高中数学主干知识清单

不等式

知识提炼

1*.*不等式的基本性质

(1)*a>b*⇔*b<a*(对称性);

(2)*a>b*,*b>c*⇒*a>c*(传递性);

(3)*a>b*⇒*a+c>b+c*(加法单调性);

(4)*a>b*,*c>d*⇒*a+c>b+d*(同向不等式相加);

(5)*a>b*,*c<d*⇒*a-c>b-d*(异向不等式相减);

(6)*a>b*,*c>*0⇒*ac>bc*,*a>b*,*c<*0⇒*ac<bc*(乘法单调性);

(7)*a>b>*0,*c>d>*0⇒*ac>bd*(同向不等式相乘);

(8)*a>b>*0,0*<c<d*⇒*>*(异向不等式相除);

(9)*a>b*,*ab>*0⇒*<*(倒数关系);

(10)*a>b>*0⇒*an>bn*(*n*∈Z,且*n>*1)(平方法则);

(11)*a>b>*0⇒*>*(*n*∈Z,且*n>*1)(开方法则)*.*

2*.*基本不等式

(1)如果*a*,*b*∈R,那么*a*2*+b*2≥2*ab*,当且仅当*a=b*时,等号成立*.*

(2)如果*a>*0,*b>*0,那么≥,当且仅当*a=b*时,等号成立*.*

用基本不等式求最值时注意的三个条件:“一正,二定,三相等”*.*

(3)极值定理:已知*x>*0,*y>*0,则有:*①*若乘积*xy*为定值*p*,则当*x=y*时,和*x+y*有最小值2;*②*若和*x+y*为定值*s*,则当*x=y*时,乘积*xy*有最大值*s*2*.*

(4)不等式链:如果*a*,*b*都是正数,那么≤≤≤(当且仅当*a=b*时取等号)*.*

3*.*一元二次不等式的解集

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 判别式*Δ=b*2*-*4*ac* | *Δ>*0 | *Δ=*0 | *Δ<*0 |
| 二次函数*y=ax*2*+bx+c*(*a>*0)的图像 |  |  |  |
| 一元二次方程*ax*2*+bx+c=*0(*a>*0)的根 | 有两相异实根*x*1,*x*2(*x*1*<x*2) | 有两相等实根*x*1*=x*2*=-* | 无实根 |
| 判别式*Δ=b*2*-*4*ac* | *Δ>*0 | *Δ=*0 | *Δ<*0 |
| *ax*2*+bx+c>*0(*a>*0)的解集 | {*x|x<x*1或*x>x*2} | {*x|x*≠*-*} | R |
| *ax*2*+bx+c<*0(*a>*0)的解集 | {*x|x*1*<x<x*2} | Ø | Ø |

(1)*ax*2*+bx+c>*0(*a*≠0)恒成立的条件是

(2)*ax*2*+bx+c<*0(*a*≠0)恒成立的条件是

4*.*线性规划

(1)直线*Ax+By+C=*0将整个坐标平面分成两部分,一部分可用不等式*Ax+By+C>*0(或*<*0)表示,另一部分则可用不等式*Ax+By+C<*0(或*>*0)表示*.*

(2)画二元一次不等式表示的平面区域,常常采用直线定界、特殊点(常取原点)定域的办法,画二元一次不等式组所表示的平面区域,就是画出各个不等式所表示的平面区域的公共部分*.*

(3)线性规划是讨论目标函数在线性约束条件(即二元一次不等式组)下的最大值或最小值的问题*.*

解决线性规划问题的一般步骤是:

*①*画出线性约束条件所表示的平面区域(即确定可行域);

*②*利用目标函数的平移,在可行区域内求出使目标函数达到最大值或最小值的点*.*

**复习指导**

1*.*比较大小的常用方法

(1)作差:作差后通过分解因式、配方等手段判断差的符号得出结果;

(2)作商(对于分数指数幂的代数式常用此法);

(3)分析法;

(4)平方法;

(5)利用函数的单调性*.*

其中比较法(作差、作商)是最基本的方法*.*

2*.*解含参数的一元二次不等式是一个难点,这类问题的解决思路一般为:若二次项系数为常数,可先考虑分解因式,再根据两根的大小对参数进行讨论;若不易分解因式,则可对判别式进行讨论;若二次项系数为参数,应先讨论二次项系数为零,及不为零时的正负情况*.*

3*.*不等式的恒成立问题

(1)若*ax*2*+bx+c>*0(*a*≠0)对任意的*x*∈R恒成立,只需*a>*0且*Δ<*0*.*

(2)若*ax*2*+bx+c<*0(*a*≠0)对任意的*x*∈R恒成立,只需*a<*0且*Δ<*0*.*

(3)根据恒成立求参数的范围一般可采用分离参数的方法*.*即当*f*(*x*)存在最值时,*f*(*x*)≤*a*恒成立⇔*a*≥[*f*(*x*)]max;*f*(*x*)≥*a*恒成立⇔*a*≤[*f*(*x*)]min*.*

4*.*基本不等式的运用

当两个正数的和一定时,其乘积有最大值;当两个正数的乘积一定时,其和有最小值*.*

利用≤(*a*,*b*∈R*+*)求最值是极为重要的一个考点,应把握住限制条件“一正二定三相等”,当条件不满足时要注意应用一些转化和配凑的技巧*.*例如:*①x<*0求*x+*的最值,这里可将*x+*转化为(*-x*)*+*,这样就符合“一正”;*②*0*<x<*1,求*x*(3*-*3*x*)的最值,可将*x*(3*-*3*x*)配凑为[3*x*(3*-*3*x*)],这样就符合“二定”;*③*当等号不成立时可用函数的单调性(一般可利用导数判定)来求最值(掌握对号函数的简单性质)*.*

5*.*线性规划目标函数的最值

(1)形如*ax+by*用纵截距求之;

(2)形如用两点间距离求之;

(3)形如用斜率求之*.*

函数与导数

知识提炼

1*.*函数概念

定义:设*A*、*B*是非空的数集,如果按某个确定的对应关系*f*,使对于集合*A*中的任意一个数*x*,在集合*B*中都有唯一确定的数和它对应,那么就称*f*:*A*→*B*为从集合*A*到集合*B*的一个函数,记作*y=f*(*x*),*x*∈*A.*其中*x*叫做自变量,*x*的取值范围*A*叫做函数的定义域;与*x*的值相对应的*y*的值叫做函数值,函数值的集合{*f*(*x*)*|x*∈*A*}叫做函数的值域*.*由映射和函数的定义可知,函数是一类特殊的映射,它要求*A*、*B*非空且皆为数集*.*

2*.*几种基本初等函数

(1)指数幂的运算性质:*ar*·*as=ar+s*,(*ar*)*s=ar*·*s*,(*a*·*b*)*r=ar*·*br.*

(2)对数的运算性质:如果*a>*0,*a*≠1,*M>*0,*N>*0,则

log*a*(*MN*)*=*log*aM+*log*aN*,log*a=*log*aM-*log*aN*,log*aMn=n*log*aM*(*n*∈R)*.*

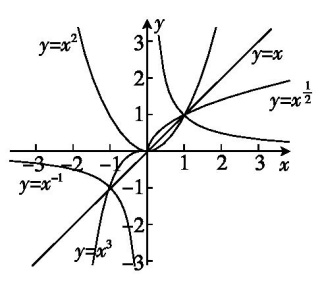
换底公式:log*aN=*(*a>*0,*a*≠1,*N>*0,*m>*0,*m*≠1)*.*

(3)指数函数与对数函数

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 指数函数*y=ax* | | | 对数函数*y=*log*ax* | |
|  | 0*<a<*1 | | *a>*1 | 0*<a<*1 | *a>*1 |
| 定义域 | R | | | (0,*+∞*) | |
| 值域 | (0,*+∞*) | | | R | |
|  | 指数函数*y=ax* | | | 对数函数*y=*log*ax* | |
| 过定点 | (0,1) | | | (1,0) | |
| 单调性 | 递减 | 递增 | | 递减 | 递增 |
| 图像 |  |  | |  |  |

(4)幂函数

一般地,形如*y=xα*的函数称为幂函数,其中*α*为常数*.*在同一坐标系内*y=x*,*y=x*2,*y=x*3,*y=*,*y=*的图像如下图所示:



性质:所有的幂函数在(0,*+∞*)上都有定义,并且图像都通过点(1,1);如果*α>*0,则幂函数的图像过原点,并且在区间[0,*+∞*)上为增函数,如果*α<*0,幂函数在区间(0,*+∞*)上为减函数;当*α*为奇数时,幂函数为奇函数,当*α*为偶数时,幂函数为偶函数*.*

(5)二次函数

*①*二次函数的图像与性质

二次函数的图像是抛物线,对称轴方程为*x=-*,顶点坐标为(*-*,)*.*

当*a>*0时,抛物线的开口向上,函数在*x=-*时取得最小值;函数在区间(*-∞*,*-*]上单调递减,在[*-*,*+∞*)上单调递增*.*当*a<*0时,抛物线的开口向下,函数在*x=-*时取得最大值;函数在区间(*-∞*,*-*]上单调递增,在[*-*,*+∞*)上单调递减*.*

*②*二次函数的解析式有三种形式

一般式:*y=ax*2*+bx+c*(*a*≠0);

顶点式:*y=a*(*x-h*)2*+k*(*a*≠0);

零点式:*y=a*(*x-x*1)(*x-x*2)(*a*≠0)*.*

3*.*函数的单调性

(1)定义及用定义证单调性

*①*定义:设函数*y=f*(*x*)的定义域为*I*,如果对于定义域*I*内的某个区间*D*内的任意两个自变量*x*1,*x*2,当*x*1*<x*2时,都有*f*(*x*1)*<f*(*x*2)(*f*(*x*1)*>f*(*x*2)),那么就说*f*(*x*)在区间*D*上是增函数(减函数)*.*

*②*如果函数*y=f*(*x*)在某个区间上是增函数或是减函数,那么就说函数*y=f*(*x*)在这一区间具有(严格的)单调性,区间*D*叫做*y=f*(*x*)的单调区间*.*

*③*利用定义证明函数*f*(*x*)在给定的区间*D*上的单调性的一般步骤:

(i)任取*x*1,*x*2∈*D*,且*x*1*<x*2;

(ii)作差*f*(*x*1)*-f*(*x*2);

(iii)变形(通常是因式分解和配方);

(iiii)定号(即判断差*f*(*x*1)*-f*(*x*2)的正负);

(iiiii)下结论(即指出函数*f*(*x*)在给定的区间*D*上的单调性)*.*

(2)简单性质

*①*奇函数在其关于原点对称的区间上的单调性相同;

*②*偶函数在其关于原点对称的区间上的单调性相反;

*③*在公共定义域内:增函数*f*(*x*)*+*增函数*g*(*x*)是增函数;减函数*f*(*x*)*+*减函数*g*(*x*)是减函数;增函数*f*(*x*)*-*减函数*g*(*x*)是增函数;减函数*f*(*x*)*-*增函数*g*(*x*)是减函数*.*

(理)(3)设复合函数*y=f*[*g*(*x*)],其中*u=g*(*x*)*.*如果*y=f*(*u*)和*u=g*(*x*)的单调性相同,那么*y=f*[*g*(*x*)]是增函数;如果*y=f*(*u*)和*u=g*(*x*)的单调性相反,那么*y=f*[*g*(*x*)]是减函数*.*

4*.*函数的奇偶性

(1)定义:如果对于函数*f*(*x*)定义域内的任意*x*都有*f*(*-x*)*=-f*(*x*),则称*f*(*x*)为奇函数;如果对于函数*f*(*x*)定义域内的任意*x*都有*f*(*-x*)*=f*(*x*),则称*f*(*x*)为偶函数;如果函数*f*(*x*)不具有上述性质,则*f*(*x*)不具有奇偶性;如果函数同时具有上述两条性质,则*f*(*x*)既是奇函数,又是偶函数*.*

(2)利用定义判断函数奇偶性

*①*首先确定函数的定义域,并判断其定义域是否关于原点对称;

*②*确定*f*(*-x*)与*f*(*x*)的关系;

*③*作出相应结论:

若*f*(*-x*)*=f*(*x*)或*f*(*-x*)*-f*(*x*)*=*0,则*f*(*x*)是偶函数,

若*f*(*-x*)*=-f*(*x*)或*f*(*-x*)*+f*(*x*)*=*0,则*f*(*x*)是奇函数*.*

5*.*函数的周期性

(1)定义:如果存在一个非零常数*T*,使得对于函数定义域内的任意*x*,都有*f*(*x+T*)*=f*(*x*),则称*f*(*x*)为周期函数,*T*为一个周期*.*

(2)类比“三角函数图像”判断

*①*若*y=f*(*x*)图像有两条对称轴*x=a*,*x=b*(*a*≠*b*),则*y=f*(*x*)必是周期函数,且周期为*T=*2*|a-b|*;

*②*若*y=f*(*x*)图像有两个对称中心*A*(*a*,0),*B*(*b*,0)(*a*≠*b*),则*y=f*(*x*)是周期函数,且周期为*T=*2*|a-b|*;

*③*如果函数*y=f*(*x*)的图像有一个对称中心*A*(*a*,0)和一条对称轴*x=b*(*a*≠*b*),则函数*y=f*(*x*)必是周期函数,且周期为*T=*4*|a-b|*;

(3)由周期函数的定义“函数*f*(*x*)满足*f*(*x*)*=f*(*a+x*)(*a>*0),则*f*(*x*)是周期为*a*的周期函数”得:*①*函数*f*(*x*)满足*-f*(*x*)*=f*(*a+x*),则*f*(*x*)是周期为2*a*的周期函数;*②*若*f*(*x+a*)*=*(*a*≠0)恒成立,则*f*(*x*)的周期*T=*2*a*;*③*若*f*(*x+a*)*=-*(*a*≠0)恒成立,则*f*(*x*)的周期*T=*2*a.*

6*.*函数的对称性

*①*满足条件*f*(*x+a*)*=f*(*b-x*)的函数的图像关于直线*x=*对称,满足条件*f*(*x+a*)*=-f*(*b-x*)的函数的图像关于点(,0)对称;

如已知二次函数*f*(*x*)*=ax*2*+bx*(*a*≠0)满足条件*f*(5*-x*)*=f*(*x-*3),且方程*f*(*x*)*=x*有两相等实根,则*f*(*x*)*=　　　　.*

【答案】*-x*2*+x*

*②*点(*x*,*y*)关于*y*轴的对称点为(*-x*,*y*),函数*y=f*(*x*)关于*y*轴的对称曲线方程为*y=f*(*-x*);

*③*点(*x*,*y*)关于*x*轴的对称点为(*x*,*-y*),函数*y=f*(*x*)关于*x*轴的对称曲线方程为*y=-f*(*x*);

*④*点(*x*,*y*)关于原点的对称点为(*-x*,*-y*),函数*y=f*(*x*)关于原点的对称曲线方程为*y=-f*(*-x*)*.*

【注】满足条件*f*(*x+a*)*=f*(*b-x*)的函数的图像关于直线*x=*对称,两函数*y=f*(*x+a*),*y=f*(*b-x*)的图像关于直线*x=*对称*.*

提醒:(1)证明函数图像的对称性,即证明图像上任一点关于对称中心(对称轴)的对称点仍在原图像上;

(2)形如*y=*(*c*≠0,*ad*≠*bc*)的图像是双曲线,对称中心是点(*-*,)*.*

7*.*常见导数公式及运算性质

(1)常见函数的导数公式:*C'=*0(*C*为常数),(*xn*)*'=n*·*xn-*1,(sin *x*)*'=*cos *x*,(cos *x*)*'=-*sin *x*,(e*x*)*'=*e*x*,(*ax*)*'=ax*ln *a*,(ln *x*)*'=*,(log*ax*)*'=.*

(2)两个函数的和、差、积、商的求导法则:[*f*(*x*)*±g*(*x*)]*'=f'*(*x*)*±g'*(*x*),[*f*(*x*)*g*(*x*)]*'=f'*(*x*)*g*(*x*)*+f*(*x*)*g'*(*x*),[]*'=*且*g*(*x*)≠0*.*

特别地:[*cf*(*x*)]*'=cf'*(*x*),*c*为常数*.*

8*.*(理)复合函数的求导

设函数*u=φ*(*x*)在点*x*处有导数*u'x=φ'*(*x*),函数*y=f*(*u*)在点*x*的对应点*u*处有导数*y'u=f'*(*u*),则复合函数*y=f*(*φ*(*x*))在点*x*处也有导数,且*y'x=y'u*·*u'x*或*f'x*(*φ*(*x*))*=f'*(*u*)·*φ'*(*x*)*.*

9*.*函数图像的变换

图像变换法是由一个熟知的函数图像,经过适当的变换,得到我们所要的函数图像,其中常用的图像变换有平移变换、伸缩变换、对称变换*.*

函数*y=f*(*x+a*)(*a*≠0)的图像可以通过把函数*y=f*(*x*)的图像向左(*a>*0)或向右(*a<*0)平移*|a|*个单位而得到;函数*y=f*(*x*)*+b*(*b*≠0)的图像可以通过把函数*y=f*(*x*)的图像向上(*b>*0)或向下(*b<*0)平移*|b|*个单位而得到*.*

函数*y=Af*(*x*)(*A>*0,*A*≠1)的图像可以通过把函数*y=f*(*x*)的图像上各点的纵坐标伸长(*A>*1)或缩短(0*<A<*1)到原来的*A*倍,横坐标不变而得到;函数*y=f*(*ωx*)(*ω>*0,*ω*≠1)的图像可以通过把函数*y=f*(*x*)的图像上各点的横坐标伸长(0*<ω<*1)或缩短(*ω>*1)到原来的倍,纵坐标不变而得到*.*

函数*y=-f*(*x*)的图像可以通过作函数*y=f*(*x*)的图像关于*x*轴对称的图形而得到;函数*y=f*(*-x*)的图像可以通过作函数*y=f*(*x*)的图像关于*y*轴对称的图形而得到;函数*y=-f*(*-x*)的图像可以通过作函数*y=f*(*x*)的图像关于原点对称的图形而得到*.*

10*.*函数与方程

(1)对于函数*y=f*(*x*),使*f*(*x*)*=*0的实数*x*叫做函数*y=f*(*x*)的零点*.*事实上,函数*y=f*(*x*)的零点就是方程*f*(*x*)*=*0的实数根*.*

(2)方程*f*(*x*)*=*0有实根⇔函数*y=f*(*x*)的图像与*y=*0有交点⇔函数*y=f*(*x*)有零点*.*

(3)如果函数*y=f*(*x*)在区间[*a*,*b*]上的图像是一条连续曲线,且有*f*(*a*)*f*(*b*)*<*0,那么函数*y=f*(*x*)在区间[*a*,*b*]内有零点,即存在*c*∈[*a*,*b*],使得*f*(*c*)*=*0,此时这个*c*就是方程*f*(*x*)*=*0的根*.*反之不成立*.*

(4)对于在区间[*a*,*b*]上连续不断,且*f*(*a*)*f*(*b*)*<*0的函数*y=f*(*x*),通过不断地把函数*y=f*(*x*)的零点所在的区间一分为二,使区间的两个端点逐渐逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫做二分法*.*

复习指导

1*.*在求解函数问题时,一定要树立“定义域优先”的原则*.*

2*.*复合函数的定义域问题

已知*f*(*x*)的定义域求*f*[*g*(*x*)]的定义域,或已知*f*[*g*(*x*)]的定义域求*f*(*x*)的定义域:*①*若已知*f*(*x*)的定义域为[*a*,*b*],其复合函数*f*[*g*(*x*)]的定义域应由*a*≤*g*(*x*)≤*b*解出;*②*若复合函数*f*[*g*(*x*)]的定义域为[*a*,*b*],则*f*(*x*)的定义域为*g*(*x*)在[*a*,*b*]上的值域*.*

3*.*函数值域(最值)的求法

*①*配方法:可以转化为二次函数的,利用二次函数的特征来求值域,常转化为形如*f*(*x*)*=ax*2*+bx+c=a*(*x+*)2*+*的形式;

*②*逆求法(反求法):通过反解,用*y*来表示*x*,再由*x*的取值范围,通过解不等式,得出*y*的取值范围(常用来求解形如*y=*的函数的值域);

*③*换元法:通过变量代换转化为能求值域(最值)的函数;

*④*三角有界法:转化为只含正弦、余弦的函数,运用三角函数有界性来求值域(最值);

*⑤*基本不等式法:转化成形如:*y=x+*(*k>*0),利用基本不等式来求值域(最值),此法应在*x=*成立时使用;

*⑥*单调性法:若函数为单调函数,可根据函数的单调性求值域(最值);

*⑦*数形结合:根据函数的几何图形,利用数形结合的方法来求值域(最值)*.*

4*.*求函数解析式的常用方法:

(1)待定系数法——已知所求函数的类型,求出函数的解析式*.*

如已知*f*(*x*)为二次函数,且*f*(*x-*2)*=f*(*-x-*2),且*f*(0)*=*1,图像在*x*轴上截得的线段长为2,求*f*(*x*)的解析式*.*

【答案】*f*(*x*)*=x*2*+*2*x+*1

(2)代换(配凑)法——已知形如*f*(*g*(*x*))的表达式,求*f*(*x*)的表达式,这里需值得注意的是所求解析式的定义域的等价性*.*

如*①*已知*f*(1*-*cos *x*)*=*sin2*x*,求*f*(*x*2)的解析式*.*

【答案】*f*(*x*2)*=-x*4*+*2*x*2,*x*∈[*-*,]

*②*若*f*(*x-*)*=x*2*+*,则函数*f*(*x-*1)*=　　　　.*

【答案】*x*2*-*2*x+*3

*③*若函数*f*(*x*)是定义在R上的奇函数,且当*x*∈(0,*+∞*)时,*f*(*x*)*=x*(1*+*),那么当*x*∈(*-∞*,0)时,*f*(*x*)*=　　　　.*

【答案】*x*(1*-*)

(3)方程的思想——对已知等式进行赋值,从而得到关于*f*(*x*)及另外一个函数的方程组*.*如*①*已知*f*(*x*)*+*2*f*(*-x*)*=*3*x-*2,求*f*(*x*)的解析式*.*

【答案】*f*(*x*)*=-*3*x-*

*②*已知*f*(*x*)是奇函数,*g*(*x*)是偶函数,且*f*(*x*)*+g*(*x*)*=*,则*f*(*x*)*=　　　　.*

【答案】

5*.*函数模型类比

借鉴模型函数对一些抽象函数进行类比探究:

*①*正比例函数型:*f*(*x*)*=kx*(*k*≠0)→*f*(*x±y*)*=f*(*x*)*±f*(*y*);

*②*幂函数型:*f*(*x*)*=xα*→*f*(*xy*)*=f*(*x*)*f*(*y*),*f*()*=*;

*③*指数函数型:*f*(*x*)*=ax*→*f*(*x+y*)*=f*(*x*)*f*(*y*),*f*(*x-y*)*=*;

*④*对数函数型:*f*(*x*)*=*log*ax*→*f*(*xy*)*=f*(*x*)*+f*(*y*),*f*()*=f*(*x*)*-f*(*y*);

*⑤*三角函数型:*f*(*x*)*=*tan *x*→*f*(*x+y*)*=.*

6*.*求曲线的切线方程

导数的几何意义是曲线*y=f*(*x*)在点(*x*0,*f*(*x*0))处的切线的斜率*.*

如果*y=f*(*x*)在(*x*0,*f*(*x*0))处可导,则曲线*y=f*(*x*)在点(*x*0,*f*(*x*0))处的切线方程为:*y-f*(*x*0)*=f'*(*x*0)(*x-x*0)*.*

7*.*利用导数求函数单调区间

求可导函数*f*(*x*)单调区间的步骤:

*①*确定函数*f*(*x*)的定义域;

*②*求导数*f'*(*x*);

*③*由*f'*(*x*)*>*0(或*f'*(*x*)*<*0),解出相应*x*的取值范围*.*当*f'*(*x*)*>*0时,*f*(*x*)在相应的区间上是单调递增函数;当*f'*(*x*)*<*0时,*f*(*x*)在相应的区间上是单调递减函数*.*

【注】*f'*(*x*)*>*0是函数*f*(*x*)在区间*I*上单调递增的充分不必要条件,并不是充要条件*.*事实上:*f*(*x*)在*I*上递增⇔对任意的*x*∈*I*有*f'*(*x*)≥0(但这里满足*f'*(*x*)*=*0的点应只是在个别点处,也就是*f'*(*x*)不能恒等于零)*.*

8*.*利用导数求函数的极值

求可导函数*f*(*x*)的极值的步骤:

*①*确定函数的定义区间,求导数*f'*(*x*),

*②*求方程*f'*(*x*)*=*0的根,

*③*用函数的导数为0的点,顺次将函数的定义区间分成若干小开区间(可列成表格),判断*f'*(*x*)在方程根左右的值的符号,如果左正右负,那么*f*(*x*)在这个根处取得极大值;如果左负右正,那么*f*(*x*)在这个根处取得极小值;如果左右不改变符号,那么*f*(*x*)在这个根处无极值*.*

【注】函数*y=f*(*x*)在*x=x*0处取极值的充要条件应为:“*f'*(*x*0)*=*0且在*x=x*0左右两侧的导数值的符号相反”*.*

9*.*利用导数求函数的最值

在区间[*a*,*b*]上连续的函数*f*(*x*)在[*a*,*b*]上必有最大值与最小值*.*求最值的步骤如下:

*①*求函数*f*(*x*)在(*a*,*b*)内的极值;

*②*求函数*f*(*x*)在区间端点的值*f*(*a*)、*f*(*b*);

*③*将函数*f*(*x*)的各极值与*f*(*a*)、*f*(*b*)比较,其中最大的是最大值,最小的是最小值*.*

10*.*(理)定积分

(理)运用微积分基本定理求定积分*f*(*x*)d*x*值的关键是用求导公式反方向求出*f*(*x*)的原函数,应熟练掌握以下几个公式:

*xn*d*x=*,

,

,

(*a>*0,*b>*0),

*ax*d*x=.*

(理)定积分在几何上的应用:

(1)*f*(*x*)d*x*表示由*x=a*,*x=b*,*x*轴和*y=f*(*x*)所围成图形面积的代数和(*x*轴上方部分面积记为正,下方记为负值);

(2)由*x=a*,*x=b*,*x*轴和*y=f*(*x*)所围成图形的面积为

d*x*;

(3)由*x=a*,*x=b*,*y=f*(*x*)和*y=g*(*x*)所围成图形的面积为

d*x.*

数列

知识提炼

1*.*等差数列的通项,前*n*项和公式

*an=a*1*+*(*n-*1)*d*,*Sn==na*1*+d.*

2*.*等差数列的性质

设等差数列{*an*},公差为*d*,前*n*项和为*Sn*,则有如下的性质:

(1)若*m+n=p+q*(*m*,*n*,*p*,*q*∈N*\**),则*am+an=ap+aq*;

(2)*am=an+*(*m-n*)*d*,*d=*;

(3)若∈N*\**,则*am+an=*2;

(4)*Sk*,*S*2*k-Sk*,*S*3*k-S*2*k*,*S*4*k-S*3*k*,…也成等差数列;

(5)在等差数列中下标成等差的项组成的新数列仍为等差数列;

(6){*an*},{*bn*}都为等差数列,则{*man+kbn*}也为等差数列(其中*m*,*k*均为常数);

(7)若项数为偶数,设为2*n*(*n*≥2),则

*①S*2*n===n*(*an+an+*1)(即等于中间两项和的*n*倍),

*②*设*S*偶*=a*2*+a*4*+*…*+a*2*n*,*S*奇*=a*1*+a*3*+*…*+a*2*n-*1,

则*S*偶*-S*奇*=*(*a*2*-a*1)*+*(*a*4*-a*3)*+*…*+*(*a*2*n-a*2*n-*1)*=nd*,

*③==*(即等于数列{*an*}的中间两项之比);

(8)若项数为奇数,设为2*n+*1(*n*≥2),则

*①S*2*n+*1*===*(2*n+*1)·*an+*1(即等于中间项的2*n+*1倍),

*②*设*S*奇*=a*1*+a*3*+*…*+a*2*n+*1,*S*偶*=a*2*+a*4*+*…*+a*2*n*,

则*S*奇*-S*偶*=a*1*+*(*a*3*-a*2)*+*(*a*5*-a*4)*+*…*+*(*a*2*n+*1*-a*2*n*)*=a*1*+nd=an+*1(即等于中间项),

*③==*(即等于项数之比)*.*

3*.*等比数列的通项,前*n*项和公式

*an=a*1·*qn-*1,*Sn=*

4*.*等比数列的性质

若数列{*an*}是以*a*1为首项,*q*为公比的等比数列,前*n*项和为*Sn*,则有如下的性质:

(1)*an=amqn-m*(*m*,*n*∈N*\**);

(2)若*m+n=k+l*(*m*,*n*,*k*,*l*∈N*\**),则*am*·*an=ak*·*al*;

(3){*λan*}(*λ*≠0)是公比为*q*的等比数列,{}是公比为的等比数列, {*|an|*}是公比为*|q|*的等比数列,若{*an*},{*bn*}是项数相同的等比数列,则{*an*·*bn*}也为等比数列;

(4)在{*an*}中取出的下标成等差的项组成的新数列仍为等比数列,例如在{*an*}中取出*a*1,*a*4,*a*7,*a*10,…它仍为等比数列;

(5)当{*an*}的项数为偶数时,*=q*;

(6)当*q*≠*-*1时,*Sn*,*S*2*n-Sn*,*S*3*n-S*2*n*,…仍成等比数列*.*

复习指导

1*.*证明数列为等差数列的方法

判定或证明一个数列{*an*}为等差数列的常用方法有:

*①*定义法,{*an*}为等差数列⇔对任意的*n*∈N*\**有*an+*1*-an=d*(*d*为常数);

*②*等差中项法,{*an*}为等差数列⇔对任意的*n*≥2,*n*∈N*\**有2*an=an-*1*+an+*1成立;

*③*从*an*和*Sn*的形式上进行判定,若通项公式可写成*an=pn+q*的形式,则可判定{*an*}为等差数列,若{*an*}的前*n*项和可写成*Sn=an*2*+bn*的形式,则也可判定{*an*}为等差数列*.*

2*.*证明数列为等比数列的方法

判定或证明一个数列{*an*}为等比数列的常用方法有:

*①*定义法,{*an*}为等比数列⇔对任意的*n*∈N*\**有*=q*(*q*为常数且*q*≠0);

*②*等比中项法,{*an*}为等比数列⇔对任意的*n*∈N*\**有*=an-*1·*an+*1成立(*an*≠0,*n*≥2);

*③*还可以从*an*和*Sn*的形式上进行判定,若通项公式可写成*an=cqn*(*c*≠0,*q*为常数且*q*≠0)的形式,则可判定{*an*}为等比数列,若{*an*}的前*n*项和可写成*Sn=A-Aqn*(*A*≠0,*q*为常数且*q*≠0,*q*≠1)的形式,则也可判定{*an*}为公比不等于1的等比数列*.*

3*.*求通项公式的方法

数列通项公式的求法:*①*递推公式形如*an-an-*1*=f*(*n*)时,用叠加法;*②*递推公式形如*=f*(*n*)时,用叠乘法;*③*递推公式形如*an=Aan-*1*+B*(*A*,*B*均为非零常数,且*A*≠1)时,用构造法(事实上,存在一个*x*使得*an+x=A*(*an-*1*+x*)成立,显然这时*x=*);*④*对给定的递推关系式进行适当的变形(取倒数、取对数等),从而构造出特殊的数列;*⑤*已知*Sn*求*an*时,利用*an=*来解,注意对*n=*1时的情况的验证;

*⑥*(理)先猜后证:一般是根据给定的前几项,通过不完全归纳法得到数列的通项公式,然后利用数学归纳法来进行证明*.*

4*.*数列求和法

数列求和的方法:*①*公式法,即运用等差数列、等比数列的求和公式;*②*分组求和法;*③*倒序相加法;*④*错位相减法;*⑤*裂项相消法,常见裂项公式:*=-*,*=*(*-*)*.*

5*.*等差数列前*n*项和最值求解

(1)利用*Sn=na*1*+d*和二次函数求最值方法*.*

(2)利用*an*,由定出*n*,再求*Sn*的最值;由定出*n*,再求*Sn*最值*.*

6*.*裂项求和的几种常见类型

(1)*=*(*-*);

(2)*=*(*-*);

(3)*=*(*-*);

(4)*=*[*-*];

(5)若{*an*}是公差为*d*的等差数列,则*=*(*-*);

(6)*=*(*-*)*.*

7*.*几种通项的放缩

(1)*>*;

(2)*<*;

(3)*<*;

(4)*<.*

三角函数与平面向量

知识提炼

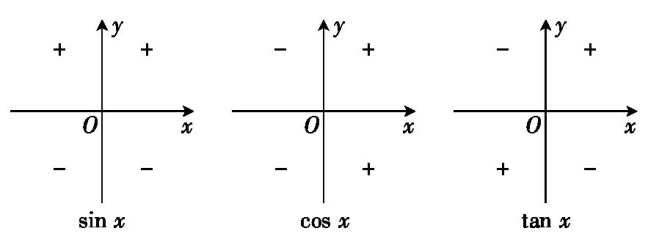
1*.*扇形弧长与面积公式

弧度制下,扇形弧长公式*l=αr*,扇形面积公式*S=lr=r*2*α*,其中*r*为扇形的半径,*α*为弧所对圆心角的弧度数,且0*<α<*2π*.*

2*.*诱导公式记忆口诀:奇变偶不变、符号看象限

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *-α* | π*-α* | π*+α* | 2π*-α* | *-α* |
| sin | *-*sin *α* | sin *α* | *-*sin *α* | *-*sin *α* | cos *α* |
| cos | cos *α* | *-*cos *α* | *-*cos *α* | cos *α* | sin *α* |

3*.*三角函数值的正负与角所在象限关系



口诀是:一全正、二正弦、三正切、四余弦*.*

4*.*常用三角公式及变形公式

常用公式: cos(*α+β*)*=*cos *α*cos *β-*sin *α*sin *β*,

cos(*α-β*)*=*cos *α*cos *β+*sin *α*sin *β*,

sin(*α+β*)*=*sin *α*cos *β+*cos *α*sin *β*,

sin(*α-β*)*=*sin *α*cos *β-*cos *α*sin *β*,

tan(*α+β*)*=*,

tan(*α-β*)*=*,

sin 2*α=*2sin *α*cos *α*,

cos 2*α=*cos2*α-*sin2*α=*2cos2*α-*1*=*1*-*2sin2*α*,

tan 2*α=*,

cos2*α=*,

sin2*α=*,

*a*sin *x+b*cos *x=*sin(*x+φ*)(其中tan *φ=*)*.*

5*.*三角形中的有关公式

(1)在△*ABC*中:sin(*A+B*)*=*sin *C*,sin*=*cos;

(2)正弦定理:*===*2*R*;

(3)余弦定理:*a*2*=b*2*+c*2*-*2*bc*cos *A*,cos *A=*;

(4)面积公式:*S=aha=ab*sin *C=r*(*a+b+c*)(其中*r*为三角形内切圆半径)*.*

6*.*平面向量有关概念及公式

(1)平面向量的数量积: *a*·*b=|a||b|*cos *θ.*(*θ*为两个非零向量*a*,*b*的夹角)

特别地,*a*2*=a*·*a=|a|*2,*|a|=.*当*θ*为锐角时,*a*·*b>*0,且*a*·*b>*0是*θ*为锐角的必要非充分条件;当*θ*为钝角时,*a*·*b<*0,且*a*·*b<*0是*θ*为钝角的必要非充分条件*.*

(2)*b*在*a*上的投(射)影为*|b|*cos *θ.*

(3)平面向量坐标运算:设*a=*(*x*1,*y*1),*b=*(*x*2,*y*2),且*a*≠0,*b*≠0,则:

*①a*·*b=x*1*x*2*+y*1*y*2;

*②|a|=*, *a*2*=|a|*2*=+*;

*③a*∥*b*⇔*a=λb*⇔*x*1*y*2*-y*1*x*2*=*0;

*④a*⊥*b*⇔*a*·*b=*0⇔*|a+b|=|a-b|*⇔*x*1*x*2*+y*1*y*2*=*0;

*⑤*若*a*、*b*的夹角为*θ*,则cos *θ==.*

(4)向量常用结论:

*①++=*0⇔*P*为△*ABC*的重心;

*②*·*=*·*=*·⇔*P*为△*ABC*的垂心;

*③*向量*λ*(*+*)(*λ*≠0)所在直线过△*ABC*的内心;

*④||=||=||*⇔*P*为△*ABC*的外心*.*

7*.*三角函数的图像与性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *y=*sin *x* | *y=*cos *x* | *y=*tan *x* |
| 图像 |  |  |  |
| 定义域 | R | R | {*x|x*≠  *+k*π,*k*∈Z} |
| 值域 | [*-*1,1] | [*-*1,1] | R |
| 单调性及递  增、递减区间 | 在[*-+*2*k*π,  *+*2*k*π],*k*∈Z  上递增;  在[*+*2*k*π,  π*+*2*k*π],  *k*∈Z  上递减 | 在[*-*π*+*2*k*π,  2*k*π],*k*∈Z  上递增;  在[2*k*π,π*+*  2*k*π],*k*∈Z  上递减 | 在(*-+k*π,  *+k*π),  *k*∈Z  上递增 |
| 周期性及  奇偶性 | *T=*2π  奇函数 | *T=*2π  偶函数 | *T=*π  奇函数 |
| 对称轴 | *x=+k*π,  *k*∈Z | *x=k*π,*k*∈Z | 无对称轴 |
| 对称中心 | (*k*π,0),*k*∈Z | (*+k*π,0),  *k*∈Z | (,0),  *k*∈Z |

8*.*三角函数的图像变换:若由*y=*sin *ωx*得到*y=*sin(*ωx+φ*)的图像,则向左或向右平移*||*个单位*.*也就是说若*f*(*x*)*=*sin *ωx*,则向左或向右平移*||*个单位后得到*f*(*x+*)*=*sin[*ω*(*x+*)]*=*sin(*ωx+φ*),即平移的量是对*x*而言的*.*余弦函数和正切函数的图像平移变换也类似*.*

复习指导

1*.*用五点法作出*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像

(1)当画函数*y=A*sin(*ωx+φ*)在*x*∈R上的图像时,一般令*ωx+φ=*0,,π,,2π,即可得到所画图像的特殊点坐标,然后用平滑的曲线将这些点连接起来即可*.*

(2)当画函数*y=A*sin(*ωx+φ*)在某个指定区间上的图像时,一般先求出*ωx+φ*的范围,然后在这个范围内,选取特殊点,连同区间的两个端点一起列表*.*

(3)由*y=*sin *x*的图像变换到*y=A*sin(*ωx+φ*)*+b*的图像时,一般先作相位变换,后做周期变换,即先平移后伸缩:

*y=*sin *x**y=*sin(*x+φ*)*y=*sin(*ωx+φ*)

*y=A*sin(*ωx+φ*)*y=A*sin(*ωx+φ*)*+b*

如果先做周期变换,后做相位变换(即先伸缩后平移),则左右平移时不是*|φ|*个单位,而是*||*个单位,即由*y=*sin *ωx*→*y=*sin(*ωx+φ*)是左右平移*||*个单位*.*

2*.*根据图像确定函数*y=A*sin(*ωx+φ*)*+b*的解析式的步骤

(1)求*A*,*b*:确定函数的最大值*M*和最小值*m*,则*A=*,*b=.*

(2)求*ω*:确定函数的周期*T*,则*ω=.*

(3)求*φ*常用的方法有:*①*代入法,*②*五点法:确定*φ*值时,往往以寻找“五点法”中的第一个零点(*-*,0)作为突破口*.* 具体如下: “第一点”(即图像上升时与*x*轴的交点)为*ωx+φ=*0; “第二个点”(即图像的“峰点”)为*ωx+φ=*; “第三点”(即图像下降时与*x*轴的交点)为*ωx+φ=*π; “第四个点”(即图像的“谷点”)为*ωx+φ=*; “第五点”为*ωx+φ=*2π*.*

3*.*化简与求值

(1)求sin *α*、cos *α*的齐次式的值

已知tan *α=m*的条件下,求关于sin *α*、cos *α*的齐次式的值:由tan *α=m*知cos *α*≠0,因此将分子分母同除以cos*nα*(*n*∈N*\**),这样可以利用商数关系将所求式化为关于tan *α*的表达式,从而可以整体代入tan *α=m*的值进行求解*.*

(2)化简求值注意事项

*①*注意“1”的各种形式变换:1*=*sin2*α+*cos2*α=*tan 45°*=*2cos2*α-*cos 2*α=*2sin2*α+*cos 2*α.*

*②*注意变换的两大方向:一是化成同角函数,二是化成同名函数*.*

*③*由三角函数值求角或求别的三角式子的值时,要考虑角的范围及周期,时刻提醒自己是否漏解或增解*.*

4*.*三角函数求最值问题

(1)*y=a*sin *x+b*cos *x+c*型函数的最值:

*y=a*sin *x+b*cos *x+c=*sin(*x+φ*)*+c*(其中tan *φ=*),这样通过引入辅助角*φ*可将此类函数的最值问题转化为*y=*sin(*x+φ*)*+c*的最值,然后利用三角函数的图像和性质来求即可*.*

(2)*y=a*sin2*x+b*sin *x*cos *x+c*cos2*x*型函数的最值:

可利用降幂公式(sin2*x=*,cos2*x=*)将*y=a*sin2*x+b*sin *x*cos *x+c*cos2*x*整理转化为*y=A*sin 2*x+B*cos 2*x+C*,这样就可将其转化为上一种类型来求最值*.*

(3)*y=a*sin2*x+b*sin *x+c*型函数的最值:

可将*y=a*sin2*x+b*sin *x+c*中的sin *x*看作*t*,即令*t=*sin *x*,则*y=at*2*+bt+c*,这样就转化为二次函数的最值问题*.* 但这里应注意换元前后,变量的取值范围要保持不变,即令*t=*sin *x*,要根据给定的*x*的取值范围,求出*t*的范围*.*另外*y=a*cos2*x+b*cos *x+c*等形式函数的最值都可归为此类*.*

(4)*y=*型函数的最值:

此类题目的特点是分子或分母中含有sin *x*或cos *x*的一次式,一般可将其化为*f*(*y*)*=*sin(*ωx+φ*)的形式,然后利用三角函数的有界性求其最值;当然此类题有时也可用数形结合来解*.*

(5)*y=a*(sin *x±*cos *x*)*+b*sin *x*cos *x+c*型函数的最值:

对于*y=a*(sin *x+*cos *x*)*+b*sin *x*cos *x+c*,令sin *x+*cos *x=t*,*t*∈[*-*,],*∵*(sin *x+*cos *x*)2*=*1*+*2sin *x*cos *x*,*∴*sin *x*cos *x=*,则函数就变为*y=at+b*·*+c*的形式,因此此类函数也可通过换元转化为二次函数的最值问题*.*对于形如*y=a*(sin *x-*cos *x*)*+b*sin *x*cos *x+c*的函数也可采用同样的方法*.*另外此类题目也应注意换元前后变量的取值范围要保持相同*.*

5*.*解斜三角形

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 已知条件 | 应用定理 | 一般解法 |
| 一边和两角(如*a*,*B*,*C*) | 正弦定理 | 由*A+B+C=*180°,求角*A*;由正弦定理求出*b*和*c*,有解时只有一解*.* |
| 两边和夹角(如*a*,*b*,*C*) | 余弦定理  正弦定理 | 由余弦定理求第三边;由正弦定理求出小边所对的角;再由*A+B+C=*180°求出另一个角*.*有解时只有一解*.* |
| 三边(*a*,*b*,*c*) | 余弦定理 | 由余弦定理求出角*A*,*B*;再利用*A+B+C=*180°,求出角*C*,有解时只有一解*.* |
| 两边和其中一边的对角(如*a*,*b*,*A*) | 正弦定理  余弦定理 | 由正弦定理求出角*B*;由*A+B+C=*180°,求出角*C*;再利用正弦定理或余弦定理求*c*,可有两解、一解或无解*.* |

6*.*平面向量应注意的问题

(1)注意向量方向及夹角*.*如在△*ABC*中,若∠*B=*60°,则与的夹角为120°而不是60°*.*

(2)向量的投影(射影)有正、负、零,而不是全为正值*.*

解 析 几 何

知识提炼

1*.*直线方程及方程适用条件

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 方程 | 说明 | 适用条件 |
| 斜截式 | *y=kx+b* | *k*—斜率  *b*—纵截距 | 倾斜角为90°的直线不能用此式 |
| 点斜式 | *y-y*0*=k*(*x-x*0) | (*x*0,*y*0)—直线上已知点,*k*—斜率 | 倾斜角为90°的直线不能用此式 |
| 两点式 | *=* | (*x*1,*y*1),(*x*2,*y*2)是直线上两个已知点 | 与两坐标轴平行或重合的直线不能用此式 |
| 截距式 | *+=*1 | *a*—横截距,*b*—纵截距 | 过(0,0)及与两坐标轴平行的直线不能用此式 |
| 一般式 | *Ax+By+C=*0 | *-*,*-*和*-*分别为斜率、横截距和纵截距 | *A*、*B*不能同时为零 |

2*.*两条直线位置关系的判定

两条直线*l*1*∶y=k*1*x+b*1,*l*2*∶y=k*2*x+b*2,则*l*1∥*l*2⇔*k*1*=k*2,*b*1≠*b*2; *l*1⊥*l*2⇔*k*1·*k*2*=-*1; *l*1,*l*2重合⇔*k*1*=k*2,*b*1*=b*2*.*

*l*1: *A*1*x+B*1*y+C*1*=*0(*A*1*B*1*C*1≠0),*l*2: *A*2*x+B*2*y+C*2*=*0(*A*2*B*2*C*2≠0)*.*

则*l*1∥*l*2⇔*=*≠; *l*1与*l*2相交⇔≠; *l*1与*l*2重合⇔*==*;*l*1⊥*l*2⇔*A*1*A*2*+B*1*B*2*=*0*.*

出现*A*1*B*1*C*1*=*0或*A*2*B*2*C*2*=*0的情况时我们可以单独讨论*.*

3*.*点到直线的距离公式

点*P*(*x*0,*y*0)到直线*l*: *Ax+By+C=*0的距离为*d=*;设*P*1(*x*1,*y*1),*P*2(*x*2,*y*2),则*=*;

两平行直线*l*1: *Ax+By+C*1*=*0和*l*2: *Ax+By+C*2*=*0的距离*d=*,这个公式要求两平行线中关于*x*,*y*的一次项系数必须对应相同*.*

4*.*圆的方程

(1)标准方程:(*x-a*)2*+*(*y-b*)2*=r*2,其中圆心为(*a*,*b*),半径为*r*;

(2)一般方程:*x*2*+y*2*+Dx+Ey+F=*0(*D*2*+E*2*-*4*F>*0);圆心坐标为(*-*,*-*),半径为*r=.*

特别地:圆的直径式方程:(*x-x*1)(*x-x*2)*+*(*y-y*1)(*y-y*2)*=*0,其中*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2)是圆的一条直径的两个端点*.*

5*.*点和圆的位置关系

设点*P*(*x*0,*y*0)及圆的方程(*x-a*)2*+*(*y-b*)2*=r*2,则

(1)(*x*0*-a*)2*+*(*y*0*-b*)2*>r*2⇔点*P*在圆外;

(2)(*x*0*-a*)2*+*(*y*0*-b*)2*<r*2⇔点*P*在圆内;

(3)(*x*0*-a*)2*+*(*y*0*-b*)2*=r*2⇔点*P*在圆上*.*

6*.*直线与圆的位置关系

设直线*l*与圆*C*的圆心之间的距离为*d*,圆的半径为*r*,则

(1)*l*与圆*C*相离⇔*d>r*;

(2)*l*与圆*C*相切⇔*d=r*;

(3)*l*与圆*C*相交⇔*d<r.*

7*.*圆与圆的位置关系

设圆*C*1与圆*C*2的圆心距离为*d*,半径分别为*R*,*r*,且*R>r*,则两圆

(1)相离⇔*d>R+r*;

(2)外切⇔*d=R+r*;

(3)相交⇔*R-r<d<R+r*;

(4)内切⇔*d=R-r*;

(5)内含⇔*d<R-r.*

8*.*圆锥曲线的定义

(1)椭圆定义:平面内与两个定点*F*1、*F*2的距离和等于常数(大于*|F*1*F*2*|*)的点的轨迹叫做椭圆,这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点的距离叫做椭圆的焦距*.*

(2)双曲线定义:我们把平面内与两个定点*F*1、*F*2的距离的差的绝对值等于常数(小于*|F*1*F*2*|*)的点的轨迹叫做双曲线,这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点的距离叫做双曲线的焦距*.*

(3)抛物线定义:平面内到一定点*F*和一条定直线*l*的距离相等的点的轨迹叫抛物线,定点*F*叫做抛物线的焦点,定直线*l*叫做抛物线的准线*.*

注意:在抛物线的定义中,焦点*F*不在准线上*.*

9*.*圆锥曲线的标准方程与几何性质

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 椭圆 | | 双曲线 | |
| 方程 | *+=*1  (*a>b>*0) | *+=*1  (*a>b>*0) | *-=*1  (*a>*0,*b>*0) | *-=*1  (*a>*0,*b>*0) |
| 图形 |  |  |  |  |
| 焦点 | (*±c*,0) | (0,*±c*) | (*±c*,0) | (0,*±c*) |

(续表)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 椭圆 | | 双曲线 | |
| 范围 | *|x|*≤*a*,  *|y|*≤*b* | *|y|*≤*a*,  *|x|*≤*b* | *|x|*≥*a*,  *y*∈R | *|y|*≥*a*,  *x*∈R |
| 顶点 | (*±a*,0)  (0,*±b*) | (*±b*,0)  (0,*±a*) | (*±a*,0) | (0,*±a*) |
| 对称 | 关于坐标轴轴对称,关于原点中心对称 | | 关于坐标轴轴对称,关于原点中心对称 | |
| 离心率 | 0*<e<*1,*e*越大,椭圆越扁,*e*越小,椭圆越圆 | | *e>*1,*e*越大,双曲线开口越开阔 | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 抛物线 | | | |
| 方程 | *y*2*=*2*px*  (*p>*0) | *y*2*=-*2*px*  (*p>*0) | *x*2*=*2*py*  (*p>*0) | *x*2*=-*2*py*  (*p>*0) |
| 图形 |  |  |  |  |
| 焦点 | (,0) | (*-*,0) | (0,) | (0,*-*) |
| 范围 | *x*≥0,  *y*∈R | *x*≤0,  *y*∈R | *y*≥0,  *x*∈R | *y*≤0,  *x*∈R |
| 顶点 | (0,0) | | | |
| 准线 | *x=-* | *x=* | *y=-* | *y=* |
| 对称 | 关于*x*轴对称 | | 关于*y*轴对称 | |
| 离心率 | *e=*1,*p*越大,抛物线开口越大 | | | |

补充性质:(1)表中的椭圆长轴长为2*a*,短轴长为2*b*;双曲线实轴长为2*a*,虚轴长为2*b*;抛物线通径长为2*p.*

(2)双曲线还有一条很重要的性质——渐近线*.*双曲线*-=*1的渐近线方程为*y=±x*或*±=*0;双曲线*-=*1的渐近线为*y=±x*或*±=*0*.*

(3)实轴与虚轴长相等的双曲线叫等轴双曲线,等轴双曲线*-=±*1的离心率为,渐近线方程为*x±y=*0*.*

10*.*抛物线中的常用知识点

若过抛物线*y*2*=*2*px* (*p>*0)的焦点*F*的直线交抛物线于*A*,*B*两点,设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),*θ*为直线*AB*的倾斜角,则有下列性质:*①y*1*y*2*=-p*2,*x*1*x*2*=*; *②|AB|=x*1*+x*2*+p=*(通径长为2*p*);*③S*△*AOB=*;*④+=*;*⑤*以*AB*为直径的圆与抛物线的准线相切*.*

复习指导

1*.*圆的切线问题

(1)求过圆上一点(*x*0,*y*0)的圆的切线方程:先求切点与圆心连线的斜率*k*,则由垂直关系,切线斜率为*-*,由点斜式方程可求得切线方程(*k=*0时单独考虑);

(2)求过圆外一点(*x*0,*y*0)的圆的切线方程:

几何方法:设切线方程为*y-y*0*=k*(*x-x*0),即*kx-y-kx*0*+y*0*=*0,然后由圆心到直线的距离等于半径,可求得*k*,切线方程即可求出;

代数方法:设切线方程为*y-y*0*=k*(*x-x*0),即*y=kx-kx*0*+y*0,代入圆的方程得到一个关于*x*的一元二次方程,由*Δ=*0,求得*k*,切线方程即可求出*.*

注:*①*以上方法只能求存在斜率的切线,斜率不存在的切线可结合图形求得;*②*过圆(*x-a*)2*+*(*y-b*)2*=r*2上一点*P*(*x*0,*y*0)的切线方程为(*x-a*)(*x*0*-a*)*+*(*y-b*)(*y*0*-b*)*=r*2*.*

(3)直线截圆所得弦长的计算方法:利用由弦心距、圆的半径、弦的一半所构成的直角三角形结合勾股定理来解*.*

2*.*圆锥曲线的标准方程的求法

(1)定义法*.*若动点的运动规律符合圆锥曲线的定义或由圆锥曲线的定义易求得其方程中的关键量,则常用定义法求解*.*

(2)待定系数法*.*若题设中已告知此曲线为哪种圆锥曲线,则常设出曲线方程,再由题设求得待定系数*.*此法是求圆锥曲线标准方程的最基本方法,但一定要注意直线与圆锥曲线是否有交点*.*

注意:用定义法求双曲线方程时,若动点到两定点距离之差为常数,而不是差的绝对值为常数时,此时曲线不是完整的双曲线,而是双曲线的一支*.*

3*.*“设而不求”的思想

若直线*l*与圆锥曲线*C*有两个交点*A*,*B*,一般地,首先设出交点坐标*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),其中有四个参数*x*1,*y*1,*x*2,*y*2,它们的作用只是过渡性符号,通常是不需要求出的,而用韦达定理来解决问题,这是研究直线与圆锥曲线位置关系中常用的方法*.*

4*.*圆锥曲线方程的巧设方法

(1)椭圆和双曲线:

*①*当椭圆或双曲线焦点位置不明确,无法确定其标准方程形式时,可分类讨论,也可设方程为*+=*1或*Ax*2*+By*2*=*1,再用待定系数法求解;

*②*与椭圆*+=*1(*a>b>*0)共焦点的椭圆方程可以设为*+=*1(*m>*0,*m>c*2);

*③*与*-=*1(*a>*0,*b>*0)共渐近线的双曲线方程可以设为*-=λ*(*λ*≠0),渐近线为*ax±by=*0的双曲线方程可以设为*a*2*x*2*-b*2*y*2*=λ*(*λ*≠0);

*④*等轴双曲线可设为*x*2*-y*2*=λ*(*λ*≠0)的形式*.*

(2)抛物线焦点位置不明确时,可分类讨论,也可利用统一设法:焦点在*x*轴上的抛物线方程设为*y*2*=*2*ax*(*a*≠0),焦点在*y*轴上的抛物线设为*x*2*=*2*ay*(*a*≠0)*.*

5*.*直线与圆锥曲线相交的弦长问题

(1)直线*l*与圆锥曲线*C*有两个交点*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),直线*l*的斜率为*k*,则:*|AB|=*·*=*

或*|AB|=|y*1*-y*2*|*

*=.*

(2)对于一些特殊的弦长问题要注意总结:

*①*抛物线的焦点弦长公式:直线过抛物线*y*2*=*2*px*(*p>*0)的焦点与抛物线交于两点*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*|AB|=x*1*+x*2*+p*;

*②*圆锥曲线的通径问题:过圆锥曲线的焦点作曲线对称轴的垂线,交曲线于*A*,*B*两点,则线段*AB*就是曲线的通径,通径的长是曲线焦点弦中长度最小的*.*对于抛物线*y*2*=*2*px*(*p>*0),其通径长为2*p*;对于椭圆*+=*1和双曲线*-=*1,其通径长为*.*

6*.*(理)求轨迹方程的基本方法

(1)直译法*.*即直接将题目译成或等价转化成几何条件,再具体坐标化并等价化简*.*

(2)定义法*.*将题目等价转化,使其恰好符合某类特殊曲线(如圆、椭圆、双曲线、抛物线)的定义,然后用待定系数法求出相应的参数*.*

(3)相关点法(转移法)*.*若所求的动点*P*的轨迹与一已知曲线上的点*Q*相关,则可先设出*P*(*x*,*y*),*Q*(*x*0,*y*0),再寻找*P*、*Q*间关系,把*x*0,*y*0用*x*,*y*表示,最后代入点*Q*满足的方程,化简即得所求*.*

注意:求出曲线的方程之后不要忽视检验,要仔细检查有无“不法分子”掺杂其中,并将其剔除;另一方面也要注意有无“漏网之鱼”“逍遥法外”,并将其找回*.*

7*.*直线系问题

(1)与直线*Ax+By+C=*0平行的直线系方程为:*Ax+By+C'=*0(*C'*≠*C*)*.*

(2)过点*P*(*x*0,*y*0)且与直线*Ax+By+C=*0平行的直线方程为:*A*(*x-x*0)*+B*(*y-y*0)*=*0*.*

(3)与直线*Ax+By+C=*0垂直的直线系方程为:*Bx-Ay+C'=*0*.*

(4)过点*P*(*x*0,*y*0)且与直线*Ax+By+C=*0垂直的直线方程为:*B*(*x-x*0)*-A*(*y-y*0)*=*0*.*

(5)过两直线*l*1:*a*1*x+b*1*y+c*1*=*0,*l*2:*a*2*x+b*2*y+c*2*=*0的交点的直线系方程为:*a*1*x+b*1*y+c*1*+λ*(*a*2*x+b*2*y+c*2)*=*0(*λ*∈R,*λ*为参数,且不包含直线*a*2*x+b*2*y+c*2*=*0)*.*

8*.*对称问题

(1)点关于点的对称:求点*P*关于点*M*(*a*,*b*)的对称点*Q*的问题,主要依据*M*是线段*PQ*的中点,即*xP+xQ=*2*a*,*yP+yQ=*2*b.*

(2)直线关于点的对称:求直线*l*关于点*M*(*m*,*n*)的对称直线*l'*的问题,主要依据*l'*上的任一点*T*(*x*,*y*)关于*M*(*m*,*n*)的对称点*T'*(2*m-x*,2*n-y*)必在*l*上*.*

(3)点关于直线的对称:求已知点(*m*,*n*)关于已知直线*l*:*y=kx+b*的对称点*A'*(*x*0,*y*0)的坐标的一般方法是依据*l*是线段*AA'*的垂直平分线,列出关于*x*0、*y*0的方程组,由“垂直”得一方程,由“平分”得一方程,即

(4)直线关于直线的对称:求直线*l*关于直线*g*的对称直线*l'*,主要依据*l'*上任一点*M*关于直线*g*的对称点必在*l*上*.*

立 体 几 何

知识提炼

1*.*空间几何体的表面积与体积

(1)棱柱的体积*V=Sh*,其中*S*表示棱柱的底面积,*h*表示棱柱的高,棱锥的体积*V=Sh*,其中*S*、*h*分别表示棱锥的底面积和高*.*

(2)圆柱的表面积*S=*2π*r*(*r+h*)、体积*V=*π*r*2·*h*,其中*r*、*h*分别为圆柱底面的半径和高*.*

(3)圆锥的表面积*S=*π*r*(*l+r*)、体积*V=*π*r*2*h*,其中*r*、*l*、*h*分别为圆锥底面的半径、母线长、锥高*.*

(4)圆台的表面积*S=*π(*r*2*+R*2*+rl+Rl*)、体积*V=*

(*S'++S″*)*h*,其中*r*、*R*、*l*、*h*分别为圆台上底面的半径、下底面的半径、母线长、圆台的高,*S'*和*S″*分别为上、下底面的面积*.*

(5)球的表面积*S=*4π*R*2、体积*V=*π*R*3,其中*R*为球的半径*.*

2*.*平面的基本性质

公理1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内*.*

公理2:过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面*.*

推论1:过一条直线和这条直线外一点,有且只有一个平面*.*

推论2:过两条相交直线,有且只有一个平面*.*

推论3:过两条平行直线,有且只有一个平面*.*

公理3:如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线*.*

3*.*空间点、线、面的位置关系和判定、性质

(1)空间两直线有相交、平行、异面三种位置关系*.*

(2)线面平行判定定理:平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,则该直线与此平面平行*.*

线面平行性质定理:一条直线与一个平面平行,则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行*.*

(3)线面垂直判定定理:一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,则该直线与此平面垂直*.*

线面垂直性质定理:垂直于同一个平面的两条直线平行*.*

(4)面面平行判定定理:一个平面内的两条相交直线与另一个平面都平行,则这两个平面平行*.*

面面平行性质定理:如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行*.*

(5)面面垂直判定定理:一个平面过另一个平面的垂线,则这两个平面垂直*.*

面面垂直性质定理:两个平面垂直,则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直*.*

4*.*空间直角坐标系

(1)在给定的空间直角坐标系中,空间点*M*与有序数组(*x*,*y*,*z*)建立了一一对应关系,因此,有序数组(*x*,*y*,*z*)叫做点*M*在此空间直角坐标系的坐标,记作*M*(*x*,*y*,*z*),其中*x*叫做点*M*的横坐标,*y*叫做点*M*的纵坐标,*z*叫做点*M*的竖坐标*.*

(2)空间任意两点*M*1(*x*1,*y*1,*z*1)、*M*2(*x*2,*y*2,*z*2)之间的距离*|M*1*M*2*|=.*

(3)空间中两点*P*1(*x*1,*y*1,*z*1),*P*2(*x*2,*y*2,*z*2),线段*P*1*P*2的中点*M*的坐标是(,,)*.*

5*.*球与两种几何体之间的关系

(1)球与正方体的组合体:

*①*球内切于正方体:此时球半径*R*与正方体棱长*a*有关系式2*R=a*成立*.*

*②*球外接于正方体:2*R=a.*

*③*球与正方体的12条棱相切,2*R=a.*

(2)球与正四面体的组合体:

*①*球内切于正四面体:球半径*R*与正四面体的高*h*有关系式*R=h*(可以用分割法)*.*

*②*球外接于正四面体,*R=h.*

即一个正四面体的内切球与外接球的半径之比为1*∶*3*.*

6*.*几个重要结论

(1)长方体的长、宽、高分别为*a*,*b*,*c*,体对角线为*l*,则*l*2*=a*2*+b*2*+c*2*.*

(2)正四面体棱长为*a*,高为*h*,内切球半径为*r*,外接球半径为*R*,则*h=a*,*r=a*,*R=a.*

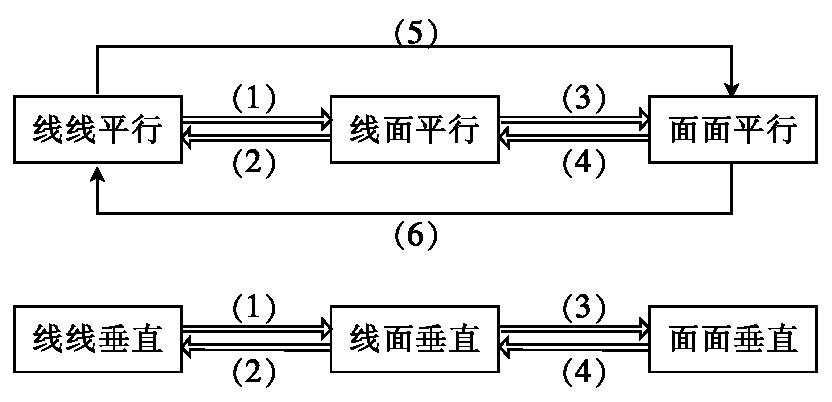
复习指导

1*.*面积和体积的计算问题

(1)在计算面积时,“面积的比等于对应边比的平方”这一性质经常被用到;棱锥中,平行于底面的截面截得的棱锥的体积与已知棱锥的体积比等于它们高的立方比*.*

(2)求几何体体积的常用方法有公式法、分割法、补形法、等积法和求差法(即整体减去局部)*.*

2*.*空间的平行和垂直关系:



3*.*(理)空间角的计算步骤:一作、二证、三算

异面直线所成的角:范围:0°*<θ*≤90°;方法:*①*平移法;*②*补形法:把空间图形补成熟悉的或完整的几何体,如正方体、平行六面体、长方体等,以便易于发现两条异面直线间的关系,转化为相交两直线的夹角*.*

直线与平面所成的角:范围:0°≤*θ*≤90°;方法:关键是作垂线,找射影*.*

二面角:(1)平面角的三要素:*①*顶点在棱上;*②*角的两边分别在两个半平面内;*③*角的两边与棱都垂直*.*

(2)作平面角的主要方法:

*①*定义法:直接在二面角的棱上取一点(特殊点),分别在两个半平面内作棱的垂线,得出平面角,用定义法时,要认真观察图形的特性;

*②*垂线法:过其中一个面内一点作另一个面的垂线,线面垂直的判定或性质作出二面角的平面角;

*③*垂面法:过一点作棱的垂面,则垂面与两个半平面的交线所成的角即为平面角;

(3)二面角的范围:[0°,180°);

(4)二面角的求法:*①*转化为求平面角;*②*面积射影法:利用面积射影公式*S*射*=S*原·cos *θ*,其中*θ*为平面角的大小*.*对于一类没有给出棱的二面角,应先延伸两个半平面,使之相交出现棱,然后再选用上述方法(尤其可考虑面积射影法)*.*

4*.*(理)利用空间向量证明平行与垂直

(1)线线平行:已知*a=*(*x*1,*y*1,*z*1),*b=*(*x*2,*y*2,*z*2),则*a*∥*b*(*b*≠0)⇔*x*1*=λx*2,*y*1*=λy*2,*z*1*=λz*2(*λ*∈R);

(2)线面平行:设平面*α*的法向量为*n*,则直线*a*(方向向量为*a*)∥平面*α*⇔*a*⊥*n*;

(3)线面垂直:设平面的法向量为*n*,则直线*a*(方向向量为*a*)⊥平面*α*⇔*a*∥*n*;

(4)面面平行:设平面*α*的法向量为*n*1,平面*β*的法向量为*n*2,则*α*∥*β*⇔*n*1∥*n*2;

(5)面面垂直:设平面*α*的法向量为*n*1,平面*β*的法向量为*n*2,则*α*⊥*β*⇔*n*1⊥*n*2⇔*n*1·*n*2*=*0*.*

5*.*(理)利用空间向量求角的问题*.*

(1)两直线*a*,*b*(其方向向量分别为*a*,*b*)所成的角为*θ*,则cos *θ=|*cos*<a*,*b>|*;

(2)直线*a*(方向向量为*a*)与平面*α*(法向量为*n*)所成的角为*θ*,则sin *θ=|*cos*<a*,*n>|*;

(3)若*m*,*n*为两个面*α*,*β*的法向量,则角*<m*,*n>*与二面角的大小相等或互补;故如果*α*,*β*所成的锐二面角的大小为*θ*,则cos *θ=|*cos*<m*,*n>|.*

6*.*(理)利用空间向量求距离:

统一公式可表示为*d=.*

(1)若表示点*A*与面*α*的距离公式,则*n*表示平面的法向量,*B*为面*α*内的任一点*.*

(2)若表示线面间的距离公式,则*n*表示平面的法向量,*A*,*B*分别为直线和平面上的任意的点*.*

(3)若表示两平行平面间的距离公式,则*n*表示与两平面都垂直的法向量,*A*,*B*分别为两平面上的任意的点*.*

概率与统计

知识提炼

1*.*(理)排列组合数公式:

(1)排列数公式:*=n*(*n-*1)(*n-*2)…(*n-m+*1)*=*;

(2)组合数公式:*===.*

2*.*(理)二项式定理:(*a+b*)*n=an+an-*1*b+*…*+an-rbr+*…*+bn*(*n*∈N*\**)*.*

特别当*a=*1,*b=x*时,得到公式(1*+x*)*n=*1*+x*…*+xr+*…*+xn.*

通项公式*Tr+*1*=an-rbr*(*r=*0,1,2…,*n*)*.*

3*.*古典概型

(1)试验中所有可能出现的基本事件只有有限个,每次试验只出现其中的一个结果;

(2)每个基本事件出现的可能性相等;

(3)古典概型的概率计算公式:*P*(*A*)*=.*

一次试验连同其中可能出现的每一个结果称为一个基本事件,通常此试验中的某一事件*A*由几个基本事件组成*.*如果一次试验中可能出现的结果有*n*个,即此试验由*n*个基本事件组成,而且所有结果出现的可能性都相等,那么每一基本事件的概率都是*.*如果某个事件*A*包含的结果有*m*个,那么事件*A*的概率*P*(*A*)*=.*

4*.*几何概型与互斥事件

(1)互斥事件

在一个随机试验中,我们把一次试验下不能同时发生的两个事件*A*与*B*称作互斥事件;如果两个互斥事件在一次试验中必然有一个发生,那么这样的两个互斥事件叫做对立事件*.*

(2)特别地,若事件*B*与事件*A*互为对立事件,则*A+B*为必然事件,*P*(*A+B*)*=*1*.*再由互斥事件的概率加法公式得*P*(*A*)*=*1*-P*(*B*)*.*

(3)若事件*A*与*B*互斥,则*P*(*A+B*)*=P*(*A*)*+P*(*B*)(推广情况:如果*A*1,*A*2,*A*3,…,*An*彼此互斥,则*P*(*A*1*+A*2*+*…*+An*)*=P*(*A*1)*+P*(*A*2)*+*…*+P*(*An*)*.*利用这一公式解题体现了化整为零、化难为易的思想,但要注意用此公式时,首先要判断事件是否互斥,如果事件不互斥,就不能用此公式*.*

(4)理解几何概型的概率计算公式,求几何概型事件的概率时,关键是构造出随机事件对应的几何图形,利用图形的区域度量(长度、面积或体积)来求概率*.*

(5)几何概型中,事件*A*的概率计算公式为*P*(*A*)*=*

*.*

5*.*(理)条件概率

设*A*、*B*为两个事件,且*P*(*A*)*>*0,称*P*(*B|A*)*=*为在事件*A*发生的条件下,事件*B*发生的条件概率*.*

6*.*平均数与方差

给定样本数据*x*1,*x*2,*x*3,…,*xn*,那么这组数据的平均数*=*;

方差为*s*2*=*(*xi-*)2;标准差*s=.*

7*.*回归分析与独立性检验

(1)回归直线方程*=x+*(或*y=bx+a*或*=bx+a*)中

(2)回归直线一定经过样本中心点(,)*.*

(3)两个分类变量是否有关联可以通过计算*K*2(*χ*2)的值进行判断,*K*2*=*(*χ*2*=*),其中*n=a+b+c+d.*

8*.*(理)超几何分布

一般地,在含有*M*件次品的*N*件产品中,任取*n*件,其中恰有*X*件次品,则事件{*X=k*}发生的概率为*P*(*X=k*)*=*,*k=*0,1,2,…,*m*,其中*m=*min{*M*,*n*},且*n*≤*N*,*M*≤*N*,*n*,*M*,*N*∈N*\*.*

其分布列为:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | …… | *m* |
| *P* |  |  | …… |  |

该分布列称为超几何分布列;如果随机变量*X*的分布列为超几何分布列,则称随机变量*X*服从超几何分布*.*

【注】(1)理解并掌握超几何分布的问题情景和解决方法;(2)这里应注意抽取产品时,采用的是不放回抽样*.*

9*.*(理)独立事件概率

独立事件:(事件*A*、*B*的发生相互独立,互不影响)*P*(*A*·*B*)*=P*(*A*)·*P*(*B*)*.*注:(1)如果事件*A*、*B*独立,那么事件*A*与、与*B*及事件与也都是独立事件;(2)如果事件*A*、*B*相互独立,那么事件*A*、*B*至少有一个不发生的概率是1*-P*(*AB*)*=*1*-P*(*A*)*P*(*B*);(3)如果事件*A*、*B*相互独立,那么事件*A*、*B*至少有一个发生的概率是1*-P*(·)*=*1*-P*()*P*()*.*

10*.*(理)二项分布

在*n*次独立重复试验中,设事件*A*发生的次数为*X*,在每次试验中事件*A*发生的概率为*p*,那么在*n*次独立重复试验中,事件*A*恰好发生*k*次的概率为*P*(*X=k*)*=pk*(1*-p*)*n-k*,其中*k=*0,1,2,3,…,*n.*这样的随机变量*X*服从二项分布,记作*X~B*(*n*,*p*)*.*易知*EX=np.*

当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小,而每次抽取时又只有两种试验结果,此时可以把它看作独立重复试验,利用二项分布求其分布列*.*

注:期望还可用“*E*(*X*)”表示,方差还可用“*D*(*X*)或*V*(*X*)”表示*.*

复习指导

1*.*(理)排列组合主要解题方法:

(1)优先法:特殊元素优先或特殊位置优先;

(2)捆绑法(相邻问题);

(3)插空法(不相邻问题);

(4)间接扣除法(对有限制条件的问题,先从总体考虑,再把不符合条件的所有情况去掉);

(5)多排问题单排法;

(6)相同元素分组可采用隔板法(适用于指标分配,每部分至少有一个);

(7)先选后排,先分再排(注意等分分组问题);

(8)涂色问题(先分步考虑至某一步时再分类);

(9)分组问题:要注意区分是平均分组还是非平均分组,平均分成*n*组问题别忘除以*n*!*.*

2*.*(理)二项式系数

(1)二项式系数:二项展开式中,系数,,…,叫做展开式的二项式系数*.*

(2)二项式系数的性质:

*①*展开式中与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等,即*=*;

*②*若二项式的幂指数是偶数,则展开式的中间一项即第*+*1项的二项式系数最大;若二项式系数的幂指数是奇数,则展开式的中间两项即第(*+*1)项和第(*+*1)项的二项式系数,相等且最大*.*

*③*展开式的所有二项式系数的和等于2*n.*即*+++*…*+=*2*n*;

*④*展开式中的奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和*.*即*+++*…*=+++*…*=*2*n-*1*.*

【注】二项式系数与项的系数的区别:如(2*+x*)*n*的展开式中,第*k+*1项的二项式系数为,而第*k+*1项的系数为2*n-k.*

(3)赋值法

一般地,若*f*(*x*)*=a*0*+a*1*x+a*2*x*2*+*…*+anxn*,则用“赋值法”可求得二项展开式中各项系数和为*f*(1)、“奇数 (偶次)项”系数和为[*f*(1)*+f*(*-*1)],以及“偶数 (奇次)项”系数和为[*f*(1)*-f*(*-*1)]*.*

3*.*(理)排列的顺序性

排列与顺序有关,组合与顺序无关*.*例如:从1、2、3、4四个数字中任取3个不同的数字,可组成多少个不同的三位数?这是排列问题,有个*.*而组成的三位数中个位、十位、百位上的数字递增的三位数有多少个?这是一种确定的顺序,是组合问题,有个不同的三位数*.*

4*.*(理)求离散型随机变量分布列的步骤:

(1)要确定随机变量*X*的可能取值有哪些*.*明确取每个值所表示的意义;

(2)分清概率类型,计算*X*取得每一个值时的概率(取球、抽取产品等问题还要注意是放回抽样还是不放回抽样);

(3)列表,给出分布列,并用分布列的性质验证*.*

5*.*求几何概型的概率最关键的一步是求事件*A*所包含的基本事件所占据的区域的长度(或面积、体积等)*.*这里需要解析几何的知识,而最困难的地方是找出基本事件*P*(*x*,*y*)的约束条件,找出约束条件后,像线性规划求可行域一样求其长度(或面积、体积等)就不困难了*.*

算法与推理

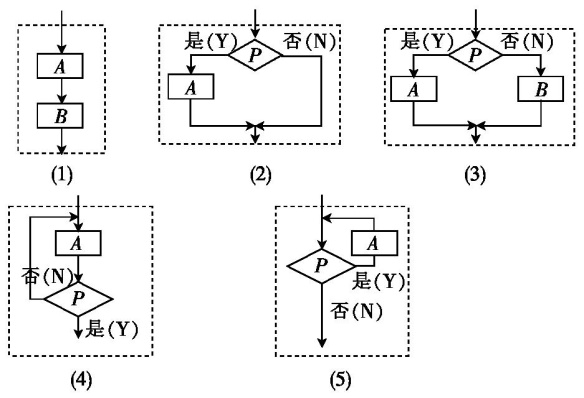
知识提炼

1*.*算法的结构

顺序结构:如图(1)所示*.*

条件结构(也称选择结构、条件分支结构):如图(2)和图(3)所示*.*

循环结构:如图(4)和图(5)所示*.*



2*.*推理

(1)合情推理

*①*归纳推理和类比推理统称为合情推理*.*

*②*归纳推理是由部分到整体、由特殊(个别)到一般的推理*.*

*③*类比推理是由特殊到特殊的推理*.*

(2)演绎推理

演绎推理是由一般到特殊的推理*.*

(3)直接证明法

*①*综合法的思维特点是:由因导果*.*

*②*分析法的思维特点是:执果索因*.*

(4)间接证明法——反证法

反证法是一种间接证法,它是先提出一个与命题的结论相反的假设,然后从这个假设出发,经过正确的推理,导致矛盾,从而否定相反的假设,达到肯定原命题正确的一种方法*.*

反证法的步骤是:反设、归谬、存真*.*

复习指导

1*.*综合法的证明步骤:由因导果,*P*0(已知)⇒*P*1⇒…⇒*Pn*(结论)*.*

2*.*分析法的证明步骤:执果索因,*B*(结论)⇐*B*1⇐*B*2⇐…⇐*Bn*⇐*A*(已知)*.*

3*.*反证法

(1)一般地,假设原命题不成立,经过正确的推理,最后得出矛盾,因此说明假设错误,从而证明了原命题成立,这样的证明方法叫做反证法,反证法是间接证明的一种方法*.*

(2)应用反证法证明数学命题的步骤:

第一步:分清命题“*p*⇒*q*”的条件和结论;

第二步:作出与命题结论*q*相矛盾的假设􀱑*q*;

第三步:由*p*和􀱑*q*出发,运用正确的推理方法,推出矛盾结果;

第四步:断定产生矛盾结果的原因在于开始所作的假设,􀱑*q*不真,于是原结论*q*成立,从而间接地证明了命题*p*⇒*q*为真*.*

说明:*①*所说的矛盾结果,通常是指推出的结果与已知公理、已知定义、定理或已知条件矛盾,与临时假设矛盾以及自相矛盾等各种情况*.*

*②*反证法适宜证明“存在性、唯一性、带有至少(至多)型”等问题*.*

4*.*(理)数学归纳法

(1)数学归纳法是证明与自然数集有关的命题,它是在归纳的基础上进行的演绎推证*.*所得结论一般是正确的*.*

(2)应用数学归纳法的一般步骤:*①*验证*n=n*0时,结论正确;*n*0是使命题成立的最小的自然数;*②*假设当*n=k*(*k*≥*n*0,*k*∈N*\**)时命题成立,证明当*n=k+*1时命题也成立*.*

由*①②*知,对于一切*n*(*n*≥*n*0,*n*∈N*\**),命题成立*.*

数学归纳法证明中的两个步骤体现了递推思想,第一步是递推的基础,第二步是递推的依据,两个步骤缺一不可*.*

5*.*利用循环结构表示算法的步骤

利用循环结构表示算法,第一要先确定是利用当型循环结构,还是直到型循环结构;第二要选择准确的表示累计的变量;第三要注意在哪一步开始循环,满足什么条件不再执行循环体*.*