清华大学 2015 年—2017 年自主招生笔试真题集锦

目录

一、清华大学 2017 年自主招生笔试考试模式 2
二、清华大学 2017 年自主招生笔试真题 2
三、清华大学 2016 年自主招生笔试考试模式 3
四、清华大学 2016 年自主招生笔试真题 3
（一）语文试卷要求 3
（二）数学试题 4
（三）物理试题 25
五、清华大学 2015 年自主招生笔试考试模式 30
六、清华大学 2015 年自主招生笔试真题 31
（一）数学试题 32
（二）物理试题 38

一、清华大学 2017 年自主招生笔试考试模式

2017 年清华大学自主招生考试分笔试和面试来进行，其中，笔试在全国 44 个城市设有 61 考点，相比 2016 年增加 25 个考点，其中，每个城市还设有多个考点。

（一）笔试时间

初试时间：2017 年 6 月 10 日上午 9：00-12：00

（二）笔试模式

清华大学初试采用笔试形式，考试科目为：数学与逻辑、理科综合(物化)、文科综合(文史)，学生依据填报的专业类参加其中两个科目的考试。初试结果将在报名系统内公布。

理科：数学 35 题，物理 20 题，化学 13 题，一共 68 题。

文科：数学 35 题，语文 12 题，历史 20 题。

据大多数考生表示，本次数学试题较易，物理难度较大，化学正常。

2017 年清华自主选拔的初试依旧采取机考形式，全部为客观选择题，直接在计算机上做答。根据去年的探索经验，机考不仅能保证阅卷及时准确，而且也大大降低了纸质试卷作弊的可能性，分发和回收考卷更为安全高效。

二、清华大学 2017 年自主招生笔试真题

1、A,B,C 是三角形的三个内角，求 sinA+sinBsinC 最大值

2、x+2y+3z=100 非负整数解组数

3、三棱锥 P—ABC 底面是边长为 3 的正三角形，PA,PB,PC 分别为 3.4.5，求三棱锥的体积

A:√10 B:3 C:√11 D:2√3

三、清华大学 2016 年自主招生笔试考试模式

2016 年清华有 754 人通过了自主招生初审。自主招生、筑梦、领军计划笔试共用一套试卷。2016 年自主招生、领军人才选拔一共在全国 29 个省市设 36 个初试考点，考生可根据的情况，就近选择相应的考试地点。

考试模式：机考系统分发和回收考卷。

试卷结构：试题不仅引入多选题，而且采用单选题、多选题混合编排的方式，用以区分不同水平的学生，也增加了能力考查的力度。多选题学生全部选对得满分，选对但不全得部分分，有选错的得 0 分。

科目分数：每科 100 分

考试内容：语文 30 题，数学 40 题，物理 30 题

考试时间：三个小时　8:30-11:30

四、清华大学 2016 年自主招生笔试真题

（一）语文试卷要求

阅读与表达对语文基础知识和语言文字的运用能力提出的更高的要求。

内容：除了涉猎字音、字形、词语、句子衔接等内容外，还考查了汉字书写的笔顺问题、书体知识、传统文化知识、《红楼梦》文本解读以及宋词的格律炼字等。代文阅读材料的体裁既有论说文，也有小说和诗歌。文言文的阅读语料未经断句标点，还新增了分析推理题，考查学生综合语文能力。

为了彻底杜绝靠猜测拿到部分分数的情况，语文试卷中的多项选择题要求全部正确才得分，

错选或少选不得分;

(二)数学试题

原卷40道题均为不定项选择题 这里收录的是回忆版试题 故将部分选择题改编为填空题。

1．已知函数$f(x)=\left(x^2+a\right)\mathrm{e}^x$有最小值，则函数$g(x)=x^2+2x+a$的零点个数为（　　）

A．0
B．1
C．2
D．取决于a的值

2．已知$\triangle ABC$的三个角A,B,C所对的边分别为a,b,c．下列条件中，能使得$\triangle ABC$的形状唯一确定的有（　　）

A．$a=1,\ b=2,\ c\in\mathbf{Z}$

B．$A=150^\circ$，$a\sin A+c\sin C+\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$

C．$\cos A\sin B\cos C+\cos(B+C)\cos B\sin C=0$，$C=60^\circ$

D．$a=\sqrt{3},\ b=1,\ A=60^\circ$

3．已知函数$f(x)=x^2-1$，$g(x)=\ln x$．下列说法中正确的有（　　）

A．$f(x)$与$g(x)$在点$(1,0)$处有公切线

B．存在$f(x)$的某条切线与$g(x)$的某条切线互相平行

C．$f(x)$与$g(x)$有且只有一个交点

D．$f(x)$与$g(x)$有且只有两个交点

4．过抛物线$y^2=4x$的焦点F作直线交抛物线于A,B两点，M为线段AB的中点．下列说法中正确的有（　　）

A．以线段AB为直径的圆与直线$x=-\frac{3}{2}$一定相离

B．$|AB|$的最小值为4

C．$|AB|$的最小值为2

D．以线段BM为直径的圆与y轴一定相切

5．已知F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$是椭圆$C$上一点．下列说法中正确的有（　　）

A．$a=\sqrt{2}b$时，满足$\angle F_1PF_2=90^\circ$的点P有2个

B．$a>\sqrt{2}b$时，满足$\angle F_1PF_2=90^\circ$的点P有4个

C．$\triangle PF_1F_2$的周长小于$4a$

D．$\triangle PF_1F_2$的面积小于等于$\frac{a^2}{2}$

6．甲、乙、丙、丁四个人参加比赛，有两人获奖．比赛结果揭晓之前，四个人作了如下猜测．
甲：两名获奖者在乙、丙、丁中；
乙：我没有获奖，丙获奖了；
丙：甲、丁中有且只有一人获奖；
丁：乙说得对．
已知四个人中有且只有两个人的猜测是正确的，那么两名获奖者是（　　）

A．甲
B．乙
C．丙
D．丁

7．已知AB为圆O的一条弦（非直径），$OC\perp AB$于C．P为圆O上任意一点，直线PA与直线OC相交于点M，直线PB与直线OC相交于点N．以下说法正确的有（　　）

A．O,M,B,P四点共圆

B．A,M,B,N四点共圆

C．A,O,P,N四点共圆

D．前三个选项都不对

8．$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$是$\triangle ABC$为锐角三角形的（　　）

A．充分非必要条件

B．必要非充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

9．已知x,y,z为正整数，$x\leqslant y\leqslant z$，那么方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$的解的组数为（　　）

A．8
B．10
C．11
D．12

10．已知集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，任取$1\leqslant i<j<k\leqslant n$，

$$a_i+a_j\in A,\ a_j+a_k\in A,\ a_k+a_i\in A$$

这三个式子中至少有一个成立，则n的最大值为（　　）

A．6
B．7
C．8
D．9

11．已知$\alpha=1^\circ$，$\beta=61^\circ$，$\gamma=121^\circ$，则下列各式中成立的有（　　）

A．$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=3$

B．$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=-3$

C．$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}=3$

D．$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}=-3$

12．已知实数a,b,c满足$a+b+c=1$，则$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$的最大值与最小值乘积属于区间（　　）

A．$(11,12)$
B．$(12,13)$
C．$(13,14)$
D．$(14,15)$

13．已知$x,y,z\in\mathbf{R}$，满足$x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2=1$，则下列结论正确的有（　　）

A．xyz的最大值为0

B．xyz的最小值为$-\dfrac{4}{27}$

C．z的最大值为$\dfrac{2}{3}$

D．z的最小值为$-\dfrac{1}{3}$

14．数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．对任意正整数$n$，以下说法中正确的有（　　）

A．$a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n$为定值

B．$a_n\equiv1\pmod 9$或$a_n\equiv2\pmod 9$

C．$4a_na_{n+1}-7$为完全平方数

D．$8a_na_{n+1}-7$为完全平方数

15．若复数z满足$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，则$|z|$可以取到的值有（　　）

A．$\frac{1}{2}$

B．$-\frac{1}{2}$

C．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

16．从正2016边形的顶点中任取若干个，顺次相连构成多边形，其中正多边形的个数为（　　）

A．6552
B．4536
C．3528
D．2016

17．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$l_1:y=\frac{1}{2}x$，$l_2:y=-\frac{1}{2}x$，过椭圆上一点$P$作$l_1,l_2$的平行线，分别交$l_1,l_2$于$M,N$两点．若$|MN|$为定值，则$\sqrt{\frac{a}{b}}=$（　　）

A．$\sqrt{2}$
B．$\sqrt{3}$
C．2
D．$\sqrt{5}$

18．关于x,y的不定方程$x^2+615=2^y$的正整数解的组数为（　　）

A．0
B．1
C．2
D．3

19．因为实数的乘法满足交换律与结合律，所以若干个实数相乘的时候，可以有不同的次序．例如，三个实数a,b,c相乘的时候，可以有$(ab)c,\ (ba)c,\ c(ab),\ b(ca)\cdots$等等不同的次序．记$n$个实数相乘时不同的次序有$I_n$种，则（　　）

A．$I_2=2$

B．$I_3=12$

C．$I_4=96$

D．$I_5=120$

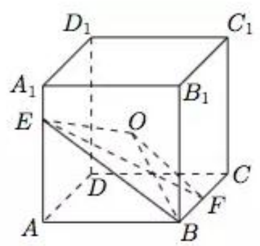
20．甲乙丙丁4个人进行网球淘汰赛，规定首先甲乙一组、丙丁一组进行比赛，两组的胜者争夺冠军．4个人相互比赛时的胜率如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
甲	–	0.3	0.3	0.8
乙	0.7	–	0.6	0.4
丙	0.7	0.4	–	0.5
丁	0.2	0.6	0.5	–

表中的每个数字表示其所在行的选手击败其所在列的选手的概率，例如甲击败乙的概率是0.3，乙击败丁的概率是0.4．那么甲赢得冠军的概率是__________．

21．在正三棱锥$P-ABC$中，$\triangle ABC$的边长为1．设点P到平面ABC的距离为x，异面直线AB与CP的距离为y，则$\lim\limits_{x\to\infty}y=$__________．

22．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，中心为O，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}$，则四面体$OEBF$的体积为__________．



23．$\int_0^{2\pi}(x-\pi)^{2n-1}\left(1+\sin^{2n}x\right)\mathrm{d}x=$_________．

24．实数x,y满足$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$，则$x^2+y^2$的最大值为_________．

25．x,y,z均为非负实数，满足$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$，则$x+y+z$的最大值为_________，最小值为_________．

26．O为$\triangle ABC$内一点，满足$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COA}=4:3:2$．设$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$_________．

27．已知复数$z=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，则$z^3+\frac{z^2}{z^2+z+2}=$_________．

28．已知z为非零复数，$\frac{z}{10}$和$\frac{40}{\overline{z}}$的实部和虚部均为不小于1的正数，则在复平面中，z所对应的向量$\overrightarrow{OP}$的端点P运动所形成的图形面积为_________．

29．若$\tan 4x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则

$$\frac{\sin 4x}{\cos 8x\cos 4x}+\frac{\sin 2x}{\cos 4x\cos 2x}+\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\_\_\_\_\_\_.$$

30．将16个数：4个1，4个2，4个3，4个4填入一个4×4的数表中，要求每行、每列都恰好有两个偶数，共有_________种填法．

31．A是集合$\{1,2,3,\cdots,14\}$的子集，从A中任取3个元素，由小到大排列之后都不能构成等差数列，则A中元素个数的最大值为_________．

答案及解析

1．C．

注意$f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot g(x)$．

2．AD．

对于选项A，由于$|a-b|<c<a+b$，于是c有唯一取值2，符合题意；
对于选项B，根据正弦定理，有

$$a^2+c^2+\sqrt{2}ac=b^2,$$

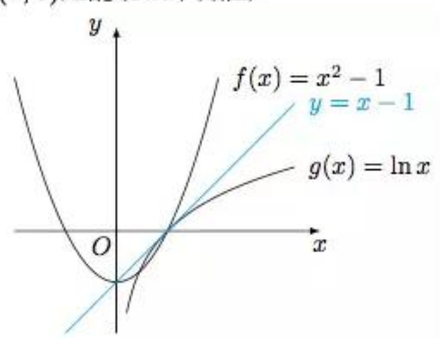
于是可得$\cos B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$B=135^\circ$，无解；
对于选项C，条件即

$$\cos A\cdot\sin(B-C)=0,$$

于是$(A,B,C)=(90^\circ,30^\circ,60^\circ),(60^\circ,60^\circ,60^\circ)$，不符合题意；
对于选项D，根据正弦定理，有$\sin B=\dfrac{1}{2}$，又$A=60^\circ$，于是$B=30^\circ$，$C=90^\circ$，符合题意．

3．BD．

注意$y=x-1$为函数$g(x)$在点$(1,0)$处的切线，如图．



4．AB．

对于选项A，点M到准线$x=-1$的距离为

$$\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|,$$

于是以线段AB为直径的圆与直线$x=-1$一定相切，进而与直线$x=-\frac{3}{2}$一定相离；
对于选项B和C，设$A\left(4a^2,4a\right)$，则$B\left(\frac{1}{4a^2},-\frac{1}{a}\right)$，于是

$$|AB|=4a^2+\frac{1}{4a^2}+2,$$

最小值为4．也可以将$|AB|$转化为AB的中点到准线的距离的两倍去得到最小值；
对于选项D，显然BD中点的横坐标与$\frac{1}{2}|BM|$不一定相等，因此命题错误．

5．ABCD．

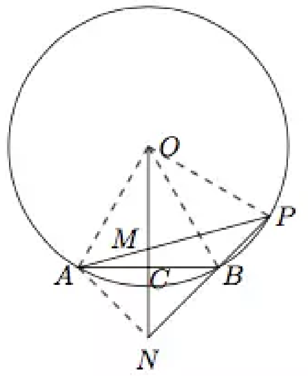
对于选项A和B，椭圆中使得$\angle F_1PF_2$最大的点P位于短轴的两个端点；
对于选项C，$\triangle F_1PF_2$的周长为$2a+2c<4a$；
对于选项D，$\triangle F_1PF_2$的面积为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sin\angle F_1PF_2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\\ \leqslant&\frac{1}{2}\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2.\end{aligned}$$

6．BD．

乙和丁同时正确或者同时错误，分类即可．

7．AC．



对于选项A，$\angle OBM=\angle OAM=\angle OPM$即得；
对于选项B，若命题成立，则MN为直径，必然有$\angle MAN$为直角，不符合题意；
对于选项C，$\angle MBN=\angle MOP=\angle MAN$即得．

8．B．

必要性：由于

$$\begin{aligned}\sin B+\sin C&>\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\\&=\sin B+\cos B>1,\end{aligned}$$

类似的，有$\sin C+\sin A>1$，$\sin A+\sin B>1$，于是

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C\\=&\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)\\=&\sum_{cyc}(\sin B+\sin C)\cos A\\>&\cos A+\cos B+\cos C.\end{aligned}$$

不充分性：
当$A=\frac{\pi}{2}$，$B=C=\frac{\pi}{4}$时，不等式成立，而$\triangle ABC$并非锐角三角形．

9．B．

由于$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x}$，故$3\leqslant x\leqslant 6$．

情形一 若$x=3$，则$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$，即$(y-6)(z-6)=36$，解得

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(3,7,42),\\(x,y,z)&=(3,8,24),\\(x,y,z)&=(3,9,18),\\(x,y,z)&=(3,10,15),\\(x,y,z)&=(3,12,12).\end{aligned}$$

情形二 若$x=4$，则$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$，即$(y-4)(z-4)=16$，解得

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(4,5,20),\\(x,y,z)&=(4,6,12),\\(x,y,z)&=(4,8,8).\end{aligned}$$

情形三 若$x=5$，则$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$，此时有

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{2}{y},$$

于是$y\leqslant\frac{20}{3}$，从而$y=5,6$，进而解得

$$(x,y,z)=(5,5,10).$$

情形四 若$x=6$，则$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$，即$(y-3)(z-3)=9$，解得

$$(x,y,z)=(6,6,6).$$

10．B．

不妨假设$a_1>a_2>\cdots>a_n$．若集合A中的正数的个数大于等于4，由于a_2+a_3和a_2+a_4均大于a_2，于是有

$$a_2+a_3=a_2+a_4=a_1,$$

所以$a_3=a_4$，矛盾．所以集合A中至多有3个正数．同理可知集合A中至多有3个负数．取$A=\{3,2,1,0,-1,-2,-3\}$，满足题意，所以n的最大值为7．

11．BD．

令$x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，$z=\tan\gamma$，则

$$\frac{y-x}{1+xy}=\frac{z-y}{1+yz}=\frac{x-z}{1+zx}=\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}y-x&=\sqrt{3}\left(1+xy\right),\\z-y&=\sqrt{3}\left(1+yz\right),\\x-z&=\sqrt{3}\left(1+zx\right),\end{aligned}$$

以上三式相加，即有

$$xy+yz+zx=-3.$$

类似的，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{xy}+1\right),\\\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{yz}+1\right),\\\frac{1}{z}-\frac{1}{x}&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{zx}+1\right),\end{aligned}$$

以上三式相加，即有

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=-3.$$

12．B．

设函数$f(x)=\sqrt{4x+1}$的图象，则其导函数

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}.$$

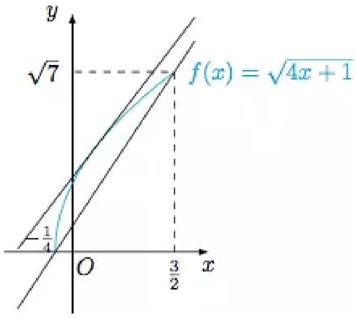
作出函数$f(x)$的图象，函数$f(x)$的图象在$x=\frac{1}{3}$处的切线

$$y=\frac{2\sqrt{21}}{7}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{21}}{3},$$

以及函数$f(x)$的图象过点$\left(-\frac{1}{4},0\right)$和$\left(\frac{3}{2},\sqrt{7}\right)$的割线

$$y=\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}},$$

如图．



于是可得

$$\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\leqslant\sqrt{4x+1}\leqslant\frac{2\sqrt{21}}{7}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{21}}{3},$$

左侧等号当$x=-\frac{1}{4}$或$x=\frac{3}{2}$时取得；右侧等号当$x=\frac{1}{3}$时取得．因此原式的最大值为$\sqrt{21}$，当$a=b=c=\frac{1}{3}$时取得；最小值为$\sqrt{7}$，当$a=b=-\frac{1}{4}$，$c=\frac{3}{2}$时取得．从而原式最大值与最小值的乘积为$7\sqrt{3}=\sqrt{147}\in(\sqrt{144},\sqrt{169})$．

13．ABD．

由$x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2=1$，可知$xy+yz+zx=0$．设$xyz=c$，则x,y,z是关于t的方程

$$t^3-t^2-c=0$$

的三个实根．令$f(t)=t^3-t^2-c$，利用导数可得

$$\begin{cases} f(0)=-c\geqslant 0, \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}-c\leqslant 0, \end{cases}$$

所以$-\dfrac{4}{27}\leqslant c=xyz\leqslant 0$，等号显然可以取到．故选项A，B都对．因为

$$(x+y)^2=(1-z)^2\leqslant 2\left(x^2+y^2\right)=2\left(1-z^2\right),$$

所以$-\dfrac{1}{3}\leqslant z\leqslant 1$，等号显然可以取到．故选项C错，选项D对．

14．ACD．

因为

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2-a_{n+3}a_{n+1} &= a_{n+2}^2-\left(6a_{n+2}-a_{n+1}\right)a_{n+1} \\ &= a_{n+2}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+2}\left(a_{n+2}-6a_{n+1}\right)+a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n, \end{aligned}$$

所以A正确．

由于$a_3=11$，故

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n &= a_{n+1}^2-\left(6a_{n+1}-a_n\right)a_n \\ &= a_{n+1}^2-6a_{n+1}a_n+a_n^2 \\ &= -7 \end{aligned}$$

对任意正整数恒成立，所以$4a_na_{n+1}-7=\left(a_{n+1}-a_n\right)^2$，$8a_na_{n+1}-7=\left(a_{n+1}+a_n\right)^2$，故C, D正确．

计算前几个数即可判断B错误．

注　若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=pa_{n+1}-a_n\ \left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n$为定值．

15．CD．

因为

$$\left||z|-\frac{1}{|z|}\right|\leqslant\left|z+\frac{1}{z}\right|=1,$$

故$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant|z|\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，等号分别当$z=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{i}$和$z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}$时取得．

16．C．

从2016的约数中去掉$1,2$，其余的约数均可作为正多边形的边数．设从2016个顶点中选出k个构成正多边形，这样的正多边形有$\frac{2016}{k}$个，因此所求的正多边形的个数就是2016的所有约数之和减去2016和1008．考虑到$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$，因此所求正多边形的个数为

$$\begin{aligned}&(1+2+4+8+16+32)\cdot(1+3+9)\cdot(1+7)\\&-2016-1008=3528.\end{aligned}$$

17．C．

设P点坐标为(x_0,y_0)，可得

$$\begin{aligned}&M\left(\frac{1}{2}x_0+y_0,\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right),\\&N\left(\frac{1}{2}x_0-y_0,-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right),\end{aligned}$$

故

$$|MN|=\sqrt{\frac{1}{4}x_0^2+4y_0^2}$$

为定值，所以

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16,$$

故$\sqrt{\frac{a}{b}}=2$．

注　(1) 若将两条直线的方程改为$y=\pm kx$，则$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{k}$；

(2) 两条相交直线上各取一点M,N，使得$|MN|$为定值，则线段MN中点Q的轨迹为圆或者椭圆．

18．B．

方程两边同时模3，可得$x^2\equiv 2^y\pmod 3$．因为$3\nmid 2^y$，故$3\nmid x^2$，所以

$$x^2\equiv 1\pmod 3,$$

故

$$2^y\equiv 1\pmod 3,$$

所以y是偶数．设$y=2m\,(m\in\mathbf{N}^*)$，则

$$(2^m-x)(2^m+x)=615=3\cdot 5\cdot 41,$$

解得$\begin{cases}2^m-x=5,\\2^m+x=123,\end{cases}$即$\begin{cases}x=59,\\y=12.\end{cases}$

19．AB．

根据卡特兰数的定义，可得

$$I_n=C_{n-1}\cdot \mathrm{A}_n^n=\frac{1}{n}\cdot \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}\cdot n!=(n-1)!\cdot \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}$$

．

关于卡特兰数的相关知识见卡特兰数——计数映射方法的伟大胜利．

20．0.165．

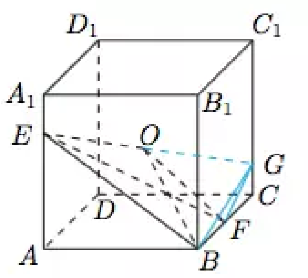
根据概率的乘法公式，所求概率为

$$0.3\cdot(0.5\cdot 0.3+0.5\cdot 0.8)=0.165.$$

21．$\dfrac{\sqrt3}{2}$．

当$x\to+\infty$时，CP趋于与平面ABC垂直，所求极限为$\triangle ABC$中AB边上的高，为$\dfrac{\sqrt3}{2}$．

22．$\dfrac{1}{96}$．如图．



有

$$\begin{aligned}V_{OEBF}=&V_{O-EBF}=\frac{1}{2}\cdot V_{G-EBF}\\=&\frac{1}{2}\cdot V_{E-GBF}\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}V_{E-BCC_1B_1}\\=&\frac{1}{96}.\end{aligned}$$

23．0．

根据题意，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}(x-\pi)^{2n-1}\left(1+\sin^{2n}x\right)\mathrm{d}x\\=&\int_{-\pi}^{\pi}x^{2n-1}\left(1+\sin^{2n}x\right)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

24．1．

根据题意，有

$$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2\leqslant\left(x^2+y^2\right)^2,$$

于是$x^2+y^2\leqslant 1$，等号当$x^2=y^2=\dfrac{1}{2}$时取得，因此所求的最大值为1．

25．$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{\sqrt{22}-3}{2}$．

由柯西不等式可知，当且仅当$(x,y,z)=\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$时，$x+y+z$取到最大值$\dfrac{3}{2}$．

根据题意，有

$$x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4},$$

于是

$$\frac{13}{4}\leqslant (x+y+z)^2+3(x+y+z),$$

解得

$$x+y+z\geqslant \frac{\sqrt{22}-3}{2},$$

于是$x+y+z$的最小值当$(x,y,z)=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{22}-3}{2}\right)$时取得，为$\dfrac{\sqrt{22}-3}{2}$．

26．$\dfrac{2}{3}$．

根据奔驰定理，有

$$\lambda+\mu=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}.$$

27．$\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}$．

根据题意，有

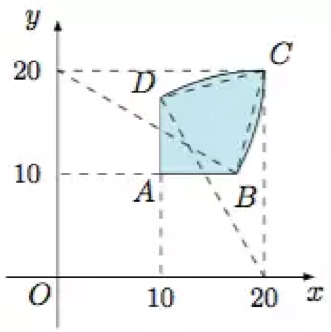
$$\begin{aligned}&z^3+\frac{z^2}{z^2+z+2}\\&=1+z^2=-z\\&=\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}.\end{aligned}$$

28． $\dfrac{200\pi}{3}+100\sqrt{3}-300$．

设$z=x+yi$，其中$x,y\in\mathbf{R}$．由于$\dfrac{40}{\bar{z}}=\dfrac{40z}{|z|^2}$，于是

$$\begin{cases}\dfrac{x}{10}\geqslant 1,\dfrac{y}{10}\geqslant 1,\\ \dfrac{40x}{x^2+y^2}\geqslant 1,\dfrac{40y}{x^2+y^2}\geqslant 1,\end{cases}$$

如图．



弓形面积为

$$\frac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{100\pi}{3}-100,$$

四边形$ABCD$的面积为

$$2\cdot\frac{1}{2}\left(10\sqrt{3}-10\right)\cdot 10=100\sqrt{3}-100,$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{100\pi}{3}-100\right)+\left(100\sqrt{3}-100\right)\\=&\frac{200\pi}{3}+100\sqrt{3}-300.\end{aligned}$$

29．$\sqrt{3}$．

根据题意，有

$$\begin{aligned}&\frac{\sin 4x}{\cos 8x\cos 4x}+\frac{\sin 2x}{\cos 4x\cos 2x}+\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x}\\&\quad+\frac{\sin x}{\cos x}\\=&(\tan 8x-\tan 4x)+(\tan 4x-\tan 2x)\\&\quad+(\tan 2x-\tan x)+\tan x\\=&\tan 8x\\=&\sqrt{3}.\end{aligned}$$

30．441000．

首先确定偶数的位置有多少种选择．

第一行两个偶数有C_4^2种选择，下面考虑这两个偶数所在的列，每列还需再填一个偶数，设为a,b．

情形一　若a,b位于同一行，它们的位置有3种选择，此时剩下的四个偶数所填的位置唯一确定．

情形二　若a,b位于不同的两行，它们的位置有6种选择，此时剩下的四个偶数所填的位置有2种选择．

所以偶数的不同位置数为

$$\mathrm{C}_4^2\cdot(3+6\cdot 2)=90,$$

因此总的填法数位

$$90\cdot\mathrm{C}_8^4\cdot\mathrm{C}_8^4=441000.$$

31．8．

一方面，设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant k\leqslant 14$．不妨假设$a_1<a_2<\cdots<a_k$．

若$k\geqslant 9$，由题意，$a_3-a_1\geqslant 3$，$a_5-a_3\geqslant 3$，且$a_5-a_3\neq a_3-a_1$，故

$$a_5-a_1\geqslant 7,$$

同理，$a_9-a_5\geqslant 7$，又因为$a_9-a_5\neq a_5-a_1$，所以$a_9-a_1\geqslant 15$，矛盾．故$k\leqslant 8$．

另一方面，取$A=\{1,2,4,5,10,11,13,14\}$，满足题意．

综上所述，A中元素个数的最大值为8．

（三）物理试题

2016 年清华领军——物理

即 2016 年清华大学自主招生、领军计划测试物理学科

1. 友谊的小船说翻就翻，假如你不会游泳，就会随着小船一起沉入水底。从理论上来说，你和小船沉入水底后的水面相比于原来（　　）

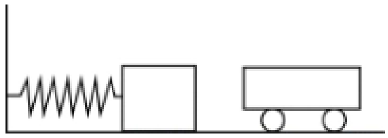
A. 一定上升

B. 一定下降

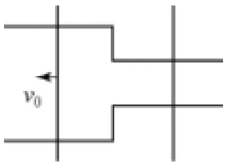
C. 一定相等

D. 条件不足，无法判断

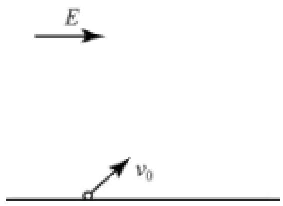
2. 在光滑地面上，物块与弹簧相连作简谐运动，小车向右作匀速直线运动，则对于弹簧和物块组成的系统（填守恒或者不守恒），当以地面为参考系时，动量__________，机械能__________；当以小车为参考系时，动量__________，机械能__________。



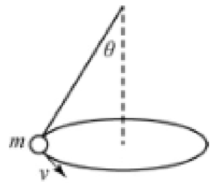
3. 如图所示，光滑导轨上垂直放置两根质量为 m 、且有电阻的金属棒，导轨宽处与窄轨间距比为 $2:1$ ，平面内有垂直纸面向内的磁场。现给左边的杆一个初速度 v_0 ，在系统稳定时，左杆仍在宽轨上右杆仍在窄轨上运动。则这个过程产生热量 $Q=$ __________。



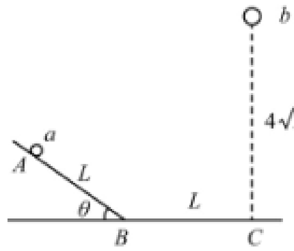
4. 空间内有一水平向右的电场 E ，现有一带电量为 q 的小球以初速度为 v_0 向右上抛出，已知 $E=\dfrac{\sqrt{3}mg}{3q}$ ，求小球落地点距离抛出点的最远距离。



5. 现有一轻质绳拉动小球在水平面内做匀速圆周运动，如图所示，小球质量为 m，速度为 v，重力加速度为 g，求小球在运动半周时，绳对小球施加的冲量。



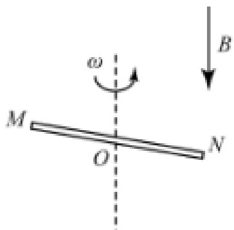
6. 如图所示，有 a、b 两个物体，a 物体沿长 L、倾角为 θ、动摩擦因数 $\mu=0.5$ 的斜面滑下后，在长为 L 的光滑水平面 BC 上运动；b 从 C 点上方高为 $4.5L$ 处下落。二者同时释放，在 C 处相遇，则 $\sin\theta$= ________。



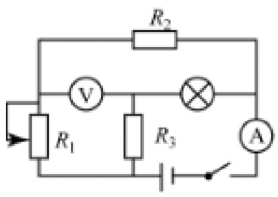
7. 在水平面内，金属棒 MN 一角速度 ω 绕 O 点顺时针旋转，空间内有竖直向下的磁场，如图所示。已知 $|MO|>|NO|$，则下列说法正确的是（　　）

A. M 点电势高于 N 点　　　　B. M 点电势低于 N 点

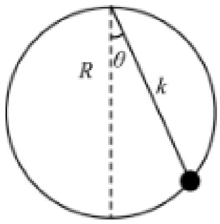
C. 若增大 ω，则 MN 点电势差增大　　　　D. 若增大 B，则 MN 点电势差增大



8. 在如图所示电路中，小灯泡规格为“6V，3W”，$R_3=4\Omega$，电源内阻为 1Ω，电压表、电流表均为理想电表，闭合开关，调节滑动变阻器阻值，使电压表示数为 0，此时灯泡正常发光，电流表的示数为 1A，则电源电动势 $E=$ ________，输出功率 $P=$ ________，$R_2=$ ________。



9. 弹性绳原长为$L\left(\sqrt{2}R<L<2R\right)$，劲度系数为$k$，上端拴在半径为$R$的光滑圆轨的顶端，下端系一重量为$G$的小球，小球套在圆轨上。平衡时，弹性绳与竖直方向夹角为θ。用L、R、k、G表示此时弹性绳的弹力。



10. 在一质量均匀分布的星球（近似为球面）的北极和南极打一条竖直贯通的通道，一小球从北极由静止释放，不与通道发生碰撞，则小球作______________运动。

11. 潜水员为测量一湖深度，测得湖面上$t=27℃$，$P=1.0\times10^5\,\text{Pa}$，并将一盛有空气的试管从湖面带入潜入湖底，整个过程管口始终向下。潜至湖底后水充满试管的一半，$t=7℃$，则湖深约（　　）

A. 5m　　B. 10m　　C. 15m　　D. 20m

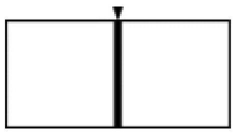
12. 一用钉鞘锁定的导热活塞将导热气缸分成体积相等的左右两室，$P_{左}:P_{右}=5:3$，拔出钉鞘后活塞移动至稳定状态，外界温度恒定，则（　　）

A. 稳定后左右两室体积比为5:3

B. 左室气体对右室气体做功

C. 左室气体吸热

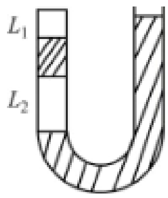
D. 右室气体吸热



13. 有一左端封闭、右端开口的均匀U形管，左管内有一段水银分割出两端长度相等的气柱，如图所示，现向右管缓慢注入水银，设平衡后上段气体为l_1，下端气体长l_2，则l_1与l_2的关系为（　　）

A. $l_1>l_2$　　B. $l_1=l_2$

C. $l_1<l_2$　　D. 无法确定，视注入水银的量

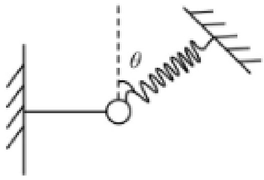


14. 在高为h的立柱上放一质量为M的球，质量为m的子弹以一定初速度水平射向球，从球中穿出后二者落至地面，球与子弹的落地点距立柱水平距离为S和s，重力加速度为g，则子弹的初速度为______________。

15. 从地面以初速度 v_0 竖直向上抛出一小球，与此同时，在该小球上抛能到达的最高处有另外一个小球以初速度 v_0 竖直向下抛出。忽略空气阻力，则两球相遇时速度之比为__________。

16. 质量为 m_1、m_2（$m_1 > m_2$）的物体具有相同的初动能，现给以其与速度方向相反的阻力 f_1、f_2 使其减速，经过时间 t 后两物体同时停止，运动距离为 S_1、S_2，则 f_1 f_2，S_1_____S_2。（填＞、＜、＝）

17. 如图所示，水平细绳与一弹簧作用于小球使其处于静止，若剪断细绳，则在剪断的一瞬间（　　）



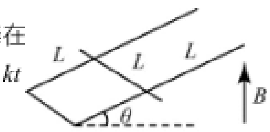
A. 小球竖直方向加速度为 0

B. 小球水平方向加速度为 0

C. 弹簧弹力为 $mg\cos\theta$

D. 弹簧弹力为 $\dfrac{mg}{\cos\theta}$

18. 光滑平行 U 形导轨相距为 L，倾角为 θ，一电阻为 R、长为 L 的导体棒在距导轨底段 L 处。空间内存在竖直方向上的变化磁场，满足 $B = B_0 + kt$（$k > 0$），现在导体棒上加一沿斜面向 $F =$______________。



19. 导体球壳内有一点 P，外有一正点电荷 $+q$ 位于 Q 处，现将该电荷的电荷量加倍，则 P 处电势________（填升高/降低/不变）；P 点场强__________（填升高/降低/不变）。

20. 下列物理学家及其成果，已经获得诺贝尔奖的有（　　）

A. 伦琴发现了 X 射线

B. 爱因斯坦发现了相对论

C. 普朗克提出量子论

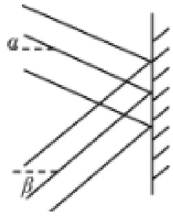
D. （激光干涉引力波观测站）LIGO 探测到了引力波

21. 实物在像的上方叫上现折射，反之则叫下现折射，则天气炎热时高速公路上看到的“水纹”一样的东西属于_______；“海市蜃楼”属于__________。

22. 波长均为 λ 的两束平行光如图所示打在光屏上，发生干涉现象，问干涉条纹的间距（　　）

A. $\dfrac{\lambda}{\sin\alpha + \sin\beta}$　　B. $\dfrac{\lambda}{\cos\alpha + \cos\beta}$

C. $\dfrac{\lambda}{|\sin\alpha - \sin\beta|}$　　D. $\dfrac{\lambda}{|\cos\alpha - \cos\beta|}$



23. 引力波是时空的涟漪。LIGO 探测到了引力波，是通过两座 3000 公里的天文台进行探测，两座天文台相差 4ms 分别探测到了同样的强烈的引力波，反映了一个 52Ms 的黑洞和一个 14Ms 的黑洞合并成一个 62Ms 的大黑洞，下列正确的有（　　）

A. 引力波的在宇宙中的传递是能量的传递

B. 两座天文台探测到的同样的信号相隔不会超过 10ms

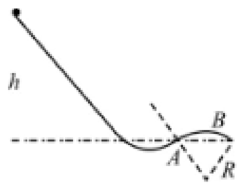
C. 引力波在真空中以光速传递

24. 在一个高为 22.5 米的塔的顶端放置一个 Co 的放射源，在塔顶测的伽马射线频率为 v，在低端测的射线频率与之相差 Δv，已知 $h=6.632\times10^{-34}$，求 $\frac{\Delta v}{v}$ 的数量级（　　）

A. 10^{-8}　　B. 10^{-10}　　C. 10^{-17}　　D. 10^{-19}

25. 已知空气分子的平均动能为 kT，则在常温下，质量为 $m=4.7\times10^{-23}$ kg 的空气德布罗意波波长的数量级为__________。

26. 质量为 m 的小球从高为 h 的地方释放，如果在光滑轨道上的 A 点飞出，求 h 的值；如果是从轨道的 B 点飞出，求 h 的值（图中两虚线夹角为 60°，圆弧曲率半径为 R）



五、清华大学 2015 年自主招生笔试考试模式

2015 年 6 月 12 日上午 9 点-11 点，通过清华大学自主招生、领军人才选拔及自强计划初审的 5600 余名考生同时参加初试，并且使用同一套试卷。据悉，2015 年清华大学在全国 30 个城市设立了 37 个考点，考生可根据自身情况灵活选择考试地点。

考试模式：机考系统分发和回收考卷。考生更加安全高效，阅卷也更为及时准确，还可大大降低作弊的可能性。

考试科目：为数学与逻辑、物理探究、阅读与表达。考生根据报考的专业选择其中的两门参

加测试。其中数理与逻辑 30 道题目，物理探究 25 道题目。

考试时间：两个小时

考试题型：不定项选择题；每题有一个或多个正确选项，全部选对的得满分，选对但不全的得部分分，有选错的得零分。考试题目全部为选择题。

考察方向:数学与逻辑和物理探究着重考查学生较高层次的思维能力以及综合运用所学知识分析和解决问题的能力。阅读与表达重点考查学生的文学文化水平和各类文章的阅读水平等能力，在考查学生语言运用能力的同时也考查了学生的写作能力。

考试难度：比高考难，但是比竞赛容易

六、清华大学 2015 年自主招生笔试真题

（一）数学试题

2015年清华领军——数学

即2015年清华大学自主招生、领军计划测试数学学科

说明：本试卷共30小题，共100分．在每小题给出的四个选项中，有一个或多个选项是符合题目要求的．全部选对的，得满分；选对但不全的，得部分分；有选错的，得0分．

1．设复数 $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，则 $\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z^2}=$（　）

A．0　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

2．设 $\{a_n\}$ 为等差数列，p，q，k，l 为正整数，则“$p+q>k+l$”是“$a_p+a_q>a_k+a_l$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．设 A，B 是抛物线 $y=x^2$ 上的两点，O 是坐标原点．若 $OA\perp OB$，则（　）

A．$|OA|\cdot|OB|\geqslant 2$　　B．$|OA|+|OB|\geqslant 2\sqrt{2}$

C．直线 AB 过抛物线 $y=x^2$ 的焦点　　D．O 到直线 AB 的距离小于等于1

4．设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，且满足：

① $f(x)>0$，$x\in(-1,0)$；

② $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$，$x$，$y\in(-1,1)$，

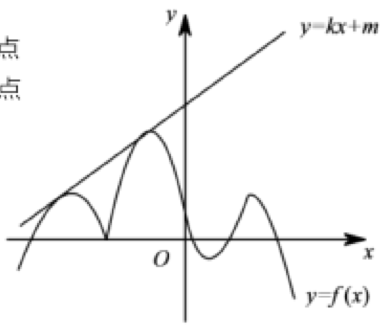
则 $f(x)$ 为（　）

A．奇函数　　B．偶函数　　C．减函数　　D．有界函数

5．如图，已知直线 $y=kx+m$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于两点，则 $F(x)=f(x)-kx$ 有（　）

A．2个极大值点　　B．3个极大值点

C．2个极小值点　　D．3个极小值点



6. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c．若 $c=2$，$\angle C=\frac{\pi}{3}$，且满足 $\sin C=\sin(B-A)-2\sin 2A=0$，则（　）

A．$b=2a$　　B．$\triangle ABC$ 的周长为 $2+2\sqrt{3}$

C．$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 设函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，则（　）

A．$f(x)$ 有极小值，但无最小值

B．$f(x)$ 有极大值，但无最大值

C．若方程 $f(x)=b$ 恰有一个实根，则 $b>\frac{6}{e^3}$

D．若方程 $f(x)=b$ 恰有三个不同实根，则 $0<b<\frac{6}{e^3}$

8. 已知 $A=\left\{(x,\ y)\left|x^2+y^2=r^2\right.\right\}$，$B=\left\{(x,\ y)\left|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right.\right\}$，

已知 $A\cap B=\left\{(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\right\}$，则（　）

A．$0<a^2+b^2<2r^2$　　B．$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

C．$x_1+x_2=a$，$y_1+y_2=b$　　D．$a^2+b^2=2ax_1+2by_1$

9. 已知非负实数 x，y，z 满足 $4x^2+4y^2+z^2+2z=3$，则 $5x+4y+3z$ 的最小值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，则（　）

A．$\{a_n\}$ 可能为等差数列

B．$\{a_n\}$ 可能为等比数列

C．$\{a_n\}$ 的任意一项均可写成 $\{a_n\}$ 的两项之差

D．对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $a_n=S_m$

11. 运动会上，有 6 名选手参加 100 米比赛，观众甲猜测：4 道或 5 道的选手得第一名；观众乙猜测：3 道的选手不可能得第一名；观众丙猜测：1，2，6 道选手中的一位获得第一名；观众丁猜测：4，5，6 道的选手都不可能获得第一名．比赛后发现没有并列名次，且甲、乙、丙、丁中只有 1 人猜对比赛结果，此人是（　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

12. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD=AA_1=1$，则点 A 到平面 A_1BD 的距离为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

13. 设不等式组 $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 2,\\ y+2\leqslant k(x+1),\end{cases}$ 所表示的区域为 D，其面积为 S，则（　）

A. 若 $S=4$，则 k 的值唯一　　B. 若 $S=\frac{1}{2}$，则 k 的值有 2 个

C. 若 D 为三角形，则 $0<k\leqslant\frac{2}{3}$　　D. 若 D 为五边形，则 $k>4$

14. $\triangle ABC$ 的三边长是 2，3，4，其外心为 O，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA}=$（　）

A. 0　　B. -15　　C. $-\frac{21}{2}$　　D. $-\frac{29}{2}$

15. 设随机事件 A 与 B 互相独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.2$，则（　）

A. $P(A)=0.4$　　B. $P(B-A)=0.3$

C. $P(AB)=0.2$　　D. $P(A+B)=0.9$

16. 过 $\triangle ABC$ 的重心作直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分，则这两部分的面积之比的（　）

A. 最小值为 $\frac{3}{4}$　　B. 最小值为 $\frac{4}{5}$　　C. 最大值为 $\frac{4}{3}$　　D. 最大值为 $\frac{5}{4}$

17. 从正 15 边形的顶点中选出 3 个构成钝角三角形，则不同的选法有（　）

A. 105 种　　B. 225 种　　C. 315 种　　D. 420 种

18. 已知存在实数 r，使得圆周 $x^2+y^2=r^2$ 上恰好有 n 个整点，则 n 可以等于（　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

19. 设复数 z 满足 $2|z|\leqslant|z-1|$，则（　）

A. $|z|$ 的最大值为 1　　B. $|z|$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$

C. z 的虚部的最大值为 $\frac{2}{3}$　　D. z 的实部的最大值为 $\frac{1}{3}$

20. 设 m，n 是大于零的实数，向量 $\vec{a}=(m\cos\alpha,m\sin\alpha)$，$\vec{b}=(n\cos\beta,n\sin\beta)$，其中 α，

$\beta\in[0,2\pi)$．定义向量 $\vec{a}^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{m}\cos\frac{\alpha}{2},\sqrt{m}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$，$\vec{b}^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{n}\cos\frac{\beta}{2},\sqrt{n}\sin\frac{\beta}{2}\right)$，记 $\theta=\alpha-\beta$，则（　　）

A. $\vec{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\vec{a}^{\frac{1}{2}}=\vec{a}$　　B. $\vec{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\vec{b}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}\cos\frac{\theta}{2}$

C. $\left|\vec{a}^{\frac{1}{2}}-\vec{b}^{\frac{1}{2}}\right|\geqslant 4\sqrt{mn}\sin^2\frac{\theta}{4}$　　D. $\left|\vec{a}^{\frac{1}{2}}+\vec{b}^{\frac{1}{2}}\right|^2\geqslant 4\sqrt{mn}\cos^2\frac{\theta}{4}$

21．设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=6$，$a_{n+1}=\frac{n+3}{n}a_n$，则（　　）

A. $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<(n+1)^3$　　B. $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq 2015$

C. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，a_n 为完全平方数　　D. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，a_n 为完全立方数

22．在极坐标系中，下列方程表示的图形是椭圆的有（　　）

A. $\rho=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$　　B. $\rho=\frac{1}{2+\sin\theta}$

C. $\rho=\frac{1}{2-\cos\theta}$　　D. $\rho=\frac{1}{1+2\sin\theta}$

23．设函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x^2-x+1}$，则（　　）

A. $f(x)\leqslant\frac{4}{3}$　　B. $|f(x)|\leqslant 5|x|$

C. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称轴　　D. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称中心

24．$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则（　　）

A. $\sin A>\cos B$　　B. $\tan A>\cot B$　　C. $a^2+b^2>c^2$　　D. $a^3+b^3>c^3$

25．设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$，若 $f(0)=f'(0)=1$，则存在实数 $\delta\in(0,1)$，使得（　　）

A. $f(x)>0$，$x\in(-\delta,\delta)$　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上单调递增

C. $f(x)>1$，$x\in(0,\delta)$　　D. $f(x)>1$，$x\in(-\delta,0)$

26．在直角坐标系中，已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$．若对于 y 轴上的任意 n 个不同点 P_1，P_2，…，P_n，总存在两个不同点 P_i，P_j，使得 $|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}$，则 n 的最小值为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

27．设非负实数 x， y 满足 $2x+y=1$，则 $x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的（　　）

A．最小值为 $\frac{4}{5}$　　　　B．最小值为 $\frac{2}{5}$

C．最大值为 1　　　　D．最大值为 $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

28．对于 50 个黑球和 49 个白球的任意排列（从左到右排成一行），则（　　）

A．存在一个黑球，它右侧的白球和黑球一样多

B．存在一个白球，它右侧的白球和黑球一样多

C．存在一个黑球，它右侧的白球比黑球少一个

D．存在一个白球，它右侧的白球比黑球少一个

29．从 1，2，3，4，5 中挑出三个不同数字组成五位数，其中有两个数字各用两次，例如 12231，则能得到的不同的五位数有（　　）

A．300 个　　B．450 个　　C．900 个　　D．1800 个

30．设曲线 L 的方程为 $y^4+\left(2x^2+2\right)y^2+\left(x^4-2x^2\right)=0$，则（　　）

A．L 是轴对称图形　　　　B．L 是中心对称图形

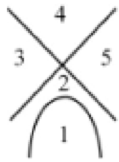
C．$L\subset\left\{(x，y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$　　　　D．$L\subset\left\{(x，y)\middle|-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

（二）物理试题

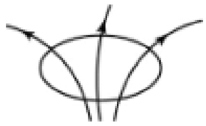
2015 年清华领军——物理

即 2015 年清华大学自主招生、领军计划测试物理学科

1. 在康普顿散射，以下 1 到 5 五个区域哪个可能是中心原子存在的区域？



2. 质量为 m，电阻为 R 的圆环在如图的磁场中下落，稳定时速度为 v。求匀速下落时电动势，有以下两种计算方案。



方法一：由受力平衡

$$mg=\frac{B^2L^2v}{R}$$

$$\varepsilon=BLv$$

有结论：$\varepsilon=\sqrt{mgRv}$

方法二：由功能关系

$$P_R=mgv$$

$$P_R=\frac{\varepsilon^2}{R}$$

有结论：$\varepsilon=\sqrt{mgvR}$

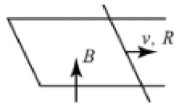
问：关于以上哪种方案说法正确的是？（ ）

A. 都正确　　B. 都不正确

C. 只有方案一正确　　D. 只有方案二正确

3. 理想气体做 $p=kV$ 的准静态过程，已知定容比热 C_v 和 R，求该过程的比热 C。

4. 如图所示，光滑且不计电阻的导轨上有一金属棒，金属棒电阻为 R，初速度为 $v_0=1\text{m/s}$，空间中有恒定的垂直于导轨平面的磁场，感应强度为 B，当金属棒减速到 $\frac{v_0}{10}$ 时，用时 1s。速度识别器最低记录是 0.001m/s，求总共记录的该导体棒运动时间为多少?



5. 高为 H 处平抛一物体，同时在其正下方水平地面斜抛一物体，二者同时落到同地，则斜抛物体的射高为____________。

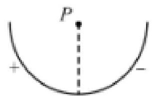
6. 有一厚度为 D 的透明玻璃砖，一束白光以入射角 $60°$ 角射入。

(1) 求最早射出色光的折射率（玻璃折射率最小值为 $n_{\min}$）；

(2) 若白光只有红黄绿三种颜色（并给出折射率）问那种色光最先射出?

7. 小磁铁在铝制空心杆中运动（无裂缝、有裂缝、有交错的矩形裂孔），则先落地的一个是哪一个?

8. 均匀带电半圆环，一半带正电，一半带负电，电荷密度为 λ，求 P 点的场强和电势。



9. 一个人在岸上以速度 v 水平拉船，岸高度为 h，绳子与河夹角为 θ。此时船的速度和加速度为?