AD^2 = DE \cdot DF = DB \cdot DC$, 解得 $DC = 9$, 从而 $BC = 11$

11. 如图, 设 BK 与小圆交于点 M , 连接 ML , CD 为两圆在 K 处的公切线, 由弦切角定理得:

$\angle DKM = \angle BAK = \angle KLM$, 又 $\angle KLA = \angle KML$, 所以 $\angle AKL = \angle BKL$, 因此由角平分线定理可得:

$$AL : BL = AK : BK, \text{从而可得 } BL = 25$$

$$12. \text{分别令 } x = 0, 1, -1, \text{ 可得 } \begin{cases} 2f(0) + f(-1) = 1, \\ 2f(1) + f(0) = 1, \\ 2f(-1) + f(0) = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } f(0) = f(1) = f(-1) = \frac{1}{3}, \text{ 再令}$$

$$x = -\sqrt{2}, \text{ 可得: } 2f(-\sqrt{2}) + f(1) = 1, \text{ 从而 } f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$$

13. 以正 9 边形的某个顶点为等腰三角形的底边所对顶点的等腰三角形有 4 个, 其中有一个是等边三角形, 因此所有的方法数为 $3 \times 9 + \frac{1 \times 9}{3} = 30$

14. 考虑 $a =$, $m = n$. 则 $a + b + c + d =$

于是 $a + b + c + d$ 不是质数即可, 如 $301 = 7 \cdot 43 = (1 + 6)(1 + 42)$

于是取 $a = 1, b = 252, c = 42, d = 6$ 可得答案

15. 设 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2 = m$ 则 x, y, z 是关于 t 的方程 $t^3 - 3t = m$ 的三个实根,

其中 m 为常数,

由韦达定理可知 $x + y + z = 3$ 。

16. 设函数 $f(x) = \sqrt{4x+1}$, 则其导函数 $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$, 做出函数 $f(x)$ 的图像, 函数

$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处的切线

$y = \frac{2\sqrt{21}}{7}(x - \frac{1}{3}) + \frac{\sqrt{21}}{3}$, 以及函数 $f(x)$ 的图像过点 $(-\frac{1}{4}, 0)$ 和 $(\frac{3}{2}, \sqrt{7})$ 的割线

$y = \frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}$, 如图

于是可得 $\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}} \leq \sqrt{4x+1} \leq \frac{2\sqrt{21}}{7}(x - \frac{1}{3}) + \frac{\sqrt{21}}{3}$,

左侧等号当 $x = -\frac{1}{4}$ 或 $x = \frac{3}{2}$ 时取得; 右侧等号当 $x = \frac{1}{3}$ 时取得, 因此原式的最大值为 $\sqrt{21}$,

当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取得; 最小值为 $\sqrt{7}$, 当 $a = b = -\frac{1}{4}, c = \frac{3}{2}$ 时取得, 从而原式最

大最小值的乘积 $7\sqrt{3} = \sqrt{147} \in [\sqrt{144}, \sqrt{169}]$ 。

17. 如图, 连接 AC , 有 $CD = AD$ 且 $AC = \sqrt{3}AD$, 则有托勒密定理可得

$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, 即 $AD(AB + BC) = 6\sqrt{3}AD$,

于是 $AB + BC = 6\sqrt{3}$, 进而 $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{3}{2}(AB + BC) = 9\sqrt{3}$ 。

18. 由于当 $n \geq 10$ 且 $n \in N$ 时, $100 | n!$, 于是

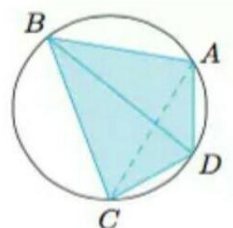
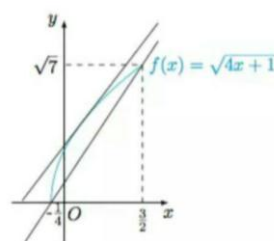
$$1! + 2! + 3! + \dots + 2016! \equiv 1! + 2! + 3! + \dots + 9! \pmod{100}$$

$$\equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 \pmod{100} \equiv 13 \pmod{100}$$

19. 顺次记方程中的方程为①, ②, ③, 则①×③-②²可得 $xy^2(x-y)^2 = 0$ 从而 $x = 0$ 或 $y = 0$

或 $x = y$

情形一: $x = 0$ 或 $y = 0$ 此时可得 $(x, y, z) = (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, -1)$



情形二： $x = y$ 此时可得

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

综上所述，原方程共有 7 组实数解。

20. 令 $f(x) = \frac{x^3 + x}{3}$ ，则原方程等价于 $f(f(x)) = x$ ，因为函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数，故

原方程又等价于 $f(x) = x$ ，所以原方程的所有实根为 $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ，其平方和为 4。

五、北京大学 2015 年自主招生笔试试题

(一) 语文试题

2015 年北京大学自主招生选拔考试

语文部分回忆版

创知路收集了本年自主招生考试中的一些有价值的题目，并编写答案与评析，供同学们学习、参考。同时，根据考生的回忆，2015 年真题中，有大量与创知路教材上，方法相同，具体解答极度类似的题目。语文真题虽然难以压中原题，但相似题目的参考价值极大，望能帮助同学备考。

一、选择题

1. 教室里（ ）下来，大家都在苦思冥想老师给出的问题。
A、沉寂 B、寂静 C、冷静
2. 问“令堂大人安”，“令堂”指的是（ ）
A、父亲 B、母亲 C、女儿
3. “诗哲”指的是（ ）
A、郭沫若 B、艾青 C、徐志摩
4. 以下句子出自艾青诗歌的是（ ）
A、雪花落在中国的土地上
B、卑鄙是卑鄙者的通行证
C、我家窗外两棵树，一棵是枣树，还有一棵也是枣树
5. 以下句子不是写友情的是（ ）
A、人生不相见，动如参与商
B、渭北春天树，江东日暮云
6. 以下诗歌最可能描写的是（ ）
把你的影子剪下来
风干 撒上盐
腌起来
等老了以后
下酒吃
A、爱情 B、牛肉干
7. 北岛有一首诗只有一个字“网”，最可能写的是（ ）
A、自由 B、生活

2015年北京大学自主招生选拔考试

语文部分回忆版

参考答案

1. A

解析:

【沉寂】非常寂静，听不见一丝声音；沉寂可以用于从动而静的变化过程；

【寂静】没有声音，安静或者宗教指摆脱一切烦恼忧患的纯静心境；

【冷静】冷清寂寞，不热闹或者（人）沉着而不感情用事。

2. B

解析：“令”为会意字。甲骨文字形，上面是“集”，下面是“人”，象跪在那里听命。引申为敬意，敬辞，用于对方的亲属或有关系的人。“堂”为形声字。从土，尚声。本义：殿堂。引申为堂室（内室），古代内室专指女性。所以敬称别人的母亲为令堂、萱堂。类似的用法还有令尊（对他人父亲的敬称），令郎（对他人儿子的敬称）和令爱（对他人女儿的敬称）。

3. C

解析：徐志摩的笔名之一是“诗哲”。

4. A

解析：A选自艾青的《雪落在中国的土地上》一诗；B选自北岛的《回答》一诗；C选自鲁迅先生的《秋夜》一文。

5. 此题回忆选项尚未收录齐全，A、B选项均非正确答案

解析：A出自杜甫《赠卫八处士》一诗，此诗作于诗人被贬华州司功参军之后。诗中描述偶遇少年知交的情景，抒写了人生聚散不定，故友相见格外亲。然而暂聚忽别，却又觉得世事渺茫，无限感慨。选项中两句诗的意思是“世间上的挚友真难得相见，好比此起彼落的参星与商星这两个星宿。”

B出自杜甫《春日忆李白》一诗，此诗抒发了作者对李白的赞誉和怀念之情。选项中的两句诗意思是“如今，我（杜甫）在渭北独对着春日的树木，而你（李白）在江东远望那日暮薄云，天各一方，只能遥相思念。”

6. A

解析：原诗是台湾女诗人夏宇的诗《甜蜜的复仇》，这首《甜蜜的复仇》是对一生概括，过去的一个人，穿过四季，走过风尘仆仆的岁月，加一点盐，封存起来，腌制起来。如果来不及，那就等到老的时候，再回想，慢慢地忆起，下酒。

7. B

解析：原诗的标题即为“生活”。

(二) 数学试题

2015 年清华北大自主招生部分试题

2015 年自主招生，涉及到数学学科的考试有，北京大学博雅计划测试，清华大学自主招生，北大自主招生。

创知路收集了本年自主招生考试中的一些有价值的题目，并编写答案与评析，供同学们学习、参考。同时，根据考生的回忆，2015 年真题中，有大量与创知路教材上，方法相同，具体解答极度类似的题目。清华数学 30 题，基本上原题有 6 题，相似题目更多，博雅数学有 2 题完全相同。

所以，创知路特别在本年度真题集后，添加三套创知路数学模拟题。这些模拟题，都是创知路在过去与各个中学合作时，专门编写向学校提供的。同学们可以练习、思考，把握其中自主招生出题的逻辑。

1. 求满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}$ 的正整数对 (x, y) 的个数.

2、(博雅) 某人上楼要走 10 阶台阶，每次可上 1 阶或 2 阶，则共有几种不同的上法？

3、复数 z 满足 $|z-i| - |z-1| = 2$ ，则其在复平面上的轨迹为 ()

A. 抛物线 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 双曲线的一支

4、(博雅) 点 P 在正方形 $ABCD$ 内，满足 $AP = 2BP$ ， $CP = 3BP$ ，求 $\angle APB$ 的度数.

5、(博雅) 已知复数 z 满足 $|z - \bar{z}| = 2\sqrt{2}$ ，且 $\frac{\bar{z}}{z^2}$ 为纯虚数，求 $|z|$ 。

6、分别求出正十五边形任三个顶点所构成的锐角三角形及钝角三角形的个数。

7、设点 O 为 $\triangle ABC$ 外心， $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，试求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值。(创知路自主招生数学教程 P60 点积的例题)

8、已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_n = n(n+1)(n+2)$ ，则 (1) a_n 是否可能为完全平方数？

(2) a_n 是否可能为完全立方数？ (3) 2015 是否属于 $\{a_n\}$ ？

5、(博雅) 已知复数 z 满足 $|z - \bar{z}| = 2\sqrt{2}$ ，且 $\frac{\bar{z}}{z^2}$ 为纯虚数，求 $|z|$ 。

6、分别求出正十五边形任三个顶点所构成的锐角三角形及钝角三角形的个数。

7、设点 O 为 $\triangle ABC$ 外心， $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，试求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值。

8、已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_n = n(n+1)(n+2)$ ，则 (1) a_n 是否可能为完全平方数？

(2) a_n 是否可能为完全立方数？ (3) 2015 是否属于 $\{a_n\}$ ？

9、已知 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，试求 $\frac{1}{(\sin \theta + i \cos \theta)^2} + \frac{1}{(\sin \theta + i \cos \theta)^3}$ 的值。

10、(清华) 函数 $f(x)$ 定义在 $(-1, 1)$ 上，满足 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ ，且有当 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，试判断 $f(x)$ 的奇偶性与单调性。

11、(北大) 已知 $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ ，则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，求 S_{2015} 。

12、(北大) 从 1~99 中选出 50 个不同的整数，满足任两个数的和不大于 99，则这 50 个数的和可能为 ()
A. 3524 B. 3624 C. 3724 D. 以上选项均不对

13、(北大) 已知复数 z_1 的模为 2，则复数 $\frac{\bar{z}_1 - z_2}{4 - z_1 z_2}$ 的模为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

7. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条切线与 x, y 轴交于 A, B 两点, 则三角形 AOB 的面积的最小值为 _____.
8. 已知 $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 _____.
9. 已知点集 $M = \{(x, y) | \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy\}$, 则平面直角坐标系中区域 M 的面积为 _____.
10. 现要登上 10 级台阶, 每次可以登 1 级或 2 级, 则不同的登法共有 _____ 种.



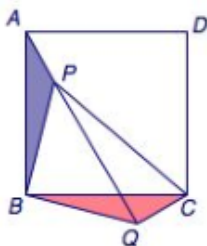
参考答案

一、选择题

1、B. 提示 n 模 4 余 1, 2, 3 均可.

2、D. 提示 利用面积确定三边长, 答案为 $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

3、B. 提示 如图旋转.



4、D. 提示 $(x-2015)(y-2015)=2015^2=5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$, 因此 (x, y) 共有 14 对.

5、C. 提示 注意 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$.

二、填空题

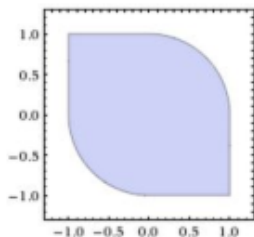
6、 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$. 提示 根据已知 $\left| r \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right| = \sqrt{3}$, 其中 r 为 $|\alpha|$, $k \in \mathbb{Z}$, 因此

$r=2\sqrt{3}$ 或 $r=\sqrt{3}$, 对应的 $\alpha=3+\sqrt{3}i$ 或 $\alpha=\sqrt{3}i$.

7、 ab . 提示 仿射变换.

8、 $\frac{1}{2}$. 提示 注意题中方程为两条互相垂直的直线.

9、 $2+\frac{\pi}{2}$. 提示 如图.



10、89. 提示 递推.

七、北约 2014 年数学试题及答案

2014 年北约自主招生数学试题

1. 圆心角为 60° 的扇形面积为 6π , 求它围成的圆锥的表面积.
2. 将 10 个人分成 3 组, 一组 4 人, 两组各 3 人, 有多少种分法.
3. 如果 $f(x) = \lg(x^2 - 2ax + a)$ 的值域为 R , 求 a 的取值范围.
4. 设 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$, 且 $f(1)=1, f(4)=7$, 求 $f(2014)$.
5. 已知 $x+y=-1$ 且 x, y 都是负数, 求 $xy + \frac{1}{xy}$ 的最值.
6. 已知 $f(x) = \arctan \frac{2+2x}{1-4x} + c$ 在 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 上是奇函数, 求 c .

7. 证明 $\tan 3^\circ$ 是无理数.

8. 已知实系数二次函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $3f(x) + g(x) = 0$ 和 $f(x) - g(x) = 0$ 都有双重实根, 如果已知 $f(x) = 0$ 有两个不同的实根, 求证 $g(x) = 0$ 没有实根.

9. a_1, a_2, \dots, a_{13} 是等差数列, $M = \{a_i + a_j + a_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 13\}$, 问: $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 是否可以同时在 M 中, 并证明你的结论.

10. 已知 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$, 且 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 求证: $(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n$.



2014 年北约自主招生试题参考答案

- 【解】设扇形的半径为 r , 则由 $6\pi = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} r^2$, 得 $r = 6$.
于是扇形的弧长为 $l = \frac{\pi}{3} \times 6 = 2\pi$, 其即为圆锥的底面周长, 于是圆锥的底面半径为 1,
所以底面面积为 $\pi \times 1^2 = \pi$, 也所以圆锥的表面积为 $S = 6\pi + \pi = 7\pi$.
- 【解】由题知所有分组方法有 $N = \frac{C_{10}^3 C_7^3 C_4^4}{A_2^2} = 2100$ 种.
- 【解】由题意 $u = x^2 - 2ax + a$ 的值域包含区间 $(0, +\infty)$, 则 $u = x^2 - 2ax + a$ 与 x 有交点,
故 $\Delta = (-2a)^2 - 4a \geq 0$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq 0$.
- 【解】由 $f(1) = 1, f(4) = 7$ 得 $f(2) = f(\frac{4+2 \times 1}{3}) = \frac{f(4) + 2f(1)}{3} = 3$;
 $f(3) = f(\frac{1+2 \times 4}{3}) = \frac{f(1) + 2f(4)}{3} = 4$, 由数学归纳法可推导得 $f(n) = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$,
所以 $f(2014) = 4027$.
- 【解】由 $x < 0, y < 0$ 可知, $x + y = -1 \Rightarrow |x + y| = 1 \Rightarrow |x| + |y| = 1$,
所以 $|xy| = |x| \times |y| \leq \frac{(|x| + |y|)^2}{4} = \frac{1}{4}$, 即 $xy \in (0, \frac{1}{4}]$,
令 $t = xy \in (0, \frac{1}{4}]$, 则易知函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上递减, 所以其在 $(0, \frac{1}{4}]$ 上递减,
于是 $xy + \frac{1}{xy}$ 有最小值 $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, 无最大值.
- 【解】奇函数 $f(0) = 0$, 故 $c = -\arctan 2$.
- 【证明】由三角公式 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$,
若 $\tan 3^\circ$ 是有理数, 则 $\tan 6^\circ, \tan 12^\circ, \tan 24^\circ$ 为有理数, 再由 $\tan 6^\circ$ 和 $\tan 24^\circ$ 可得 $\tan 30^\circ$ 为有理数, 这与 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 为无理数矛盾! 因此, $\tan 3^\circ$ 是无理数.
- 【证】由题可设 $3f(x) + g(x) = a_1(x - b_1)^2, f(x) - g(x) = a_2(x - b_2)^2$, 其中 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$,
则 $f(x) = \frac{1}{4}[a_1(x - b_1)^2 + a_2(x - b_2)^2], g(x) = \frac{1}{4}[a_1(x - b_1)^2 - 3a_2(x - b_2)^2]$,
由 $f(x) = 0$ 有两个不同的实根, 则必有 a_1, a_2 异号, 且 $a_1 + a_2 \neq 0$,
此时 $f(x) = \frac{1}{4}[(a_1 + a_2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + a_1b_1^2 + a_2b_2^2]$,
即 $\Delta = 4(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4(a_1 + a_2)(a_1b_1^2 + a_2b_2^2) = -4a_1a_2(b_1 - b_2)^2 > 0$, 所以 $b_1 \neq b_2$,
故此时观察 $g(x) = \frac{1}{4}[a_1(x - b_1)^2 - 3a_2(x - b_2)^2]$ 可知,
 $a_1, -3a_2$ 同号, 且 $a_1 - 3a_2 \neq 0, b_1 \neq b_2$, 故 $g(x) > 0$ 恒成立, 即证明 $g(x) = 0$ 没有实根.
- 【解】不可以同时在 M 中, 下面给予证明. 假设 $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 同时在 M 中,

设 $a_k = a + kd (1 \leq k \leq 13, k \in \mathbb{N}^*)$, 其中 d 为公差, 则

$$M = \{3a + (i + j + k)d \mid 1 \leq i < j < k \leq 13\} = \{3a + md \mid 6 \leq m \leq 36, m \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\text{于是存在正整数 } 6 \leq x, y, z \leq 36, \text{ 使得 } \begin{cases} 3a + xd = 0, \\ 3a + yd = \frac{7}{2}, \\ 3a + zd = \frac{16}{3} \end{cases} \text{ 从而 } \begin{cases} (y-x)d = \frac{7}{2}, \\ (z-x)d = \frac{16}{3} \end{cases}$$

也所以 $\frac{y-x}{z-x} = \frac{21}{32}$, 由于 21, 32 互质, 且 $y-x, z-x$ 为整数, 则有 $|y-x| \geq 21, |z-x| \geq 32$,

但 $|z-x| \leq 36 - 6 = 30$, 矛盾! 假设错误, 即证明 $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 不可以同时在 M 中.

10. 【证】(一法: 数学归纳法) ① 当 $n=1$ 时, 左边 $\sqrt{2} + x_1 = \sqrt{2} + 1 \geq \sqrt{2} + 1 =$ 右边, 不等式成立;

② 假设 $n=k (k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*)$ 时, 不等式 $(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_k) \geq (\sqrt{2} + 1)^k$ 成立.

那么当 $n=k+1$ 时, 则 $x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = 1$, 由于这 $k+1$ 个正数不能同时都大于 1, 也不能同时都小于 1, 因此存在两个数, 其中一个不大于 1, 另一个不小于 1, 不妨设 $x_k \geq 1, 0 < x_{k+1} \leq 1$,

从而 $(x_k - 1)(x_{k+1} - 1) \leq 0 \Rightarrow x_k + x_{k+1} \geq 1 + x_k x_{k+1}$, 所以

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_k)(\sqrt{2} + x_{k+1}) \\ &= (\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_k)(x_k + x_{k+1} + \sqrt{2} - 1) \\ & \geq (\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_k)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^{k+1} \end{aligned}$$

其中推导上式时利用了 $x_1 x_2 \cdots x_{k-1} (x_k x_{k+1}) = 1$ 及 $n=k$ 时的假设, 故 $n=k+1$ 时不等式也成立.

综上①②知, 不等式对任意正整数 n 都成立.

(二法) 左边展开得 $(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n)$

$$= (\sqrt{2})^n + (\sqrt{2})^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i + (\sqrt{2})^{n-2} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) + \cdots + (\sqrt{2})^{n-k} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \right) + x_1 x_2 \cdots x_n$$

由平均值不等式得

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \geq C_n^k \left(\prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \right)^{\frac{1}{C_n^k}} = C_n^k ((x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}})^{\frac{1}{C_n^k}} = C_n^k$$

故 $(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n)$

$$\geq (\sqrt{2})^n + (\sqrt{2})^{n-1} C_n^1 + (\sqrt{2})^{n-2} C_n^2 + \cdots + (\sqrt{2})^{n-k} C_n^k + \cdots + C_n^n \sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^n, \text{ (即证)}$$

(三法) 由平均值不等式有

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + x_k} \geq n \left(\prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + x_k} \right)^{\frac{1}{n}} \cdots \cdots \textcircled{1}; \quad \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sqrt{2} + x_k} \geq n \left(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{\sqrt{2} + x_k} \right)^{\frac{1}{n}} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } n \geq n \cdot \frac{\sqrt{2} + (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod_{k=1}^n \sqrt{2} + x_k \right)^{\frac{1}{n}}}, \text{ 即 } (\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n \text{ 成立.}$$

八、北京大学 2014 年综合营试题

(一) 英语

60 道机读选择近一半考词汇，还有 demand 从句省略 should 之类的语法点

完型一篇

阅读三篇估计阅读是北大老师自己出的，因为设问方式比较奇怪，不过并不很难为人.....

一道 15 空的选词填空；

一道 10 个空的短文改错；

总的讲难度大概在四级上下，题型、考点都很常规

(二) 数学

一共 5 道题，每道 20 分

1、 $f(x)=ax^2+8x+b, g(x)=bx^2+8x+a, f(x)_{\min}+g(x)_{\min}=0$, 求 $f(x)_{\min}, g(x)_{\min}$

2、 $\sin x, \sin y, \sin z$ 严格递增的等差数列，求证： $\cos x, \cos y, \cos z$ 构不成等差数列

3、在实数域有定义的实值函数 $f(x)$ ，问是否存在 $f(n)$ ，对任意整数 n ，
 $f(-n^2+3n+1)=f(n)^2+2$

4、抛物线上 A、B 两点，两点切线交点 K，A、B 中点 C，求证：KC 中点在抛物线上

5、正 n 边形 $A_1A_2A_3\ldots A_n$ ，在 A_kA_{k+1} 的延长线上取 B_{k+1} ，使所有的三角形 $A_{k+1}B_{k+1}B_{k+2}$ 周长相等，求证：所有的三角形 $A_{k+1}B_{k+1}B_{k+2}$ 全等

(三) 语文

1、选择题：稀奇古怪的，举个例子：

“不好吃”有几种意思？ A.1 B.2 C.3

古代“反切”的注音方法

哪个对联对得最差？ A.乌衣巷-朱雀桥 B.云梦泽-波月亭 C.孙行者-韩退之

哪个简称的简化方式与另外三个不同？ A.北大 B.清华 C.南开 D.复旦

2、文言文翻译《淮南子·主术训》(30分)

凡人之论心欲小而志欲大智欲员而行欲方能欲多而事欲鲜所以心欲小者虑患未生备祸未发戒过慎微不敢纵其欲也志欲大者兼包万国一齐殊俗并覆百姓若合一族是非辐凑而为之穀智欲员者环复转运终始无端旁流四达渊泉而不竭万物并兴莫不响应也行欲方者直立而不挠素白而不污穷不易操通不肆志能欲多者文武备具动静中仪举动废置曲得其宜无所击戾无不毕宜也事欲鲜者执柄持术得要以应众执约以治广处静持中运于璇枢以一合万若合符者也故心小者禁于微也志大者无不怀也智员者无不知也行方者有不为也能多者无不治也事鲜者约所持也

3、阅读理解(20分)

面朝大海，春暖花开

海子

从明天起，做一个幸福的人

喂马，劈柴，周游世界

从明天起，关心粮食和蔬菜

我有一所房子，面朝大海，春暖花开

从明天起，和每一个亲人通信

告诉他们我的幸福

那幸福的闪电告诉我的

3 官方微信公众号：zizzsw

4 官方网站：www.zizzs.com

咨询热线：010-5601 9830

微信客服：zizzs2018

我将告诉每一个人

给每一条河每一座山取一个温暖的名字

陌生人，我也为你祝福

愿你有一个灿烂的前程

愿你有情人终成眷属

愿你在尘世获得幸福

我只愿面朝大海，春暖花开

一、结合第一节的几个意象，谈谈你对海子的幸福观的内涵的理解（8分）

二、从二、三节，可以看出海子怎样的思想意境（7分）

三、海子在完成此诗两个月之后就卧轨自杀了，谈谈你对写作与现实的差距的理解（5分）

4、作文（40分）

近年来，北大清华的校园对游客、旅游团开放，游人众多，且乱丢垃圾，把大学弄得像农贸市场，影响了大学的教学、生活秩序。因此，北大保卫部声明只对中学生旅游团开放，谢绝小学生、成人旅游团游览。

对此决定，社会各界表示不满。家长说：北大的校园环境、文化氛围可以鼓励孩子树立理想，坚定信心。更有人说，北大一向以自由和民主标榜，此行为是对自由和民主的践踏。北大是每一个纳税人的北大，任何一个纳税人都有权利进入北大。

以“暑期的北大校园”为题，完成作文，700~800字

（四）化学

1、制 Na，电解熔融 NaOH 的方程式阳极： 阴极：

用 NaOH 与电解熔融 NaCl 制 Na 相比的主要缺点：

2、在 NaOH、 NH_4NO_3 中加 FeCl_3 、 MgCl_2 , FeCl_3 两次出沉淀一样多, MgCl_2 一次多, 一次少一些。问: 哪个更容易出沉淀? 为何 MgCl_2 在 NH_4NO_3 中出沉淀少呢?

3、吸收 SO_2 废气, 分别用碳酸钠, 柠檬酸钠, 氨水, 写方程式 (柠檬酸, 用 H_3C 表示; 给了碳酸、柠檬酸、亚硫酸两/三次电离分别的平衡常数)

4、照片显影剂 $\text{AgBr} + h\nu \rightleftharpoons \text{Ag} + \text{Br}_2$ 光照时显影; 遮光镜片也用此反应, 光照时变深, 光暗时变浅, 问为何显影剂反应不可逆, 遮光镜片里反应可逆 (为什么呀为什么呀为什么呀.....)

5、1) 三聚乙醛的结构式

2) 列表给了碳碳、氮氮单、双、三键键能的六个数据, 最稳固的派 π 键是? 最脆弱的派 π 键是? 为啥呢?

6、 $200\text{m}^3\text{NH}_3$, 一半制 HNO_3 , 另一半与 HNO_3 制 NH_4NO_3 , 第一二三步产率 99%, 99%, 98%, 剩多少原料?

7、电解 RCOONa 水溶液, 阳极得 CO_2 、 R-R , 阴极方程式? 电解等物质的量的 RCOONa 、 $\text{R}'\text{COONa}$ 水溶液, 求产物及产物的摩尔数之比

8、 RCOOAg 和卤素 X_2 反应的方程式?

若 X_2 是 I_2 , 已知反应物系数写方程式。 $2\text{RCOOAg} + 2\text{I}_2 \rightleftharpoons$?

$3\text{RCOOAg} + 2\text{I}_2 \rightleftharpoons$?

九、北京大学 2014 年夏令营其他试题

(一) 语文

- 1•基础题，给一句话，中间缺一个“自”“是”一类的关键词，填空。
 - 2•零碎的基础，有字形，可能照顾到南方口音差异故而不考字音；有“判断下列诗句哪个出自某诗人之手”的题目，难度不大。
 - 3•给一篇千字左右的文章，介绍了一个国际化学年会，要求缩写成三百字报告。
 - 4•给一段无标点的古文，全文翻译。今年是<<韩非子>>
 - 5•40分作文，记夏令营两三事，可叙可议，最好要打破高考作文定势，要求思维活跃流畅，写得酣畅淋漓最好，也没有范围不允许你批判社会什么的，就算是痛批北大，若有思想高度，有理有据，一样会得高分。
- 英语 难度较大，对于我这种当时从未想过背四六级的人~建议早早开始背诵四六级词汇书。没有作文。

（二）数学

全是大题。文科做前五题，难度中等，据学长说今年偏难。第一题是函数，属高考范围；第二题是数论，要求对数论二次项定理有一定掌握；第三题名义上是三角函数，方法则是数学归纳法；第四题涉及不等式，作者用建坐标系，分析看圆与直线交点的奇葩方法做出来的，后来做高考题，发现好像是一道圆锥曲线的变式改编；最后一题还属数论，难度较大，给了两个分式，要求写出满足两个分式结果均为正数的所有取值。

建议学习奥赛初试的内容。

（三）物理

物理是五道大题，第一道是运动学，一个小球在圆框里跳；第二道是电路问题，应该要用Y-三角变换（其实也可以猜出来）；第三题是透镜成像，第四道是狭义相对论，这两道题在竞赛里并不算难

十、北京大学 2013 年综合营试题

数学卷

凸五边形 $ABCDE$ 满足 $AB = AE = DC = BC + DE = 1$, $\angle B = \angle E = 90^\circ$, 求这个五边形的面积。

已知 $f(x) = 2x^2 - ax + 7$, 若存在 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 满足 $f(\sin \varphi) = f(\cos \varphi)$, 求参数 a 的取值范围。

函数 $y = x^2 + ax + b$ 的图象与坐标轴交于三个不同点 A, B, C , 已知 $\triangle ABC$ 的外心位于直线 $y = x$ 上, 求 $a + b$ 的值。

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 14 项和 $a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = 77$, 若 a_1, a_{11} 均为正整数, 求 a_{18} 的值。

一个班有 n 个同学, 每个同学都有一个信息希望通过短信告诉别人, 若每次一个同学可以给另一同学发短信告诉他(她)自己已经知道的所有信息, 问同学们至少一共需要发送多少条短信才能使每个同学都知道所有信息?

声明: 本文信息综合来源于百度文库、数海拾贝兰琦、创知路教育帮及网络, 由自主招生在线团队(微信公众号: **zizzsw**) 综合整理制作, 如有侵权, 请及时联系管理员删除。

更多北大夏令营、自主招生政策, 请关注自主招生在线官方微信公众号: **zizzsw**。



微信扫一扫, 快速关注