**十年（**2014**－**2023**）年高考真题分项汇编—三角函数解答题**

**目录**

[**题型一：三角恒等变换 1**](#_Toc140493599)

[**题型二：三角函数与向量综合 4**](#_Toc140493600)

[**题型三：三角函数的图像与性质 8**](#_Toc140493601)

[**题型四：正余弦定理的应用 20**](#_Toc140493602)

[**题型五：与三角形周长、面积有关问题 38**](#_Toc140493603)

[**题型六：三角函数的建模应用 50**](#_Toc140493604)

[**题型七：结构不良型试题 56**](#_Toc140493605)

# 题型一：三角恒等变换

1．(2023年天津卷·第16题)在中，角所对边分別是．已知．

(1)求的值；

(2)求的值；

(3)求．

**【答案】**(1)

(2)

(3)

解析：(1)由正弦定理可得，，即，解得：；

(2)由余弦定理可得，，即，

解得：或(舍去)．

(3)由正弦定理可得，，即，解得：，而，

所以都为锐角，因此，，

故．

2．(2023年新课标全国Ⅰ卷·第17题)已知在中，．

(1)求；

(2)设，求边上的高．

**【答案】**(1)

(2)6

解析：(1)，

，即，

又，

，

，

，

即，所以，

．

(2)由(1)知，，

由，

由正弦定理，，可得，

，

．

3．(2018年高考数学江苏卷·第16题)(本小题满分14分)已知为锐角，，．

(1)求的值； (2)求的值．

**【答案】**解析：(1)因为，，所以．

因为，，

因此．

(2)因为为锐角，所以．

又因为，所以，

因此，．

因为，所以，

因此，．

4．(2018年高考数学浙江卷·第18题)已知角的顶点与原点重合，始边与轴的非负半轴重合，它的终边过点．

(1)求的值;

(2)若角满足，求 值．

**【答案】**(1) ；(2)或．

【解析】(1)由角终边过点得所以．

(2)由角终边过点得，

由得．

由得

当时，；

当时，

所以或．

5．(2014高考数学广东理科·第16题)已知函数，且，

(1)求的值；

(2)若，，求．

**【答案】**解：(1)依题意有，所以

(2)由(1)得，

，



6．(2014高考数学江苏·第15题)已知，．

(1)求的值；

(2)求的值．

**【答案】**(1)； (2)

解析：(1)因为*α*∈，sin*α*＝，所以cos*α*＝．

故sin＝sincos*α*＋cossin*α*＝．

(2)由(1)知sin2*α*＝2sin*α*cos*α*＝，

cos2*α*＝1－2sin2*α*＝1－，

所以cos＝．

# 题型二：三角函数与向量综合

1．(2014高考数学山东理科·第16题)已知向量，，设函数，且的图象过点和点．

(Ⅰ)求的值；

(Ⅱ)将的图象向左平移()个单位后得到函数的图象．若图象上各最高点到点的距离的最小值为1，求的单调递增区间．

**【答案】**(Ⅰ)(Ⅱ)

解析：(Ⅰ)已知，

过点





解得．

(Ⅱ)

左移后得到

设的对称轴为，解得

，解得







的单调增区间为

2．(2017年高考数学江苏文理科·第16题)已知向量学科网 版权所有

(1)若,求*x*的值;

(2)记学科网 版权所有,求学科网 版权所有的最大值和最小值以及对应的*学科网 版权所有*的值．

**【答案】**(1)学科网 版权所有(2)学科网 版权所有时,学科网 版权所有取得最大值,为3;学科网 版权所有时,学科网 版权所有取得最小值,为学科网 版权所有．

解析:解:(1)因为学科网 版权所有,学科网 版权所有,,

所以学科网 版权所有．

若学科网 版权所有,则学科网 版权所有,与学科网 版权所有矛盾,故学科网 版权所有．

于是学科网 版权所有．又,所以学科网 版权所有．

(2)学科网 版权所有．

因为,所以学科网 版权所有,

从而学科网 版权所有．

于是,当学科网 版权所有,即学科网 版权所有时,取到最大值3;

当学科网 版权所有,即学科网 版权所有时,取到最小值学科网 版权所有．

3．(2014高考数学辽宁理科·第17题)(本小题满分12分)

在中，内角A，B，C的对边a，b，c，且，已知，，，求：

(1)a和c的值；

(2)的值．

**【答案】**

(1)a=3，c=2；(2)

解析：(1)，，，即①，由余弦定理可得

，化简整理得②，①②联立，解得，a=3，c=2；

(2)，

因为a=3，，c=2，由余弦定理可得，，

．

解析2：

(2)在△ABC中，，根据正弦定理可得

，**，**为锐角，，

．

4．(2015高考数学陕西理科·第17题)(本小题满分12分)的内角，，所对的边分别为，，．向量与

平行．

(Ⅰ)求；

(Ⅱ)若，求的面积．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)．

分析：(Ⅰ)先利用可得，再利用正弦定理可得的值，进而可得的值；(Ⅱ)由余弦定理可得的值，进而利用三角形的面积公式可得的面积．

解析：(Ⅰ)因为，所以，

由正弦定理，得

又，从而，由于，所以

(Ⅱ)解法一：由余弦定理，得

而得，即

因为，所以．故的面积为．

解法二：由正弦定理，得，从而，

又由，知，所以．

故

所以的面积为．

5．(2015高考数学广东理科·第16题)(本小题满分12分)

在平面直角坐标系中，已知向量，，．

(1)若，求的值;

(2)若与的夹角为，求的值．

**【答案】**解析：(1)，，且，



(2)



# 题型三：三角函数的图像与性质

1．(2014高考数学江西理科·第17题)已知函数,其中

(1)当时,求在区间上的最大值与最小值;

(2)若,求的值．

**【答案】**(1)最大值为最小值为-1． (2)

分析:(1)求三角函数最值,首先将其化为基本三角函数形式:当时,,再结合基本三角函数性质求最值:因为,从而,故在上的最大值为最小值为-1．(2)两个独立条件求两个未知数,联立方程组求解即可． 由得,又知解得

解析:解(1)当时,



因为,从而

故在上的最大值为最小值为-1．

(2)由得,又知解得

2．(2019·浙江·第18题)设函数，．

(Ⅰ)已知，函数是偶函数，求的值；

(Ⅱ)求函数的值域．

**【答案】**【意图】本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分14分。

【解析】(Ⅰ)解法一：因为是偶函数，所以，对任意实数都有，

即，故，所以，又，

因此，或．

解法二：根据诱导公式，，，因为是偶函数，，

所以

(Ⅱ)

．因此，函数的值域是．

3．(2018年高考数学上海·第18题)(本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分)

设常数，函数．

(1)若为偶函数，求的值；

(2)若，求方程在区间上的解．

**【答案】**(1)；(2)．

解析：(1)显然定义域为．

由题意得，即．

化简得：，对于任意成立，则．

(2)由条件得，解得．

所以，化简得．

因为，所以．

所以，，，．解得，，，．

另解：****或．

解得或．因为，所以对赋值．

当时，，；当时，，．

4．(2014高考数学重庆理科·第17题)已知函数的图像关于直线对称，且图像上相邻两个最高点的距离为．

(I)求和的值；

(II)若，求的值．

**【答案】**(I)

(2)

解析：(Ⅰ)由题意最小正周期为，从而。又图象关于对称，故，而

(Ⅱ)由(Ⅰ)得。所以，

，故，

于是



5．(2014高考数学天津理科·第15题)已知函数,．

(Ⅰ)求的最小正周期;

(Ⅱ)求在闭区间上的最大值和最小值．

**【答案】**(Ⅰ);(Ⅱ),．

解析:(Ⅰ)由已知,有









所以的最小正周期为．

(Ⅱ)因为在区间上是减函数,在区间上是增函数,而,,,所以,函数在闭区间上的最大值为,最小值为．

6．(2014高考数学四川理科·第16题)已知函数

(Ⅰ)求的单调递增区间；

(Ⅱ)若是第二象限角，求的值

**【答案】**解析：(Ⅰ)因为函数的单调递增区间为，．

由，，得，．

所以，函数的单调递增区间为，

(Ⅱ)由已知，有，

　　　所以

　　　即

当时，由是第二象限角，知，．

此时，．

当时，有．

由是第二象限角，知，此时．

综上所述，或．

7．(2014高考数学福建理科·第16题)(本小题满分13分)

已知函数

(1)若，且，求的值；

(2)求函数的最小正周期及单调递增区间．

**【答案】**解析：解法一：(I)因为，所以．

所以，

(II)因为，

所以周期，

由，得，

所以的单调递增区间为，

解法二：，

(I)因为所以，



(II)周期，

由，得，

所以的单调递增区间为．

8．(2015高考数学重庆理科·第18题)(本小题满分13分，(1)小问7分，(2)小问6分)

已知函数

(1)求的最小正周期和最大值；

(2)讨论在上的单调性．

**【答案】**(1)最小正周期为，最大值为；

(2)在上单调递增；在上单调递减．

分析：三角函数问题一般方法是把函数转化为一个角，一个函数，一次式，即为形式，然后根据正弦函数的性质求得结论，本题利用诱导公式、倍角公式、两角差的正弦公式可把函数转化为，这样根据正弦函数性质可得(1)周期为，最大值为；(2)由已知条件得，而正弦函数在和上分别是增函数和减函数，因此可得单调区间．

解析：(1)

,

因此的最小正周期为，最大值为．

(2)当时，有，从而

当时,即时，单调递增，

当时,即时，单调递减，

综上可知，在上单调递增；在上单调递减．

9．(2015高考数学天津理科·第15题)(本小题满分13分)已知函数，

(Ⅰ)求的最小正周期；

(Ⅱ)求在区间上的最大值和最小值．

**【答案】**(Ⅰ); (Ⅱ),．

解析：(Ⅰ)由已知，有



．

所以的最小正周期．

(Ⅱ)因为在区间上是减函数，在区间上是增函数，

，所以在区间上的最大值为，最小值为．

10．(2015高考数学湖北理科·第17题)(本小题满分11分)某同学用“五点法”画函数在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 5 |  |  | 0 |

(Ⅰ)请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数的解析式；

(Ⅱ)将图象上所有点向左平行移动个单位长度，得到的图象．若图象的一个对称中心为，求的最小值．

**【答案】**解析：(Ⅰ)根据表中已知数据，解得．数据补全如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 5 | 0 |  | 0 |

且函数表达式为．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 ，得．

因为的对称中心为，．

令，解得，．

由于函数的图象关于点成中心对称，令，

解得，．由可知，当时，取得最小值．

11．(2015高考数学福建理科·第19题)已知函数的图像是由函数的图像经如下变换得到：先将图像上所有点的纵坐标伸长到原来的2倍(横坐标不变)，再将所得到的图像向右平移个单位长度．

(Ⅰ)求函数的解析式，并求其图像的对称轴方程；

(Ⅱ)已知关于的方程在内有两个不同的解．

(1)求实数*m*的取值范围；

(2)证明：

**【答案】**(Ⅰ)，；(Ⅱ)(1)；(2)详见解析．

解析：解法一：(1)将的图像上所有点的纵坐标伸长到原来的2倍(横坐标不变)得到的图像，再将的图像向右平移个单位长度后得到的图像，故，从而函数图像的对称轴方程为

(2)1)

(其中)

依题意，在区间内有两个不同的解当且仅当，故m的取值范围是．

2)因为是方程在区间内有两个不同的解，

所以，．

当时，

当时, 

所以

解法二：(1)同解法一．

(2)1)同解法一．

2)因为是方程在区间内有两个不同的解，

所以，．

当时，

当时, 

所以

于是



12．(2015高考数学北京理科·第15题)(本小题13分)已知函数．

(Ⅰ)求的最小正周期；

(Ⅱ)求在区间上的最小值．

**【答案】**(Ⅰ)；(Ⅱ)．

解析：

解析：先用降幂公式和辅助角公式进行三角恒等变形，把函数化为形式，再利用周期公式求出周期，第二步由于则可求出，借助正弦函数图象找出在这个范围内当，即时，取得最小值为：．

解析： 



(Ⅰ)的最小正周期为；

(Ⅱ)，当时，取得最小值为：

13．(2017年高考数学浙江文理科·第18题)已知函数．

(Ⅰ)求的值;

(Ⅱ)求的最小正周期及单调递增区间．

**【答案】** (1)2;(2)

【解析】(1)











所以

(2)设的最小正周期为,则;

的单调减区间为,

所以由,得,

得

所以的单调递增区间为

【考点】本题主要考查三角函数的性质及其变换等基础知识,同时考查运算求解能力．

14．(2017年高考数学山东理科·第16题)设函数,其中．已知．

(Ⅰ)求;

(Ⅱ)将函数的图象上各点的横坐标伸长为原来的倍(纵坐标不变),再将得到的图象向左平移个单位,得到函数的图象,求在上的最小值．

**【答案】**(1);(2)时,取得最小值．

【分析】(1)利用两角和与差的三角函数化简到,由题设知及可得;(2)由(1)得从而,根据说明: 学科网 版权所有得到说明: 学科网 版权所有,进一步求最小值．

【解析】

(1)



由

又,所以

(Ⅱ)由(Ⅰ)得

所以．

因为,

所以,

当,即时,取得最小值．

15．(2016高考数学天津理科·第15题) 已知函数．

(Ⅰ)求的定义域与最小正周期；

(Ⅱ)讨论在区间上的单调性．

**【答案】**(Ⅰ)定义域,

(Ⅱ)函数在上单调增，在上单调减

解析：(Ⅰ)

．

∴的定义域,

(Ⅱ)，，设，

∵在时单调递减，在时单调递增



由解得，由解得

∴函数在上单调增，在上单调减

16．(2021年高考浙江卷·第18题)设函数．

(1)求函数的最小正周期；

(2)求函数在上的最大值．

**【答案】**(1)；(2)．

解析:(1)由辅助角公式得，

则，

所以该函数的最小正周期;

(2)由题意，



，

由可得，所以当即时，函数取最大值．

17．(2014高考数学江苏·第26题)已知函数＝()，记为的导数，*n*∈N\*．

(1)求的值；

(2)证明：对任意*n*∈N\*，等式都成立．

**【答案】**解析： (1)解：由已知，

故，

所以，即＋．

(2)证明一(官方解法)：由已知得：，等式两边分别对求导：，

即，类似可得：

，

，

．

下面用数学归纳法证明等式对所有的都成立．

(ⅰ)当时，由上可知等式成立；

(ⅱ)假设当时等式成立，即．

因为，

，

所以．

因此当时，等式成立．

综合(ⅰ)，(ⅱ)可知等式对所有的都成立．

令，可得．

所以．

解法二：令

所以，

又

故

所以，即，命题得证．

# 题型四：正余弦定理的应用

1．(2023年新课标全国Ⅱ卷·第17题)记的内角的对边分别为，已知的面积为，为中点，且．

(1)若，求；

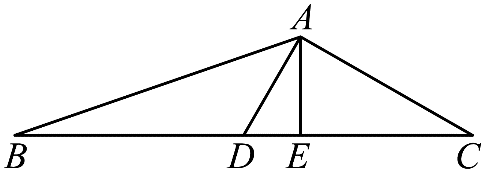
(2)若，求．

**【答案】**(1)；

(2)．

解析：(1)

方法1：在中，因为为中点，，，



则，解得，

在中，，由余弦定理得，

即，解得，则，

，

所以．

方法2：在中，因为为中点，，，

则，解得，

在中，由余弦定理得，

即，解得，有，则，

，过作于，于是，，

所以．

(2)

方法1：在与中，由余弦定理得，

整理得，而，则，

又，解得，而，于是，

所以

方法2：在中，因为为中点，则，又，

于是，即，解得，

又，解得，而，于是，

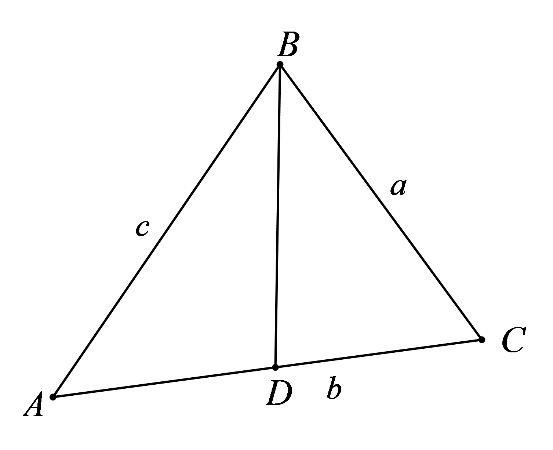
所以．

2．(2021年新高考Ⅰ卷·第19题)记是内角，，的对边分别为，，．已知，点在边上，．

(1)证明：；

(2)若，求．

**【答案】**解析：



(1)由题设，，由正弦定理知：，即，

∴，又，∴，得证．

(2)由题意知：，

∴，同理，

∵，

∴，整理得，又，

∴，整理得，解得或，

由余弦定理知：，

当时，不合题意；当时，；

综上，．

3．(2020年浙江省高考数学试卷·第18题)在锐角△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且．

(I)求角*B*；

(II)求cos*A*+cos*B*+cos*C*的取值范围．

**【答案】**(I)；(II)

解析：(I)由结合正弦定理可得：

△*ABC*为锐角三角形，故．

(II)结合(1)的结论有：





．

由可得：，，

则，．

即的取值范围是

4．(2022新高考全国I卷·第18题)记的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知．

(1)若，求*B*；

(2)求的最小值．

**【答案】**(1)；

(2)．

解析：(1)因为，即，

而，所以；

(2)由(1)知，，所以，

而， 所以，即有．

所以

．

当且仅当时取等号，所以的最小值为．

5．(2020天津高考·第16题)在中，角所对的边分别为．已知．

(Ⅰ)求角的大小；

(Ⅱ)求的值；

(Ⅲ)求的值．

【答案】(Ⅰ)；(Ⅱ)；(Ⅲ)．

【解析】(Ⅰ)在中，由及余弦定理得

，又因为，所以；

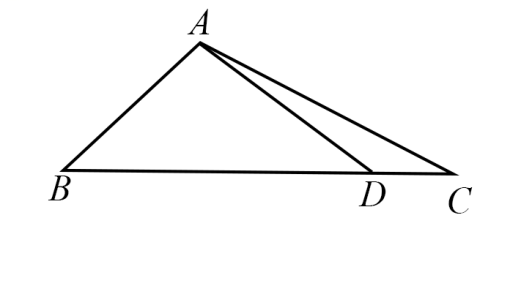
(Ⅱ)在中，由，及正弦定理，可得；

(Ⅲ)由知角为锐角，由，可得，

进而，

所以．

6．(2020江苏高考·第16题)在中，角的对边分别为，已知．



(1)求的值；

(2)在边上取一点，使得，求的值．

**【答案】**(1)；(2)．

【解析】(1)由余弦定理得，所以．

由正弦定理得．

(2)由于，，所以．

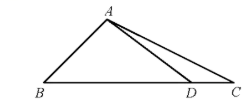
由于，所以，所以

所以

．

由于，所以．

所以．



**【点评】**本题主要考查解三角形。

7．(2019·全国Ⅰ·理·第17题)的内角的对边分别为．设．

(1)求；

(2)若，求．

**【答案】**解析：(1)由已知得，故由正弦定理得．

由余弦定理得．因为，所以．

(2)由(1)知，由题设及正弦定理得，

即，可得．

由于，所以，故

．

8．(2019·江苏·第15题)在中，角的对边分别为．

(1)若，求的值；

(2)若，求的值．

**【答案】**见解析

【解析】(1)因为

由余弦定理，得，即.

所以.

(2)因为，

由正弦定理，得，所以.

从而，即，故.

因为，所以，从而.

因此.

9．(2019·北京·理·第15题)在△*ABC*中，，，．

(Ⅰ)求的值；

(Ⅱ)求sin(*B*–*C*)的值．

**【答案】**(Ⅰ)由题可知，，，由余弦定理得：，

解得：．

(Ⅱ)由同角三角函数基本关系可得：，

结合正弦定理可得：，

很明显角C为锐角，故，

故．

10．(2018年高考数学天津(理)·第15题)在中，内角所对的边分别为，已知．

(1)求角的大小；

(2)设，求和的值．

**【答案】**(1)解：在中，由正弦定理，可得，又由，得，即，可得．又因为，可得．

(2)解：在中，由余弦定理及，，有，故．

由，可得．因为，故．

因此，

所以，

11．(2018年高考数学课标卷Ⅰ(理)·第17题)(12分)在平面四边形中，，， ,．

(1)求; (2)若,求．

**【答案】**解析：(1)在中，由正弦定理得．

由题设知，，所以．

由题设知，，所以．

(2)由题设及(1)知，．

在中，由余弦定理得





．

所以．

12．(2018年高考数学北京(理)·第15题)(本小题13分)在中，，，．(Ⅰ)求；

(Ⅱ)求边上的高．

**【答案】**(共13分)解：(Ⅰ)在中，

由正弦定理得

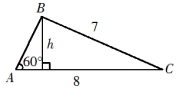


(Ⅱ)在中，



如图所示，在中，，，

边上的高为．



13．(2014高考数学陕西理科·第18题)的内角所对的边分别为．

⑴若成等差数列，证明：；

⑵若成等比数列，求的最小值．

**【答案】**(1)详见解析;(2)．

解析: ⑴因为成等差数列，且，所以 ，

由正弦定理得，

因为  ，

所以；

⑵由成等比数列有，

由余弦定理有，

当且仅当时等号成立， (1)详见解析;(2)．

所以的最小值为。

14．(2014高考数学湖南理科·第18题)如图右,在平面四边形中,．

(Ⅰ)求的值;

(Ⅱ)若求的长．



**【答案】**(1); (2)

解析:解:(1)由关于的余弦定理可得

,所以．

(2)因为为四边形内角,所以且,则由正余弦的关系可得且,再有正弦的和差角公式可得



,再由的正弦定理可得

．

15．(2014高考数学大纲理科·第17题)ΔABC的内角A、B、C的对边分别为，已知，，求角．

**【答案】**

解析：根据正弦定理，由



因为，所以

所以

因为，所以

由三角形的内角和可得．

16．(2014高考数学北京理科·第15题)如图, 在△*ABC*中, ∠*B*= , *AB*=8, 点*D*在*BC*边上, 且*CD*=2, cos∠*ADC*=

(1)求sin∠*BAD*

(2)求*BD*, *AC*的长



**【答案】**解析：(Ⅰ)在中,因为,所以．

所以





(Ⅱ)在中,由正弦定理得：



在中,由余弦定理得





所以

17．(2014高考数学安徽理科·第16题)设的内角所对边的长分别是，且．

(Ⅰ)求的值；

(Ⅱ)求的值．

**【答案】**解：(Ⅰ)因为，所以．

由正、余弦定理得．

因为，，所以，．

(Ⅱ)由余弦定理得．

由于，所以．

故．

18．(2015高考数学四川理科·第19题)如图，为平面四边形的四个内角．



(1)证明：

(2)若求的值．

**【答案】**(1)详见解析；(2)．

解析：(1)．

(2)由，得．

由(1)，有



连结BD，

在中，有，

在中，有，

所以 ，

则，

于是．

连结AC，同理可得

，

于是．

所以．

考点：本题考查二倍角公式、诱导公式、余弦定理、简单的三角恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查函数与方程、化归与转化等数学思想．

19．(2015高考数学湖南理科·第19题)设的内角，，的对边分别为，，，，且为钝角．

(1)证明：；

(2)求的取值范围．

**【答案】**(1)详见解析；(2)．

分析：(1)利用正弦定理，将条件中的式子等价变形为，再结合条件从而得证；(2)利用(1)中的结论，以及三角恒等变形，将转化为只与有关的表达式，再利用三角函数的性质即可求解．

解析：(1)由及正弦定理，得，∴，即，

又为钝角，因此，故，即；(2)由(1)知，

，∴，于是

，∵，∴，因此，由此可知的取值范围是．

20．(2015高考数学江苏文理·第15题)在中，已知．

(1)求的长；

(2)求的值．

**【答案】**(1)(2)

分析：(1)已知两边及夹角求第三边，应用余弦定理，可得的长，(2)利用(1)的结果，则由余弦定理先求出角C的余弦值，再根据平方关系及三角形角的范围求出角C的正弦值，最后利用二倍角公式求出的值．

解析：(1)由余弦定理知，，

所以．

(2)由正弦定理知，，所以．

因为，所以为锐角，则．

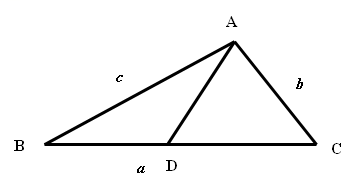
因此．

21．(2015高考数学安徽理科·第16题)(本小题满分12分)在中，,点*D*在边上，，求的长．

**【答案】**

分析：根据题意，设出的内角所对边的长分别是，由余弦定理求出的长度，再由正弦定理求出角的大小，在中．利用正弦定理即可求出的长度．

解析：如图，



设的内角所对边的长分别是，由余弦定理得

，所以．

又由正弦定理得．

由题设知，所以．

在中，由正弦定理得．

22．(2017年高考数学天津理科·第15题)在中,内角所对的边分别为．已知,,．

(1)求和的值;

(2)求的值．

**【答案】**(1)(2)

【解析】(1)解:在中,因为,故由,可得．由已知及余弦定理,有,所以．

由正弦定理,得．

所以,的值为,的值为．

(2)解:由(Ⅰ)及,得,所以,

．故

【考点】(1)正余弦定理的应用(2)二倍角和和差角公式的运用．

【点评】在运用余弦定理的时候注意选择公式,一般来说由知道的角来选择公式．

23．(2016高考数学四川理科·第17题)在中，角所对的边分别是，且．

(1)证明：；

(2)若，求．

**【答案】**【官方解答】根据正弦定理，可设

则，代入

则有

在三角形中，则

所以

(2)

由余弦定理，所以

由(1)

所以，所以．

【民间解析】(1)由正弦定理知



(2)

由余弦定理，所以

由(1)．

24．(2016高考数学山东理科·第16题)(本小题满分12分)在中，角，，的对边分别为，，，已知

(Ⅰ)证明：;

(Ⅱ)求的最小值．

**【答案】**由题意知，

化简得，

即．因为,所以．

从而．由正弦定理得．

由知,所以,

当且仅当时，等号成立．故 的最小值为．

25．(2016高考数学江苏文理科·第15题)在中，，，．

(1)求的长；

(2)求的值．

**【答案】**(1)；(2)．

【官方解答】(1)因为， ，所以

由正弦定理知，所以．

(2)在中，，所以，

于是，

又，，故．

因为，所以．

因此，．

民间解答：(1)，为三角形的内角

 ，即：；

(2)，

又为三角形的内角 

．

26．(2016高考数学北京理科·第15题)(本小题13分)在中，．

(I)求 的大小

(II)求 的最大值．

**【答案】**(1)；(2)最大值为1．

【官方解答】(Ⅰ)由余弦定理及题设得．

又因为，所以．

(Ⅱ)由(Ⅰ)知．

,

因为，所以当时，取得最大值．

【民间解答】⑴ ∵

∴，∴

∴

⑵∵，∴

∴

∵，∴，∴，∴最大值为1．

上式最大值为1

27．(2019·天津·理·第15题)在中，内角所对的边分别为．已知，．

(Ⅰ)求的值；

(Ⅱ)求的值．

**【答案】**本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力，满分13分．

(Ⅰ)解：在中，由正弦定理，得，又由，得

，即．又因为，得到，．

由余弦定理可得．

(Ⅱ)解：由(Ⅰ)可得，

从而，，

故．

# 题型五：与三角形周长、面积有关问题

1．(2023年全国乙卷理科·第18题)在中，已知，，．

(1)求；

(2)若*D*为*BC*上一点，且，求的面积．

**【答案】**(1)；

(2)．

解析：(1)由余弦定理可得：



，

则，，

．

(2)由三角形面积公式可得，

则．

2．(2021年新高考全国Ⅱ卷·第18题)在中，角、、所对的边长分别为、、，，．．

(1)若，求的面积；

(2)是否存在正整数，使得为钝角三角形?若存在，求出的值；若不存在，说明理由．

**【答案】**解析:(1)因为，则，则，故，，

，所以，锐角，则，

因此，；

(2)显然，若为钝角三角形，则为钝角，由余弦定理可得，解得，则，

由三角形三边关系可得，可得，，故．

3．(2020年高考课标Ⅱ卷理科·第17题)中，sin2*A*－sin2*B*－sin2*C*=sin*B*sin*C．*

(1)求*A*；

(2)若*BC*=3，求周长的最大值．

**【答案】**(1)；(2)．

解析：(1)由正弦定理可得：，

，

，

(2)由余弦定理得：，

即．

(当且仅当时取等号)，

，

解得：(当且仅当时取等号)，

周长，周长的最大值为．

【点睛】本题考查解三角形的相关知识，涉及到正弦定理角化边的应用、余弦定理的应用、三角形周长最大值的求解问题；求解周长最大值的关键是能够在余弦定理构造的等式中，结合基本不等式构造不等关系求得最值．

4．(2022高考北京卷·第16题)在中，．

(1)求；

(2)若，且的面积为，求的周长．

**【答案】**解析:因为，则，由已知可得，

可得，因此，．

解：由三角形的面积公式可得，解得．

由余弦定理可得，，

所以，的周长为．

5．(2022年浙江省高考数学试题·第18题)在中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*．已知．

(1)求的值；

(2)若，求的面积．

**【答案】**解析:(1)由于， ，则．因为，

由正弦定理知，则．

(2)因为，由余弦定理，得，

即，解得，而，，

所以的面积．

6．(2022新高考全国II卷·第18题)记的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，分别以*a*，*b*，*c*为边长的三个正三角形的面积依次为，已知．

(1)求面积；

(2)若，求*b*．

**【答案】**(1)

(2)

解析：(1)由题意得，则，

即，由余弦定理得，整理得，则，又，

则，，则；

(2)由正弦定理得：，则，则，．

7．(2022年高考全国乙卷数学(理)·第17题)记的内角的对边分别为，已知．

(1)证明：；

(2)若，求的周长．

**【答案】**(1)见解析 (2)14

解析：【小问1详解】

证明：因为，

所以，

所以，

即，

所以；

【小问2详解】

解：因为，

由(1)得，  
由余弦定理可得，

则，

所以，

故，

所以，

所以的周长为．

8．(2014高考数学浙江理科·第18题)在ABC中，内角A,B,C所对的边分别为a，b，c，已知，，

(I)求角C的大小；

(II)若求的面积。

**【答案】**解析：(I)由题意得，，即，

，由得，，又，得，即，所以；

(II)由，，得，由，得，从而，故，所以的面积为．

9．(2015高考数学浙江理科·第16题)(本题满分14分)在中，内角，，所对的边分别为，，，已知，=．

(1)求的值；

(2)若的面积为，求的值．

**【答案】**(1)；(2)．

解析：

(1)根据正弦定理可将条件中的边之间的关系转化为角之间满足的关系，再将式

子作三角恒等变形即可求解；(2)根据条件首先求得的值，再结合正弦定理以及三角

形面积的计算公式即可求解．

解析：(1)由及正弦定理得，

∴，又由，即，得，

解得；(2)由，得，，

又∵，∴，由正弦定理得，

又∵，，∴，故．

10．(2015高考数学新课标2理科·第17题)(本题满分12分)中，是上的点，平分，面积是面积的2倍．

(Ⅰ)求；

(Ⅱ)若，，求和的长．

**【答案】**

解析：(Ⅰ)，，因为，，所以．由正弦定理可得．

(Ⅱ)因为，所以．在和中，由余弦定理得

，．

．由(Ⅰ)知，所以．

11．(2015高考数学山东理科·第16题)设．

(Ⅰ)求的单调区间；

(Ⅱ)在锐角中，角的对边分别为,若,求面积的最大值．

**【答案】**(Ⅰ)单调递增区间是；

单调递减区间是

(Ⅱ) 面积的最大值为

分析：(Ⅰ)首先利用二倍角公式化简函数 的解析式，再利用正弦函数的单调性求其单调区间；

(Ⅱ)首先由 结合(Ⅰ)的结果，确定角A的值，然后结合余弦定理求出三角形面积的最大值．

解析：(Ⅰ)由题意知

由 可得

由 可得

所以函数 的单调递增区间是 ；

单调递减区间是

(Ⅱ)由 得

由题意知为锐角，所以

由余弦定理： 可得：

即： 当且仅当时等号成立．

因此

所以面积的最大值为

12．(2017年高考数学新课标Ⅰ卷理科·第17题)的内角的对边分别为,已知的面积为学科网 版权所有．

(1)求; (2)若,,求的周长．

**【答案】**(1);(2)的周长为．

【分析】(1)由三角形面积公式建立等式,再利用正弦定理将边化成角,从而得出的值;(2)由和,计算出,从而求出角,根据题设和余弦定理可以求出和的值,从而可求出的周长．

【解析】(1)由题设得,即．

由正弦定理得．

故．

(2)由题设及(1)得,即．

所以,故．

由题设得,即．

由余弦定理得,即,得．

故的周长为．

13．(2017年高考数学上海(文理科)·第18题)(本题满分14分,第1小题满分6分,第2小题满分8分)

已知函数,．

(1)求的单调递增区间;

(2)设为锐角三角形,角所对边,角所对边,若,求的面积．

**【答案】**(1),,单调递增区间为;

(2),∴或,

根据锐角三角形,,∴,．

14．(2017年高考数学课标Ⅲ卷理科·第17题)(12分)的内角的对边分别为．已知，，．

(1)求；

(2)设为边上一点，且，求的面积．

**【答案】**(1)学科网 版权所有 ;(2)学科网 版权所有

【解析】(1)由可得,因为,故．

由余弦定理可知:即

整理可得,解得(舍去)或．

(2)法一:设,则在中,由勾股定理可得



在中,有

由余弦定理可得

即即

所以,解得

所以．

法二:依题意易知

又因为,

所以

所以．

法三:∵,

由余弦定理．

∵,即为直角三角形,

则,得．

由勾股定理．

又,则,

．

15．(2017年高考数学课标Ⅱ卷理科·第17题)(12分)的内角的对边分别为 ,已知．

(1)求

(2)若 , 面积为2,求

**【答案】**(1)学科网 版权所有；(2)学科网 版权所有．

【命题意图】本题考查三角恒等变形，解三角形．

【试题分析】在第(Ⅰ)中，利用三角形内角和定理可知学科网 版权所有，将转化为角的方程，思维方向有两个：①利用降幂公式化简学科网 版权所有，结合学科网 版权所有求出学科网 版权所有；②利用二倍角公式，化简，两边约去，求得，进而求得．在第(Ⅱ)中，利用(Ⅰ)中结论，利用勾股定理和面积公式求出学科网 版权所有，从而求出学科网 版权所有．

(Ⅰ)

【基本解法1】

由题设及，故

学科网 版权所有

上式两边平方，整理得 学科网 版权所有

解得 学科网 版权所有

【基本解法2】

由题设及，所以，又，所以，

(Ⅱ)由学科网 版权所有，故学科网 版权所有

又学科网 版权所有

由余弦定理及学科网 版权所有得

学科网 版权所有

所以b=2

16．(2017年高考数学北京理科·第15题)在中, ,．

(Ⅰ)求的值;

(Ⅱ)若,求的面积．

**【答案】**(Ⅰ)学科网 版权所有;(Ⅱ)学科网 版权所有．

【解析】(Ⅰ)根据正弦定理学科网 版权所有求学科网 版权所有的值;(Ⅱ)根据条件可知学科网 版权所有根据(Ⅰ)的结果求学科网 版权所有,再利用学科网 版权所有求解,最后利用三角形的面积学科网 版权所有．

解:(Ⅰ)在中,因为,

所以有正弦定理得．

(Ⅱ)因为,所以,

由余弦定理得,

解得或(舍)

所以的面积．

17．(2016高考数学浙江理科·第16题)(本题满分14分)在中，内角所对的边分别为．已知．

(Ⅰ)证明：；

(Ⅱ)若的面积，求角的大小．

**【答案】**【命题意图】本题主要考查三角恒等变换、三角形内角和定理及正弦定理的应用等基础知识，考查学生的运算求解能力．

解析：(Ⅰ)由正弦定理得，故

，于是．又，故，

所以或，因此(舍去)或，所以．

(Ⅱ)由得，故有，因为，得．

又，，所以．当时，；当时，．综上，或．

18．(2016高考数学课标Ⅰ卷理科·第17题)(本题满分为12分)的内角的对边分别为*，*已知

(I)求；

(II)若，的面积为，求的周长．

**【答案】** (I)；(II)

【官方解答】(I)由已知及正弦定理得：

即 故 ∴

可得 ∴

(II) 由已知得， 又所以

由已知及余定理得：，，从而

∴周长为．

【民间解答】(I)

由正弦定理得：



∵， ∴

∴， ∵ ∴

(II) 由余弦定理得：，，

 ∴ ∴ ，

∴周长为

19．(2019·全国Ⅲ·理·第18题)的内角的对边分别为，已知．

(1)求；

(2)若为锐角三角形，且，求面积的取值范围．

**【答案】**(1);(2)．

【官方解析】

(1)由题设及正弦定理得，

因为，所以．

由，可得，故．

因为，故，因此．

(2)由题设及(1)知的面积．

由正弦定理得．

由于为锐角三角形，故，．由(1)知，

所以，故，从而．

因此面积的取值范围是．

【点评】这道题考查了三角函数的基础知识，和正弦定理或者余弦定理的使用(此题也可以用余弦定理求解)，最后考查是锐角三角形这个条件的利用．考查的很全面，是一道很好的考题．

# 题型六：三角函数的建模应用

1．(2014高考数学湖北理科·第17题)某实验室一天的温度(单位：)随时间(单位：)的变化近似满足函数关系；

，．

(Ⅰ)求实验室这一天的最大温差；

(Ⅱ)若要求实验室温度不高于11，则在哪段时间实验室需要降温？

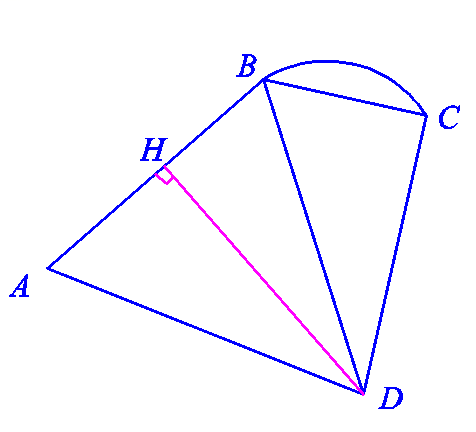
**【答案】**(1)详见解析；(2)详见解析．

解析：(1)因为，又，所以，，当时，；当时，；于是在上取得最大值12，取得最小值8．

(2)依题意，当时实验室需要降温．由(1)得，所以，即，又，因此，即，故在10时至18时实验室需要降温．

2．(2019·上海·第19题)如图，为海岸线，为线段，弧*BC*为四分之一圆弧，，，，.

(1)求弧*BC*长度；

(2)若，求到海岸线的最短距离.(精确到)

**【答案】**(1)km；(2)35.752*km*

【解析】(1)依题意：，弧*BC*所在圆的半径

弧*BC*长度为：*km*

(2)根据正弦定理：，求得：，

∴

*km<CD=*36.346*km*

∴ *D*到海岸线最短距离为35.752*km.*

3．(2014高考数学上海理科·第21题)如图，某公司要在、两地连线上的定点处建造广告牌，其中为顶端，长35米，长80米．设点、在同一水平面上，从和看的仰角分别为和．

(1)设计中是铅垂方向，若要求，问的长至多为多少(结果精确到0．01米)？

(2)施工完成后，与铅垂方向有偏差，现在实测得，，求的长(结果精确到0．01米)．



**【答案】**解析：(1)记．根据已知得，

，，所以，……4分

解得．因此，的长之多约为28．28米．……6分

(2)在△中，由已知，，，

由正弦定理得，解得．……10分

在△中，由余弦定理得，

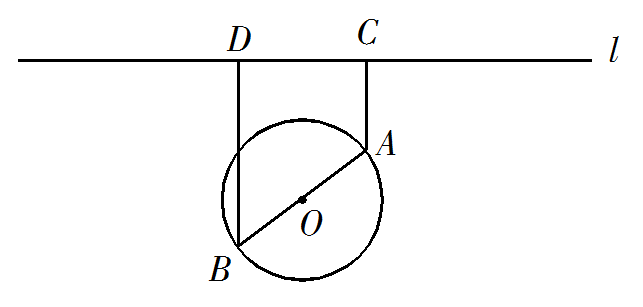
解得．所以，*CD*的长约为26．93米．……14分

4．(2019·江苏·第18题)如图，一个湖的边界是圆心为的圆，湖的一侧有一条直线型公路，湖上有桥(是圆的直径)．规划在公路上选两个点，并修建两段直线型道路．规划要求:线段上的所有点到点的距离均不小于圆的半径．已知点到直线的距离分别为和(为垂足)，测得，，(单位:百米)．

(1)若道路与桥垂直，求道路的长；

(2)在规划要求下，和中能否有一个点选在处？并说明理由；

(3)对规划要求下，若道路和的长度均为(单位：百米).求当最小时，两点间的距离．



**【答案】**见解析

【解析】**解法一：**(1)过作，垂足为.

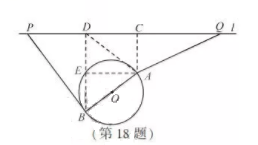
由已知条件得，四边形为矩形，.'

因为，

所以.

所以.

因此道路的长为15(百米).



(2)①若在处，由(1)可得在圆上，则线段上的点(除)到点的距离均小于圆的半径，所以选在处不满足规划要求.

②若在处，连结，由(1)知，

从而，所以为锐角.

所以线段上存在点到点的距离小于圆的半径.

因此，选在处也不满足规划要求.

综上，和均不能选在处.

(3)先讨论点的位置.

当时，线段上存在点到点的距离小于圆的半径，点不符合规划要求；

当时，对线段上任意一点，，即线段上所有点到点的距离均不小于圆的半径，点符合规划要求.

设为上一点，且，由(1)知，=15，

此时；

当时，在中，.

由上可知，.

再讨论点的位置.

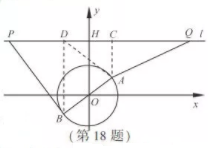
由(2)知，要使得，点只有位于点的右侧，才能符合规划要求.当时，.此时，线段上所有点到点的距离均不小于圆的半径.

综上，当*PB*⊥*AB*，点位于点右侧，且时，*d*最小，此时两点间的距离.

因此，最小时，两点间的距离为(百米).

**解法二：**(1)如图，过作，垂足为*.*

以为坐标原点，直线为轴，建立平面直角坐标系.



因为，，所以，直线*l*的方程为，点的纵坐标分别为3，−3.

因为为圆的直径，，所以圆的方程为.

从而，，直线的斜率为

因为，所以直线的斜率为，

直线的方程为.

所以，.

因此道路的长为15(百米).

(2)①若在处，取线段上一点，则，所以选在处不满足规划要求.

②若在处，连结，由(1)知，又，

所以线段：.

在线段上取点，因为，

所以线段上存在点到点的距离小于圆的半径.

因此选在处也不满足规划要求.

综上，和均不能选在处.

(3)先讨论点的位置.

当时，线段上存在点到点的距离小于圆的半径，点不符合规划要求；

当时，对线段上任意一点，，即线段上所有点到点的距离均不小于圆的半径，点符合规划要求.

设为上一点，且，由(1)知，，此时；

当时，在中，.

由上可知，.

再讨论点的位置.

由(2)知，要使得，点只有位于点的右侧，才能符合规划要求.当时，设，由，得，所以，此时，线段上所有点到点的距离均不小于圆的半径.

综上，当，时，最小，此时两点间的距离

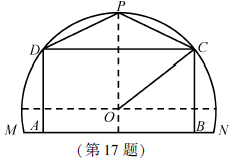
.

因此，最小时，两点间的距离为(百米).

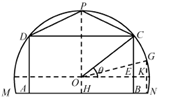
5．(2018年高考数学江苏卷·第17题)(本小题满分14分)某农场有一块农田，如图所示，它的边界由圆*O*的一段圆弧(*P*为此圆弧的中点)和线段*MN*构成．已知圆*O*的半径为40米，点*P*到*MN*的距离为50米．现规划在此农田上修建两个温室大棚，大棚Ⅰ内的地块形状为矩形*ABCD*，大棚Ⅱ内的地块形状为，要求均在线段上，均在圆弧上．设*OC*与*MN*所成的角为．

(1)用分别表示矩形和的面积，并确定的取值范围；

(2)若大棚Ⅰ内种植甲种蔬菜，大棚Ⅱ内种植乙种蔬菜，且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为．求当为何值时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大．



**【答案】**解析：(1)连结*PO*并延长交*MN*于*H*，则*PH*⊥*MN*，所以*OH*=10．



过*O*作*OE*⊥*BC*于*E*，则*OE*∥*MN*，所以∠*COE*=*θ*，

故*OE*=40cos*θ*，*EC*=40sin*θ*，

则矩形*ABCD*的面积为2×40cos*θ*(40sin*θ*+10)=800(4sin*θ*cos*θ*+cos*θ*)，

△*CDP*的面积为．

过*N*作*GN*⊥*MN*，分别交圆弧和*OE*的延长线于*G*和*K*，则*GK*=*KN*=10．

令∠*GOK*=*θ*0，则，．

当时，才能作出满足条件的矩形*ABCD*，

所以的取值范围是．

答：矩形*ABCD*的面积为800(4sin*θ*cos*θ*+cos*θ*)平方米，△*CDP*的面积为1600(cos*θ*–sin*θ*cos*θ*)，

sin*θ*的取值范围是．

(2)因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为4∶3，

设甲的单位面积的年产值为4*k*，乙的单位面积的年产值为3*k*(*k*>0)，

则年总产值为

4*k*×800(4sin*θ*cos*θ*+cos*θ*)+3*k*×1600(cos*θ*–sin*θ*cos*θ*)=8000*k*(sin*θ*cos*θ*+cos*θ*)，．

设*f*(*θ*)= sin*θ*cos*θ*+cos*θ*，．

则＝＝．

令，得．

当时，，所以为增函数；

当时，，所以为减函数；

因此，当时，取到最大值．

答：当时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大．

# 题型七：结构不良型试题

1．(2023年北京卷·第17题)设函数．

(1)若，求的值．

(2)已知在区间上单调递增，，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数存在，求的值．

条件①：；

条件②：；

条件③：区间上单调递减．

注：如果选择的条件不符合要求，第(2)问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

**【答案】**(1)．

(2)条件①不能使函数存在；条件②或条件③可解得，．

解析：(1)因为

所以，

因为，所以．

(2)因为，

所以，所以的最大值为，最小值为．

若选条件①：因为的最大值为，最小值为，所以无解，故条件①不能使函数存在；

若选条件②：因为在上单调递增，且，

所以,所以,,

所以，

又因为，所以，

所以，

所以，因为，所以．

所以，；

若选条件③：因为在上单调递增，在上单调递减，

所以在处取得最小值，即．

以下与条件②相同．

2．(2020年新高考全国Ⅰ卷(山东)·第17题)在①，②，③这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在，它的内角的对边分别为，且，，\_\_\_\_\_\_\_\_?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

**【答案】解法一：**

由可得：，

不妨设，

则：，即．

**选择条件①的解析：**

据此可得：，，此时．

**选择条件②的解析：**

据此可得：，

则：，此时：，则：．

**选择条件③的解析：**

可得，，

与条件矛盾，则问题中的三角形不存在．

解法二：∵,

∴,

 ，

∴,∴,∴,∴,

若选①，,∵,∴,∴c=1;

若选②，,则,;

若选③,与条件矛盾．

3．(2020年新高考全国卷Ⅱ数学(海南)·第17题)在①，②，③这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中三角形存在，求的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在，它的内角的对边分别为，且，，\_\_\_\_\_\_\_\_?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

**【答案】**解析：**解法一：**

由可得：，

不妨设，

则：，即．

**选择条件①的解析：**

据此可得：，，此时．

**选择条件②的解析：**

据此可得：，

则：，此时：，则：．

**选择条件③的解析：**

可得，，

与条件矛盾，则问题中的三角形不存在．

解法二：∵,

∴,

 ，

∴,∴,∴,∴,

若选①，,∵,∴,∴c=1;

若选②，,则,;

若选③,与条件矛盾．

4．(2021高考北京·第16题)在中，，．

(1)求角B的大小；

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使存在且唯一确定，求边上中线的长．

条件①：；

条件②：周长为；

条件③：的面积为；

**【答案】(1)；(2)答案不唯一，具体见解析．**

**解析：(1)，则由正弦定理可得，**

**，，，，**

**，解得；**

**(2)若选择①：由正弦定理结合(1)可得，**

**与矛盾，故这样的不存在；**

**若选择②：由(1)可得，**

**设的外接圆半径为，**

**则由正弦定理可得，**

**，**

**则周长，**

**解得，则，**

**由余弦定理可得边上的中线的长度为：**

**；**

**若选择③：由(1)可得，即，**

**则，解得，**

**则由余弦定理可得边上的中线的长度为：**

**．**

5．(2020北京高考·第17题)在中，，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为己知，求：

(Ⅰ)的值：

(Ⅱ)和的面积．

条件①：；

条件②：．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

**【答案】**选择条件①(Ⅰ)



(Ⅱ)

由正弦定理得：



选择条件②(Ⅰ)



由正弦定理得：

(Ⅱ)

