2023届高三第一次学业质量评价(T8联考)
数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	C	B	D	C	D	ABD	AC	ABD	ACD

1.【答案】C

【解析】由 $1+zi+zi^2=\left|1-\sqrt{3}i\right|$ 可得 $(i-1)z=1$，$\therefore z=\dfrac{1}{i-1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故选 C.

2.【答案】B

【解析】$M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 3\}$，故 $M\cup N=\{x|x>0\}$，故选 B.

3.【答案】A

【解析】若 $a_n>0$，则 $S_n>S_{n-1}$，$\therefore \{S_n\}$ 是递增数列，$\therefore$“$a_n>0$”是“$\{S_n\}$是递增数列”的充分条件；若 $\{S_n\}$ 是递增数列，则 $S_n>S_{n-1}$，$\therefore a_n>0(n\geqslant 2)$，但是 a_1 的符号不确定，$\therefore$“$a_n>0$”不是“$\{S_n\}$是递增数列”的必要条件，故选 A.

4.【答案】C

【解析】选项 A：有可能出现点数 6，例如 2，2，3，4，6；

选项 B：有可能出现点数 6，例如 2，2，2，3，6；

选项 C：不可能出现点数 6，$\because \dfrac{1}{5}\times(6-2)^2=3.2$，如果出现点数 6，则方差大于或等于 3.2，不可能是 2.4；

选项 D：有可能出现点数 6，例如 2，2，2，3，6，故选 C.

5.【答案】B

【解析】$\because \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]=\cos 2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，故选 B.

6.【答案】D

【解析】设圆台的上底面半径为 r，下底面半径 R，母线长为 l，球的半径为 R_0，

$\because$ 球与圆台的两个底面和侧面均相切，

$\therefore l=r+R=1+3=4$，$R_0{}^2=1\times 3=3$，

$\therefore$ 圆台的侧面积与球的表面积之比为 $\dfrac{S_{侧}}{S_{表}}=\dfrac{\pi(r+R)\cdot l}{4\pi R_0{}^2}=\dfrac{\pi(1+3)\times 4}{4\pi\times 3}=\dfrac{4}{3}$，故选 D.

7.【答案】C

【解析】$\because g(x)$ 为偶函数，$\therefore g(x)=g(-x)$，即 $f(1+x)-x=f(1-x)+x$，两边同时对 x 求导得 $f'(1+x)-1=-f'(1-x)+1$，

即 $f'(1+x)+f'(1-x)=2$，

令 $x=0$，则 $f'(1)=1$，

$\because f'(x)$ 为奇函数，$\therefore f'(-x)=-f'(x)$，又 $f'(1+x)+f'(1-x)=2$，即 $f'(x)=2-f'(2-x)$，

联立 $f'(-x)=-f'(x)$ 得 $-f'(-x)=2-f'(2-x)$，即 $f'(x+2)=f'(x)+2$，

$\therefore f'(2\ 023)=f'(2\times 1\ 011+1)=f'(1)+2\times 1\ 011=2\ 023$，故选 C.

8.【答案】D

【解析】依题意，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$A(2x_1,0)$，直线 PQ、$QB(QA)$、BP 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，则 $k_2=\dfrac{0-(-y_1)}{2x_1-(-x_1)}=\dfrac{y_1}{3x_1}=\dfrac{1}{3}k_1$，$k_1k_3=-1$，$\therefore k_2k_3=-\dfrac{1}{3}$，

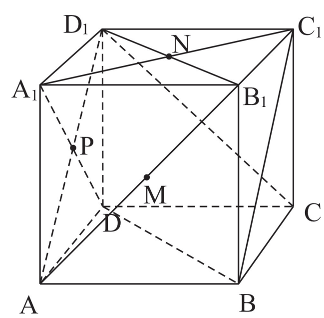
$\because \dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2{}^2}{a^2}+\dfrac{y_2{}^2}{b^2}=1$，两式相减得 $\dfrac{x_1{}^2-x_2{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2-y_2{}^2}{b^2}=0$，

$\therefore \dfrac{(y_1+y_2)}{(x_1+x_2)}\cdot\dfrac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，即 $k_2k_3=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

$\therefore -\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$ 椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故选 D.

9.【答案】ABD



【解析】连接 A_1C_1，A_1D，则 NP 是 $\triangle A_1C_1D$ 的中位线，$\therefore NP\parallel DC_1$，故选项 A 正确；

连接 B_1D_1，B_1A，则 $MN\parallel AD_1$，$\therefore MN\parallel$ 平面 ACD_1，即 $MN\parallel$ 平面 ACP，故选项 B 正确；

连接 B_1D_1，B_1A，AD_1，则平面 MNP 即为平面 B_1AD_1，显然 D_1C 不垂直平面 B_1AD_1，故选项 C 错误；

$\because PM\parallel BD$，$\therefore \angle DBC_1$ 即为 PM 与 BC_1 所成的角，$\angle DBC_1=60^\circ$，故选项 D 正确. 故选 ABD.

10.【答案】AC

【解析】方法一：将 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像向

左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ 的图像，

$\because g(x)$的图像与 $f(x)$的图像关于 y 轴对称，

$\therefore g(0)=f(0)$，即 $\cos\varphi=\sin\varphi$，

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$，经检验，满足题意，故选项 A 正确，选项 B 不正确；

设 $f(x)$的周期为 T，$\because g(x)$的图像是 $f(x)$的图像向左平移$\frac{T}{4}$个得到，$\therefore g(x)$的对称轴过 $f(x)$的对称中心，故选项 C 正确；

当 $m\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$时，$f(m)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，当 $n\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$时，$g(n)$的值域为$[0,1]$，$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\not\subset[0,1]$，故选项 D 不正确. 故选 AC .

方法二：由题意可得 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$，

$\because g(x)$的图像与 $f(x)$的图像关于 y 轴对称，$\therefore g(x)=f(-x)$，

即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sin(-2x+\varphi)$，

$\therefore 2x+\frac{\pi}{2}+\varphi=\pi+2x-\varphi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$，故选项 A 正确，选项 B 不正确；

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)$的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{3}{4}\pi\right)$，令 $2x+\frac{3}{4}\pi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $g(x)$的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，$\therefore g(x)$的对称轴过 $f(x)$的对称中心，故选项 C 正确；选项 D 的判断同上.

11.【答案】ABD

【解析】由 $nS_n=(n+1)S_{n-1}+(n-1)n\cdot(n+1)\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$得$\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_{n-1}}{n}=n-1\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore\frac{S_2}{3}-\frac{S_1}{2}=1,\frac{S_3}{4}-\frac{S_2}{3}=2,\cdots,\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_{n-1}}{n}=n-1$，

累加得$\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$，解得 $2S_n=n^3-51n-50\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=1$ 时，$S_1=-50$ 满足上式，$\therefore S_n=\frac{n^3-51n-50}{2}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3n^2-3n-50}{2}$，

$\therefore a_5=5>0$，故选项 A 正确；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{3n^2-3n-50}{2}$单调递增，又 $a_1=S_1=-50,a_2=S_2-S_1=-22$，

$\therefore\{a_n\}$单调递增，且 $a_1<a_2<a_3<a_4<0<a_5<a_6<\cdots\cdots$，$\therefore$当 $n\leqslant4$ 时，$\{S_n\}$单调递减，当 $n\geqslant5$ 时，$\{S_n\}$单调递增，且 $S_4<S_5$，$\therefore$当 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，故选项 B 正确；

又 $S_7=\frac{7^3-51\times7-50}{2}=-32<0$，$S_8=\frac{8^3-51\times8-50}{2}=27>0$，$\therefore$当 $S_n>0$ 时，n 的最小值为 8，故选项 C 错误；

当 $n=1,2,3,4$ 时，$\frac{S_n}{a_n}>0$；当 $n=5,6,7$ 时，$\frac{S_n}{a_n}<0$；当 $n\geqslant8$ 时，$\frac{S_n}{a_n}>0$，

$\therefore$当 $n=5,6,7$ 时，考虑$\frac{S_n}{a_n}$的最小值，

又当 $n=5,6,7$ 时，$\frac{1}{a_n}$恒为正且单调递减，S_n 恒为负且单调递增，

$\therefore\frac{S_n}{a_n}$单调递增，$\therefore$当 $n=5$ 时，$\frac{S_n}{a_n}$取得最小值，故选项 D 正确，故选 ABD.

12.【答案】ACD

【解析】由题意得$\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}$，

设 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $F'(x)=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}$，

易得当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，

$\therefore$函数 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore F(0)<F(1)$，即$\frac{f(0)}{e^0}<\frac{f(1)}{e}$，$\therefore f(1)>e$，选项 A 正确；

$\because f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}}>0$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，选项 B 错误；

设 $h(x)=f'(x)-f(x)=\frac{x-\sin x}{e^x}$，

则 $h'(x)=\left(\frac{x-\sin x}{e^x}\right)'=\frac{1-\cos x-x+\sin x}{e^x}$，

设 $r(x)=1-\cos x-x+\sin x$，

则当 $x\geqslant\pi$ 时，$r(x)=(1-x)+(\sin x-\cos x)<(1-\pi)+2<0$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$\sin x\geqslant x$，且 $1-\cos x\geqslant 0$，$\therefore r(x)\geqslant 0$；

当 $0<x<\pi$ 时，$r'(x)=\sin x-1+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$r'(x)>0$，$\therefore r(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$r'(x)<0$，$\therefore r(x)$ 单调递减，

又 $\because r(0)=0$，$r(\pi)=2-\pi<0$，

$\therefore\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $r(x_0)=0$，

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$r(x)>0$，当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$r(x)<0$；

综上：当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$r(x)\geqslant 0$，即 $h'(x)\geqslant 0$，$\therefore h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$r(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 单调递减，

$\because h(0)=0$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$h(x)<h(0)=0$，

当 $x>0$ 时，易证 $x>\sin x$，$\therefore h(x)>0$，

且当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，

又 $\because x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\frac{\pi}{2}-1}{e^{\frac{\pi}{2}}}>\dfrac{\frac{3}{2}-1}{e^2}=\frac{1}{2e^2}$，$\therefore$ 方程 $h(x)=\frac{1}{2e^2}$ 有两个解，即方程 $f'(x)=f(x)+\frac{1}{2e^2}$ 有两个解，选项 C 正确；

由 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 可得 $f(x)=e^x\cdot F(x)$，$\therefore f'(x)=e^x[F(x)+F'(x)]$，

令 $u(x)=F(x)+F'(x)$，则 $u'(x)=F'(x)+[F'(x)]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\left[\frac{x-\sin x}{e^{2x}}\right]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\frac{1-\cos x-2\left(x-\sin x\right)}{e^{2x}}=\frac{r(x)}{e^{2x}}$，

由以上分析可知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$r(x)>0$，即 $u'(x)>0$，

$\therefore u(x)$ 单调递增，$\therefore u(x)>u(0)=F(0)+F'(0)=1$，$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，选项 D 正确. 故选 ACD.

13.【答案】5

【解析】$\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+x)^6=(1+x)^6-\frac{1}{x}(1+x)^6$，展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3-C_6^4=5$.

14.【答案】$\frac{5}{6}\pi$

【解析】方法一：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，由题意 $OA\perp OB$，且 $|AB|=2|OB|$，

$\therefore\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{5}{6}\pi$.

方法二：由 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 平方得 $|\boldsymbol{b}|^2=4(|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2)$，$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2$，代入 $|\boldsymbol{b}|^2=4(|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2)$ 得 $|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{5}{6}\pi$.

15.【答案】$\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$

【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 单调递减，

且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，

方法一：原不等式等价于 $\begin{cases}x>1,\\ \frac{\ln x}{x}>a,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1,\\ \frac{\ln x}{x}<a,\end{cases}$

$\because$ 有且只有一个整数解，$\therefore f(2)\leqslant a<f(3)$，

即实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$.

方法二：原不等式等价于 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-a\cdot\frac{\ln x}{x}>0$，

若 $a>0$，则 $\frac{\ln x}{x}>a$ 或 $\frac{\ln x}{x}<0$，$\frac{\ln x}{x}<0$ 显然没有整数解，

要满足 $\frac{\ln x}{x}>a$ 有且只有一个整数解，又 $f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)<f(3)$，则 $f(2)\leqslant a<f(3)$，可得 $\frac{\ln 2}{2}\leqslant a<\frac{\ln 3}{3}$；

若 $a<0$，则 $\frac{\ln x}{x}>0$ 或 $\frac{\ln x}{x}<a$，$\frac{\ln x}{x}>0$ 有无数多个整数解，$\frac{\ln x}{x}<a$ 没有整数解；

若 $a=0$，不等式显然有无穷多个整数解，

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{21}}{3}$；$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

【解析】方法一：设 $\angle POF_2=\alpha$，则有 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，又

F_2P 垂直于渐近线 $y=\frac{b}{a}x$，$\therefore |OP|=a$，$|PF_2|=b$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{b}{c}$，$\cos\alpha=\frac{a}{c}$，

在 $\triangle OF_1P$ 中，由正弦定理：$\frac{a}{\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$，

$\therefore \frac{a}{\frac{b}{c}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{c}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2c}{1}$，$\therefore a=\sqrt{3}b-a$，$\therefore 2a=\sqrt{3}b$，$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

方法二：依题意可得 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

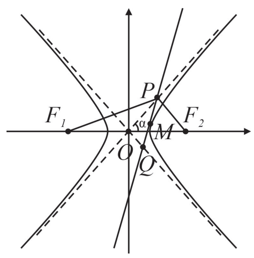
$\therefore |PF_1|=\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{3a^2+c^2}$，

又 $|PO|=a$，$|OF_1|=c$，

在 $\triangle OPF_1$ 中，$|OF_1|^2=|PF_1|^2+|PO|^2-2\cdot|PO|\cdot|PF_1|\cdot\cos\angle F_1PO=3a^2+c^2$，

即 $c^2=3a^2+c^2+a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{3a^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $3c^2=7a^2$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

如图，过 P 点的切线 PQ 与双曲线切于点 $M(x_0,y_0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

又 P,Q 均在双曲线的渐近线上，故设 $P\left(x_1,\frac{b}{a}x_1\right)$，$Q\left(x_2,-\frac{b}{a}x_2\right)$，

又 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，$\therefore \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，

$\therefore S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}|OP||OQ|\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1^2+\left(\frac{b}{a}x_1\right)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+\left(-\frac{b}{a}x_2\right)^2}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{b}{a}|x_1x_2|$，

过 M 点的切线 PQ：$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，

即 $y=\frac{b^2x_0x}{y_0a^2}-\frac{b^2}{y_0}$，

代入 $b^2x^2-a^2y^2=0$，化简得 $(a^2y_0^2-b^2x_0^2)x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$，

又 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$，

$\therefore -a^2b^2x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$，

即 $x^2-2x_0x+a^2=0$，$\therefore x_1x_2=a^2$，

$\therefore S_{\triangle POQ}=\frac{b}{a}|x_1x_2|=ab=\frac{\sqrt{3}}{2}b\cdot b=2\sqrt{3}$，

$\therefore b^2=4$，

$\therefore b=2$，$a=\sqrt{3}$，故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$.

17.【解析】(1) 由题意得 $2\ln a_2=\ln a_1+\ln a_3$，

$\therefore a_2^2=a_1\cdot a_3$，

又 $\{S_n+a_1\}$ 是等比数列，

$\therefore (S_2+a_1)^2=(S_1+a_1)\cdot(S_3+a_1)$，

$\because a_1=1$，$\therefore \begin{cases}a_2^2=a_3,\\(a_2+2)^2=2(2+a_2+a_3),\end{cases}$

$\therefore a_2^2-2a_2=0$，又 $a_n>0$，故 $a_2=2$，

又 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列，故 $\{a_n\}$ 为等比数列，首项 $a_1=1$，公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=2$，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$. …………… 5 分

(2) $\because a_n=2^{n-1}$，

$\therefore b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}=\log_2 2^{2n-1-1}+\log_2 2^{2n-1}=2n-2+2n-1=4n-3$，

令 $C_n=(-1)^n\cdot b_n^2$，则 $C_{2n-1}+C_{2n}=-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2=(b_{2n}+b_{2n-1})(b_{2n}-b_{2n-1})=4(b_{2n}+b_{2n-1})(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $\{C_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

$\therefore T_{10}=(C_1+C_2)+\cdots+(C_9+C_{10})=4(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=4\times\frac{(1+37)\times 10}{2}=760$，

$\therefore$ 数列 $\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$ 的前 10 项和为 760. ………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 由 $A+B+C=\pi$，$\therefore A+C=\pi-B$，$\cos B=-\cos(A+C)$，

$\therefore \cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \sin A\cdot\sin C=\frac{3}{4}$，

又 a,b,c 成等比数列，故 $b^2=ac$，

$\therefore \sin^2 B=\sin A\cdot\sin C=\frac{3}{4}$，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

方法一：$\therefore |\cos B|=\frac{1}{2}$，又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$

$\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

∴$\cos B=\frac{1}{2}$，$a=c$，又 $0<B<\pi$，

∴$A=B=C=\frac{\pi}{3}$. …………………………… 6 分

方法二：若 $B=\frac{\pi}{3}$，则 $\cos B=\frac{1}{2}$，代入 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，则 $\cos(A-C)=1$，

∵$0<A<\pi$，$0<C<\pi$，∴$A=C=\frac{\pi}{3}$

若 $B=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos B=-\frac{1}{2}$，代入 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，则 $\cos(A-C)=2$（舍），

综上 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6 分

(2)∵$b=2$，∴$|AB|=2$，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\sin 60°$，

即 $\frac{1}{2}\times2\cdot|BD|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴$|BD|=3$，∴$|CD|=1$，由余弦定理：在 $\triangle ACD$ 中，$|AD|^2=|AC|^2+|CD|^2-2|AC|\cdot|CD|\cos\angle DCA=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，

又由正弦定理：$\frac{|AD|}{\sin 120°}=\frac{|CD|}{\sin\angle CAD}$，

∴$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin\angle CAD}$，

∴$\sin\angle CAD=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. ……… 12 分

19.【解析】记 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示"第 i 局甲获胜"，

(1)设 A 表示"比赛一共进行了四局并且甲班最终获胜"，则事件 A 包括三种情况：$\overline{A_1}A_2A_3A_4$，$A_1\overline{A_2}A_3A_4$，$A_1A_2\overline{A_3}A_4$，这三种情况互斥，且 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立，

∴$P(A)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\cdot\overline{A_3}A_4)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$. …………… 4 分

(2)由题意，X 的所有可能取值有 0,2,4,6，

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$，

$P(X=2)=P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\ \overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}A_3\overline{A_4})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{36}$，

$P(X=4)=P(A_1A_2\overline{A_3}\ \overline{A_4}\ \overline{A_5}+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\ \overline{A_5}+A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}\ \overline{A_5}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cdot A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3A_4\overline{A_5})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{72}$；

$P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=2)-P(X=4)=1-\frac{1}{18}-\frac{5}{36}-\frac{13}{72}=\frac{5}{8}$； ……………… 10 分

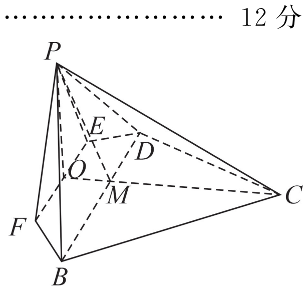
∴X 的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{5}{8}$

∴$E(X)=0\times\frac{1}{18}+2\times\frac{5}{36}+4\times\frac{13}{72}+6\times\frac{5}{8}=\frac{19}{4}$.

……………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)∵菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，故 $\angle A=60°$，$AB=AD$，



∴$\triangle ABD$ 是等边三角形，又 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DB}$，

∴ $EF\parallel BD$，∴ $\triangle PEF$ 也是等边三角形，

∵平面 $PEF\perp$ 平面 $BCDEF$，取 EF 的中点 O，则 $PO\perp EF$，且 $PO\perp$ 平面 $BCDEF$，连接 DO，由 $BF\perp PD$，而 $PO\perp BF$，$DO\cap PO$，

∴$BF\perp$ 平面 POD，∴$BF\perp OD$，

延长 DO 交 AB 于点 N，则 $DN\perp AB$，

又∵$AO\perp BD$，∴O 为 $\triangle ABD$ 的重心，

又 O 点在 EF 上，$EF\parallel BD$，∴$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$，即 $\lambda=\frac{2}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)方法一：由(1)连接 CO，设 $\triangle ABD$ 边长为 a，则 $|PO|=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a$，$|CO|=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\lambda)a$，

∵$PO\perp$ 平面 $BCDEF$，

∴直线 PC 与平面 $BCDEF$ 所成角为 $\angle PCO$，

∴$\tan\angle PCO=\frac{|PO|}{|CO|}=\frac{\lambda}{2-\lambda}=\frac{1}{3}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

∴EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

在棱锥 $P\text{-}BCDEF$ 中，设 OC 与 BD 相交于 M 点，连接 PM，又设平面 $PEF\cap$平面 PBD 于直线 l，则 l 过点 P，

$\because EF/\!/BD$，$EF\not\subset$平面 PBD，

$\therefore EF/\!/$平面 PBD，

又平面 $PEF\cap$平面 PBD 于直线 l，

$\therefore EF/\!/l$，同理 $l/\!/BD$，

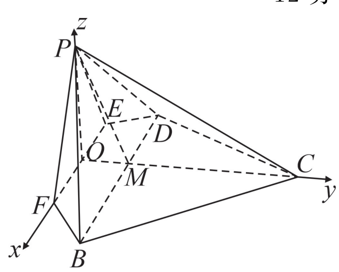
由上可知 $PO\perp EF$，$CO\perp EF$，

$\therefore EF\perp$平面 POM，$\therefore l\perp$平面 POM，

$\therefore\angle OPM$ 就是平面 PEF 和平面 PBD 所成二面角的平面角，

又 $PO=OM$，且 $PO\perp OM$，$\therefore\angle OPM=45^\circ$，即平面 PEF 与平面 PBD 的夹角为 45°. ……………………………………………… 12 分

方法二：以 O 为坐标原点，以 OF，OC，OP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（如图所示），设菱形 $ABCD$ 边长为 2，



则 $P(0,0,\sqrt{3}\lambda)$，$E(-\lambda,0,0)$，$F(\lambda,0,0)$，$B(1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$D(-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$C(0,2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$\because PO\perp$平面 $BDEF$，$\therefore\angle PCO$ 即为 PC 与平面 $BCDEF$ 所成的角，

$\therefore\tan\angle PCO=\dfrac{|PO|}{|OC|}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\therefore OC\perp$平面 PEF，

$\therefore\overrightarrow{OC}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$即为平面 PEC 的法向量.

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x=0,\\ x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=45^\circ$，

$\therefore$平面 PEF 与平面 PBD 的夹角为 45°. ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意，AB 斜率不为零，设 AB：$x=\lambda y+\dfrac{p}{2}$代入 $y^2=2px(p>0)$，$\therefore y^2-2p\lambda y-p^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2p\lambda$，$y_1y_2=-p^2$，

$\therefore S_{\triangle HAB}=\dfrac{1}{2}\cdot p|y_1-y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\dfrac{1}{2}p\cdot\sqrt{4p^2\lambda^2+4p^2}=p^2\sqrt{\lambda^2+1}$，

$\therefore$当 $\lambda=0$ 时，$S_{\triangle HAB}$ 取最小值 p^2，$\therefore p^2=4$，$\therefore p=2$，抛物线 C 的方程为：$y^2=4x$. ……… 5 分

(2)假设存在 $E(x_0,y_0)$，设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由题意，MN 斜率不为零，

设 MN 的方程为 $x=t(y-1)+\dfrac{17}{4}$代入 $y^2=4x$，

可得 $y^2-4ty+4t-17=0$，$\therefore\begin{cases}y_3+y_4=4t,\\ y_3\cdot y_4=4t-17,\end{cases}$

$\therefore\dfrac{y_0-y_3}{x_0-x_3}\cdot\dfrac{y_0-y_4}{x_0-x_4}=-1$，

$\therefore\dfrac{4}{(y_0+y_3)}\cdot\dfrac{4}{(y_0+y_4)}=-1$，

$\therefore y_0^2+(y_3+y_4)y_0+y_3y_4+16=0$，

$\therefore y_0^2+4ty_0+4t-1=0$，

即 $4t(y_0+1)+y_0^2-1=0$，$\therefore\begin{cases}y_0+1=0,\\ y_0^2-1=0,\end{cases}$

解得 $y_0=-1$，故存在定点$E\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$满足题意. ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)① $\because f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$e^x>1$，

$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$\because -\dfrac{6}{5}\leqslant a<\dfrac{3}{e^3}-1$，$\therefore f(3)=e^3-3+ae^3<e^3-3+e^3\left(\dfrac{3}{e^3}-1\right)=0$，$f(4)=e^4-4+ae^3\geqslant e^4-4-\dfrac{6}{5}e^3\approx7.39^2-4-\dfrac{6}{5}\times20.09>0$，

$\therefore f(x)$存在唯一的零点 x_0，且 $3<x_0<4$. ……………………………………………… 3 分

② 当 $0\leqslant x\leqslant x_0$ 时，$g(x)=x+a-\dfrac{x-a}{e^x}$，

$g'(x)=1-\dfrac{1-x+a}{e^x}=\dfrac{e^x-1+x-a}{e^x}$，$\because x>0$，$a<0$，$\therefore e^x-1>0$，$x-a>0$，$\therefore g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$在$(0,x_0)$单调递增，$\because 3<x_0<4$，

$\therefore g(x_0)>g(3)=3+a-\dfrac{3-a}{e^3}\geqslant3-\dfrac{6}{5}-\dfrac{3+\frac{6}{5}}{e^3}=\dfrac{9e^3-21}{5e^3}\approx\dfrac{9\times20.09-21}{5\times20.09}>0$，

又$\because g(1)=1+a-\dfrac{1-a}{e}=1-\dfrac{1}{e}+a\left(1+\dfrac{1}{e}\right)<1-\dfrac{1}{e}+\left(\dfrac{3}{e^3}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{3+3e-2e^3}{e^4}\approx\dfrac{3+3\times2.72-2\times20.09}{e^4}<0$，

$\therefore g(x)$在$[1,x_0]$有唯一的零点，(注：取 $g(0)<$

0 也可以);

当 $x>x_0$ 时,$g'(x)=-\ln x+\frac{1}{x}-1-a<-\ln x_0+\frac{1}{x_0}-1-a<-\ln 3+\frac{1}{3}-1+\frac{6}{5}=\frac{8}{15}-\ln 3\approx\frac{8}{15}-1.1<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减,

$\therefore g(4)=-3\ln 4-5a>-3\ln 4-5\left(\frac{3}{e^3}-1\right)=5-3\ln 4-\frac{15}{e^3}\approx 0.11>0$,

$g(e^2)=2(1-e^2)-a(e^2+1)\leqslant 2(1-e^2)+\frac{6}{5}(e^2+1)=\frac{16-4e^2}{5}\approx\frac{16-4\times 7.39}{5}<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 有唯一的零点,

综上,函数 $g(x)$ 有两个零点. …………… 6 分

(2)由(1)可知 $g(x_1)=g(x_2)=0$,其中 $1<x_1<x_0<x_2$,由 $g(x_1)=0$ 得 $x_1+a-\frac{x_1-a}{e^{x_1}}=0$,即 $x_1-a(e^{x_1}+1)-x_1e^{x_1}=0$,由 $g(x_2)=0$ 得 $\ln x_2-a(x_2+1)-x_2\ln x_2=0$,

设 $h(x)=\ln x-a(x+1)-x\ln x$,则 $h(x_2)=h(e^{x_1})=0$,

$\because 1<x_1<x_0<x_2$,$\therefore e^{x_1}>e$,$x_2>x_0>e$,

而 $x>e$ 时,$h'(x)=\frac{1}{x}-a-\ln x-1<\frac{1}{e}-a-2\leqslant\frac{1}{e}+\frac{6}{5}-2=\frac{1}{e}-\frac{4}{5}<0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 单调递减,$\therefore x_2=e^{x_1}$,

要证 $\frac{e^{x_2}-x_2}{e^{x_1}-x_1}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$,即证 $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$,即证 $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}>x_2-x_1$,即证 $e^{\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}>x_2-x_1$,设 $\frac{x_2-x_1}{2}=t$,则即证 $e^t-e^{-t}>2t$,

设 $h(t)=e^t-e^{-t}-2t$,$t>0$,则 $h'(t)=e^t+e^{-t}-2>2-2=0$,

$\therefore$ 当 $t>0$ 时,$h(t)$ 单调递增,

$\therefore h(t)>h(0)=0$,即证. ………………… 12 分