★启用前注意保密

2025年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	D	A	B	D

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

题号	9	10	11
答案	ABD	ABC	ACD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 3　　13. $\frac{1}{3}$　　14. $6\sqrt{2}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。

15. 解：（1）易知函数 $f(x)=a\ln x+bx^2-1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ………………… 1分

则 $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx$， ………………… 2分

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y=0$ 相切，

所以 $\begin{cases} f'(1)=a+2b=0, \\ f(1)=b-1=0, \end{cases}$ ………………… 4分

解得 $\begin{cases} a=-2, \\ b=1. \end{cases}$ ………………… 6分

(2)由(1)得$f(x)=-2\ln x+x^2-1$，

所以$f'(x)=-\dfrac{2}{x}+2x=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$， …………………………………… 7 分

当$\dfrac{1}{e}\leqslant x<1$时，$f'(x)<0$，当$1<x\leqslant e^2$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{e}, 1\right)$上单调递减，在$(1, e^2]$上单调递增， ………………………… 8 分

所以函数$f(x)$在$x=1$处取得最小值，$f(x)_{\min}=f(1)=0$， ………………………… 9 分

因为$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2\ln\dfrac{1}{e}+\left(\dfrac{1}{e}\right)^2-1=1+\dfrac{1}{e^2}$，$f(e^2)=-2\ln e^2+(e^2)^2-1=e^4-5$， …… 11 分

且$e^4-5>1+\dfrac{1}{e^2}$， ……………………………………………………………… 12 分

所以$f(x)_{\max}=f(e^2)=e^4-5$. ……………………………………………………… 13 分

16. 解：(1)根据正弦定理设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$， …………………………………… 1 分

则$a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$， ………………………………………………… 2 分

代入$\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{k\sin A}{\cos A}+\dfrac{k\sin B}{\cos B}=\dfrac{k\sin C}{\sin C}$， …………………………… 3 分

即$\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}=1$， ………………………………………………………… 4 分

整理得$\cos A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$， …………………………… 5 分

由$A+B+C=\pi$，得$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

所以$\cos A\cos B=\sin C$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)由面积公式得$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{c^2}{10\sin C}$， ………………………………………… 7 分

由正弦定理得$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B\sin C=\dfrac{\sin^2 C}{10\sin C}$， ………………………………………… 8 分

整理得$\sin A\sin B=\dfrac{1}{5}$， ……………………………………………………………… 9 分

由$A+B+C=\pi$，得$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$， ……………… 10 分

由(1)得$\sin C+\cos C=\sin A\sin B=\dfrac{1}{5}$， ………………………………………… 11 分

由平方关系得$\begin{cases}\sin C+\cos C=\dfrac{1}{5},\\ \sin^2 C+\cos^2 C=1,\end{cases}$ ……………………………………………… 12 分

解得$\begin{cases}\sin C=\dfrac{4}{5},\\ \cos C=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}\sin C=-\dfrac{3}{5},\\ \cos C=\dfrac{4}{5},\end{cases}$ ……………………………………………… 13 分

因为 $C\in(0,\ \pi)$，

所以 $\sin C>0$，…………………………………………………… 14 分

所以 $\cos C=-\dfrac{3}{5}$. …………………………………………………… 15 分

17. 解：(1) 由题意得 $\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\dfrac{14+15+16+18+19}{5}=16.4$，………… 1 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=259$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，…………………………………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{259-5\times3\times16.4}{55-5\times3^2}=1.3$，………………………… 3 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=16.4-1.3\times3=12.5$，…………………………………………………… 4 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.3x+12.5$，…………………………………… 5 分

当 $x=14$ 时，$\hat{y}=1.3\times14+12.5=30.7$，

所以估计该地区新能源汽车在 2025 年 1 月份的销量为 30.7 千辆. ………… 6 分

说明：不写“估计”扣 1 分.

(2) 记事件 M 为“员工经过培训后，能使用人工智能工具”，

则 $P(M)=1-C_4^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^4-C_4^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{8}{9}$，…………………………………… 8 分

设宣传部门调至其他部门人数为 $n(n\in\mathbf{N}^*)$，则参加培训的人数为 $100-n$，……

…………………………………………………………………… 9 分

设 ξ 为培训后能使用人工智能工具的人数，

则 $\xi\sim B\left(100-n,\ \dfrac{8}{9}\right)$，…………………………………………………… 10 分

所以 $E(\xi)=\dfrac{8(100-n)}{9}$，…………………………………………………… 11 分

调整后年净利润预计为：$\dfrac{8(100-n)}{9}\times18+\left(1-\dfrac{8}{9}\right)\times(100-n)\times12-(100-n)=$

$\dfrac{49(100-n)}{3}$万元，…………………………………………………… 12 分

由题意得$\dfrac{49(100-n)}{3}\geqslant100\times12$，…………………………………………………… 13 分

解得 $n\leqslant\dfrac{1300}{49}\approx26.5$，…………………………………………………… 14 分

所以预计最多可调整 26 人去其他部门. …………………………………………………… 15 分

18. 解：(1) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$AF\perp DF$，所以点 A 的坐标为$\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$，………………… 1 分

因为 $|OA|=\sqrt{5}$，所以$\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+p^2}=\sqrt{5}$，…………………………………………………… 2 分

解得 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………… 3 分

(2)①在平面直角坐标系中，若 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x=3$，或 $x=\dfrac{1}{3}$，

所以点 A，B 的坐标分别为 $(3,\ 2\sqrt{3})$，$\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………………………… 4 分

如图 10 建立空间直角坐标系，则 $D(-1,\ 0,\ 0)$，$B\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，$F(1,\ 0,\ 0)$，

当二面角 $P-DF-B$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 时，点 $P\left(3,\ 4\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right),\ 4\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$，即 $P(3,\ \sqrt{3},\ 3)$， ……………………………… 5 分

方法一：

所以 $\overrightarrow{BD}=\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，$\overrightarrow{PF}=(-2,\ -\sqrt{3},\ -3)$，$\overrightarrow{BF}=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，

设平面 PBF 的法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x-\sqrt{3}y-3z=0, \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-\sqrt{3}y, \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y, \end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=(-3,\ \sqrt{3},\ 1)$，

……………………………………………………………………………………… 7 分

设直线 BD 与平面 PDF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\vec{n}|}=\dfrac{4+2+0}{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{9\sqrt{91}}{91}$，

……………………………………………………………………………………… 8 分

所以直线 BD 与平面 PBF 所成角的正弦值为 $\dfrac{9\sqrt{91}}{91}$. ……………………………… 9 分

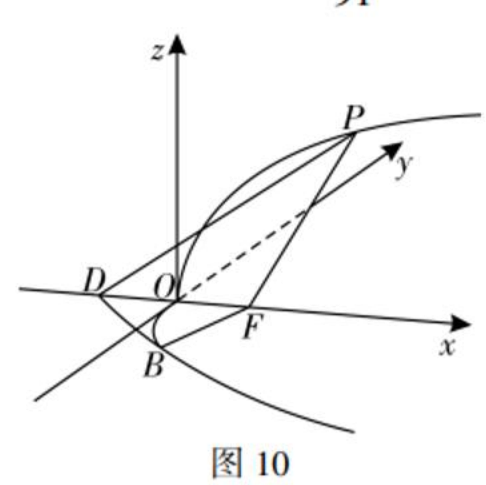

图 10

方法二：

由题得 $V_{P-BDF}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot|DF|\cdot|y_B|\right)\cdot z_P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times3=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， ……… 6 分

计算得 $|BF|=\frac{4}{3}$，$|PF|=4$，$\cos\langle\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FP}\rangle=\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FB}||\overrightarrow{FP}|}=-\frac{5}{8}$，所以 $\sin\langle\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FP}\rangle$

$=\frac{\sqrt{39}}{8}$，

所以 $S_{\triangle BFP}=\frac{1}{2}\cdot|BF|\cdot|PF|\cdot\sin\angle BFP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times4\times\frac{\sqrt{39}}{8}=\frac{\sqrt{39}}{3}$， ………… 7 分

设点 D 到平面 BFP 的距离为 h，

则由 $V_{D-BFP}=V_{P-BDF}$，得 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{39}}{3}\cdot h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $h=\frac{6\sqrt{13}}{13}$， ………………… 8 分

所以直线 BD 与平面 PBF 所成角的正弦值为 $\frac{h}{|BD|}=\frac{\frac{6\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\frac{9\sqrt{91}}{91}$. ………… 9 分

②由题意得 $V_{D-PBF}=V_{P-BDF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BDF}\cdot z_P=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot|DF|\cdot|BF|\cdot\sin\theta\right)\cdot$

$\left[|PF|\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot|BF|\cdot|PF|\cdot\sin^2\theta$，……………………………………………… 11 分

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$|BF|=|PF|=2$，$V_{D-PBF}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot2\cdot2\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， …………… 12 分

当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，在平面直角坐标系中，设直线 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

设点 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4=16k^2+16>0$，$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$， ………………… 13 分

因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$k=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，所以 $\sin^2\theta+\left(\frac{\sin\theta}{k}\right)^2=1$，得 $\sin^2\theta=\frac{k^2}{k^2+1}$，

……………………………………………………………………………… 14 分

所以 $V_{D-PBF}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot|BF|\cdot|PF|\cdot\sin^2\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot|BF|\cdot|AF|\cdot\sin^2\theta$，

$=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(x_2+1)\cdot(x_1+1)\cdot\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(x_1x_2+x_1+x_2+1)\cdot\frac{k^2}{k^2+1}$ ……………… 15 分

$=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(\frac{2k^2+4}{k^2}+1+1\right)\cdot\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{4k^2+4}{k^2}\cdot\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， …………… 16 分

综上所述，三棱锥 $D-PBF$ 的体积为定值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 17 分

19. 解：(1) 当 $n=3$ 时，取自集合$\{1，2，3\}$的交错数列有 1；3；1，2；1，2，3 四种情况，因此 $A_3=4$；…………………………………………………………… 2 分

当 $n=4$ 时，取自集合$\{1，2，3，4\}$的交错数列有 1；3；1，2；1，4；3，4；1，2，3；1，2，3，4 七种情况，因此 $A_4=7$. ………………………………… 4 分

(2) 设数列 a_1，a_2，…，a_m 是取自集合$\{1，2，…，n\}$的交错数列，

因为 $a_1\neq 1$ 且是奇数，所以 $a_1\geqslant 3$，……………………………………………… 5 分

构造数列 $b_i=a_i-2$，$i=1$，$2,...,m$，则 $b_i\in\{1，2，…，n-2\}$，…………… 7 分

此时数列 b_1，b_2，…，b_m 的个数是取自集合$\{1，2，…，n-2\}$的所有交错数列的个数 A_{n-2}，……………………………………………………………………… 8 分

因为数列 a_1，a_2，…，a_m 是递增数列，所以对于每一个 $b_i\in\{1，2，…，n-2\}$都有且仅有一个 $a_i\in\{3，4，…，n\}$与之对应，

所以取自集合$\{1，2，…，n\}(n\geqslant 3)$的首项不为 1 的交错数列的个数为 A_{n-2}.

…………………………………………………………………………………… 9 分

(3) 设数列 a_1，a_2，…，a_m 是取自集合$\{1，2，…，n\}$的交错数列，

由(2)得，当 $a_1\geqslant 3$ 时，所有交错数列的个数为 A_{n-2}，

当 $a_1=1$ 时，若 $n=1$，则仅有一个交错数列；……………………………… 10 分

若 $n\geqslant 2$，构造数列 $b_{j-1}=a_j-1(2\leqslant j\leqslant m)$，则 $b_{j-1}\in\{1，2，…，n-1\}$，

此时数列 b_1，b_2，…，b_{m-1} 的个数是取自集合$\{1，2，…，n-1\}$的所有交错数列的个数 A_{n-1}，

因为数列 a_1，a_2，…，a_m 是递增数列，所以数列 b_1，b_2，…，b_{m-1} 与数列 a_2，a_3，…，a_m 之间一一对应，

又因为 $a_1=1$，所以数列 a_1，a_2，…，$a_m(m\geqslant 2)$的所有交错数列的个数为 A_{n-1}，

…………………………………………………………………………………… 11 分

综上所述，$A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+1(n\geqslant 3)$. ……………………………………… 12 分

方法一：

当 $n\geqslant 3$ 时，由$\begin{cases}A_3=A_2+A_1+1,\\A_4=A_3+A_2+1,\\\cdots\\A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+1,\end{cases}$ 累加得 $S_n-A_2-A_1=S_{n-1}-A_1+S_{n-2}+n-2$，

因为 $A_1=1$，$A_2=2$，所以 $S_{n-2}=A_n-n(n\geqslant 3)$，……………………………… 15 分

由 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+1$ 及(1)得 $A_5=12$，…，$A_{13}=609$，$A_{14}=986$，$A_{15}=1596$，$A_{16}=2583$，

显然$\{S_n\}$单调递增，

因为 $S_{13}=A_{15}-15=1581$，$S_{14}=A_{16}-16=2567$， ………………………………… 16 分

所以 $S_{13}<2025<S_{14}$，

所以使得 $S_n>2025$ 成立的 n 的最小值为 14. ………………………………… 17 分

方法二：

令 $B_n=A_n+1$，则 $B_n=B_{n-1}+B_{n-2}(n\geqslant 3)$，

易知 $B_1=2$，$B_2=3$， ………………………………… 10 分

构造得 $B_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}B_{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(B_{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}B_{n-2}\right)$，

所以$\left\{B_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}B_n\right\}$是以 $B_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}B_1=2+\sqrt{5}$ 为首项，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$为公比的等比数列，

所以 $B_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}B_n=(2+\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$，① ………………………………… 12 分

同理 $B_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}B_n=(2-\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$，② ………………………………… 13 分

①-②得，$B_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$，

所以 $A_n=B_n-1=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)-1$， ………………………………… 14 分

所以 $S_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\left(1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)-n$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4}\right)-n-3$， ………………………………… 15 分

易判断$\{S_n\}$单调递增，

因为 $S_{13}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{17}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{17}\right)-13-3=1581$，

$S_{14}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{18}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{18}\right)-14-3=2567$， ………………………………… 16 分

所以 $S_{13}<2025<S_{14}$，

所以使得 $S_n>2025$ 成立的 n 的最小值为 14. ………………………………… 17 分