# 第三单元 一元函数的导数及其应用

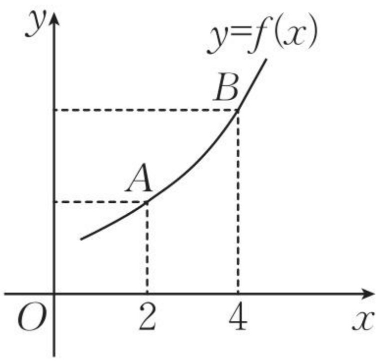
2. [2024·成都月考]已知函数$f(x)=x^2-2$，则$\lim\Delta x\to 0\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=$（ D ）.

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 6

[解析]根据题意，$f'(x)=2x$，

故$\lim\Delta x\to 0\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=f'(3)=6$.故选D.

5. 已知函数$y=f(x)$的部分图象如图所示，$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，则（ A ）.



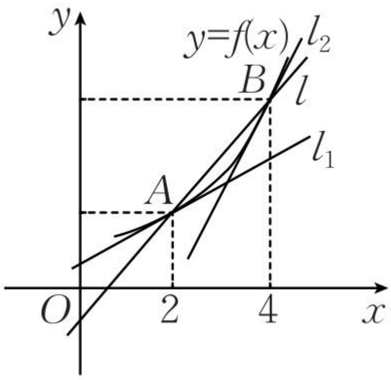

A. $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{2}<f'(4)$　　B. $f'(4)<f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{2}$

C. $f'(2)<f'(4)<\frac{f(4)-f(2)}{2}$　　D. $\frac{f(4)-f(2)}{2}<f'(4)<f'(2)$

[解析]如图所示，根据导数的几何意义，可得$f'(2)$表示曲线$y=f(x)$在点$A$处的切线的斜率，即直线$l_1$的斜率$k_{l_1}$，$f'(4)$表示曲线$y=f(x)$在点$B$处的切线的斜率，即直线$l_2$的斜率$k_{l_2}$，

由平均变化率的定义，可得$\frac{f(4)-f(2)}{2}$表示过$A,B$两点的割线的斜率$k_l$，

结合图象，可得$k_{l_1}<k_l<k_{l_2}$，所以$f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{2}<f'(4)$.故选A.




6. [2024 • 福建月考]曲线$f(x)=x\ln x$在$x=1$处的切线方程为（ B ）.

A. $2x-y-2=0$　B. $x-y-1=0$　C. $x+y-1=0$　D. $3x-y-1=0$

[解析]$f'(x)=\ln x+1$，所以$f'(1)=1$，因为$f(1)=0$，所以$f(x)$的图象在$x=1$处的切线方程为$x-y-1=0$.故选B.

8. [2024 • 延安测试]若曲线$f(x)=(2x+k)\cos x$在点$\big(\pi,f(\pi)\big)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为2，则$k=$（ B ）.

A. $\sqrt{2}$　B. $\pm 2\sqrt{2}$　C. $2\pm\sqrt{2}$　D. $2\pi\pm\sqrt{2}$

[解析]$\because f(x)=(2x+k)\cos x$，

$\therefore f'(x)=2\cos x-(2x+k)\sin x$，$\therefore f'(\pi)=-2$.

$\because f(\pi)=-(2\pi+k)$，$\therefore$ 切线方程为$y+(2\pi+k)=-2(x-\pi)$，

可化为$y=-2x-k$.

令$x=0$，得$y=-k$，令$y=0$，得$x=-\frac{k}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times|-k|\times\left|-\frac{k}{2}\right|=2$，解得$k=\pm 2\sqrt{2}$.故选B.

## 综合提升练

9. [2024 • 德州模拟]（多选题）已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，若存在$x_0$，使得$f(x_0)=f'(x_0)$，则称$x_0$是$f(x)$的一个“巧值点”，则下列函数中有“巧值点”的是（ ABC ）.

A. $f(x)=x^2$　B. $f(x)=\frac{1}{x}$　C. $f(x)=\ln x$　D. $f(x)=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$

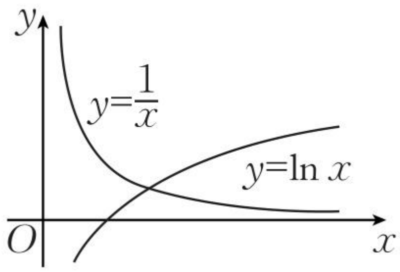
[解析]对于A，$f'(x)=2x$，令$x^2=2x$，得$x=0$或$x=2$，故有“巧值点”；

对于B，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，令$\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$，得$x=-1$，故有“巧值点”；

对于C，$f'(x)=\frac{1}{x}$，

令$\ln x=\frac{1}{x}$，

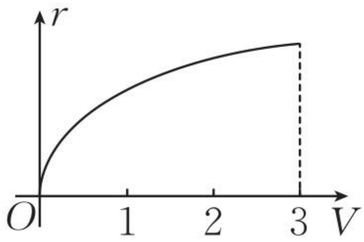
作出$y=\ln x$与$y=\frac{1}{x}$的部分图象，如图，




结合$y=\ln x$，$y=\frac{1}{x}$的图象，知方程$\ln x=\frac{1}{x}$有解，故有“巧值点”；

对于D，$f'(x)=-e^{-x}$，令$\left(\frac{1}{e}\right)^x=-e^{-x}$，方程无解，故无“巧值点”.故选ABC.

10. [2024 • 广东模拟]（多选题）吹气球时，记气球的半径$r$与体积$V$之间的函数关系为$r(V)$，$r'(V)$为$r(V)$的导函数.已知$r(V)$在[0,3]上的图象如图所示，若$0\leq V_1<V_2\leq 3$，则下列结论正确的是（ BD ）.




A. $\frac{r(1)-r(0)}{1-0}<\frac{r(2)-r(1)}{2-1}$

B. $r'(1)>r'(2)$

C. $r\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)<\frac{r(V_1)+r(V_2)}{2}$

D. 存在$V_0\in(V_1,V_2)$，使得$r'(V_0)=\frac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$

[解析]设$\tan\alpha=\frac{r(1)-r(0)}{1-0}$,$\tan\theta=\frac{r(2)-r(1)}{2-1}$，由题图得$\alpha>\theta$，且均为锐角，所以$\tan\alpha>\tan\theta$，所以$\frac{r(1)-r(0)}{1-0}>\frac{r(2)-r(1)}{2-1}$，所以A错误；

由题图得，随着$V$值的变大，图象上点的切线的斜率越来越小，根据导数的几何意义得$r'(1)>r'(2)$，所以B正确；

设$V_1=0,V_2=3$,则$r\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)=r\left(\frac{3}{2}\right)$,$\frac{r(V_1)+r(V_2)}{2}=\frac{r(3)}{2}$，由题图可知$r\left(\frac{3}{2}\right)>\frac{r(3)}{2}$，所以C错误；

$\frac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$表示$A\left(V_1,r(V_1)\right)$,$B\left(V_2,r(V_2)\right)$两点所在直线的斜率，$r'(V_0)$表示$C\left(V_0,r(V_0)\right)$处切线的斜率，因为$V_0\in(V_1,V_2)$，所以可以平移直线$AB$使之和曲线相切，切点就是点$C$,所以D正确.故选BD.

11. [2024 • 上海月考]已知$a$,$b$为实数，函数$y=\ln x+\frac{a}{x}$的图象在$x=1$处的切线方程为$4y-x-b=0$，则$ab$的值为$\frac{3}{2}$.

[解析]因为$y=\ln x+\frac{a}{x}$，所以$y'=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$，则$y'|_{x=1}=1-a$，

由$x=1$处的切线方程为$4y-x-b=0$，得切线的斜率$k=\frac{1}{4}$，

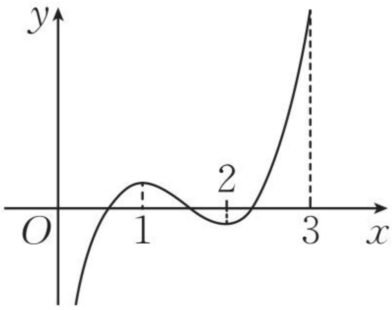
所以$1-a=\frac{1}{4}$，得$a=\frac{3}{4}$，

所以$y=\ln x+\frac{3}{4x}$，当$x=1$时，$y=\frac{3}{4}$，所以切点为$(1,\frac{3}{4})$，

将$(1,\frac{3}{4})$代入切线方程得$4\times\frac{3}{4}-1-b=0$，解得$b=2$，

所以$ab=\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$.

2. （改编）已知定义在$(0,3]$上的函数$f(x)$的图象如图所示，则不等式$(x-1)\cdot f'(x)<0$的解集为（ D ）.




A. $(0,2)$ B. $(1,2)$ C. $(2,3)$ D. $(0,1)\cup(1,2)$

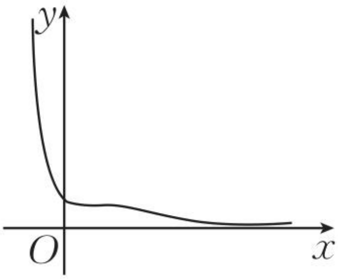
[解析]当$0<x<1$时，$f(x)$单调递增，则$f'(x)>0$，
此时$x-1<0$，所以$(x-1)f'(x)<0$，满足题意；
当$1<x<2$时，$f(x)$单调递减，则$f'(x)<0$，
此时$x-1>0$，所以$(x-1)f'(x)<0$，满足题意；
当$2<x\le 3$时，$f(x)$单调递增，则$f'(x)>0$，
此时$x-1>0$，所以$(x-1)f'(x)>0$，不满足题意；
当$x=1$时，易得$(x-1)f'(x)=0$，不满足题意；
当$x=2$时，易得$f'(x)=0$，则$(x-1)f'(x)=0$，不满足题意.
综上，$0<x<1$或$1<x<2$，即不等式$(x-1)f'(x)<0$的解集为$(0,1)\cup(1,2)$.
故选D.

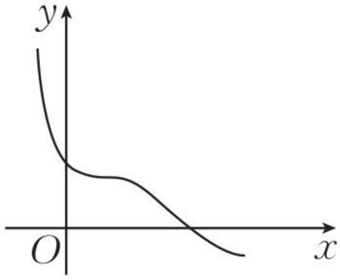
3. 已知函数$f(x)=a\ln x+x^2$，在区间$(0,2)$上任取两个不相等的实数$x_1$，$x_2$，若不等式$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$恒成立，则实数$a$的取值范围是（ C ）.

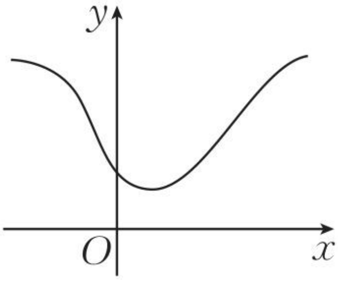
A. $[-8,+\infty)$ B. $(-\infty,-8]$ C. $[0,+\infty)$ D. $(-\infty,0]$

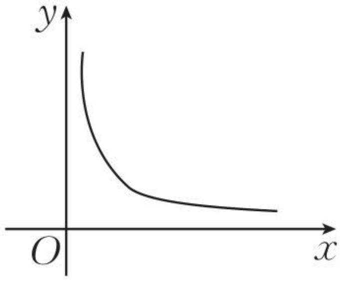
[解析]由$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$可知$f(x)$在$(0,2)$上单调递增，所以$f'(x)=\frac{a}{x}+2x\ge 0$在$(0,2)$上恒成立，即$a\ge -2x^2$在$(0,2)$上恒成立，故$a\ge(-2x^2)_{\max}$，所以$a\ge 0$.
故选C.

4. [2024 • 安阳模拟]函数$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$的大致图象为（ A ）.

A. 


B. 


C. 


D. 


[解析]$f'(x)=\frac{2x\mathrm{e}^x-(x^2+1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{-x^2+2x-1}{\mathrm{e}^x}=-\frac{x^2-2x+1}{\mathrm{e}^x}=-\frac{(x-1)^2}{\mathrm{e}^x}\leq 0$恒成立，

所以函数$f(x)=\frac{x^2+1}{\mathrm{e}^x}$在定义域$\boldsymbol{R}$上单调递减，且对任意的$x\in\boldsymbol{R}$，都有$x^2+1>0,\mathrm{e}^x>0$，

所以对任意的$x\in\boldsymbol{R}$，都有$f(x)>0$，所以结合选项可知A满足.故选A.

5. 若函数$y=f(x)$在$\boldsymbol{R}$上可导，且满足$xf'(x)+f(x)>0$恒成立，$a$,$b$为常数，且$a>b$,则下列不等式一定成立的是（ A ）.

A. $af(a)>bf(b)$　B. $af(b)>bf(a)$　C. $af(a)<bf(b)$　D. $af(b)<bf(a)$

[解析]令$g(x)=xf(x)$，则$g'(x)=xf'(x)+f(x)>0$恒成立，故$g(x)$在$\boldsymbol{R}$上单调递增.

$\because a>b$，$\therefore g(a)>g(b)$，即$af(a)>bf(b)$.故选A.

6. 已知函数$f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$，则“$a>5$”是“函数$f(x)$在$(1,2)$上单调递减”的（ A ）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[解析]若函数$f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$在$(1,2)$上单调递减，

则$f'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}\leq 0$在$(1,2)$上恒成立，

所以$a\geq 2x+\frac{2}{x}$在$(1,2)$上恒成立，

设函数$h(x)=2x+\frac{2}{x}(1<x<2)$，则$h'(x)=2-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^2}$，

所以$h'(x)>0$在$(1,2)$上恒成立，所以$h(x)$在$(1,2)$上单调递增，

所以$h(x)<h(2)=5$，所以$a\geq 5$.

“$a>5$”是“$a\geq 5$”的充分不必要条件，

即“$a>5$”是“函数$f(x)$在$(1,2)$上单调递减”的充分不必要条件.
故选A.

7. 若函数$f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x+1$在其定义域的一个子区间$(k-2,k+1)$内不是单调函数，则实数$k$的取值范围是（ B ）.

A. $(2,3)$　　B. $[2,\frac{5}{2})$　　C. $[2,3)$　　D. $[2,\frac{7}{2})$

[解析]因为函数的定义域为$(0,+\infty)$，所以$k-2\geq 0$，即$k\geq 2$，

$f'(x)=2x-\frac{1}{2x}=\frac{4x^2-1}{2x}$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}$或$x=-\frac{1}{2}$（舍去），

因为函数在区间$(k-2,k+1)$内不是单调函数，

所以$\frac{1}{2}\in(k-2,k+1)$，即$k-2<\frac{1}{2}<k+1$，解得$-\frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$.

综上，$2\leq k<\frac{5}{2}$.故选B.

8. 已知$a=\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{2}$，$b=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$，$c=\frac{1}{2}+\ln 2$，则（ D ）.

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

[解析]构造函数$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，因为$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}(x>0)$，

所以当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

因为$1<\frac{3}{2}<2<\mathrm{e}$，所以$f\left(\frac{3}{2}\right)<f(2)<f(\mathrm{e})$，即$\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}+\ln 2<1+\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以$a<c<b$.故选D.

## 综合提升练

9. （多选题）意大利画家列奥纳多·达·芬奇曾提出一个问题：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数表达式为$f(x)=a\cosh\frac{x}{a}$，其中$a$为悬链线系数，称$\cosh x$为双曲余弦函数，其函数表达式为$\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，同时，双曲正弦函数的函数表达式为$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，则（ AC ）.

A. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$
B. $(\cosh x)'=-\sinh x$
C. $y=\sinh x$是奇函数
D. 当直线$y=m$与函数$y=\sinh x$和$y=\cosh x$的图象共有 3 个交点时，$m\in[1,+\infty)$

[解析]$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}{4}-\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}{4}=1$，A正确；

$(\cosh x)'=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sinh x$，B错误；

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的定义域为$\boldsymbol{R}$，且$\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh x$，

$\therefore y=\sinh x$是奇函数，C正确；

$y=\cosh x$的导函数为$y'=\sinh x$，令$y'=0$，则$x=0$，

又$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$为增函数，$\therefore$ 当$x>0$时，$y'>0$，当$x<0$时，$y'<0$，

$\therefore y=\cosh x$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

故$y=\cosh x\geq\cosh 0=1$，

$\because y=\sinh x$在$\boldsymbol{R}$上单调递增，且当$x\to-\infty$ 时，$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\to-\infty$ ，

当$x\to+\infty$ 时，$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\to+\infty$ ，

$\therefore$ 当$y=m$与$y=\sinh x$和$y=\cosh x$共有 3 个交点时，$m\in(1,+\infty)$，D错误.故选AC.

10. （多选题）设$a\in(0,1)$，若函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$a$的值可能是（ CD ）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{7}{8}$

[解析]因为函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$，所以$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)$，

若函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

$a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq0\Leftrightarrow(1+a)^x\ln(1+a)\geq-a^x\ln a\Leftrightarrow\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，

则$\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$在$(0,+\infty)$上恒成立，

因为$0<a<1$，所以$\frac{1+a}{a}=\frac{1}{a}+1>2$，所以$\left(\frac{1+a}{a}\right)^x>1$，

因此$-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}\leq1$在$(0,+\infty)$上恒成立，

因为$a\in(0,1)$，则$1+a\in(1,2)$，所以$\begin{cases}\ln(1+a)\geq-\ln a,\\0<a<1,\end{cases}$即$\begin{cases}\ln(1+a)\geq\ln\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases}$

所以$\begin{cases}1+a\geq\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases}$

解得$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq a<1$，

即$a$的取值范围为$[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$，$a=\frac{4}{5}$和$a=\frac{7}{8}$符合.故选CD.

11. 已知函数$f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中e是自然对数的底数.若$f(a-1)+f(2a^2)\le 0$，则实数$a$的取值范围是$[-1,\frac{1}{2}]$.

[解析]因为$f(-x)=(-x)^3-2(-x)+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=-f(x)$，且$f(x)$的定义域为$\boldsymbol{R}$，所以$f(x)$为奇函数.因为$f'(x)=3x^2-2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\ge 3x^2-2+2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}\ge 0$（当且仅当$x=0$时,等号成立），所以$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上单调递增，因为$f(a-1)+f(2a^2)\le 0$可化为$f(2a^2)\le -f(a-1)$，即$f(2a^2)\le f(1-a)$，所以$2a^2\le 1-a,2a^2+a-1\le 0$，解得$-1\le a\le\frac{1}{2}$，故实数$a$的取值范围是$[-1,\frac{1}{2}]$.

14. 已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$.

（1）求$f(x)$在定义域内的单调区间.
（2）若$a\le 1,x>1$，求证：$f(x)<x^2$.

[解析]（1）$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，$x>0$.

当$a\le 0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
当$a>0$时，令$f'(x)=0$，可得$x=a$.
则函数$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增.
综上，当$a\le 0$时,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间;
当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(a,+\infty)$,单调递减区间为$(0,a)$.

（2）$\because a\le 1$，$x>1$,$\therefore\frac{a}{x}\le\frac{1}{x}$，即$f(x)\le\frac{1}{x}+\ln x$.

要证明$f(x)<x^2$，只需证明$\ln x+\frac{1}{x}<x^2$.

令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-x^2(x>1)$，

则$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-2x=\frac{-2x^3+x-1}{x^2}<0$，

$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，而$g(1)=0$，

$\therefore g(x)<0$，即$\ln x+\frac{1}{x}<x^2$，$\therefore f(x)<x^2$.

## 创新拓展练

15. 设$[a,b]$是函数$f(x)$定义域的一个子集，若存在$c\in(a,b)$，使得$f(x)$在$[a,c]$上单调递增，在$[c,b]$上单调递减，则称$f(x)$为$[a,b]$上的单峰函数，$c$为峰点.若$f(x)=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x+\ln m)$为$[a,b]$上的单峰函数，则实数$m$的取值范围为$(0,1)$.

[解析]由$f(x)=(e^x-ex)(e^x-ex+\ln m)$，得$f'(x)=(e^x-e)(2e^x-2ex+\ln m)$，

令$m(x)=e^x-e$，$n(x)=2e^x-2ex+\ln m$，则$m'(x)=e^x$,$n'(x)=2e^x-2e$,

当$x>1$时，$n'(x)>0$,当$x<1$时，$n'(x)<0$,故$n(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以当$x=1$时，$n(x)$取最小值，且最小值为$\ln m$.

若$\ln m\geq 0$,则$m\geq 1$，此时$n(x)\geq 0$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，不符合单峰函数的定义.

若$\ln m<0$,则$0<m<1$，此时存在$x_1<1<x_2$，使得$n(x_1)=n(x_2)=0$，当$x\in(x_1,1)$时，$m(x)<0$,$n(x)<0$，则$f'(x)=n(x)\cdot m(x)>0$，此时$f(x)$单调递增，当$x\in(1,x_2)$时，$m(x)>0$,$n(x)<0$，则$f'(x)=n(x)m(x)<0$，此时$f(x)$单调递减，故满足单峰函数的定义，其中$[x_1,x_2]$是单峰区间，$x=1$是峰点.故$m$的取值范围为$(0,1)$.

16. 已知函数$f(x)=e^x+ax$的图象在点$\big(0,f(0)\big)$处的切线与直线$l$：$x-2y+4=0$垂直.

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）若对任意实数$x$，$f(x)\geq -x^2-3+2b$恒成立，求整数$b$的最大值.

[解析]（1）由$f'(x)=e^x+a$，得$f'(0)=1+a$，又切线与直线$l$：$x-2y+4=0$垂直，所以$1+a=-2$，即$a=-3$,

所以$f'(x)=e^x-3$，令$f'(x)=0$，得$x=\ln 3$.

当$x<\ln 3$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>\ln 3$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

故$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,\ln 3)$，单调递增区间为$(\ln 3,+\infty)$.

（2）对任意实数$x$，$f(x)\geq -x^2-3+2b$恒成立，

即对任意实数$x$,$e^x+x^2-3x+3\geq 2b$恒成立.

设$g(x)=e^x+x^2-3x+3$，则$b\leq\frac{1}{2}g(x)_{\min}$.

$g'(x)=e^x+2x-3$，令$h(x)=g'(x)=e^x+2x-3$，

所以$h'(x)=e^x+2>0$恒成立，所以$g'(x)=e^x+2x-3$在$\boldsymbol{R}$上单调递增.

又$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$g'(1)=e-1>0$，所以存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得$g'(x_0)=0$，即$e^{x_0}+2x_0-3=0$，所以$e^{x_0}=3-2x_0$.

当$x\in(-\infty,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

故$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-3x_0+3=3-2x_0+x_0^2-3x_0+3=x_0^2-5x_0+6=\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

当$x_0\in(\frac{1}{2},1)$时，$2<x_0^2-5x_0+6<\frac{15}{4}$,

所以$\frac{1}{2}g(x_0)\in(1,\frac{15}{8})$，由题意知$b\leq\frac{1}{2}g(x_0)$且$b\in\boldsymbol{Z}$,

所以$b\leq 1$，即整数$b$的最大值为 1.

# 基础课18 导数与函数的极值、最值

## 课时评价·提能

### 基础巩固练

1. 图象连续的函数$y=f(x)$在$[a,b]$上（ C ）.

A. 一定存在极小值　　B. 一定存在极大值

C. 一定存在最大值　　D. 极小值一定比极大值小

[解析]由函数的最值与极值的概念，可知$y=f(x)$在$[a,b]$上一定存在最大值.故选C.

7. 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+1$有极大值和极小值，则实数$a$的取值范围是（ C ）.

A. $(6,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3)$　　C. $(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$　　D. $(-\infty,6)$

[解析]由题意知$f'(x)=3x^2+2ax+a+6=0$有两个不相等的根，

所以$\Delta=4a^2-12(a+6)>0$，解得$a>6$或$a<-3$.故选C.

8. 已知e是自然对数的底数，则下列不等关系中正确的是（ A ）.

A. $\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}>3^{\mathrm{e}}$　　B. $\pi^{\mathrm{e}}>3^{\mathrm{e}}>\mathrm{e}^{\pi}$　　C. $\mathrm{e}^{\pi}>3^{\mathrm{e}}>\mathrm{e}^3$　　D. $3^{\mathrm{e}}>\mathrm{e}^{\pi}>\mathrm{e}^3$

[解析]设函数$f(x)=x-\mathrm{e}\ln x(x>0)$，

则$f'(x)=1-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x-\mathrm{e}}{x}$，当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)<0,f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递减；当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)>0,f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增.因此$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=0$，故$\pi>\mathrm{e}\ln\pi$ ,$3>\mathrm{e}\ln 3$,故$\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}$，$\mathrm{e}^3>3^{\mathrm{e}}$,又$y=x^{\mathrm{e}}$是增函数，所以$\pi^{\mathrm{e}}>3^{\mathrm{e}}$,所以$\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}>3^{\mathrm{e}}$.故选A.

### 综合提升练

11. 若函数$f(x)=2a\ln x+1$与$g(x)=x^2+1$的图象存在公共切线，则实数$a$的最大值为e.

[解析]$g'(x)=2x$，$f'(x)=\frac{2a}{x}$，

设公切线与$g(x)=x^2+1$的图象切于点$(x_1,x_1^2+1)$，

与曲线$f(x)=2a\ln x+1$切于点$(x_2,2a\ln x_2+1)$，

所以$2x_1=\frac{2a}{x_2}=\frac{(2a\ln x_2+1)-(x_1^2+1)}{x_2-x_1}=\frac{2a\ln x_2-x_1^2}{x_2-x_1}$，

所以$a=x_1x_2$，所以$2x_1=\frac{2x_1x_2\ln x_2-x_1^2}{x_2-x_1}$，

所以$x_1=2x_2-2x_2\ln x_2$，

因为$a=x_1x_2$，所以$a=2x_2^2-2x_2^2\ln x_2$.

设$h(x)=2x^2-2x^2\ln x(x>0)$，

则$h'(x)=2x(1-2\ln x)$，令$h'(x)=0$,得$x=\sqrt{\mathrm{e}}$，

当$h'(x)>0$时，$x\in(0,\sqrt{\mathrm{e}})$，当$h'(x)<0$时，$x\in(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$，

所以$h(x)$在$(0,\sqrt{\mathrm{e}})$上单调递增，在$(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$上单调递减，

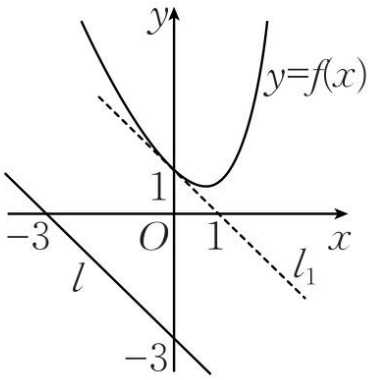
所以$h(x)_{\max}=h(\sqrt{\mathrm{e}})=\mathrm{e}$，

所以实数$a$的最大值为e.

## 应用情境练

13. 已知点$A$在函数$f(x)=\mathrm{e}^x-2x$的图象上，点$B$在直线$l$：$x+y+3=0$上，则$A$，$B$两点之间距离的最小值是$\underline{2\sqrt{2}}$.

[解析]由题意可得$f'(x)=\mathrm{e}^x-2$，令$f'(x)=0$得$x=\ln 2$，
所以当$x\in(-\infty,\ln 2)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；当$x\in(\ln 2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增.故$f(x)_{\min}=f(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$，
所以$f(x)$的图象如图所示.




要使得$A$，$B$两点之间的距离最小，即当直线$l_1$与$l$平行，且直线$l_1$与曲线$y=f(x)$相切时，$l_1$与$l$的距离即$A$,$B$两点之间的最小距离，
令$f'(x)=\mathrm{e}^x-2=-1$，解得$x=0$.
由$f(0)=1$，得直线$l_1$的方程为$y-1=-x$，即$x+y-1=0$，
则$l_1$与$l$的距离$d=\frac{|3-(-1)|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

即$A$，$B$两点之间距离的最小值是$2\sqrt{2}$.

14.(2024·九省适应性测试)已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点$(2,f(2))$处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直.

(1)求 $a$;

(2)求 $f(x)$的单调区间和极值.

[解析]　(1)$f'(x)=\frac{1}{x}+2x+a$,则 $f'(2)=\frac{1}{2}+2\times2+a=\frac{9}{2}+a$,

由题意可得$\left(\frac{9}{2}+a\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$,解得 $a=-3$.

(2)由(1)得 $f(x)=\ln x+x^2-3x+2$,

则 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x>0$,

故当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$,当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$(1,+\infty)$,$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$,

故 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+2=\frac{3}{4}-\ln 2$,$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=\ln 1+1^2-3\times1+2=0$.

## 创新拓展练

16. 已知函数 $f(x)=x\ln x-x^2+ax$.

(1)若 $f(x)\le 0$,求实数 $a$ 的取值范围;

(2)若函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{1}{e},b]$,且 $f(x)$ 的极大值为 $M$,求证:$M\in(-\frac{1}{4},0)$.

[解析](1)由题意知,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,
由 $f(x)\le 0$,不等式两边同除以 $x$,得 $\ln x-x+a\le 0$.

设 $g(x)=\ln x-x+a, x>0$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$,令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$.
故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,
所以 $g(x)\le g(1)=\ln 1-1+a=-1+a$,只需 $-1+a\le 0$,所以 $a\le 1$,
所以实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

(2)令 $t(x)=f'(x)=\ln x+1-2x+a, x>0$,则 $t'(x)=\frac{1}{x}-2$,

令 $t'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$,

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时,$t'(x)>0$;当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时,$t'(x)<0$.

故 $t(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减.

因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{1}{e},b]$,

所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+1-2\times\frac{1}{e}+a=0, f'(b)=\ln b+1-2b+a=0, b>\frac{1}{2}$,解得 $a=\frac{2}{e}$,且 $\ln b=-1+2b-a=2b-1-\frac{2}{e}$.

当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(\frac{1}{e},b)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(b,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{e},b)$ 上单调递增,在 $(b,+\infty)$ 上单调递减.

所以$f(x)$的极大值$M=f(b)=b\ln b-b^2+b\cdot\frac{2}{e}=b\left(2b-1-\frac{2}{e}\right)-b^2+\frac{2b}{e}=b^2-b$.

因为$f'(1)=\ln 1+1-2\times 1+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}-1<0, f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$,

所以$b\in(\frac{1}{2},1)$，所以$b^2-b\in(-\frac{1}{4},0)$，即$f(x)$的极大值$M\in(-\frac{1}{4},0)$.