

★启用前注意保密

## 2025 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

# 数 学

本试卷共 5 页，19 题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

**注意事项：**1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡的“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

**一、单项选择题：**本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑。

1. 已知集合  $A = \{x \mid 2^x > 4\}$ ，集合  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则  $A \cap B =$   
A.  $\{3\}$                       B.  $\{3, 4\}$                       C.  $\{2, 3, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 记复数  $z$  的共轭复数为  $\bar{z}$ ，若  $z = 3 + 4i$ ，则  $\frac{1}{\bar{z}} =$   
A.  $\frac{3-4i}{5}$                       B.  $\frac{3+4i}{5}$                       C.  $\frac{3-4i}{25}$                       D.  $\frac{3+4i}{25}$
3. 已知向量  $a, b$ ，则“ $a=b$ ”是“ $a^2=b^2$ ”的  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
4. 某学校为了了解学生美育培养的情况，用分层随机抽样方法抽样调查，拟从美术、音乐、舞蹈兴趣小组中共抽取 30 名学生，已知该校美术、音乐、舞蹈兴趣小组分别有 20, 30, 50 名学生，则不同的抽样结果共有  
A.  $C_{20}^4 C_{30}^6 C_{50}^{20}$                       B.  $C_{20}^5 C_{30}^{10} C_{50}^{15}$   
C.  $C_{20}^6 C_{30}^9 C_{50}^{15}$                       D.  $C_{20}^{10} C_{30}^{10} C_{50}^{10}$
5. 若空间中四个不同的平面  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ，满足  $\alpha_1 \perp \alpha_2, \alpha_2 \perp \alpha_3, \alpha_3 \perp \alpha_4$ ，则下面结论一定正确的是

- A.  $\alpha_1 \perp \alpha_4$  B.  $\alpha_1 // \alpha_4$   
 C.  $\alpha_1, \alpha_4$  既不垂直也不平行 D.  $\alpha_1, \alpha_4$  的位置关系不确定
6. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C$  的两个焦点,  $P$  为  $C$  上一点, 且  $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ ,  $|PF_1| = 3|PF_2|$ , 则  $C$  的离心率为
- A.  $\frac{\sqrt{13}}{4}$  B.  $\frac{\sqrt{13}}{8}$  C.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  D.  $\frac{\sqrt{7}}{8}$
7. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在区间  $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12})$  上单调递减, 且  $x = \frac{\pi}{6}$  和  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$  分别是函数  $y = f(x)$  图象的对称轴和对称中心, 则  $f(\frac{\pi}{4}) =$
- A. 1 B.  $\sqrt{3}$  C.  $\frac{1}{2}$  D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 设  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数, 记  $\{x\} = x - [x]$ , 则对任意实数  $x, y$ , 有
- A.  $\{-x\} = \{x\}$  B.  $\{2x\} = 2\{x\}$   
 C.  $\{x\} + \{y\} \leq \{x+y\}$  D.  $\{x\} - \{y\} \leq \{x-y\}$
- 二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。
9. 已知公差为 0 的等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_3 = 9$ ,  $a_3$  是  $a_1$  与  $a_4$  的等比中项, 则下列说法正确的是
- A.  $a_2 = 3$  B.  $d = -1$   
 C. 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是递增数列 D. 当  $S_n > 0$  时,  $n$  的最大值为 8
10. 已知函数  $f(x) = x(x-1)(e^x - a)$ , 则下列说法正确的是
- A. 若  $a = e$ , 则  $f(x)$  有 2 个零点  
 B. 若  $a \leq 0$ , 则  $f(x) < 0$  的解集为  $(0, 1)$   
 C.  $\forall a > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有极小值  
 D.  $\exists 0 < a < 1$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有极大值
11. 已知正四面体  $A-BCD$  的棱长为 6, 点  $M, N$  分别是  $BC, AD$  的中点, 则下列几何体能够整体放入正四面体  $A-BCD$  的有
- A. 底面在平面  $BCD$  上, 且底面半径为  $\sqrt{2}$ 、高为  $2\sqrt{6}$  的圆锥  
 B. 底面在平面  $BCD$  上, 且底面半径为  $\sqrt{2}$ 、高为 1 的圆柱  
 C. 轴为直线  $MN$ , 且底面半径为  $\sqrt{2}$ 、高为 2 的圆锥  
 D. 轴为直线  $MN$ , 且底面半径为  $\sqrt{2}$ 、高为 0.2 的圆柱

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。请把答案填在答题卡的相应位置上。

12. 若函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \geq 0, \\ x^2+ax, & x < 0 \end{cases}$  是奇函数，则  $f(f(3)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知  $\alpha$  是锐角，若  $\tan 2\alpha = \frac{3\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ ，则  $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14.  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点， $A, C$  两点在双曲线上且关于原点对称(点  $A$  在第一象限)，直线  $CF_2$  与双曲线的另一个交点为点  $B$ ，若  $|AF_1| - |BF_2| = 6$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。第 15 题 13 分，第 16、17 题 15 分，第 18、19 题 17 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。必须把解答过程写在答题卡相应题号指定的区域内，超出指定区域的答案无效。

15. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = a \ln x + bx^2 - 1$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )，曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处与直线  $y = 0$  相切。

(1) 求  $a, b$  的值；

(2) 求  $f(x)$  在  $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$  上的最大值和最小值。(其中  $e = 2.718 \cdots$  为自然对数的底数)

16. (本小题满分 15 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

(1) 证明： $\cos A \cos B = \sin C$ ；

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{c^2}{10 \sin C}$ ，求  $\cos C$ 。

17. (本小题满分 15 分)

近年来，中国新能源汽车产业，不仅技术水平持续提升，市场规模也持续扩大，取得了令人瞩目的成就，国产新能源汽车正逐步引领全球新能源汽车的发展潮流。某新能源汽车制造企业对某地区新能源汽车的销售情况进行了调研，数据如下：

时间	2023 年 12 月	2024 年 1 月	2024 年 2 月	2024 年 3 月	2024 年 4 月
月份代码 $x$	1	2	3	4	5
销量 $y$ /千辆	14	15	16	18	19

(1) 若  $y$  与  $x$  线性相关，求  $y$  关于  $x$  的线性回归方程，并估计该地区新能源汽车在 2025 年 1 月份的销量；



(2) 该企业为加强新能源汽车宣传推广, 计划引入人工智能工具, 并对宣传部门员工进行人工智能工具使用培训. 为节约培训成本, 需要将宣传部门部分员工调整至其他部门, 剩余宣传部门员工全部参加培训. 培训分为四期, 每期培训的结果是否“优秀”相互独立, 且每期培训中员工达到“优秀”标准的概率均为  $\frac{2}{3}$ , 员工至少两期培训达到“优秀”标准, 才能使用人工智能工具. 该企业宣传部门现有员工 100 人, 开展培训前, 员工每人每年平均为企业创造净利润 12 万元, 开展培训后, 能使用人工智能工具的员工预计每人每年平均为企业创造净利润 18 万元, 本次培训费每人 1 万元(计入年度部门成本). 若要确保调整后第一年, 宣传部门员工创造的年净利润不低于调整前, 请应用概率知识进行决策, 预计最多可调整多少人去其他部门?

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

18. (本小题满分 17 分)

如图 1, 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线交  $x$  轴于点  $D$ , 过点  $F$  作倾斜角为  $\theta$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点(点  $A$  在第一象限). 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $|OA| = \sqrt{5}$ .

(1) 求抛物线  $C$  的方程;

(2) 如图 2, 把  $\triangle ADF$  沿  $DF$  翻折为  $\triangle PDF$ , 使得二面角  $P-DF-B$  的大小为  $\frac{2\pi}{3}$ .

①若  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 求直线  $BD$  与平面  $PBF$  所成角的正弦值;

②证明: 三棱锥  $D-PBF$  的体积为定值.

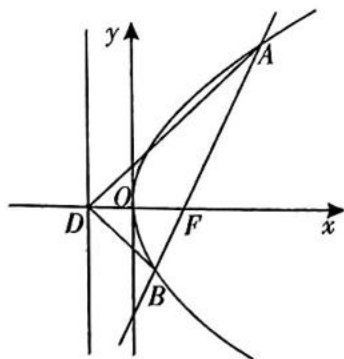


图 1

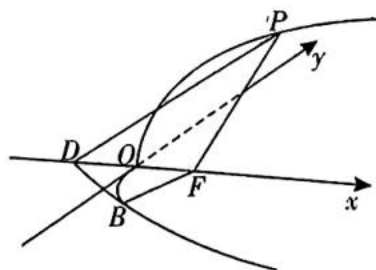


图 2

19. (本小题满分 17 分)

对于一个递增正整数数列  $\{a_n\}$ , 如果它的奇数项为奇数, 偶数项为偶数, 则称它是一个交错数列. 规定只有一项且是奇数的数列也是一个交错数列. 将每项都取自集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的所有交错数列的个数记为  $A_n$ . 例如, 当  $n=1$  时, 取自集合  $\{1\}$  的交错数列只有 1 一种情况, 则  $A_1=1$ ; 当  $n=2$  时, 取自集合  $\{1, 2\}$  的交错数列有 1 和 1, 2 两种情况, 则  $A_2=2$ .

(1) 求  $A_3$  和  $A_4$  的值;

(2) 证明: 取自集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 3$ ) 的首项不为 1 的交错数列的个数为  $A_{n-2}$ ;

(3) 记数列  $\{A_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求使得  $S_n > 2025$  成立的  $n$  的最小值.

试卷名称: 高中数学卷