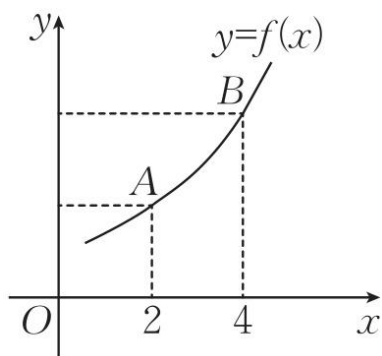


第三单元 一元函数的导数及其应用

2. [2024·成都月考] 已知函数 $f(x) = x^2 - 2$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} =$ ().

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 6

5. 已知函数 $y = f(x)$ 的部分图象如图所示, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 则 ().



- A. $f'(2) < \frac{f(4)-f(2)}{2} < f'(4)$ B. $f'(4) < f'(2) < \frac{f(4)-f(2)}{2}$
C. $f'(2) < f'(4) < \frac{f(4)-f(2)}{2}$ D. $\frac{f(4)-f(2)}{2} < f'(4) < f'(2)$

6. [2024·福建月考] 曲线 $f(x) = x \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 ().

- A. $2x - y - 2 = 0$ B. $x - y - 1 = 0$ C. $x + y - 1 = 0$ D. $3x - y - 1 = 0$

8. [2024·延安测试] 若曲线 $f(x) = (2x + k) \cos x$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 2, 则 $k =$ ().

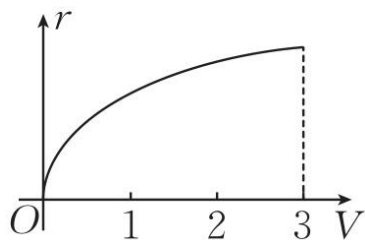
- A. $\sqrt{2}$ B. $\pm 2\sqrt{2}$ C. $2 \pm \sqrt{2}$ D. $2\pi \pm \sqrt{2}$

综合提升练

9. [2024·德州模拟] (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = f'(x_0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“巧值点”, 则下列函数中有“巧值点”的是 ().

- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = \frac{1}{x}$ C. $f(x) = \ln x$ D. $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

10. [2024·广东模拟] (多选题) 吹气球时, 记气球的半径 r 与体积 V 之间的函数关系为 $r(V)$, $r'(V)$ 为 $r(V)$ 的导函数. 已知 $r(V)$ 在 $[0, 3]$ 上的图象如图所示, 若 $0 \leq V_1 < V_2 \leq 3$, 则下列结论正确的是 ().



A. $\frac{r(1)-r(0)}{1-0} < \frac{r(2)-r(1)}{2-1}$

B. $r'(1) > r'(2)$

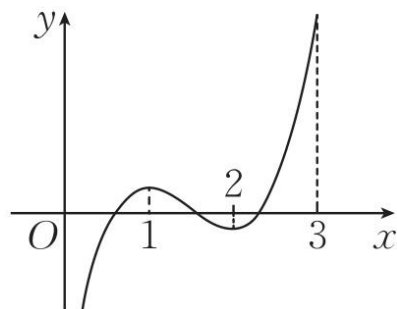
C. $r\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right) < \frac{r(V_1)+r(V_2)}{2}$

D. 存在 $V_0 \in (V_1, V_2)$, 使得 $r'(V_0) = \frac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$

11. [2024 · 上海月考] 已知 a, b 为实数, 函数 $y = \ln x + \frac{a}{x}$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线

方程为 $4y - x - b = 0$, 则 ab 的值为.

2. (改编) 已知定义在 $(0, 3]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $(x-1) \cdot f'(x) < 0$ 的解集为 ().



A. $(0, 2)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 3)$

D. $(0, 1) \cup (1, 2)$

3. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 在区间 $(0, 2)$ 上任取两个不相等的实数 x_1, x_2 , 若不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

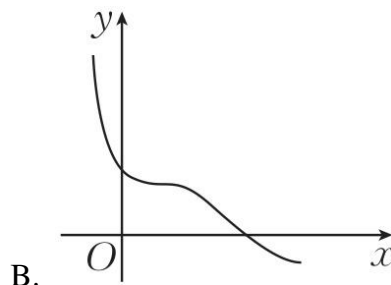
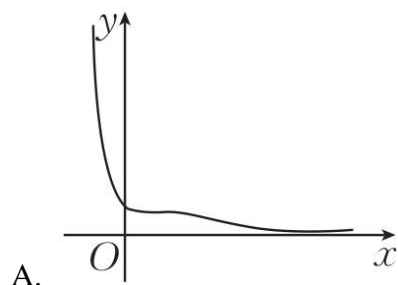
A. $[-8, +\infty)$

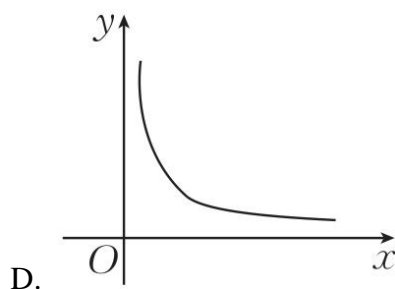
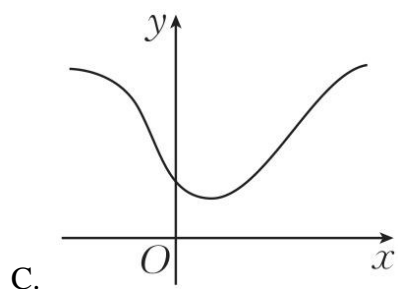
B. $(-\infty, -8]$

C. $[0, +\infty)$

D. $(-\infty, 0]$

4. [2024 · 安阳模拟] 函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$ 的大致图象为 ().





5. 若函数 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, 且满足 $xf'(x) + f(x) > 0$ 恒成立, a, b 为常数, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ().
- A. $af(a) > bf(b)$ B. $af(b) > bf(a)$ C. $af(a) < bf(b)$ D. $af(b) < bf(a)$

6. 已知函数 $f(x) = 2x - \frac{2}{x} - a \ln x$, 则 “ $a > 5$ ” 是 “函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减” 的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 若函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \ln x + 1$ 在其定义域的一个子区间 $(k-2, k+1)$ 内不是单调函数, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $(2, 3)$ B. $[2, \frac{5}{2})$ C. $[2, 3)$ D. $[2, \frac{7}{2})$

8. 已知 $a = \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2}$, $b = 1 + \frac{1}{e}$, $c = \frac{1}{2} + \ln 2$, 则 ().
- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

综合提升练

9. (多选题) 意大利画家列奥纳多·达·芬奇曾提出一个问题: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 项链所形成的曲线是什么? 这就是著名的 “悬链线问题”, 后人给出了悬链线的函数表达式为 $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, 其中 a 为

悬链线系数, 称 $\cosh x$ 为双曲余弦函数, 其函数表达式为 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 同

时, 双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 则 ().

- A. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
B. $(\cosh x)' = -\sinh x$
C. $y = \sinh x$ 是奇函数
D. 当直线 $y = m$ 与函数 $y = \sinh x$ 和 $y = \cosh x$ 的图象共有 3 个交点时, $m \in [1, +\infty)$

10. (多选题) 设 $a \in (0,1)$, 若函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的值可能是 ().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{7}{8}$

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是.

14. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 在定义域内的单调区间.

(2) 若 $a \leq 1, x > 1$, 求证: $f(x) < x^2$.

创新拓展练

15. 设 $[a, b]$ 是函数 $f(x)$ 定义域的一个子集, 若存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上单调递增, 在 $[c, b]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单峰函数, c 为峰点. 若 $f(x) = (e^x - ex)(e^x - ex + \ln m)$ 为 $[a, b]$ 上的单峰函数, 则实数 m 的取值范围为.

16. 已知函数 $f(x) = e^x + ax$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $l: x - 2y + 4 = 0$ 垂直.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对任意实数 x , $f(x) \geq -x^2 - 3 + 2b$ 恒成立, 求整数 b 的最大值.

基础课 18 导数与函数的极值、最值

课时评价·提能

基础巩固练

1. 图象连续的函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 ().

A. 一定存在极小值

B. 一定存在极大值

C. 一定存在最大值

D. 极小值一定比极大值小

7. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 1$ 有极大值和极小值, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(6, +\infty)$

B. $(-\infty, -3)$

C. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$

D. $(-\infty, 6)$

8. 已知 e 是自然对数的底数, 则下列不等关系中正确的是 ().

A. $e^\pi > \pi^e > 3^e$

B. $\pi^e > 3^e > e^\pi$

C. $e^\pi > 3^e > e^3$

D. $3^e > e^\pi > e^3$

综合提升练

11. 若函数 $f(x) = 2a \ln x + 1$ 与 $g(x) = x^2 + 1$ 的图象存在公共切线, 则实数 a 的最大值为.

应用情境练

13. 已知点 A 在函数 $f(x) = e^x - 2x$ 的图象上, 点 B 在直线 $l: x + y + 3 = 0$ 上, 则 A, B 两点之间距离的最小值是.

14. (2024·九省适应性测试) 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + ax + 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

创新拓展练

16. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x^2 + ax$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{1}{e}, b]$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \in (-\frac{1}{4}, 0)$.