2025年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数　学

本试卷共5页，19小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数z满足$1+\mathrm{i}z=\mathrm{i}$，则z的虚部为

A．-1　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．已知集合$A=\{x|0\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{x|x^2-2x\leqslant 0\}$，若$B\subseteq A$，则实数$a$的取值范围是

A．$(0,2)$　　B．$(0,2]$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

3．在平行四边形$ABCD$中，点E是BC边上的点，$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{EC}$，点$F$是线段$DE$的中点，若$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\mu=$

A．$\dfrac{5}{4}$　　B．1　　C．$\dfrac{7}{8}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

4．已知球O的表面积为4π，一圆台的上、下底面圆周都在球O的球面上，且下底面过球心O，母线与下底面所成角为$\dfrac{\pi}{3}$，则该圆台的侧面积为

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi$　　B．$\dfrac{3}{2}\pi$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$　　D．3π

5．已知点P在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上，且点$P$到$C$的两条渐近线的距离之积等于$\dfrac{a^2}{2}$，则$C$的离心率为

A．3　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

6. 已知实数 a，b 满足 $3^a = 4^b$，则下列不等式可能成立的是

A. $b<a<0$　　B. $2b<a<0$　　C. $0<a<b$　　D. $0<2b<a$

7. 已知 $\omega>0$，曲线 $y=\cos\omega x$ 与 $y=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 相邻的三个交点构成一个直角三角形，则 $\omega=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　C. $\sqrt{2}\pi$　　D. $\sqrt{3}\pi$

8. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $f(3)=0$，若关于 x 的不等式 $(mx-2)f(x-2)\geqslant(nx+3)f(2-x)$ 的解集为 $[-1,+\infty)$，则 $e^{m-2n}+e^{n+1}$ 的最小值为

A. $2e^3$　　B. $2e^2$　　C. $2e$　　D. $2\sqrt{e}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某位射击运动员的两组训练数据如下：

第一组：10，7，7，8，8，9，7；第二组：10，5，5，8，9，9，10．则

A. 两组数据的平均数相等

B. 第一组数据的方差大于第二组数据的方差

C. 两组数据的极差相等

D. 第一组数据的中位数小于第二组数据的中位数

10. 已知函数 $f(x)=\ln\frac{4-x}{x}+ax$ 在 $x=3$ 处取得极大值，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则

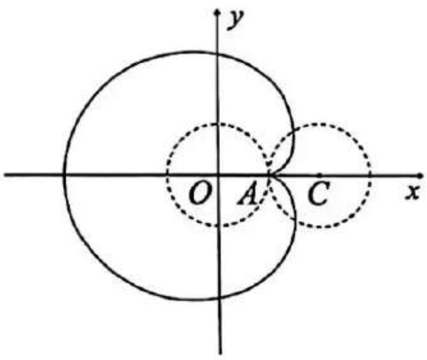
A. $a=\frac{4}{3}$

B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)>f(x^2)$

C. $f'(2+x)=f'(2-x)$

D. 当 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 3$ 且 $x_1+x_2<4$ 时，$f(x_1)+f(x_2)<\frac{16}{3}$

11. 如图，半径为1的动圆 C 沿着圆 $O:x^2+y^2=1$ 外侧无滑动地滚动一周，圆 C 上的点 $P(a,b)$ 形成的外旋轮线 Γ，因其形状像心形又称心脏线．已知运动开始时点 P 与点 $A(1,0)$ 重合．以下说法正确的有



A. 曲线 Γ 上存在到原点的距离超过 $2\sqrt{3}$ 的点

B. 点 $(1,2)$ 在曲线 Γ 上

C. 曲线 Γ 与直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 有两个交点

D. $|b|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知$\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，则$\sin\beta=$______.

13. 将1，2，3，…，9这9个数字填在3×3的方格表中，要求每一行从左到右、每一列从上到下的数字依次变小．若将4填在如图所示的位置上，则填写方格表的方法共有______种.

	4	

14. 在正三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=3\sqrt{2}$，$AB=6$，点D在$\triangle ABC$内部运动（包括边界），点D到棱PA，PB，PC的距离分别记为d_1，d_2，d_3，且$d_1^2+d_2^2+d_3^2=20$，则点D运动路径的长度为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （13 分）

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c=a(1+2\cos B)$.

（1）求证：$B=2A$；

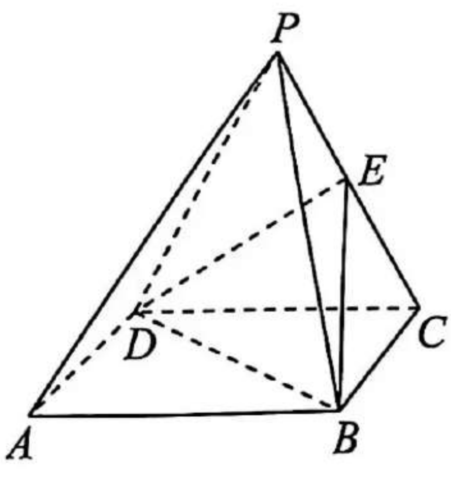
（2）若$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积.

16. （15 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$AB=2BC=2$，侧面PCD是等边三角形，三棱锥$A-PBD$的体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，点E是棱CP的中点.

（1）求证：平面$PBC\perp$平面PCD；

（2）求平面BDE与平面$ABCD$夹角的余弦值.



17. （15 分）

n（$n\in\mathbf{N}^{*}$，$n\geqslant 3$）个人相互传球，传球规则如下：若球由甲手中传出，则甲传给乙；否则，传球者等可能地将球传给另外的$n-1$个人中的任何一个．第一次传球由甲手中传出，第k($k\in\mathbf{N}^{*}$)次传球后，球在甲手中的概率记为$A_n(k)$，球在乙手中的概率记为$B_n(k)$．

（1）求$A_5(2)$，$B_5(2)$，$A_5(3)$，$B_5(3)$；

（2）求$A_n(k)$；

（3）比较$B_n(k+1)$与$\dfrac{n-2}{n-1}A_n(k)$的大小，并说明理由．

18. （17 分）

已知动点P到点$F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$的距离等于它到直线$x=-\dfrac{1}{2}$的距离，记动点$P$的轨迹为曲线$C$．

（1）求C的方程；

（2）O为坐标原点，过点$M(2,0)$且斜率存在的直线l与C相交于A，B两点，直线AO与直线$x=-2$相交于点D，过点B且与C相切的直线交x轴于点E．

（i）证明：直线$DE\,/\!/\,l$；

（ii）满足四边形$ABDE$的面积为12的直线l共有多少条？说明理由．

19．（17分）

已知$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 3$，集合$A_n=\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$，其中$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$．若存在函数$f(x)$（$f(x)\neq x$），其图象在区间$D=\left[a_1, a_n\right]$上是一段连续曲线，且$\left\{f(a_i)\middle|a_i\in A_n\right\}=A_n$，则称$f(x)$是$A_n$的$T$变换函数，集合$A_n$是$D$的$T$子集．例如，设$A_5=\left\{\dfrac{2}{3}, 1, \sqrt{2}, 2, 3\right\}$，此时函数$f(x)=\dfrac{2}{x}$是$A_5$的$T$变换函数，$A_5$是$\left[\dfrac{2}{3}, 3\right]$的$T$子集．

（1）判断集合$\{1, 2, 8, 9\}$是否是$[1, 9]$的T子集？说明理由；

（2）判断$f(x)=\ln\left(1+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$是否为集合$A_n$的$T$变换函数？说明理由；

（3）若$a_i<a_j$（$i, j\in\mathbf{N}^*$, $1\leqslant i<j\leqslant n$），则$\dfrac{a_j}{a_i}\in A_n$，试问是否存在函数$f(x)$，使得集合$A_n$是$D=\left[a_1, a_n\right]$的$T$子集？若存在，求$f(x)$的解析式；若不存在，说明理由．